ISSN 2074-1863 Уфимский математический журнал. Том 3. № 3 (2011). С. 152-163.

УДК 517.547

УСТОЙЧИВОСТЬ (ПОД)ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ НУЛЕЙ ДЛЯ КЛАССОВ ГОЛОМОРФНЫХ ФУНКЦИЙ УМЕРЕННОГО РОСТА В ЕДИНИЧНОМ КРУГЕ

Ф.Б. ХАБИБУЛЛИН

Аннотация. Пусть $\Lambda = (\lambda_k)$ и $\Gamma = (\gamma_k)$ — две последовательности точек в единичном круге $\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} \colon |z| < 1\}$ комплексной плоскости $\mathbb{C}$, H — некоторое весовое пространство голоморфных функций на $\mathbb{D}$. Допустим, что Λ — подпоследовательность нулей некоторой ненулевой функции из H. В работе даются условия близости последовательности Γ к последовательности Λ, при которых последовательность Γ — последовательность нулей для некоторой голоморфной функции из пространства $\hat{H} \supset H$. Пространство $\hat{H}$ может быть несколько больше, чем H.

Ключевые слова: голоморфная функция, единичный круг, весовое пространство, последовательность нулей, подпоследовательность нулей, сдвиг нулей, устойчивость последовательности нулей.

1. Введение. Основные «радиальные» результаты

Как обычно, $\mathbb{N}$, $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$ — множества натуральных, вещественных и комплексных чисел или их геометрические интерперетации; $\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} \colon |z| < 1\}$ — единичный круг.

Пусть $\Lambda = (\lambda_k)_{k\in\mathbb{N}}$ — последовательность комплексных точек, возможно повторяющихся конечное число раз, в единичном круге $\mathbb{D}$ и Λ не имеет предельных точек в $\mathbb{D}$; H — некоторый класс голоморфных в $\mathbb{D}$ функций.

Множество, или последовательность, всех нулей голоморфной в $\mathbb{D}$ ненулевой функции f (пишем $f \not\equiv 0$), перенумерованную с учетом кратности (каждая точка в $\mathbb{D}$ считается столько раз, какова кратность нуля функции f в этой точке), обозначаем Zero_f. Λ — *последовательность нулей, или нулевое множество, для класса* H, если существует ненулевая функция $f \in H$ такая, что $\mathrm{Zero}_f = \Lambda$.

Последовательность Λ — *<u>под</u>последовательность нулей, или нулевое подмножество, для класса* H, если существует ненулевая функция $f \in H$, обращающаяся в нуль на Λ в том смысле, что кратность нуля функции f в каждой точке из Ω не меньше числа повторений этой точки в последовательности Λ. Если H — линейное пространство, то подпоследовательность нулей для H называем также *последовательностью, или множеством, неединственности для* H.

Всюду положительность числа, функции, меры и т. п. понимаем как $\geqslant 0$, а > 0 суть – строгая положительность; аналогичное соглашение предлагается и для отрицательности. Для $a \in \mathbb{R}$, как обычно, $a^+ := \max\{a, 0\}$, $[a]$ — целая часть числа a, а для $a > 0$ полагаем $\log^+ a := \max\{\log a, 0\}$, $\log^\alpha a := \bigl(\log a\bigr)^\alpha$. Если функция f не равна тождественно значению $a \in [-\infty, +\infty]$, то пишем $f \not\equiv a$.

F.B. Khabibullin, Stability of sequences of zeros for classes of holomorphic functions of moderate growth in the unit disk.

Работа поддержана РФФИ, грант 09-01-00046а.

Поступила 15 июля 2011 г.

Для подмножества $D \subset \mathbb{C}$ через $\overline{D}$, ∂D и $\operatorname{dist}(S, D)$ обозначаем соответственно замыкание D, границу множества D и евклидово расстояние от подмножества $S \subset \mathbb{C}$ до D.

Пространство всех голоморфных в области D функций обозначаем через $\operatorname{Hol}(D)$. Рассматриваются следующие весовые классы голоморфных в единичном круге функций.

Пусть $M\colon \mathbb{D} \to [-\infty, +\infty)$. Класс всех функций $f \in \operatorname{Hol}(\mathbb{D})$, удовлетворяющих оценке $|f(z)| \leqslant C_f \exp M(z)$, $z \in \mathbb{D}$, где $C_f \geqslant 0$ — постоянная, обозначаем $\operatorname{Hol}(\mathbb{D}; M)$.

Естественно ожидать (см., к примеру теоремы устойчивости из [1, §§ 18, 19] и результат Д. Льюкинга [2, Теорема 6]), что если $\Lambda \subset \mathbb{D}$ — (под)последовательность нулей для некоторого класса голоморфных функций $H \subset \operatorname{Hol}(\mathbb{D})$, то при достаточно «малых сдвигах» точек λ_k в точки γ_k другой последовательности точек $\Gamma := (\gamma_k)$ последняя образует (под)последовательность нулей для некоторого, возможно более широкого, класса $\hat{H} \supset H$ голоморфных в $\mathbb{D}$ функций. Основные результаты работы представляют собой явную количественную форму этого наблюдения: для весовых пространств H голоморфных функций, порожденных классами вида $\operatorname{Hol}(\mathbb{D}; M)$, исследуется вопрос о переходе подпоследовательности нулей Λ для H при ее малом сдвиге уже в последовательность нулей Γ для некоторого пространства $\hat{H} \supset H$, мало отличающегося от H или даже совпадающего с H. Для нашего исследования привлекается симбиоз результатов из [1], [3]–[5]. Часть результатов без доказательств обсуждалась в [6], [7]. Здесь и далее мы не останавливаемся более подробно на истории вопроса, поскольку она достаточно детально освещена в работах [1] и [3]. Отметим лишь простой результат, следующий из теоремы Неванлинны (см. [8], [9]) 1920-х гг. для классической алгебры $H^\infty := \operatorname{Hol}(\mathbb{D}; 0)$ ограниченных голоморфных функций в $\mathbb{D}$. По известной теореме Неванлинны об описание (под)последовательностей нулей для алгебры H^∞ *последовательность* Λ *— последовательность нулей для* H^∞*, если и только если* $\sum_{k\in\mathbb{N}}\bigl(1-|\lambda_k|\bigr) < +\infty$. Отсюда мгновенно следует

Теорема Неванлинны (устойчивости для H^∞)**.** *Пусть* $\Lambda := (\lambda_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *и* $\Gamma := (\gamma_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *— последовательности точек в* $\mathbb{D}$*, а* Λ *— подпоследовательность нулей для* H^∞*. Если*

$$\limsup_{N\to\infty} \sum_{k=1}^{N} \bigl(|\lambda_k| - |\gamma_k|\bigr) < +\infty,$$

то Γ *— последовательность нулей для* H^∞*.*

Через $D(t)$ обозначаем открытый круг с центром в нуле радиуса t. Для меры ν, определенной в круге $D(t)$, полагаем $\nu^{\mathrm{rad}}(t) := \nu\bigl(D(t)\bigr)$.

