ISSN 2074-1863 Уфимский математический журнал. Том 3. № 3 (2011). С. 55-66.

УДК 517.928:517.984

# ВОЗМУЩЕНИЕ ОПЕРАТОРА ШРЕДИНГЕРА УЗКИМ ПОТЕНЦИАЛОМ

**Р.Р. ГАДЫЛЬШИН, И.Х. ХУСНУЛЛИН**

**Аннотация.** Исследуется дискретный спектр оператора Шредингера на оси, возмущенного потенциалом, зависящим от двух малых параметров, один из которых описывает длину носителя потенциала, а обратное значение второго соответствуют величине потенциала.

**Ключевые слова:** Оператор Шредингера, возмущение, согласование асимптотический разложений.

## 1. Введение

В работе рассматривается возмущение дискретного спектра, полуограниченного снизу самосопряженного оператора Шредингера в $L_2(\mathbb{R})$:

$$\mathcal{H}_0 := -\frac{d^2}{dx^2} + \mathcal{W},$$

где $\mathcal{W}$ — оператор умножения на локально интегрируемую в $\mathbb{R}$ вещественную функцию $W(x)$ такую, что

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} W(x)|y(x)|^2 dx \geqslant c\|y\|^2_{L_2(\mathbb{R})}, \qquad c > -\infty \tag{1}$$

для любых функций $y$ из $L_2(\mathbb{R})$, для которых этот интеграл существует.

Возмущенный самосопряженный оператор (рассматриваемый также в $L_2(\mathbb{R})$) имеет вид:

$$\mathcal{H}_{\mu,\varepsilon} := -\frac{d^2}{dx^2} + \mathcal{W} + \mu^{-1}\mathcal{V}_\varepsilon,$$

где $\mathcal{V}_\varepsilon$ — оператор умножения на функцию $V\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$, $V(\xi)$ — вещественная финитная функция из $L_\infty(\mathbb{R})$,

$$\mu > 0, \qquad 0 < \varepsilon \ll 1.$$

Операторы $\mathcal{H}_0$ и $\mathcal{H}_{\mu,\varepsilon}$ понимаются как расширения по Фридрихсу (см., например, [1, Глава VI, § 2]) соответствующих симметричных дифференциальных выражений

$$H_0 = -\frac{d^2}{dx^2} + W(x), \qquad H_{\mu,\varepsilon} = -\frac{d^2}{dx^2} + W(x) + \mu^{-1}V\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$$

с $C_0^\infty(\mathbb{R})$.

R.R. Gadyl'shin, I.Kh. Khusnullin, Perturbation of the Shrödinger operator by a narrow potential.



Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ (11-01-00679), Президента России для Ведущих научных школ (НШ-6249.2010.1) и ФЦП (02.740.110612). Работа второго автора поддержана также грантом Президента России для молодых ученых – докторов наук (МД - 453.2010.1).

*Поступила 26 августа 2011 г.*

А именно, обозначим через $(\cdot,\cdot)_{L_2(\mathbb{R})}$ скалярное произведение в $L_2(\mathbb{R})$, а через $\mathfrak{h}_0$ и $\mathfrak{h}_{\mu,\varepsilon}$ — квадратичные формы на $C_0^\infty(\mathbb{R})$, порожденные операторами $H_0$ и $H_{\mu,\varepsilon}$:

$$\mathfrak{h}_0[y] := (H_0 y, y)_{L_2(\mathbb{R})}, \qquad \mathfrak{h}_{\mu,\varepsilon}[y] = (H_{\mu,\varepsilon} y, y)_{L_2(\mathbb{R})}.$$

Так как дифференциальные выражения $H_0$ и $H_{\mu,\varepsilon}$ симметричны, плотно определены в $L_2(\mathbb{R})$ и ограничены снизу, то квадратичные формы $\mathfrak{h}_0$ и $\mathfrak{h}_{\mu,\varepsilon}$ также симметричны, плотно определены в $L_2(\mathbb{R})$ и полуограничены снизу, причем, эти формы замыкаемы (см., например, [1, Глава VI, теорема 1.27]). Операторы $\mathcal{H}_0$ и $\mathcal{H}_{\mu,\varepsilon}$ определим как самосопряженные полуограниченные снизу операторы в $L_2(\mathbb{R})$, ассоциированные с замыканием этих форм (см., например, [1, Глава VI, теорема 2.6]).

В работе исследуется поведение собственных значений оператора $\mathcal{H}_{\mu,\varepsilon}$ при $\mu,\varepsilon \to 0$.

