ISSN 2074-1863 Уфимский математический журнал. Том 3. № 3 (2011). С. 80-92.

УДК 517.9

АПРОКСИМАТИВНЫЕ СВОЙСТВА СИСТЕМ КОРНЕВЫХ ФУНКЦИЙ, ПОРОЖДАЕМЫЕ КОРРЕКТНО РАЗРЕШИМЫМИ КРАЕВЫМИ ЗАДАЧАМИ ДЛЯ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

Б.Е. КАНГУЖИН, Д.Б. НУРАХМЕТОВ, Н.Е. ТОКМАГАМБЕТОВ

Аннотация. В настоящей работе изучены свойства систем корневых функций, порождаемые корректно разрешимыми краевыми задачами для обыкновенных дифференциальных уравнений высших порядков. Построена соответствующая система корневых функций и биортогональная к ней система функций. Полученные системы корневых функций являются минимальными семействами. Доказано полнота найденных систем корневых функций в $L_2(0,1)$. Приведен алгоритм к поставленной обратной задаче по восстановлению граничной функции. А также найдены некоторые тождества для собственных значений рассматриваемого оператора, порожденного обыкновенным дифференциальным выражением с внутренне краевыми условиями.

Ключевые слова: обыкновенные дифференциальные уравнения, система корневых функций, биортогональная система, собственные значения, полнота систем функций, корректно разрешимые краевые задачи, внутренне краевые условия, нелокальные краевые условия.

1. Введение

Пусть L — дифференциальный оператор в функциональном пространстве $L_2(0,1)$ такой, что обратный оператор L^{-1} является вполне непрерывным. Тогда согласно утверждению из [1](стр. 10), спектр оператора L состоит из конечного или счетного множества изолированных собственных значений конечной алгебраической кратности без конечных точек накопления. Каждому собственному значению λ_s геометрической кратности m_s ставится в соответствие цепочка собственной и присоединенных функций оператора L

$$E_s = \{y_{s,0}(x,), y_{s,1}(x), ..., y_{s,m_s-1}(x)\}.$$

Объединение всевозможных таких цепочек

$$\{E_s : \lambda_s - \text{собственное значение оператора L}\}$$

называют системой корневых функций оператора L. Таким образом, дифференциальный оператор L является источником некоторой системы корневых функций. Системы корневых функций являются минимальными семействами. Построена соответствующая система биортогональных функций.

B.E. Kanguzhin, D.B. Nurakhmetov, N.E. Tokmagambetov, Approximate properties of the root functions generated by the correctly solvable boundary value problems for higher order ordinary differential equations.

© Кангужин Б.Е., Нурахметов Д.Б., Токмагамбетов Н.Е. 2011.

Поступила 14 июля 2011 г.

Из асимптотических свойств целых функций выводятся некоторые утверждения о поведении коэффициентов Фурье по системе корневых функции элементов из $L_2(0,1)$. Поведение такой последовательности коэффициентов Фурье может существенно отличаться от поведения последовательности коэффициентов Фурье по классической тригонометрической системе.

Пусть n натуральное число большее двух. В функциональном пространстве $L_2(0,1)$ рассмотрим оператор L, порожденный обыкновенным дифференциальным выражением

$$l(y) \equiv y^{(n)}(x) = f(x), \tag{1}$$

и внутренне краевыми условиями

$$y^{(\nu-1)}(0) - \delta_{\nu k}\int_0^1 (l(y))\overline{\sigma(x)}dx = 0, \nu = \overline{1;n}, \tag{2}$$

где k фиксированное натуральное число не большее n, $\delta_{k\nu}$ — символ Кронекера, функция $\sigma(x)$ из пространства $L_2(0,1)$, $\overline{\sigma(x)}$ означает комплексное сопряжение.

Из работ [3], [4] следует что внутренне краевые условия (2) при всевозможной $\sigma(x)$ описывают корректно разрешимые задачи, соответствующие выражению $l(\cdot)$. А также в работе [5] был описан класс корректных задач для оператора Лапласа.

Основным результатом этой работы является следующая теорема.

Теорема 1. *Если существует ненулевой предел*

$$\lim_{\varepsilon\to 1-0}\frac{1}{\varepsilon}\int_\varepsilon^1 \sigma(x)dx = \alpha,$$

то система корневых функции оператора L полна в $L_2(0,1)$.

Доказательство теоремы 1 приведено в пункте 5.

2. Резольвента оператора L

Теорема 2. *Резольвента оператора L определяется по формуле*

$$y(x,\lambda) = (L-\lambda I)^{-1}f(x) = R(\lambda)f(x) = (K-\lambda I)^{-1}f(x) + \psi(x,\lambda) < f; K^*(K^*-\bar{\lambda}I)^{-1}\sigma >, \tag{3}$$

где K — оператор, соответствующий нулевым условиям Коши в нуле, K^* — оператор, сопряженный к оператору K, $\psi(x,\lambda)$ — решение однородного уравнения, удовлетворяющее всем (кроме одного) краевым условиям оператора L:

$$l(\psi(x,\lambda)) = \lambda\psi(x,\lambda),$$
$$U_\nu(\psi) \equiv \psi^{(\nu-1)}(0,\lambda) - \delta_{k,\nu}\int_0^1 l(\psi(y,\lambda))\overline{\sigma(y)}dy = \delta_{k,\nu}, \nu = \overline{1;n},$$

где $\delta_{k\nu}$ — символ Кронекера.

Для доказательства теоремы 2 понадобится следующая лемма.

Лемма 1. *Если $\varphi(x)$ является решением однородного уравнения $l(\varphi) = 0$ и удовлетворяет соотношениям $\varphi^{(j-1)}(0) = \alpha_j, j = 1,...,n$, тогда функция*

$$\psi(x,\lambda) = L(L-\lambda I)^{-1}\varphi(x)$$

представляет решение уравнения

$$l(\psi(x,\lambda)) = \lambda\psi(x,\lambda)$$

и удовлетворяет условиям

$$U(\psi^{(j-1)}(x,\lambda)) = \alpha_j, j = 1,...,n.$$

Здесь α_j выбрано следующим образом: $\alpha_j = \delta_{jk}$, где k — фиксированное натуралное число.