Основной наш интерес будет сосредоточен на трех типах классов функций (не обязательно алгебрах!), определяемых достаточно медленно растущими вблизи единичной окружности $\partial\mathbb{D}$ весами M (грубо говоря, медленнее функции $z \mapsto 1/(1-|z|)$ при $z \to \partial\mathbb{D}$). Определим их здесь сначала для произвольных весовых функций $M\colon \mathbb{D} \to [-\infty, +\infty)$.

(A) Через A_M^∞ обозначаем класс функций $f \in \operatorname{Hol}(\mathbb{D})$, удовлетворяющих оценке

$$\bigl|f(z)\bigr| \leqslant C_f \exp\bigl(c_f M(z)\bigr), \quad z \in \mathbb{C} \tag{1}$$

для некоторых положительных постоянных c_f, C_f. Если M — положительная функция, то A_M^∞ — алгебра. В частности, если $\limsup_{z\to\partial\mathbb{D}} M(z) = +\infty$, эту алгебру иначе можно определить как

$$A_M^\infty := \Bigl\{ f \in \operatorname{Hol}(\mathbb{D})\colon \limsup_{z\to\partial\mathbb{D}} \frac{\log|f(z)|}{M(z)} < +\infty \Bigr\}. \tag{2}$$

(H^1) Пусть M — положительная функция. Пространство

$$H_M^{1^-} := \bigcup_{0\leqslant c<1} \operatorname{Hol}(\mathbb{D}; cM) \tag{3}$$

состоит из функций $f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D})$, удовлетворяющих ограничению

$$|f(z)| \leqslant C_f \exp\bigl(c_f M(z)\bigr), \quad z \in \mathbb{D}, \tag{4}$$

с некоторыми положительными постоянными $c_f < 1$ и $C_f > 0$. В частности, если $\limsup_{z\to\partial\mathbb{D}} M(z) = +\infty$, это пространство иначе можно определить как

$$H_M^{1^-} := \Bigl\{ f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D})\colon \limsup_{z\to\partial\mathbb{D}} \frac{\log|f(z)|}{M(z)} < 1 \Bigr\}. \tag{5}$$

($\mathrm{H}_{\log}$) Пространство $H_{M+\log}$ определялось в [1] как множество всех голоморфных в $\mathbb{D}$ функций f, удовлетворяющих ограничению

$$|f(z)| \leqslant C_f \Bigl(\frac{1}{1-|z|}\Bigr)^{c_f} \exp M(z), \quad z \in \mathbb{D},$$

с некоторыми постоянными $C_f, c_f \geqslant 0$. Иначе это довольно «жесткое» пространство можно определить как

$$H_{M+\log} := \left\{ f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D})\colon \limsup_{z\to\partial\mathbb{D}} \frac{\log|f(z)| - M(z)}{\log\frac{1}{1-|z|}} < +\infty \right\}. \tag{6}$$

Всюду далее на весовую функцию $p \not\equiv -\infty$, по которой и будут выбираться веса M в зависимости от результатов, всегда будет накладываться *условие умеренного роста*

$$\int_0^1 \int_0^{2\pi} p(te^{i\theta})\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}t < +\infty. \tag{7}$$

Если при этом p — субгармоническая функция с мерой Рисса $\nu_p := \frac{1}{2\pi}\Delta p \geqslant 0$, где оператор Лапласа действует в смысле теории обобщенных функций, то условие (7) эквивалентно ограничению (см. начало доказательства [3, теорема 2])

$$\int_0^1 (1-t)^2\,\mathrm{d}\nu_p^{\mathrm{rad}}(t) < +\infty, \quad \nu_p(t) := \nu_p\bigl(D(t)\bigr). \tag{8}$$

Так, для радиальной функции p, для которой по определению $p(z) = p\bigl(|z|\bigr)$ при всех $z \in \mathbb{D}$, условие умеренного роста (7) выглядит совсем просто:

$$\int_0^1 p(t)\,\mathrm{d}t < +\infty. \tag{9}$$

Кроме того, будут накладываться и определенные условия регулярности вида

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} p\left(z + \varepsilon\bigl(1-|z|\bigr)e^{i\theta}\right) d\theta + a\log\frac{1}{1-|z|} \leqslant bp(z) + C, \quad z \in \mathbb{D}, \tag{10}$$

где a, b, C — некоторые постоянные, границы выбора которых будут обусловлены конкретными рассматриваемыми пространствами и методом работы [1]. Для радиальной возрастающей функции p это условие регулярности у нас будет выглядеть как

$$p\left(t + \varepsilon(1-t)\right) + a\log\frac{1}{1-t} \leqslant bp(t) + C, \quad 0 \leqslant t < 1. \tag{11}$$

Простейшими примерами радиальных возрастающих неограниченных весов p, удовлетворяющих одновременно условиям вида (9) и (11), могут служить

[L]: *логарифмический вес* $p\colon z \longmapsto \log^\alpha \dfrac{1}{1-|z|}$, $\quad \alpha > 0, \quad z \in \mathbb{D}$,

[P]: *степенной вес* $p\colon z \longmapsto \dfrac{1}{(1-|z|)^\beta}$, $\quad 0 < \beta < 1, \quad z \in \mathbb{D}$.

Следует отметить, что для алгебр A_p^∞ с весовыми функциями вида [P], когда $\beta > 1$, законченные описания нулевых множеств были получены еще Ф. А. Шамояном в [10], а для «жестких» пространств $\mathrm{Hol}(\mathbb{D}; M)$, где M — это логарифмический вес из [L] с $0 < \alpha < 1$ полное описание последовательностей нулей было дано К. Сейпом в [11]. В то же время для рассматриваемых в данной работе даже конкретных пространств и алгебр, определяемых весовыми функциями вида [L] и [P] соответственно с $\alpha \geqslant 1$ и $0 < \beta \leqslant 1$, еще немало открытых вопросов по описанию нулевых множеств и их устойчивости.