В случае, когда $\mu = \varepsilon^{-2}$, а $\int\limits_{-\infty}^{\infty} V(t)\,dt = 0$, аналогичные вопросы исследовались в [2].

## 2. Формулировка результатов

В следующем разделе будут доказаны следующие два утверждения.

**Лемма 1.** *Собственные значения операторов $\mathcal{H}_0$ (если они существуют) являются простыми.*

**Лемма 2.** *Пусть*

$$\varepsilon\mu^{-1} = o(1). \tag{2}$$

*Тогда $\mathcal{H}_{\mu,\varepsilon} \to \mathcal{H}_0$ при $\varepsilon \to 0$ в обобщенном смысле.*

Из этих двух лемм и [1, Глава IV, Теорема 3.16] вытекает

**Теорема 1.** *Пусть $\lambda_0$ — собственное значение оператора $\mathcal{H}_0$ и выполнено условие (2). Тогда к нему сходится единственное и, к тому же, простое собственное значение $\lambda^{\mu,\varepsilon}$ оператора $\mathcal{H}_{\mu,\varepsilon}$, а для соответствующего проектора $\mathcal{P}_{\mu,\varepsilon}$ имеет сходимость по норме к проектору $\mathcal{P}_0$, соответствующему собственному значению $\lambda_0$.*

Основным содержанием работы является построение полной асимптотики собственного значения $\lambda^{\mu,\varepsilon}$ при $\mu,\varepsilon \to 0$. Для этого дополнительно будем предполагать, что $V \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, функция $W$ бесконечно дифференцируема в некоторой окрестности нуля (т.е. существует $\delta > 0$ такое, что $W \in C^\infty[-\delta,\delta]$). Для строгого обоснования асимптотик понадобится более жесткое условие нежели (2). А именно, будем считать, что существует $\gamma > 0$, такое что

$$\varepsilon\mu^{-1} = O(\varepsilon^\gamma). \tag{3}$$

Всюду далее будем обозначать через $\psi_0$ нормированную в $L_2(\mathbb{R})$ собственную функцию оператора $\mathcal{H}_0$, соответствующую собственному значению $\lambda_0$, и использовать следующее обозначение:

$$\langle g(t)\rangle := \int\limits_{-\infty}^{\infty} g(t)\,dt.$$

В работе будет доказана следующая

**Теорема 2.** *Собственное значение $\lambda^{\mu,\varepsilon}$ оператора $\mathcal{H}_{\mu,\varepsilon}$, сходящееся к $\lambda_0$, имеет асимптотику*

$$\lambda^{\mu,\varepsilon} = \lambda_0 + \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{i} \varepsilon^i \mu^{-j} \lambda_{i,j}, \tag{4}$$

*где*

$$\lambda_{1,1} = \psi_0^2(0)\,\langle V(t)\rangle. \tag{5}$$

*Если*
$$\psi_0(0)\left\langle V(t)\right\rangle = 0, \tag{6}$$
*то*
$$\lambda_{i,i} = 0. \tag{7}$$
*Если*
$$\left\langle V(t)\right\rangle = 0, \tag{8}$$
*то*
$$\lambda_{2,1} = 2\psi_0(0)\psi_0'(0)\left\langle tV(t)\right\rangle. \tag{9}$$
*Если*
$$\psi_0(0) = 0, \tag{10}$$
*то*
$$\lambda_{i+1,i} = 0, \tag{11}$$
$$\lambda_{3,1} = (\psi_0'(0))^2\left\langle t^2 V(t)\right\rangle. \tag{12}$$

Из теоремы вытекает

**Следствие 1.** *Если имеет место равенство (8), то*
$$\lambda^{\mu,\varepsilon} = \lambda_0 + \varepsilon^2\mu^{-1}\lambda_{2,1} + O\left(\varepsilon^3\mu^{-2}\right),$$
*где $\lambda_{2,1}$ определяется равенством (9).*

*Если имеет место равенство (10), то*
$$\lambda^{\mu,\varepsilon} = \lambda_0 + \varepsilon^3\mu^{-1}\lambda_{3,1} + O\left(\varepsilon^4\mu^{-2}\right),$$
*где $\lambda_{3,1}$ определяется равенством (12).*