Лемма проверяется непосредственно. Действительно, легко видеть, что

$$\psi(x, \lambda) = \varphi(x) + \lambda(L - \lambda I)^{-1}\varphi(x).$$

Остается к обеим частям последнего равенства последовательно применить выражения $l(\cdot)$ и $U_j(\cdot)$.

Доказательство теоремы 2. Введем следующие обозначения

$$y_0(x, \lambda) = (K - \lambda I)^{-1}f(x),$$
$$C =< f, K^*(K^* - \bar{\lambda}I)^{-1}\sigma >,$$
$$\psi(x, \lambda) = L(L - \lambda I)^{-1}\varphi.$$

Ясно, что функция $y_0(x, \lambda)$ принадлежит области определения оператора K и является решением уравнения $l(y_0) - \lambda y_0 = f(x)$. Иначе говоря, для функции $y_0(x, \lambda)$ выполняются краевые условия $y_0^{(\nu-1)}(0, \lambda) = 0, \nu = \overline{1; n}$. В соответствии с правой частью соотношения (3) рассмотрим функцию

$$y(x, \lambda) = y_0(x, \lambda) + C\psi(x, \lambda). \tag{4}$$

Применим к обеим частям последнего равенства дифференциальное выражение $l(\cdot) - \lambda$. В силу леммы 1 имеем

$$l(y) - \lambda y = l(y_0) - \lambda y_0 = f(x).$$

Таким образом, правая часть (4) удовлетворяет требуемому неоднородному уравнению. Для проверки краевых условий на обе части равенства (4) воздействуем формой $U_k(\cdot)$. В силу леммы 1 имеем при $\nu = 1, ..., n$

$$U_\nu(y) = U_\nu(y_0) + C \cdot U_\nu(\psi) = y_0^{(\nu-1)}(0) - \delta_{k\nu}\int_0^1 l(y_0)\overline{\sigma(x)}dx + \delta_{k\nu}C = \delta_{k\nu}(C$$
$$- \int_0^1 (f(x) + \lambda y_0(x))\overline{\sigma(x)}dx) = \delta_{k\nu}(< f, K^*(K^* - \overline{\lambda}I)^{-1}\sigma >$$
$$- \int_0^1 (f(x) + \lambda(K - \lambda I)^{-1}f(x))\overline{\sigma(x)}dx) = 0.$$

Теорема 2 полностью доказана. Отметим, что в работах [5] и [6] были представлены резольвенты корректно заданных задач для оператора Лапласа и бигармонического оператора.

Заметим, что $\psi(x, \lambda)$ выражается через $\kappa(x, \lambda)$ по формуле

$$\psi(x, \lambda) = \frac{\kappa(x, \lambda)}{\Delta(\lambda)},$$

где $\kappa(x, \lambda)$ — решение уравнения

$$l(\kappa(x, \lambda)) = \lambda\kappa(x, \lambda) \tag{5}$$

и удовлетворяет условиям

$$\kappa^{(\nu-1)}(0, \lambda) = \delta_{k,\nu}, \nu = 1, ..., n, \tag{6}$$

а

$$\Delta(\lambda) = 1 - \lambda\int_0^1 \kappa(x, \lambda)\overline{\sigma(x)}dx. \tag{7}$$

Тогда из теоремы 2 вытекает справедливость следующего следствия:

Следствие 1. *Собственные значения краевой задачи* (1)–(2) *совпадают с нулями целой функций* (7).

В частности, отсюда следует, что собственные значения оператора L изолированы и конечной кратности без конечных предельных точек.

3. Система корневых функции оператора L и соответствующая биортогональная система

Пусть λ_s — собственное значение кратности m_s. Это означает, что

$$\Delta(\lambda_s) = 0, \Delta^{'}(\lambda_s) = 0, ..., \Delta^{(m_s-1)}(\lambda_s) = 0, \Delta^{(m_s)}(\lambda_s) \neq 0. \tag{8}$$

В монографии [7] на стр. 445 приведена теорема о разложении, из которой следует, что проектор $P_s : L_2[0,1] \to Ker(L - \lambda_s I)^{m_s}$ представляет вычет резольвенты в особой точке λ_s

$$(P_s f)(x) = -\frac{1}{2\pi i}\oint_{|\lambda-\lambda_s|=\delta}(L-\lambda I)^{-1}f(x)d\lambda$$

при некотором $\delta > 0$. Учитывая, что резольвента $(K-\lambda I)^{-1}$ оператора Коши представляет целую функцию от λ, то из представления резольвенты (3) проектор P_s примет следующий вид

$$(P_s f(x)) = -\frac{1}{2\pi i}\oint_{|\lambda-\lambda_s|=\delta}(L-\lambda I)^{-1}f(x)d\lambda =$$

$$= -\frac{1}{2\pi i}\oint_{|\lambda-\lambda_s|=\delta}\frac{\kappa(x,\lambda)}{\Delta(\lambda)} < f(\xi), K^*(K^* - \bar{\lambda}I)^{-1}\sigma(\xi) > d\lambda$$

$$= -res_{\lambda_s}\frac{\kappa(x,\lambda)}{\Delta(\lambda)} < f(\xi), K^*(K^* - \bar{\lambda}I)^{-1}\sigma(\xi) > . \tag{9}$$

Отсюда следует, что P_s — интегральный оператор и его ядро имеет вид

$$P_s(x,\xi) = -\sum_{\gamma=1}^{m_s-1}\lim_{\lambda\to\lambda_s}\frac{1}{\gamma!}\frac{\partial^\gamma \kappa(x,\lambda)}{\partial\lambda^\gamma}\lim_{\lambda\to\lambda_s}\frac{1}{(m_s-\gamma-1)!}\frac{\partial^{m_s-\gamma-1}}{\partial\lambda^{m_s-\gamma-1}}\left(\frac{(\lambda-\lambda_s)^{m_s}M(\xi,\lambda)}{\Delta(\lambda)}\right),$$

где

$$M(\xi,\lambda) = \overline{K^*(K^* - \bar{\lambda}I)^{-1}\sigma(\xi)}.$$

Числа

$$H_{s,m_s-\gamma-1}(\xi) = \lim_{\lambda\to\lambda_s}\frac{1}{(m_s-\gamma-1)!}\frac{\partial^{m_s-\gamma-1}}{\partial\lambda^{m_s-\gamma-1}}\left(\frac{(\lambda-\lambda_s)^{m_s}M(\xi,\lambda)}{\Delta(\lambda)}\right),$$

представляют коэффициенты Тейлора функций $\frac{(\lambda-\lambda_s)^{m_s}M(\xi,\lambda)}{\Delta(\lambda)}$ в точке λ_s.