Сначала для лучшей обозримости приведем сводку упрощенных результатов работы для радиальной функции p. При условии умеренного роста (9) введем *добавочную функцию*

$$b_p(r) := \frac{1}{1-r}\int_r^1 (1-t)\,dp(t) = \frac{1}{1-r}\int_r^1 p(t)\,\mathrm{d}t - p(r), \quad 0 \leqslant r < 1, \tag{12}$$

где сходимости интегралов обеспечены условием умеренного роста (9) и первым равенством в (25) из Леммы 1, доказанной в следующем разделе 2.

Теорема 1 (устойчивости для радиального веса). *Пусть $\Lambda = (\lambda_k)_{k\in\mathbb{N}}$ и $\Gamma = (\gamma_k)_{k\in\mathbb{N}}$ — две последовательности точек в $\mathbb{D}$ и*

- *функция $p\colon [0,1) \to [0,+\infty)$ — возрастающая непрерывная справа в нуле;*
- *композиция $p \circ \exp$ выпукла на $(-\infty, 0)$, т. е. функция p выпукла относительно логарифмической функции;*
- *выполнено условие умеренного роста (9);*
- *функция p продолжена на $\mathbb{D}$ как радиальная, а именно: $p(z) \equiv p(|z|)$, $z \in \mathbb{D}$.*

Тогда

(S_A) *если для $a = 1$ и некоторых постоянных $\varepsilon \in (0,1)$, $b, C \geqslant 0$ выполнено радиальное условие регулярности (11) веса p, а также*

$$\limsup_{k\to\infty} \frac{|\lambda_k - \gamma_k|}{1 - \max\{|\lambda_k|, |\gamma_k|\}} < +\infty, \tag{13}$$

и Λ — <u>под</u>последовательность нулей для алгебры A_p^∞, то Γ — последовательность нулей для алгебры A_M^∞, определяемой весом $M = p + b_p$;

(S_1) *если при $a = 1$ для любого $b > 1$ найдутся постоянные $\varepsilon \in (0,1)$ и $C \geqslant 0$, с которыми выполнено радиальное условие регулярности (11) веса p, а также*

$$\lim_{k\to\infty} \frac{|\lambda_k - \gamma_k|}{1 - \max\{|\lambda_k|, |\gamma_k|\}} = 0, \tag{14}$$

и Λ — <u>под</u>последовательность нулей для пространства $H_p^{1^-}$, то найдется постоянная $c < 1$, для которой Γ — последовательность нулей для пространства $\mathrm{Hol}(\mathbb{D}; M)$ с функцией $M := cp + B_c b_p$, где $B_c \geqslant 0$ — некоторая постоянной.

($\mathrm{S}_{\log}$) *Если при $b = 1$ для некоторых постоянных $\varepsilon \in (0,1)$, строго отрицательной $a < 0$ и $C \geqslant 0$ выполнено радиальное условие регулярности (11) веса p, а также*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\lambda_k - \gamma_k|}{1 - \max\{|\lambda_k|, |\gamma_k|\}} < +\infty, \tag{15}$$

и Λ — <u>под</u>последовательность нулей для $\mathrm{Hol}(\mathbb{D}; p)$, то Γ — последовательность нулей для пространства $H_{M+\log}$ с $M = p + Bb_p$, где $B \geqslant 0$ — некоторая постоянная.

Утверждения (S_A), (S_1), ($\mathrm{S}_{\log}$) этой теоремы устойчивости — следствия соответственно Теорем 2, 3 и 4 (см. обоснования после их доказательств).

Замечание 1. Условия возрастания, непрерывности справа в нуле и выпуклости относительно логарифмической функции на функцию p в Теореме 1 обеспечивают субгармоничность продолженной функции $p\colon z \mapsto p(z)$, $z \in \mathbb{D}$, в единичном круге.

Замечание 2. Для положительной возрастающей к $+\infty$ функции p на $(0,1)$ условие ее выпуклости относительно логарифмической функции на всем интервале $(0,1)$ и непрерывности ее справа в нуле в Теореме устойчивости refth:r можно заменить на одно более слабое условие выпуклости функции p относительно логарифмической функции на какомлибо интервале $(t_0,1)$, где $0<t_0<1$. Действительно, в этом случае мы можем продолжить функцию p на отрезок $[0,t_0]$ по правилу $p(t):=\liminf_t \to t_0+0p(t)$. Продолженная таким образом функция p уже будет удовлетворять всем условиям Теоремы устойчивости 1, а пространства голоморфных функций, определенные через (2), (5), (6) по функции $p=M$, те же, что и определенные по продолженной функции p пространства из (A), (H^1_p), $(H_{\log})$.

2. Нерадиальная теорема об устойчивости (под)последовательностей нулей для весовых алгебр

Пусть p — субгармоническая в $\mathbb{D}$ функция с мерой Рисса ν_p, $p\not\equiv-\infty$.

Для $z=re^{i\theta}$, $0\leqslant r<1$, $\theta\in\mathbb{R}$ и числа $a>0$ введем в рассмотрение *полярный прямоугольник*

$$\square(z;a):=\Bigl\{\,\zeta=te^{i\psi}\colon \bigl(r-a(1-r)\bigr)^+\leqslant t<1,\ |\sin(\psi-\theta)|<a(1-r)\,\Bigr\} \tag{16}$$

относительного размера a, его s*-срез* при $s<1$

$$\square_s(z;a):=\Bigl\{\,\zeta=te^{i\psi}\colon \bigl(r-a(1-r)\bigr)^+\leqslant t<s,\ |\sin(\psi-\theta)|<a(1-r)\,\Bigr\},$$

функцию распределения меры ν_p в (16) по правилу $\nu_p(s,z;a):=\nu_p\bigl(\square_s(z;a)\bigr)$, а также a*-расширенную добавочную функцию*

$$b^{[a]}_{\nu_p}(z):=\frac{1}{(1-|z|)^2}\int_{\square(z;a)}(1-|\zeta|)^2\,\mathrm{d}\nu_p(\zeta)=\frac{1}{(1-r)^2}\int_{\bigl(r-a(1-r)\bigr)^+}^1(1-s)^2\,\mathrm{d}\nu_p(s,z;a), \tag{17}$$

которая конечна при всех $z\in\mathbb{D}$ при условии (8). Кроме того, будем использовать специальное обозначение для усреднений

$$\mathrm{Av}^{[\varepsilon]}_M(z):=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}M\bigl(z+\varepsilon(1-|z|)e^{i\theta}\bigr)\,\mathrm{d}\theta,\quad 0<\varepsilon<1. \tag{18}$$

при условии интегрируемости функции $M\colon\mathbb{D}\to[-\infty,\infty]$ по окружностям.