## 3. Доказательство лемм 1 и 2

*Доказательство леммы 1.* Допустим, что оператор $\mathcal{H}_0$ имеет две линейно независимые собственные функции $y_1,\ y_2$, соответствующие собственному значению $\lambda_0$. Следовательно,
$$(y_i', v')_{L_2(\mathbb{R})} = (\lambda y_i - W y_i, v)_{L_2(\mathbb{R})} \tag{13}$$
для любой функции $v \in W_2^1(\mathbb{R})$. Обозначим через $w$ определитель Вронского функций $y_1$ и $y_2$:
$$w := y_1 y_2' - y_2 y_1'.$$
По определению производной обобщенной функции (см., например, [3]), для любой функции $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ имеем
$$(w', \varphi) = -\left(y_1 y_2' - y_2 y_1', \varphi'\right).$$
Так как $y_1, y_2 \in W_2^1(\mathbb{R})$, то $y_1 y_2',\ y_2 y_1' \in L_1(\mathbb{R})$. Поэтому
$$(w', \varphi) = -\left(y_1 y_2', \varphi'\right)_{L_2(\mathbb{R})} + \left(y_2 y_1', \varphi'\right)_{L_2(\mathbb{R})}. \tag{14}$$
Так как $y_i \in W_2^1(\mathbb{R})$, то для любой функции $C_0^\infty(\mathbb{R})$ имеем:
$$\left(y_1 y_2', \varphi'\right)_{L_2(\mathbb{R})} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} y_1 y_2' \varphi' dx = \int\limits_{-\infty}^{\infty} y_2' \left((y_1\varphi)' - y_1'\varphi\right) dx$$
$$= \left(y_2', (y_1\varphi)'\right)_{L_2(\mathbb{R})} - \int\limits_{-\infty}^{\infty} y_1' y_2' \varphi dx.$$

Аналогично,

$$(y_1'y_2, \varphi')_{L_2(\mathbb{R})} = (y_1', (y_2\varphi)')_{L_2(\mathbb{R})} - \int\limits_{-\infty}^{\infty} y_1'y_2'\varphi dx.$$

Из последних двух равенств и (14) следует, что

$$(w', \varphi) = -(y_2', (y_1\varphi)')_{L_2(\mathbb{R})} + (y_1', (y_2\varphi)')_{L_2(\mathbb{R})}.$$

Из этого равенства и равенства (13) последовательно получаем, что

$$(w', \varphi) = -(\lambda y_2 - Wy_2, y_1\varphi)_{L_2(\mathbb{R})} + (\lambda y_1 - Wy_1, y_2\varphi)_{L_2(\mathbb{R})} = 0.$$

Откуда следует, что $w \equiv C$, где $C$ — константа. Но, так как $w \in L_1(\mathbb{R})$, то очевидно, что $C = 0$. Это означает, что $y_1, y_2$ –линейно зависимы. Из полученного противоречия следует справедливость леммы 1. □

*Доказательство леммы 2.* Из определения форм $\mathfrak{h}_0$ и $\mathfrak{h}_{\mu,\varepsilon}$ и функции $V$ следует, что

$$|(\mathfrak{h}_{\mu,\varepsilon} - \mathfrak{h}_0)[y]| = \mu^{-1}\left|\int\limits_{-\infty}^{\infty} V\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)|y(x)|^2 dx\right| \leqslant C\mu^{-1}\int\limits_{-a\varepsilon}^{a\varepsilon}|y(x)|^2 dx,$$

где $C > 0$ — некоторые фиксированные числа, $a > 0$ — любое число такое, что $\mathrm{supp} V(x) \subset [-a, a]$. Аналогично доказательству неравенства Фридрихса нетрудно доказать следующий его аналог (см., например, [4]):

$$\int\limits_{-\varepsilon a}^{\varepsilon a}|y|^2 dx \leqslant C_1\varepsilon\int\limits_{-\infty}^{\infty}(|y'|^2 + |y|^2)dx,$$

где $C_1$ — некоторая константа, независящая от $y \in C_0^\infty(\mathbb{R})$. Следовательно,

$$|(\mathfrak{h}_{\mu,\varepsilon} - \mathfrak{h}_0)[y]| \leqslant C_2\mu^{-1}\varepsilon\int\limits_{-\infty}^{\infty}(|y'|^2 + |y|^2)dx.$$

А так как

$$\mathfrak{h}_0[y] = \int\limits_{-\infty}^{\infty}|y'|^2 dx + \int\limits_{-\infty}^{\infty}W(x)|y(x)|^2 dx,$$

то в силу (1) получаем следующую оценку:

$$|(\mathfrak{h}_{\mu,\varepsilon} - \mathfrak{h}_0)[y]| \leqslant -C_2\mu^{-1}\varepsilon\int\limits_{-\infty}^{\infty}(W(x)-1)|y(x)|^2 dx + C_2\mu^{-1}\varepsilon\mathfrak{h}_0[y]$$

$$\leqslant C_2\mu^{-1}\varepsilon\left(|c-1|\int\limits_{-\infty}^{\infty}|y(x)|^2 dx + \mathfrak{h}_0[y]\right).$$