Введем обозначения:

$$y_{s,j}(x) = \frac{1}{j!}\frac{\partial^j \kappa(x,\lambda_s)}{\partial\lambda^j}, j = \overline{0, m_s-1},$$

$$E_s = \{y_{s,j}(x), j = \overline{0, m_s-1}\}.$$

Из [8] (стр. 29) вытекает следующее утверждение: $dimE_s = m_s$.

Теперь исследуем свойства системы функций E, которая определяется следующим образом

$$E = \{E_s : \lambda_s - \text{собственное значение оператора L}\}.$$

Лемма 2. *Элементы цепочки E_s удовлетворяют следующим дифференциальным уравнениям*

$$l(y_{s,j}) = \lambda_s y_{s,j}(x) + y_{s,j-1}(x), j = 1, ..., m_s - 1 \tag{10}$$

$$l(y_{s,0}) = \lambda_s y_{s,0}(x) \tag{11}$$

и внутренне краевым условиям (2). *Таким образом, система функции $y_{s,0}(x), y_{s,1}(x), ..., y_{s,m_s-1}(x)$ представляет цепочку корневых функции, порожденной собственной функцией $y_{s,0}(x)$, не тождественно равной нулю.*

Доказательство леммы 2. Рассмотрим функции $y_{s,0} = \kappa(x, \lambda_s)$. По определению, функция $\psi(x, \lambda) = \frac{\kappa(x,\lambda)}{\Delta(\lambda)}$ удовлетворяет уравнению

$$l(\psi(x, \lambda)) = \lambda\psi(x, \lambda)$$

и внутренне краевым условиям

$$\frac{\partial^{i-1}\psi(x, \lambda)}{\partial x^{i-1}} \mid_{x=0}= \delta_{ki}\lambda \int_0^1 \psi(x, \lambda)\overline{\sigma(x)}dx + \delta_{ki}, i = \overline{1, n}.$$

Иными словами, справедливо уравнение

$$l(\kappa(x, \lambda)) = \lambda\kappa(x, \lambda) \tag{12}$$

с внутренне краевыми условиями

$$\frac{\partial^{i-1}\kappa(x, \lambda)}{\partial x^{i-1}} \mid_{x=0}= \delta_{ki}(\lambda \int_0^1 \kappa(x, \lambda)\overline{\sigma(x)}dx + \Delta(\lambda)), i = \overline{1, n}. \tag{13}$$

Так как для собственных значений λ_s верно $\Delta(\lambda_s) = 0$, то имеем

$$l(\kappa(x, \lambda_s)) = \lambda_s\kappa(x, \lambda_s)$$

и

$$\frac{\partial^{i-1}\kappa(x, \lambda_s)}{\partial x^{i-1}} \mid_{x=0}= \delta_{ki}\lambda_s \int_0^1 \kappa(x, \lambda_s)\overline{\sigma(x)}dx, i = \overline{1, n}.$$

Таким образом, для $y_{s,0}(x)$ доказана справедливость формулы (11) с внутренне краевыми условиями (2). Так как $\kappa^{(k-1)}(0, \lambda) = 1$, то $y_{s,0}(x)$ не равно тождественно нулю. Следовательно, $y_{s,0}(x)$ — собственная функция оператора L, соответствующего собственному значению λ_s. Теперь пусть $m_s-1 \geq j \geq 1$. Докажем (10) и справедливость внутренне краевых условий. Для этого надо продифференцировать (12) и (13) по λ соответствующее число раз, затем подставить вместо λ значение λ_s и учесть соотношение (8). Тем самым, лемма 2 доказана.

Лемма 3. *Для произвольных комплексных чисел λ, μ справедливо тождество:*

$$< \kappa(\xi, \lambda), \overline{M(\xi, \mu)} >= \frac{\Delta(\lambda) - \Delta(\mu)}{\mu - \lambda}.$$

Заметим, что $M(\xi, \lambda) = \overline{\sigma(\xi)} + \lambda\overline{z(\xi, \bar{\lambda})}$. Здесь $z(\xi, \bar{\lambda})$ решение формально сопряженного неоднородного уравнения $l^*(z) = \bar{\lambda}z(\xi, \bar{\lambda}) + \sigma(\xi)$ с нулевыми условиями при $\xi = 1$

$$z(1, \bar{\lambda}) = ... = z^{(n-1)}(1, \bar{\lambda}) = 0.$$

Доказательство леммы 3. Для произвольных λ, μ вычислим следующее скалярное произведение

$$\begin{aligned} < l(\kappa(x, \lambda)), \overline{M(x, \mu)} >&=< l(\kappa(x, \lambda)), \sigma(x) + \bar{\mu}z(x, \bar{\mu}) > \\ &= \lambda < \kappa(x, \lambda), \sigma(x) > + < \kappa(x, \lambda), \bar{\mu}\overline{l^*(z(x, \bar{\mu}))} > \\ &+\mu \sum_{p=0}^{n-1}(-1)^{n-p}\kappa^{(p)}(0, \lambda) \cdot z^{(n-p-1)}(0, \bar{\mu}) \\ &= \lambda < \kappa(x, \lambda), \sigma(x) > +\mu < \kappa(x, \lambda), \overline{M(x, \mu)} > \\ &+\mu \sum_{p=0}^{n-1}(-1)^{n-p}\kappa^{(p)}(0, \lambda) \cdot z^{(n-p-1)}(0, \bar{\mu}). \end{aligned}$$