Теорема 2. *Пусть p — положительная субгармоническая функция с мерой Рисса ν_p, и выполнено условие* (7) *или эквивалентное ему ограничение* (8)*. Кроме того, предполагаем, что функция p для $a=1$ и некоторых постоянных $\varepsilon\in(0,1)$, $b,C\geqslant0$ удовлетворяет нерадиальному условию регулярности* (10)*, т. е.*

$$\mathrm{Av}^{[\varepsilon]}_p(z)+\log\frac{1}{1-|z|}\leqslant bp(z)+C,\quad z\in\mathbb{D}. \tag{19}$$

Если для двух последовательностей точек $\Lambda=(\lambda_k)_{k\in\mathbb{N}}$ и $\Gamma=(\gamma_k)_{k\in\mathbb{N}}$ в $\mathbb{D}$ выполнено условие их близости (13) *и Λ — подпоследовательность нулей для алгебры A^∞_p, то Γ — последовательность нулей для алгебры A^∞_M при $M=p+b^{[6]}_{\nu_p}$.*

Доказательство. Из условий Теоремы 2 следует, что выполнены все условия из [1, Теорема 0.2(S_1)] для *выпуклой* области $\Omega=\mathbb{D}$. С учетом замечания после формулировки [1, теорема 0.2] об усилении этого результата для выпуклых областей заключаем, что последовательность Γ — <u>под</u>последовательность нулей для той же алгебры A^∞_p (даже без условий (7)–(8)). Другими словами, Γ — подпоследовательность нулей для класса $\mathrm{Hol}(\mathbb{D};M)$, где $M:=cp$, c — некоторая постоянная; ν_M — мера Рисса субгармонической функции M.

Теперь в условиях Теоремы 2 согласно [3, Теорема 2(U)] подпоследовательность нулей Γ для нашего пространства $\operatorname{Hol}(\mathbb{D}; M)$ будет уже последовательностью нулей для пространства $\operatorname{Hol}\bigl(\mathbb{D}; A_M^{[\varepsilon]} + C_\varepsilon b_{\nu_M}^{[6]}\bigr)$ при любой константе $\varepsilon \in (0,1)$ и некоторой постоянной C_ε. Но из условия регулярности (10) и вида функции $M = cp$ сразу следует, что

$$A_M^{[\varepsilon]} + C_\varepsilon b_{\nu_M}^{[6]} \leqslant bp + C b_{\nu_M}^{[6]} \leqslant \max\{b, Cc\}\bigl(p + b_{\nu_p}^{[6]}\bigr)$$

всюду на $\mathbb{D}$ для некоторых постоянных $b, C, c \geqslant 0$. Таким образом, Γ — последовательность нулей для алгебры A_M^∞ с бóльшим весом $M = p + b_{\nu_p}^{[6]}$. □

Выведем из Теоремы 2 часть (S_A) радиальной Теоремы 1 из Введения. В силу возрастания положительной радиальной функции p условие ее регулярности (11) даже сильнее нерадиального условия регулярности (10) Теоремы 2. Условие (7) для радиальной функции — это (9). По Замечанию 1 продолжение p на $\mathbb{D}$ — субгармоническая функция. Таким образом, выполнены все условия Теоремы 2.

При $a > 0$ введем *a-расширенную добавочную радиальную функцию*

$$b_p^{[a]}(r) := \frac{1}{1-r}\int_{\left(r-a(1-r)\right)^+}^{1^-} (1-t)\,\mathrm{d}p(t), \quad 0 \leqslant r < 1. \tag{20}$$

Осталось показать, что справедливо

Предложение 1. *Пусть функция $p\colon [0,1) \to [0,+\infty)$ удовлетворяет условиям Теоремы 1, а ее продолжение на $\mathbb{D}$ также обозначено как p. Тогда для a-расширенной добавочной функцией из (17) и добавочной функции b_p из (12) при некоторых постоянных $B_a, C_a \geqslant 0$ в обозначении $r := |z|$ выполнены оценки*

$$b_{\nu_p}^{[a]}(z) \leqslant a b_p^{[a]}(r) + B_a \leqslant (8a+1) b_p(r) + C_a, \quad 0 \leqslant r = |z| < 1. \tag{21}$$

Доказательство. Меру Рисса продолженной субгармонической функции p обозначаем через ν_p. Плотность меры Рисса такой функции легко выписывается в полярных координатах через начальную функцию $p\colon [0,1) \to [0,+\infty)$ с помощью оператора Лапласа, а именно:

$$d\nu_p(z) = \frac{1}{2\pi}\,\mathrm{d}\theta \otimes \mathrm{d}\bigl(tp'_-(t)\bigr), \quad z = te^{i\theta},\ r \geqslant 0,$$

где p'_- — левая производная, $\otimes$ — произведение мер. Тогда по определениям (17) и (16) при $z = re^{i\theta}$ и условии

$$\frac{a}{a+1} \leqslant r \leqslant 1 \iff \bigl(r - a(1-r)\bigr) \geqslant 0, \tag{22}$$

учитывая, что для возрастающей выпуклой относительно логарифма функции p

$$\text{функция } t \mapsto tp'_-(t) \text{ — возрастающая по } t \in (0,1] \text{ и положительная,} \tag{23}$$