Так как квадратичные формы $\mathfrak{h}_0$ и $\mathfrak{h}_{\mu,\varepsilon}$ плотно определены в $L_2(\mathbb{R})$, ограничены снизу и замыкаемы, а $\mu^{-1}\varepsilon \to 0$ при $\varepsilon \to 0$ силу (2), то из последней оценки и [1, Глава VI, теорема 3.6] следует справедливость утверждения доказываемой леммы. □

## 4. Построение асимптотик

При построении асимптотик собственного значения $\lambda^{\mu,\varepsilon}$ и соответствующей собственной функции $\psi^{\mu,\varepsilon}$ будет использоваться метод согласования асимптотических разложений [5].

Из теоремы 1 вытекает, что для нормированной в $L_2(\mathbb{R})$ собственной функции $\psi^{\mu,\varepsilon}$, соответствующей собственному значению $\lambda^{\mu,\varepsilon}$, сходящемуся к $\lambda_0$, имеет место сходимость $\psi^{\mu,\varepsilon} \to \psi_0$ в $L_2(\mathbb{R})$. Поэтому вне окрестности начала координат (где и сосредоточено возмущение оператора $\mathcal{H}_{\mu,\varepsilon}$) асимптотику (*внешние разложения*) функции $\psi^{\mu,\varepsilon}$ по аналогии с (4) будем искать в виде

$$\psi^{ex,\pm}(x,\mu,\varepsilon) = \psi_0(x) + \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{i} \varepsilon^i \mu^{-j} \psi_{i,j}^{\pm}(x), \qquad x \in \mathbb{R}_\pm. \tag{15}$$

Вне окрестности нуля $V\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \equiv 0$. А так как и внешние разложения будут использоваться вне окрестности нуля, то в силу определения операторов $\mathcal{H}_{\mu,\varepsilon}$, $\mathcal{H}_0$ получаем следующие уравнения (в обобщенном смысле) для внешних разложений:

$$H_0\psi^{ex,\pm} = \lambda^{\mu,\varepsilon}\psi^{ex,\pm}, \quad x \in \mathbb{R}_\pm.$$

Здесь и всюду далее, $\mathbb{R}_\pm = \{x : \pm x > 0\}$. Подставляя в эти уравнения ряды (4) и (15) и собирая коэффициенты при одинаковых степенях $\varepsilon, \mu$, получаем, очевидно, выполненное равенство

$$H_0\psi_0 = \lambda_0\psi_0 \tag{16}$$

и следующие уравнения для остальных коэффициентов внешних разложений:

$$\varepsilon^i\mu^{-j} : H_0\psi_{i,j}^{\pm} = \lambda_{i,j}\psi_0 + \lambda_0\psi_{i,j}^{\pm} + \sum_{p=1}^{i-1}\sum_{q=1}^{j-1} \lambda_{p,q}\psi_{i-p,j-q}^{\pm}, \quad x \in \mathbb{R}_\pm, \tag{17}$$

где $i \geq 1, \quad 1 \leqslant j \leqslant i$. Всюду далее на коэффициенты $\psi_{i,j}^{\pm}$ будем накладывать нормировочные условия:

$$\int_{-\infty}^{0} \psi_{i,j}^{-}\psi_0\,dx + \int_{0}^{\infty} \psi_{i,j}^{+}\psi_0\,dx = 0. \tag{18}$$

Решения уравнений (17) рассматриваются в $W_{2,loc}^2(\mathbb{R}_\pm) \cap L_2(\mathbb{R}_\pm)$. А так как функция $W$ бесконечно дифференцируемая в окрестности нуля, то для любых постоянных $\lambda_{i,j}$ решения $\psi_{i,j}^{\pm}$ системы рекуррентных уравнений (17) из $W_{2,loc}^2(\mathbb{R}_\pm)$ принадлежат $C^\infty[0,\delta]$, $C^\infty[-\delta,0]$, соответственно.

В окрестности начала координат асимптотику (*внутреннее разложение*) функции $\psi^{\mu,\varepsilon}$ естественно искать в виде разложения по функциям, зависящим от переменой $\xi = x\varepsilon^{-1}$, соответствующей длине носителя возмущающего потенциала $V\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$.