Поэтому справедливо равенство

$$(\lambda - \mu) < \kappa(x, \lambda), \overline{M(x, \mu)} >= \lambda < \kappa(x, \lambda), \sigma(x) >$$

$$+\mu\sum_{p=0}^{n-1}(-1)^{n-p}\kappa^{(p)}(0,\lambda)\cdot z^{(n-p-1)}(0,\bar{\mu}).$$

С учетом соотношения (6) получаем

$$(\lambda-\mu)<\kappa(x,\lambda),\overline{M(x,\mu)}>=\lambda<\kappa(x,\lambda),\sigma(x)>+\mu(-1)^{n-k+1}z^{(n-k)}(0,\bar{\mu})\kappa^{(k-1)}(0,\lambda).$$

Отсюда при $\lambda=\mu$ получим

$$-\mu<\kappa(x,\mu),\sigma(x)>=\mu(-1)^{n-k+1}z^{(n-k)}(0,\bar{\mu})\kappa^{(k-1)}(0,\lambda).$$

Из (6) следует, что $\kappa^{(k-1)}(0,\mu)\equiv 1$. Следовательно, верно равенство

$$(-1)^{n-k+1}z^{(n-k-1)}(0,\bar{\mu})=\frac{-1}{\kappa^{(k-1)}(0,\mu)}\cdot<\kappa(x,\mu),\sigma(x)>.$$

В итоге имеем

$$(\lambda-\mu)<\kappa(x,\lambda),\overline{M(x,\mu)}>=\lambda<\kappa(x,\lambda),\sigma(x)>-\mu<\kappa(x,\mu),\sigma(x)>.$$

Вспомним, что

$$\Delta(\lambda)=1-\lambda<\kappa(x,\lambda),\sigma(x)>.$$

В результате получим

$$(\lambda-\mu)<\kappa(x,\lambda),\overline{M(x,\mu)}>=(\Delta(\mu)-\Delta(\lambda)).$$

Отсюда следует требуемое. Лемма 3 доказана.

Анализ формулы (9) приводит к следующим обозначениям:

$$E_l^{'}=\{h_{l,m_l-1}(x),h_{l,m_l-2}(x),...,h_{l,0}(x)\},$$

где

$$h_{l,m_l-1-j}(x)=-\frac{1}{(m_l-1-j)!}\lim_{\mu\to\lambda_l}\frac{\partial^{m_l-1-j}}{\partial\mu^{m_l-1-j}}\left(\frac{(\mu-\lambda_l)^{m_l}M(x,\mu)}{\Delta(\mu)}\right), j=0,1,...,m_l-1.$$

Введем также следующее семейство функции

$$E^{'}=\{E_l^{'}:\lambda_l-\text{произвольное собственное значение оператора L}\}.$$

Справедлива следующая теорема.

Теорема 3. *Система функций $E^{'}$ биортогональна к системе функций E, т.е.*

$$<y_{s,i}(x),h_{l,m_l-1-j}(x)>=\begin{cases}1, & \text{если}(s,i)=(l,j);\\ 0, & \text{если}(s,i)\neq(l,j).\end{cases}$$

Доказательство теоремы 3. Рассмотрим два собственных значения λ_s и λ_l. Им соответствуют пары (s,i) и (l,j), где $i=0,1,\ldots,m_s-1$ и $j=0,1,\ldots,m_l-1$. Заметим, что скалярное произведение

$$<y_{s,i}(x),h_{l,m_l-1-j}(x)>=$$
$$=-\lim_{\lambda\to\lambda_s}\lim_{\mu\to\lambda_l}\frac{1}{i!}\frac{d^i}{d\lambda^i}\frac{1}{(m_l-1-j)!}\frac{d^{m_l-1-j}}{d\mu^{m_l-1-j}}\left(<\kappa(x,\lambda),\overline{M(x,\mu)}>\frac{(\mu-\lambda_l)^{m_l}}{\Delta(\mu)}\right).$$

Учитывая лемму 3, получим равенство

$$<y_{s,i}(x),h_{l,m_l-1-j}(x)>=$$
$$=-\lim_{\lambda\to\lambda_s}\lim_{\mu\to\lambda_l}\frac{1}{i!}\frac{d^i}{d\lambda^i}\frac{1}{(m_l-1-j)!}\frac{d^{m_l-1-j}}{d\mu^{m_l-1-j}}\left(\frac{\Delta(\lambda)-\Delta(\mu)}{\mu-\lambda}\frac{(\mu-\lambda_l)^{m_l}}{\Delta(\mu)}\right). \qquad (14)$$

Введем обозначения

$$H_{l,k}(\lambda)=\lim_{\mu\to\lambda_l}\frac{1}{k!}\frac{d^k}{d\mu^k}\left(\frac{\Delta(\lambda)-\Delta(\mu)}{\lambda-\mu}\frac{(\mu-\lambda_l)^{m_l}}{\Delta(\mu)}\right). \qquad (15)$$

Рассмотрим функцию

$$F(\mu)=\frac{\Delta(\lambda)-\Delta(\mu)}{\lambda-\mu}\frac{(\mu-\lambda_l)^{m_l}}{\Delta(\mu)}$$

и разложим ее в окрестности точки $\mu=\lambda_l$ в ряд Тейлора. Тогда

$$F(\mu)=H_{l,0}(\lambda)+H_{l,1}(\lambda)(\mu-\lambda_l)+H_{l,2}(\lambda)(\mu-\lambda_l)^2+\dots+H_{l,m_l-1}(\lambda)(\mu-\lambda_l)^{m_l-1}+\dots,$$