имеем

$$\begin{aligned} b_{\nu_p}^{[a]}(z) &= \frac{1}{2\pi(1-r)^2}\int_{\theta-\arcsin a(1-r)}^{\theta+\arcsin a(1-r)} \int_{r-a(1-r)}^{1} (1-t)^2\,\mathrm{d}\bigl(tp'_-(t)\bigr)\,\mathrm{d}\theta \\ &= \frac{\arcsin a(1-r)}{\pi(1-r)^2}\int_{r-a(1-r)}^{1} (1-t)^2\,\mathrm{d}\bigl(tp'_-(t)\bigr) \\ &\leqslant \frac{a(1-r)}{2(1-r)^2}\left(\lim_{t\to1-0}(1-t)^2 rp'_-(t) - \bigl(1-r+a(1-r)\bigr)^2\bigl((r-a(1-r))p'_-(r-a(1-r))\bigr)\right. \\ &\left. +2\int_{r-a(1-r)}^{1}(1-t)tp'_-(t)\,\mathrm{d}t\right) \leqslant \frac{a}{2(1-r)}\left(\lim_{t\to1-0}(1-t)^2 p'_-(t) + 2\int\limits_{r-a(1-r)}^{1}(1-t)\,\mathrm{d}p(t)\right). \end{aligned} \tag{24}$$

Далее потребуется

Лемма 1. *Для функции* p *из Предложения* 1 *добавочная функция* (12) *конечная на* $(0,1]$*, и справедливы равенства*

$$\lim_{r\to 1-0}(1-r)p(r)=0, \qquad \lim_{r\to 1-0}(1-t)^2p'_-(r)=0. \tag{25}$$

Доказательство Леммы 1. Из условия умеренного роста (9) и возрастания p имеем

$$0=\lim_{r\to 1-0}\int_r^1 p(t)\,\mathrm{d}t\geqslant \lim_{r\to 1-0}p(r)\int_r^1\,\mathrm{d}t=\lim_{r\to 1-0}p(r)(1-r)\geqslant 0, \tag{26}$$

и первое равенство в (25) доказано. Используя его, интегрированием по частям получаем

$$\int_r^1(1-t)\,\mathrm{d}p(t)=-(1-r)p(r)+\int_r^1 p(t)\,\mathrm{d}t, \tag{27}$$

что по условию умеренного роста (9) для p дает конечность добавочной функции b_p. Кроме того, левая часть здесь стремится к нулю при $r\to 1-0$. Из (23) следует

$$\int_r^1(1-t)\,\mathrm{d}p(t)=\int_r^1\frac{1-t}{t}\,tp'_-(t)\,\mathrm{d}t\geqslant rp'_-(r)\int_r^1\frac{1-t}{t}\,\mathrm{d}t\geqslant rp'_-(r)\frac{1}{2}(1-r)^2, \tag{28}$$

откуда следует второе равенство из (25). Лемма доказана. □

Согласно второму равенству из (25) в правой части (24) можно убрать предел и получить оценку

$$b_{\nu_p}^{[a]}(z)\leqslant\frac{a}{(1-r)}\int_{r-a(1-r)}^1(1-t)\,\mathrm{d}p(t),$$

что доказывает первое неравенство в (21) при ограничении (22). При остальных значениях $r<\frac{a}{1+a}$ функция $b_{\nu_p}^{[a]}$ ограничена сверху некоторой постоянной, не зависящей от r.

Перейдем к доказательству второго неравенства из (21). Оценим сверху при условии (22) через добавочную функцию b_p интеграл

$$\begin{aligned}\int_{r-a(1-r)}^r(1-t)\,\mathrm{d}p(t)&=(1-r)p(r)-\bigl(1-r+a(1-r)\bigr)p\bigl(r-a(1-r)\bigr)\\&+\int_{r-a(1-r)}^r p(t)\,\mathrm{d}t\leqslant(1-r)p(r)-(1-r)(1+a)p\bigl(r-a(1-r)\bigr)+p\bigl(r-a(1-r)\bigr)a(1-r)\\&=(1-r)\Bigl(p(r)-p\bigl(r-a(1-r)\bigr)\Bigr),\end{aligned}$$

откуда

$$\frac{1}{1-r}\int_{r-a(1-r)}^r(1-t)\,\mathrm{d}p(t)\leqslant\Bigl(p(r)-p\bigl(r-a(1-r)\bigr)\Bigr). \tag{29}$$

После замены $r=e^x$, $r_a=r-a(1-r)=e^{x_a}$ для выпуклой функции $P(x):=p(e^x)$, $-\infty<x<0$ имеем оценку [12, Следствие 1.1.6]

$$\begin{aligned}p(r)-p(r_a)=P(x)-P(x_a)&\leqslant P'_-(x)(x-x_a)=p'_-(r)r(\log r-\log r_a)\\&=p'_-(r)r\log\Bigl(1+\frac{a(1-r)}{r-a(1-r)}\Bigr)\leqslant p'_-(r)\,\frac{a(1-r)}{r-a(1-r)}.\end{aligned}$$

Отсюда при

$$r-a(1-r)\geqslant\frac{1}{2}\iff r\geqslant\frac{a+1/2}{a+1} \tag{30}$$

получаем

$$p(r)-p(r_a)\leqslant 2a(1-r)p'_-(r)$$

и согласно (29) имеем

$$\frac{1}{1-r}\int_{r-a(1-r)}^{r}(1-t)\,\mathrm{d}p(t)\leqslant 2a(1-r)p'_-(r). \tag{31}$$

С другой стороны, ввиду (28) и (30)

$$\frac{1}{1-r}\int_{r}^{1}(1-t)\,\mathrm{d}p(t)\geqslant rp'_-(r)\,\frac{1}{2}\,(1-r)\geqslant\frac{1}{4}(1-r)p'_-(r).$$

Отсюда согласно (31)

$$\frac{1}{1-r}\int_{r-a(1-r)}^{r}(1-t)\,\mathrm{d}p(t)\leqslant 8a\,\frac{1}{1-r}\int_{r}^{1}(1-t)\,\mathrm{d}p(t), \tag{32}$$

что по определению a-расширенной добавочной радиальной функции $b_p^{[a]}$ из (20) дает второе неравенство из (21). Предложение доказано. □

Это показывает, что часть (S_A) радиальной Теоремы 1 — прямое следствие Теоремы 2.

Рассмотрим теперь радиальную теорему применительно к конкретным логарифмическому и степенному весам p из пп. [L] и [P].