т.е. $H_{l,k}(\lambda)$ является k-тым коэффициентом Тейлора при соответствующем разложении в окрестности $\mu=\lambda_l$. Непосредственный подсчет коэффициента ряда Тейлора функции $F(\mu)$ приводит к следующей формуле при $k=0,1,\dots,m_l-1$

$$H_{l,k}(\lambda)=\Delta(\lambda)\left(A_{l,m_l-1}\frac{1}{(\lambda-\lambda_l)^{k+1}}+A_{l,m_l-2}\frac{1}{(\lambda-\lambda_l)^{k}}+\dots+A_{l,m_l-k-1}\frac{1}{\lambda-\lambda_l}\right), \qquad (16)$$

где числа $A_{l,m_l-1},\dots,A_{l,0}$ определяются из тождества

$$\frac{1}{\Delta(\mu)}\equiv\frac{A_{l,m_l-1}}{(\mu-\lambda_l)^{m_l}}+\frac{A_{l,m_l-2}}{(\mu-\lambda_l)^{m_l-1}}+\dots+\frac{A_{l,0}}{\mu-\lambda_l}+\sum_{q=0}^{\infty}B_{l,q}(\mu-\lambda_l)^q.$$

Если $\lambda_s\neq\lambda_l$, то из соотношении (14), (15) и (16) при $i=0,1,\dots,m_l-1$ имеем

$$<y_{s,i}(x),h_{l,m_l-1-j}(x)>=\lim_{\lambda\to\lambda_s}\frac{1}{i!}\frac{d^i}{d\lambda^i}H_{l,m_l-1-j}(\lambda)=$$

$$=\lim_{\lambda\to\lambda_s}\frac{1}{i!}\frac{d^i}{d\lambda^i}(\Delta(\lambda)\sum_{p=1}^{m_l-j}\frac{A_{l,j+p-1}}{(\lambda-\lambda_l)^p})=\frac{1}{i!}\sum_{t=0}^{i}C_i^t\Delta^{(t)}(\lambda_s)\sum_{p=1}^{k+1}A_{i-t,p}\frac{A_{l,m_l-k+p-2}}{(\lambda_s-\lambda_l)^{p+i-t}}=0,$$

так как $\Delta^{(t)}(\lambda_s)=0$ для любого $t<m_s$, и где $C_i^t, A_{i-t,p}$ элементы комбинаторики.

Теперь рассмотрим случай $\lambda_s=\lambda_l$. Преобразуем правую часть соотношения (16).

$$H_{l,k}(\lambda)=\Delta(\lambda)\sum_{p=1}^{k+1}\frac{A_{l,m_l-k+p-2}}{(\lambda_s-\lambda_l)^p}=$$

$$=\Delta(\lambda)\left(A_{l,m_l-1}\frac{1}{(\lambda-\lambda_l)^{k+1}}+A_{l,m_l-2}\frac{1}{(\lambda-\lambda_l)^{k}}+\dots+A_{l,m_l-k-1}\frac{1}{\lambda-\lambda_l}\right)=$$

$$=\Delta(\lambda)(\lambda-\lambda_l)^{m_l-k-1}\left(A_{l,m_l-1}\frac{1}{(\lambda-\lambda_l)^{m_l}}+A_{l,m_l-2}\frac{1}{(\lambda-\lambda_l)^{m_l-1}}+\dots+A_{l,m_l-k-1}\frac{1}{(\lambda-\lambda_l)^{m_l-k}}\right)$$

$$=\Delta(\lambda)(\lambda-\lambda_l)^{m_l-k-1}\left(\frac{1}{\Delta(\lambda)}-A_{l,m_l-2}\frac{1}{(\lambda-\lambda_l)^{m_l-k-1}}-\dots-A_{l,0}\frac{1}{\lambda-\lambda_l}-\sum_{q=m_l}^{\infty}B_{lq}(\lambda-\lambda_l)^q\right)=$$

$$=(\lambda-\lambda_l)^{m_l-k-1}+\sum_{q=m_l}^{\infty}c_{lq}^k(\lambda-\lambda_l)^q, s=0,1\dots,m_l-1. \qquad (17)$$

Из соотношений (14), (15) и (17) получим

$$<y_{s,i}(x),h_{l,m_l-1-j}(x)>=\frac{1}{i!}\lim_{\lambda\to\lambda_l}\frac{d^i}{d\lambda^i}H_{l,m_l-1-j}=$$

$$=\frac{1}{i!}\lim_{\lambda\to\lambda_l}\frac{d^i}{d\lambda^i}\left((\lambda-\lambda_l)^j+\sum_{q=m_l}^{\infty}c_{lq}^{m_l-1-j}(\lambda-\lambda_l)^q\right).$$

Отсюда следует требуемое утверждение при $i=j$.

Теорема 3 доказана.

Таким образом, из леммы 2 и теоремы 3 следует, что система функций E представляет систему корневых функций оператора L, а система функций $E^{'}$ есть биортогональная к системе E. Следовательно, система функций E является минимальной системой функций [2] (стр. 171).

В работе [9] для оператора первого порядка доказывается только существование биортогональной системы функций без предъявления явных формул. В теореме 3 в исходных терминах краевой задачи явно выписана биортогональная система функций.

4. Функциональные ряды, порождаемые системой корневых функций

Поскольку спектр оператора L дискретен, то найдется неограниченно растущая последовательность $\{R_N\}$ радиусов таких, что на соответствующих окружностях $|\lambda| = R_N$ нет точек спектра оператора. Пусть $A_N = \{\lambda \in C : |\lambda| = R_N\}$ и $\sigma(L) = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots\}$. В дальнейшем считаем, что R_N выбраны так, чтобы выполнялось неравенство $dist(A_N, \sigma(L)) > \delta > 0$ для всех N. Рассмотрим подпоследовательность частичных сумм, соответствующую выбранным окружностям

$$(S_N f)(x) = -\frac{1}{2\pi i} \oint_{|\lambda|=R_N} (L - \lambda I)^{-1} f(x) d\lambda \tag{18}$$

для произвольной функции $f(\cdot)$ из пространства $L_2(0, 1)$.