- *Для логарифмического веса из* [L] *с* $\alpha\geqslant 1$ *выполнено условие регулярности весовой функции Теоремы* 1 *из п.* $[\mathrm{S}_A]$, *а также*

$$b_p(r)\leqslant C_\alpha\log^{\alpha-1}\frac{1}{1-r}\,,\quad C_\alpha \text{ — \textit{постоянная},} \tag{33}$$

  при $p(r):=\log^\alpha\dfrac{1}{1-r}$, $0\leqslant r<1$ (см. [5, Лемма 2]). *Таким образом, в этом случае алгебра* A_M^∞ *с весом* $M=p+b_p$ *совпадает с исходной алгеброй* A_p^∞, *т. е. никакого расширения алгебры* A_p^∞ *не происходит.*
- *Для степенного веса из* [P] *с* $0\leqslant\beta<1$ *также выполнено условие регулярности весовой функции Теоремы* 1 *из п.* $[\mathrm{S}_A]$. *Легко вычислить, что*

$$b_p(r)\leqslant C_\beta\frac{1}{(1-r)^\beta}\,,\quad C_\beta \text{ — \textit{постоянная},}$$

  при $p(r):=\dfrac{1}{(1-r)^\beta}$, $0\leqslant r<1$. *Таким образом, и в этом случае алгебра* A_M^∞ *с весом* $M=p+b_p$ *совпадает с исходной алгеброй* A_p^∞, *т. е. вновь никакого расширения алгебры* A_p^∞ *не происходит.*

Замечание 3. Предложение 1 во всех результатах работ [3]–[5], где в формулировках для радиальной функции p или M в $\mathbb{D}$ фигурирует 6-расширенная добавочная функция $b_p^{[6]}$ или соответственно $b_M^{[6]}$, позволяет заменить ее на более простую добавочную функцию b_p или соответственно b_M.

Примеры. Приведем здесь примеры нерадиальных весовых функций, к которым применима нерадиальная Теорема устойчивости 2.

Пусть $E\subset\partial\mathbb{D}$ — подмножество на единичной окружности. Положим

$$d_{\mathbb{D}}(z,E):=\inf\{|w-z|\colon w\in\partial\mathbb{D}\}=\operatorname{dist}(z,E),\quad z\in\mathbb{D},$$

— расстояние от точки $z\in\mathbb{D}$ до единичной окружности.

(P_E) Для постоянных $\beta\geqslant 0$ функции

$$p\colon z\mapsto\frac{1}{\bigl(d_D(z,E)\bigr)^\beta}\,,\quad z\in\mathbb{D}$$

непрерывные положительные субгармонические (см. вместе с применениями [13]–[16]), а при $0 \leqslant \beta < 1$ удовлетворяют условию умеренного роста (7), поскольку эта функция мажорируется степенной функцией $z \mapsto \frac{1}{(1-|z|)^\beta}$, $z \in \mathbb{D}$.

Для построения примеров нерадиальных весов логарифмического роста, подобных [L], рассмотрим функции $l_1\colon z \mapsto \log|z|$ и $L_1\colon z \mapsto \log(1+|z|)$, $z \in \mathbb{C}$. Функции l_1 и L_1 субгармоничны в $\mathbb{C}$: l_1 как логарифм модуля голоморфной функции $z \mapsto z$, $z \in \mathbb{C}$, а L_1 как положительная непрерывная функция со всюду положительным значением оператором Лапласа $\Delta L_1(z) = \frac{1}{r(1+r)^2} \geqslant 0$ при $r := |z| > 0$ и значением $L_1(0) = 0$.

Для постоянной $\alpha \geqslant 1$ рассмотрим выпуклую возрастающую функцию

$$\psi_\alpha(x) := \begin{cases} 0, & x \leqslant 0 \\ x^\alpha, & x > 0. \end{cases}$$

полагая $\psi_\alpha(-\infty) := \lim_{x\to-\infty} \psi_\alpha(x) = 0$. Согласно [12, Теорема 3.2.18] композиции

$$(\psi_\alpha \circ l_1)(z) := (\log^+|z|)^\alpha := (\log^+)^\alpha|z|, \quad (\psi_\alpha \circ L_1)(z) = \log^\alpha\bigl(1+|z|\bigr), \quad z \in \mathbb{D},$$

также субгармоничны при каждом $\alpha \geqslant 1$. Отсюда следует, что композиции этих функций с любой функцией $f \in \operatorname{Hol}(\mathbb{D})$, т.е. функции $(\log^+)^\alpha|f|$ и $\log^\alpha\bigl(1+|f|\bigr)$, субгармоничны, положительны и непрерывны в $\mathbb{D}$ [17, Следствие 2.5.7]. В частности, для каждой точки $w \in \partial\mathbb{D}$ таковы же функции

$$z \mapsto (\log^+)^\alpha \frac{1}{|z-w|}, \quad z \mapsto \log^\alpha\Bigl(1 + \frac{1}{|z-w|}\Bigr)$$

при $\alpha \geqslant 1$ и $f(z) \equiv 1/(z-w)$, $z \in \mathbb{D}$. Следовательно, точные верхние грани этих функций по $w \in E$, равные соответственно

$$(\log^+)^\alpha \frac{1}{d_{\mathbb{D}}(\cdot, E)}, \quad \log^\alpha\Bigl(1 + \frac{1}{d_{\mathbb{D}}(\cdot, E)}\Bigr), \tag{34}$$

будучи непрерывными, также являются субгармоническими положительными функциями, но нерадиальными, если E не всюду плотное подмножество окружности $\partial\mathbb{D}$.

(L_E) Нерадиальные при $\overline{E} \neq \partial\mathbb{D}$ функции из (34) непрерывные положительные субгармонические при $\alpha \geqslant 1$ и удовлетворяют условию умеренного роста (7), поскольку эти функции мажорируются логарифмической функцией $z \mapsto \log^\alpha\bigl(1 + 1/(1-|z|)\bigr)$, $z \in \mathbb{D}$.

3. Нерадиальные теоремы устойчивости (под)последовательностей нулей для весовых подпространств

Основные результаты этого раздела касаются уже весовых пространств голоморфных функций, не являющихся алгебрами, т.е. произведение двух функций из пространства может уже и не принадлежать этому пространству.

Пространство $H_p^{1^-}$. На субгармоническую положительную весовую функцию p так же, как и в [1], накладываем дополнительное условие регулярности[1]

(LD_0^1) *при $a = 1$ для любого числа $b > 1$ найдутся числа ε, $0 < \varepsilon < 1$, и C_b, с которыми выполнено* (10), *т.е. в обозначении* (18) *для усреднения $\operatorname{Av}_p^{[\varepsilon]}$ имеет место ограничение*

$$\operatorname{Av}_p^{[\varepsilon]}(z) + \log\frac{1}{1-|z|} \leqslant bp(z) + C_b, \quad z \in \mathbb{D}. \tag{35}$$

[1]Используем нумерацию из [1].