Подставим в (18) соотношение (3), согласно теореме о вычетах и с учетом соотношении (18), частичную сумму запишем в виде

$$(S_N f)(x) = \sum_{|\lambda_s|<R_N} \sum_{j=0}^{m_s-1} < f, h_{m_s-1-j} > y_{s,j}(x). \tag{19}$$

Согласно правой части (19) последовательность коэффициентов Фурье $f \in L_2(0, 1)$ по системе E определяется по формуле

$$c(f) = \{c_{s,i}(f) =< f, h_{s,i} >, i = 0, 1, \dots, m_s - 1,$$

$$\lambda_s \text{ — произвольное собственное значение оператора L}\}.$$

Естественно возникают вопросы о сходимости и суммируемости подпоследовательности $\{S_N f\}$ по норме $L_2(0, 1)$, о поведении коэффициентов Фурье $c_{s,i}$ и так далее — вопросы, подсказанные теорией тригонометрических рядов Фурье.

5. Полнота системы корневых функций

Как выше было показано, функция $\kappa(x, \lambda)$ является решением задачи (5)–(6).

Разобьем всю комплексную ρ-плоскость на $2n$ секторов $S_\nu, \nu = 0, 1, 2, ..., 2n - 1$, определяемых неравенством

$$\frac{\nu\pi}{n} \leqslant arg(\rho) \leqslant \frac{(\nu + 1)\pi}{n}.$$

Обозначим через $\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n$ все различные корни n-ой степени -1. А через ω^* обозначим один из корней, для которого выполняется

$$Re(\omega^* \rho) = \max\{Re(\omega_1 \rho), Re(\omega_2 \rho), ..., Re(\omega_n \rho)\}.$$

Заметим, что для всех ρ верно следующее: $Re(\omega^* \rho) > 0$.

Из [8] (стр. 55) следует, что общее решение (5) можно записать следующим образом

$$\kappa(x, \lambda) = c_1 \exp(\omega_1 \rho x) + ... + c_n \exp(\omega_n \rho x), \tag{20}$$

где $\lambda = -\rho^n; \omega_i^n = -1, i = \overline{1;n}$ и $\{c_i, i = \overline{1;n}\}$ некоторые константы. Подставив (20) в (6), найдем, что

$$\kappa(x,\lambda) = \frac{1}{n}\sum_{p=1}^{n}\frac{\exp(\omega_p\rho x)}{(\omega_p\rho)^{k-1}}.$$

Из полученной выше формулы для некоторых постоянных C_1 и C_2 справедлива оценка

$$C_1\frac{\exp(Re(\omega^*\rho x))}{\mid\rho\mid^{k-1}} \leqslant \mid \kappa(x,\lambda)\mid \leqslant C_2\frac{\exp(Re(\omega^*\rho x))}{\mid\rho\mid^{k-1}}, \tag{21}$$

при $\mid\rho\mid\to\infty$.

В данном пункте исследуется вопрос полноты системы E в функциональном пространстве $L_2(0,1)$. Нам потребуется следующая лемма:

Лемма 4. *Множество функции*

$$D = \{\kappa(x,\mu), \mu \text{ — \textit{произвольное комплексное число}}\}$$

плотно в пространстве $L_2(0,1)$.

Доказательство леммы 4. Для этого достаточно показать что для любого $h(x)\in L_2(0,1)$ из $<\kappa(x,\mu), h(x)>=0, \forall\mu$ следует $h(x)=0$ почти всюду в $L_2(0,1)$. Из (5)–(6) получим, что $\kappa(x,\mu)$ аналитическая функция по μ. Тогда $\kappa(x,\mu)$ можно разложить в следующий ряд:

$$\kappa(x,\mu) = \sum_{i=0}^{\infty}A_i(x)\mu^i,$$

где

$$l(A_0(x)) = 0, A_0^{(\nu-1)}(0) = \delta_{k\nu}, \nu = \overline{1,n}$$

и для $i = 0, 1, ...$

$$l(A_{i+1}(x)) = A_i(x), A_{i+1}^{(\nu-1)}(0) = 0, \nu = \overline{1,n}.$$

Несложно убедиться в том, что

$$A_i(x) = \frac{1}{(ni+k-1)!}x^{ni+k-1}, i = 0, 1, \ldots.$$

Тогда для любого $h(x)\in L_2(0,1)$ из $<\kappa(x,\mu), h(x)>=0, \forall\mu$ следует, что $<A_i(x), h(x)>=0, i=0,1,....$ Так как ряд $\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{ni+k-1}$ расходится, то система функций $\{A_i(x)\}_{i=0}^{\infty}$ по теореме Мюнца будет полной в $L_2(0,1)$. Таким образом, $h(x)=0$ почти всюду в $L_2(0,1)$, т.е. множество функции D плотно в $L_2(0,1)$. Что и требовалось доказать.

Доказательство теоремы 1. Достаточно аппроксимировать произвольный элемент из D с наперед заданной точностью линейными комбинациями из E. Для этого рассмотрим

$$S_N\kappa(x,\mu) = -\frac{1}{2\pi i}\oint_{|\lambda|=R_N}\frac{<\kappa(x,\mu), \overline{M(x,\lambda)}>}{\Delta(\lambda)}\kappa(x,\lambda)d\lambda.$$

Учитывая лемму 3, перепишем последнее соотношение

$$S_N\kappa(x,\mu) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{|\lambda|=R_N}\frac{\Delta(\lambda)-\Delta(\mu)}{\lambda-\mu}\frac{\kappa(x,\lambda)}{\Delta(\lambda)}d\lambda$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\oint_{|\lambda|=R_N}\frac{\kappa(x,\lambda)}{\lambda-\mu}d\lambda - \frac{1}{2\pi i}\oint_{|\lambda|=R_N}\frac{\Delta(\mu)}{\Delta(\lambda)}\frac{\kappa(x,\lambda)}{\lambda-\mu}d\lambda.$$

Используя интегральную формулу Коши, получим

$$S_N\kappa(x,\mu) = \kappa(x,\mu) - \frac{1}{2\pi i}\oint_{|\lambda|=R_N}\frac{\Delta(\mu)}{\Delta(\lambda)}\frac{\kappa(x,\lambda)}{\lambda-\mu}d\lambda.$$

Обозначим через $Q_N(x,\mu)$ погрешность $\kappa(x,\mu)-S_N\kappa(x,\mu)$. Тогда для погрешности имеем интегральное представление

$$Q_N(x,\mu)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{|\lambda|=R_N}\frac{\Delta(\mu)}{\Delta(\lambda)}\frac{\kappa(x,\lambda)}{\lambda-\mu}d\lambda.$$

Найдем достаточные условия на $\sigma(x)\in L_2(0,1)$, чтобы

$$\lim_{R_N\to\infty}\|Q_N(x,\mu)\|=0,$$

где $\|\cdot\|$ — норма пространства $L_2(0,1)$. Рассмотрим норму погрешности $Q_N(x,\mu)$

$$\|Q_N(x,\mu)\|=\left(\int_0^1 |\ \frac{1}{2\pi i}\oint_{|\lambda|=R_N}\frac{\Delta(\mu)}{\Delta(\lambda)}\frac{\kappa(x,\lambda)}{\lambda-\mu}d\lambda\ |^2\ dx\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Для начала, оценим $|\Delta(\lambda)|$ на окружностях $|\lambda|=R_N$ при $R_N\to\infty$. Пусть существует предел $\lim_{\varepsilon\to1-0}\frac{1}{\varepsilon}\int_\varepsilon^1\sigma(x)dx=\alpha_1\neq0$. Тогда для функции $\Delta(\lambda)$ справедлива оценка снизу

$$|\Delta(\lambda)|\geq c_1R_N^{\frac{n-k+1}{n}}\exp(Re(\omega^*\rho))>0. \tag{22}$$

Записав λ в виде $\lambda=R_N\exp(i\theta)$ и в силу (21) и (22), для нормы $Q_N(x,\mu)$ получим

$$\|Q_N(x,\mu)\|\leqslant\frac{|\ \Delta(\mu)\ |}{2\pi}\left(\int_0^1 |\ \oint_{|\lambda|=R_N}\frac{1}{\Delta(\lambda)}\frac{\kappa(x,\lambda)}{\lambda-\mu}d\lambda\ |^2\ dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leqslant\frac{|\ \Delta(\mu)\ |}{2\pi}\left(\int_0^1 |\ \int_0^{2\pi}\frac{|\ \kappa(x,\lambda)\ |}{||\ \lambda\ |-|\ \mu\ ||\cdot|\ \Delta(\lambda)\ |}R_Nd\theta\ |^2\ dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leqslant C\ |\ \Delta(\mu)\ |\left(\int_0^1 |\ \int_0^{2\pi}\frac{\frac{\exp(Re(\omega^*\rho x))}{R_N^{\frac{k-1}{n}}}}{R_N(1-|\ \frac{\mu}{R_N}\ |)\cdot R_N^{\frac{n-k+1}{n}}\exp(Re(\omega^*\rho))}R_Nd\theta\ |^2\ dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$=C\frac{|\ \Delta(\mu)\ |}{R_N}\left(\int_0^1 |\ \int_0^{2\pi}\frac{\exp(Re(\omega^*\rho(x-1)))}{(1-|\ \frac{\mu}{R_N}\ |)}d\theta\ |^2\ dx\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Тем самым, из полученного следует предельное соотношение

$$\lim_{R_N\to\infty}\|Q_N(\cdot,\mu)\|=0.$$

Таким образом, доказана

Лемма 5. *Пусть существует ненулевой предел*

$$\lim_{\varepsilon\to1-0}\frac{1}{\varepsilon}\int_\varepsilon^1\sigma(x)dx=\alpha.$$

Тогда для любого комплексного числа μ справедливо предельное соотношение

$$\lim_{R_N\to\infty}\|\kappa(x,\mu)-\sum_{|\lambda_s|<R_N}\sum_{j=0}^{m_s-1}<\kappa(t,\mu),h_{s,m_s-1-j}(t)>y_{s,j}(x)\|=0.$$

Из леммы 5 и того, что $\overline{D}=L_2(0,1)$, следует утверждение теоремы 1.

6. Обратная задача

Изучается задача на собственные значения:

$$l(y) = \lambda y(x), x \in (0,1), \tag{23}$$

$$y^{(\nu-1)}(0) - \delta_{\nu k} \int_0^1 (l(y))\overline{\sigma(x)}dx = 0, \nu = \overline{1;n}. \tag{24}$$

По заданному полному набору собственных значений $\{\lambda_s, s = 1, 2, ...\}$ краевой задачи (23)-(24) надо восстановить граничную функцию $\sigma(x)$ из $L_2(0,1)$.

Из следствия 1 следует утверждение о прямой задаче.

Теорема 4. *При любой граничной функций $\sigma(x)$ из $L_2(0,1)$ справедливо тождество*

$$\sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_s} = \int_0^1 \kappa(x,0)\overline{\sigma(x)}dx.$$

Основной результат пункта — это алгоритм, позволяющий найти граничную функцию $\sigma(x)$ по спектру $\{\lambda_s, s = 1, 2, ...\}$:

Пусть задана последовательность ненулевых комплексных чисел $\{\lambda_s, s = 1, 2, ...\}$ без конечных предельных точек, обладающих свойствами:

1)ряд $\sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_s}$ сходится

2)система функций $\{\kappa(x, \lambda_s), s = 1, 2, ...\}$ полна и минимальна в $L_2(0,1)$

3)для биортогональной системы функций $\{h(x, \lambda_s), s = 1, 2, ...\}$ к $\{\kappa(x, \lambda_s), s = 1, 2, ...\}$ следующий ряд $\sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_s} h(x, \lambda_s)$ сходится в смысле $L_2(0,1)$.

Тогда граничная функция $\sigma(x)$ восстанавливается по формуле

$$\sigma(x) = \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_s} h(x, \lambda_s)$$

и принадлежит $L_2(0,1)$.