Теорема 3. *Пусть для положительной субгармонической функции p в $\mathbb{D}$ и выполнены условие умеренного роста* (7) *и ограничение* (LD_0^1). *Если для двух последовательностей точек $\Lambda = (\lambda_k)_{k\in\mathbb{N}}$ и $\Gamma = (\gamma_k)_{k\in\mathbb{N}}$ в $\mathbb{D}$ выполнено условие их близости* (14) *и Λ — подпоследовательность нулей для пространства $H_p^{1^-}$, то найдутся постоянные $c < 1$ и $B_c \geqslant 0$, с которыми Γ — последовательность нулей для пространства $\mathrm{Hol}(\mathbb{D}; M)$ при*

$$M = cp + B_c b_{\nu_p}^{[6]}. \tag{36}$$

В частности, если p — логарифмический вес вида [L] *с $\alpha > 1$, то второе слагаемое в правой части* (36) *исчезает, и Λ — последовательность нулей для пространства $H_p^{1^-}$.*

Доказательство. В [1, Теорема 0.2(S_3)] доказано, что именно в условиях теоремы 3 последовательность точек Γ является последовательностью неединственности, или подпоследовательностью нулей, для пространства $H_p^1 := \bigcup_{0\leqslant c<1} \mathrm{Hol}(\mathbb{D}, cp)$ (даже без эквивалентных условий (7)–(8)), т.е. при некотором $c' < 1$ для пространства $\mathrm{Hol}(\mathbb{D}; c'p)$. Кроме того, для функции $c'p$ и для ее меры Рисса $\nu_{c'p}$ по-прежнему выполнены эквивалентные условия (7)–(8) с заменой p на $c'p$. При этих условиях в [3, теорема 2, п. (U)] утверждается, что каждая подпоследовательность нулей для пространства $\mathrm{Hol}(\mathbb{D}; c'p)$ при любом $\varepsilon \in (0,1)$ будет уже последовательностью нулей для пространства

$$\mathrm{Hol}\big(\mathbb{D}; \mathrm{Av}_{c'p}^{[\varepsilon]} + C_\varepsilon b_{c'p}^{[6]}\big). \tag{37}$$

Очевидно, $b_{c'p}^{[6]} = c' b_p^{[6]}$. Кроме того, в силу условия регулярности (LD_0^1) при достаточно малом значении числа $b > 1$, для которого выполнено ограничение $c = c'b < 1$, имеет место неравенство

$$\mathrm{Av}_{c'p}^{[\varepsilon]}(z) \leqslant cp(z) + C, \quad z \in \mathbb{D},$$

где C — постоянная. Таким образом, пространство (37) вложено в весовое пространство $\mathrm{Hol}(\mathbb{D}; M)$ с весом M из (36), а Γ — последовательность нулей для этого пространства, что и требовалось. В частном случае

$$p(z) = \log^\alpha \frac{1}{1-|z|}\,, \quad \alpha > 1, \tag{38}$$

выполнены условия (7) и (LD_0^1), а из оценки (33) для логарифмического веса (38) имеем

$$b_{\nu_p}^{[6]}(z) = O\Big(\log^{\alpha-1} \frac{1}{1-|z|}\Big), \quad z \to \partial\mathbb{D}. \tag{39}$$

Отсюда при том же выборе веса p можно найти постоянную $d \in (c,1)$, с которой неравенство $cp(z) + B_c b_{\nu_p}^{[6]}(z) \leqslant dp(z)$ выполнено при всех $z \in \mathbb{D} \setminus D(t)$ при определенном $t < 1$. В силу ограниченности голоморфных функций в круге $D(t)$ этого достаточно, чтобы пространство $\mathrm{Hol}\big(\mathbb{D}; cp + B_c b_{\nu_p}^{[6]}\big)$ включалось в $\mathrm{Hol}(\mathbb{D}; dp) \subset H_p^{1^-}$. Теорема доказана. $\square$

Выведем из теоремы 3 часть (S_1) Теоремы устойчивости 1 из Введения. В силу возрастания функции p условия на нее, при которых имеет место (11), даже сильнее условия регулярности (LD_0^1) теоремы 3. Условие (7) для радиальной функции — это (9). Согласно Замечанию 1 продолженная на $\mathbb{D}$ функция p субгармонична. Наконец, справедлива оценка (21) Предложения 1 (см. также Замечание 3). Это и показывает, что часть (S_1) Теоремы устойчивости 1 — прямое следствие Теоремы 3.

Пространство $H_{p+\log}$. На весовую, не обязательно радиальную или положительную, субгармоническую функцию p, определяющую пространство $H_{p+\log}$, в [1] накладывалось дополнительное условие регулярности[1]

[1]Вновь используем нумерацию из [1].

(LD_0^0) существуют числа ε, $0<\varepsilon<1$, и $c, C \geqslant 0$, для которых в обозначении (18) для усреднений справедливо неравенство

$$\mathrm{Av}_p^{[\varepsilon]}(z) \leqslant p(z) + c\log\frac{1}{1-|z|} + C, \quad z \in \mathbb{D}. \tag{40}$$

Теорема 4. *Пусть для субгармонической в $\mathbb{D}$ функции $p \not\equiv -\infty$ выполнены условия умеренного роста* (7) *и условие регулярности веса* (LD_0^0). *Если для двух последовательностей точек $\Lambda = (\lambda_k)_{k\in\mathbb{N}}$ и $\Gamma = (\gamma_k)_{k\in\mathbb{N}}$ в $\mathbb{D}$ выполнено условие их близости* (15), *и Λ — подпоследовательность нулей для пространства $H_{p+\log}$, то найдутся постоянные $C, B \geqslant 0$, с которыми Γ — последовательность нулей для пространства* $\mathrm{Hol}(\mathbb{D}; M)$ *при*

$$M = p + C\log\frac{1}{1-|\cdot|} + Bb_{\nu_p}^{[6]}. \tag{41}$$

В частности, если p — логарифмический вес вида [L] *с $\alpha \geqslant 1$, то Γ — последовательность нулей для пространства* $\mathrm{Hol}(\mathbb{D}; M)$, *где*

$$M(z) := p(z) + C_\alpha \log^{\max\{1,\alpha-1\}}\frac{1}{1-|z|}\,,\ z\in\mathbb{D}, \quad C_\alpha \text{ — постоянная.} \tag{42}$$

Доказательство. Отметим, что неравенство (40) совпадает с (10) при $0 > a = -c$ и $b = 1$. В [1, Теорема 0.2(S_4)] доказано, что именно в условиях теоремы 4 последовательность точек Γ является последовательностью неединственности, или подпоследовательностью нулей, для пространства $H_{p+\log}$ (даже без эквивалентных условий (7)–(8)), т. е. при некотором $C \geqslant 0$ для пространства $\mathrm{Hol}(\mathbb{D}; \hat{M})$, где $\hat{M}(z) := p(z) + D\log\frac{1}{1-|z|}$, $z \in \mathbb{D}$, — субгармоническая функция, D — постоянная. Кроме того, для функции $\hat{M}$ и для ее меры Рисса $\nu_{\hat{M}}$ по-прежнему выполнены эквивалентные условия умеренного роста (7)–(8) с заменой p на $\hat{M}$. При этих условиях в [3, теорема 2, п. (U)] установлено, что каждая подпоследовательность нулей для пространства $\mathrm{Hol}(\mathbb{D}; \hat{M})$ при любом $\varepsilon \in (0,1)$ будет уже последовательностью нулей для пространства $\mathrm{Hol}\big(\mathbb{D}; \mathrm{Av}_{\hat{M}}^{[\varepsilon]} + C_\varepsilon b_{\hat{M}}^{[6]}\big)$. Из условия регулярности (LD_0^0) легко следует, что последнее пространство вложено в пространство $\mathrm{Hol}(\mathbb{D}; M)$ с весом M из (41), а Γ — последовательность нулей для этого пространства, что и требовалось установить.

В частности, для логарифмического веса p функция из (41) мажорируется согласно (33) функцией (42), что доказывает заключительную часть Теоремы 4. □

Выведем из Теоремы 4 часть ($\mathrm{H}_{\log}$) Теоремы устойчивости 1 из Введения. В силу возрастания функции p условия на нее, при которых имеет место (11), даже сильнее условия регулярности (LD_0^0) теоремы 4. Условие (7) для радиальной функции — это (9). Субгармоничность продолженной на $\mathbb{D}$ функции p отмечалась в Замечании 1. Наконец, справедливо неравенство (21). Это и показывает, что часть ($\mathrm{S}_{\log}$) Теоремы 1 — прямое следствие Теоремы устойчивости 4.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Хабибуллин Б.Н., Хабибуллин Ф.Б., Чередникова Л.Ю. *Подпоследовательности нулей для классов голоморфных функций, их устойчивость и энтропия линейной связности. II* // Алгебра и анализ. 2008. Т. 20, №. 1. С. 190–236.
2. D.H. Luecking *Zero sequences for Bergman spaces* // Complex Variables. 1996. V. 30. P. 345–362.
3. Кудашева Е.Г., Хабибуллин Б.Н. *Распределение нулей голомофных функций умеренного роста в единичном круге и представление в нем мероморфных функций* // Матем. сб. 2009. Т. 201, № 9. С. 995–126.
4. Хабибуллин Ф.Б. *Последовательности нулей голомофных функций в весовых пространствах в единичном круге* // Известия вузов. Матем. 2010. Вып. 3. С. 102–105.

5. Хабибуллин Ф.Б. *Последовательности нулей голоморфных функций в пространствах в круге* // Международная школа-конференция для студентов, аспирантов и молодых ученых «Фундаментальная математика и ее приложения в естествознании», посвященная 100-летию БашГУ. Математика. Том I. Уфа. РИЦ БашГУ. 2009. С. 357–377.
6. Хабибуллин Ф.Б. *Последовательности нулей голоморфных функций умеренного роста в круге* // Спектральная теория операторов и ее приложения. Материалы международной конференции, посвященной памяти профессора А.Г. Костюченко (Уфа, 13–15 июня 2011 г.). Уфа. РИЦ БашГУ. 2011. С. 85–86.
7. Хабибуллин Ф.Б. *Устойчивость (под)последовательностей нулей в пространствах голоморфных функций умеренного роста в круге* // Материалы X международной Казанской летней научной школы-конференции (Казань, 1–7 июля 2011 г.). Теория функций, ее приложения и смежные вопросы. Казанское математическое общество. Труды Математического центра им. Н.И. Лобачевского. 2011. Т. 43. С. 358–360.
8. Неванлинна Р. *Однозначные аналитические функции.* М.–Л.: Гостехиздат, 1941.
9. *Хейман У. Мероморфные функции.* М: Мир, 1966.
10. Шамоян Ф.А., *Факторизационная теорема М.М. Джрбашяна и характеристика нулей аналитических в круге функций с мажорантой конечного роста* // Изв. АН Арм. ССР. Математика. 1978. Т. XIII, № 5–6. С. 405–422.
11. K. Seip *An extension of the Blaschke condition* // J. London Math. Soc. 1995. V. 51. P. 545–558.
12. L. Hörmander *Notions of Convexity.* Progress in mathematics. 1994. V.127. Birkhäser (Boston, Mass.).
13. A. Borichev, L. Golinskii, S. Kupin *A Blaschke-type condition and its application to complex Jacobi matrices* // Bull. of the London Math. Soc. 2009. V. 41. P. 117–123.
14. S. Favorov, L. Golinskii *A Blaschke-type condition for analytic and subharmonic functions and application to contraction operators* // Amer. Math. Soc. Transl. 2009. V. 226, №. 2. P. 37–47.
15. S. Favorov, L. Golinskii *On critical points of Blaschke products* // Matematychni Studii. 2010. V.34, No. 2. P. 168–173.
16. S. Favorov, L. Golinskii *Blaschke-type conditions for analytic functions in the unit disk: inverse problems and local analogs* // preprint arXiv:1007.3020 [math.CV], 2010.
17. M. Klimek *Pluripotential Theory.* Clarendon Press (Oxford etc.), 1991.

Фархат Булатович Хабибуллин,
Башкирский государственный университет,
ул. З. Валиди, 32,
450074, г. Уфа, Россия
E-mail: khabibullinfb@list.ru