7. О тождестве для собственных значений

Обозначим через $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ собственные значения оператора L, пронумерованные в порядке возрастания по модулю с учетом их кратностей, а через $R(\lambda) = (L - \lambda I)^{-1}$ — резольвенту оператора L.

По формуле (3)

$$R(\lambda)f(x) = (K - \lambda I)^{-1}f(x) + \psi(x,\lambda) < f; K^*(K^* - \bar{\lambda}I)^{-1}\sigma > . \tag{25}$$

Вычислим след от (25). Для начала, вычислим след от правой части (25). След от первого слагаемого равен нулю, так как первое слагаемое является вольтерровым оператором. А след от второго слагаемого, т.е.

$$\begin{aligned} Sp(K) &= \textstyle\int_0^1 (K^*(K^* - \lambda I)^{-1}\sigma(t))(L(L - \lambda I)^{-1}\varphi(t))dt \\ &=< L(L - \lambda I)^{-1}\varphi, K^*(K^* - \lambda I)^{-1}\sigma >, \end{aligned}$$

где $Kf = \int_0^1 (K^*(K^* - \lambda I)^{-1}\sigma(t))(L(L - \lambda I)^{-1}\varphi(x))f(t)dt$.

Так как в тождестве (25) след от правой части существует, тогда след от левой части также существует и выполняется следующее равенство

$$Sp(R(\lambda)) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k - \lambda} =< L(L - \lambda I)^{-1}\varphi, K^*(K^* - \lambda I)^{-1}\sigma > . \tag{26}$$

Тождество (26) будет справедливым для всех λ из $U = \{\lambda : |\lambda| < |\lambda_1|\}$, и верны следующие разложения в ряд

$$\frac{1}{\lambda_k-\lambda}=\frac{1}{\lambda_k}(\frac{1}{1-\frac{\lambda}{\lambda_k}})=\frac{1}{\lambda_k}(1+\frac{\lambda}{\lambda_k}+(\frac{\lambda}{\lambda_k})^2+...+(\frac{\lambda}{\lambda_k})^n+...),$$

$$K^*(K^*-\lambda I)^{-1}=(I-\lambda(K^*)^{-1})^{-1}=I+\lambda(K^*)^{-1}+\lambda^2(K^*)^{-2}+...+\lambda^j(K^*)^{-j}+...,$$

$$L(L-\lambda I)^{-1}=(I-\lambda(L)^{-1})^{-1}=I+\lambda(L)^{-1}+\lambda^2(L)^{-2}+...+\lambda^j(L)^{-j}+....$$

Таким образом, получили следующее эквивалентное тождество к (26)

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}(\frac{1}{\lambda_k})^{l+1}\lambda^l=<\sum_{j=0}^{\infty}\lambda^j(L)^{-j}\varphi,\sum_{i=0}^{\infty}\lambda^i(K^*)^{-i}\sigma> . \tag{27}$$

Так как (27) справедливо для всех λ из $U=\{\lambda:|\lambda|<|\lambda_1|\}$, то, приравнивая коэффициенты при λ^l, получим, что

$$\sum_{k=1}^{\infty}(\frac{1}{\lambda_k})^{l+1}=\sum_{j+i=l}^{\infty}<(L)^{-j}\varphi,(K^*)^{-i}\sigma> .$$

для любого $l\in Z_+$.

Сформулируем полученные результаты в виде следующей теоремы.

Теорема 5. *Пусть* $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ *собственные значения задачи* (23)–(24)*, пронумерованные в порядке возрастания с учетом их кратностей, тогда для любого* $l\in Z_+$ *справедливо следующее равенство*

$$\sum_{k=1}^{\infty}(\frac{1}{\lambda_k})^{l+1}=\sum_{j+i=l}^{\infty}<(L)^{-j}\varphi,(K^*)^{-i}\sigma> .$$

В частности, при $l=0$ *получим*

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_k}=<\varphi,\sigma> .$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Агранович М.С. *Операторы с дискретным спектром (курс лекций)* Наука. Москва. 2005. С. 153.
2. Никольский Н.К. *Лекции об операторе сдвига* Наука. Москва. 1980. С. 384.
3. Отелбаев М., Шыныбеков А.Н. *О корректных задачах типа Бицадзе-Самарского* // ДАН СССР. 1982. Т. 265, № 4. С. 815–819.
4. Кокебаев Б. К., Отелбаев М., Шыныбеков А. Н. *О корректных задачах типа Бицадзе-Самарского* // Известия АН ССР. 1983. №1. С. 24–26.
5. Кангужин Б.Е., Анияров А.А. *Корректные задачи для оператора Лапласа в проколотом круге* // Математические заметки. 2011. Т. 89. №6. С. 856—867.
6. Берикханова Г.Е., Кангужин Б.Е. *Резольвенты конечномерных возмущенных корректных задач для бигармонического оператора* // Уфимский математический журнал. 2010. Т. 2. №1. С. 17—34.
7. Рисс Ф.Б., Секефальвен-Надь Б. *Лекции по функциональному анализу* Мир. Москва. 1979. С. 587.
8. Наймарк М.А. *Линейные дифференциальные операторы* Наука. Москва. 1969. С. 528.
9. Седлецкий А.М. *Биортогональные разложения функций в ряд экспонент на интервалах вещественной оси* // Успехи математических наук. 1982. Т. 37. №5(227). С. 51–95.

Балтабек Есматович Кангужин,
Казахский Национальный Университет им. аль-Фараби,
пр. аль-Фараби, 71,
500000, г. Алматы, Казахстан
E-mail: kanbalta@mail.ru

Даулет Багдатович Нурахметов,
Казахский Национальный Университет им. аль-Фараби,
пр. аль-Фараби, 71,
500000, г. Алматы, Казахстан
E-mail: daulet_arg@mail.ru

Нияз Есенжолович Токмагамбетов,
Казахский Национальный Университет им. аль-Фараби,
пр. аль-Фараби, 71,
500000, г. Алматы, Казахстан
E-mail: tokmagam@list.ru