Структура внутреннего разложения $\psi^{in}(\xi,\mu,\varepsilon)$ определяется из следующих соображений. Ряды Тейлора в нуле коэффициентов внешних разложений имеют вид:

$$\begin{gathered}\psi_0(x) = \sum_{k=0}^{\infty} P_k^{(0)}(x), \qquad P_k^{(0)}(x) = \frac{\psi_0^{(k)}(0)}{k!}x^k, \quad x \to 0, \\ \psi_{i,j}^{\pm}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} P_k^{(i,j,\pm)}(x), \qquad P_k^{(i,j,\pm)}(x) = \frac{\left(\psi_{i,j}^{\pm}\right)^{(k)}(0)}{k!}x^k, \quad x \to \pm 0.\end{gathered} \tag{19}$$

Подставляя в (15) вместо функций $\psi_0(x)$ и $\psi^{\pm}_{i,j}(x)$ их асимптотики в нуле (19) и делая замену переменной $x = \xi\varepsilon$, получаем, что

$$\psi^{ex,\pm}(x,\mu,\varepsilon) = \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon^i V_{i,0}(\xi) + \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{i} \varepsilon^i \mu^{-j} V^{\pm}_{i,j}(\xi), \qquad \xi\varepsilon \to \pm 0, \tag{20}$$

где

$$V_{i,0}(\xi) = P_i^{(0)}(\xi), \qquad V^{\pm}_{i,j}(\xi) = \sum_{q=0}^{i-j} P_q^{(i-q,j,\pm)}(\xi), \quad 1 \leqslant j \leqslant i. \tag{21}$$

В соответствии с методом согласования асимптотических разложений внутреннее разложение будем искать в виде

$$\psi^{in}(\xi,\mu,\varepsilon) = \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon^i v_{i,0}(\xi) + \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{i} \varepsilon^i \mu^{-j} v_{i,j}(\xi), \tag{22}$$

где

$$v_{i,0}(\xi) = V_{i,0}(\xi), \qquad v_{i,j}(\xi) = V^{\pm}_{i,j}(\xi), \qquad \xi \to \pm\infty. \tag{23}$$

Подставляя ряды (4) и (22) в уравнение

$$H_{\mu,\varepsilon}\psi^{in} = \lambda^{\mu,\varepsilon}\psi^{in},$$

заменяя в нем функцию $W(x)$ на ее разложение в ряд Тейлора в нуле, переходя к переменной $\xi = x\varepsilon^{-1}$ и собирая коэффициенты при одинаковых степенях $\varepsilon, \mu$, получаем следующие уравнения для коэффициентов внутреннего разложения:

$$\varepsilon^i : \frac{d^2 v_{i,0}}{d\xi^2} = \sum_{t=0}^{i-2} \frac{W^{(i-t-2)}(0)}{(i-t-2)!}\xi^{i-t-2} v_{t,0} - \lambda_0 v_{i-2,0}, \qquad i \geqslant 0, \tag{24}$$

$$\begin{aligned} \varepsilon^i\mu^{-j} : \ \frac{d^2 v_{i,j}}{d\xi^2} =& \sum_{t=0}^{i-2} \frac{W^{(i-t-2)}(0)}{(i-t-2)!}\xi^{i-t-2} v_{t,j} - \lambda_0 v_{i-2,j} + \\ &+ V(\xi) v_{i-2,j-1} + \sum_{p=1}^{i-1}\sum_{q=1}^{j-1} \lambda_{p,q} v_{i-p-2,j-q}, \qquad 1 \leqslant j \leqslant i. \end{aligned} \tag{25}$$

Для краткости обозначений, здесь и всюду далее, коэффициенты $\lambda_{p,s}$, $v_{p,s}$, индексы которых не соответствуют индексам из (4) и (20), понимаются равными нулю.

Таким образом, согласование асимптотических разложений свелось к доказательству существования постоянных $\lambda_{i,j}$ таких, что для решений уравнений (17), (18) и уравнений (24), (25) справедливы равенства (23).

В силу определения (21), (19) многочленов $V_{i,0}$ и уравнения (16) функции

$$v_{0,0}(\xi) \equiv \psi_0(0), \quad v_{1,0}(\xi) = \psi_0'(0)\xi, \quad v_{k,0}(\xi) = \frac{\psi_0^{(k)}(0)}{k!}\xi^k, \quad k \geqslant 2, \tag{26}$$

удовлетворяют (24), (23).

Уравнения (17) для $\psi^{\pm}_{i,i}$ имеют вид:

$$H_0\psi^{\pm}_{i,i} = \lambda_0\psi^{\pm}_{i,i} + \lambda_{i,i}\psi_0 + \sum_{p=1}^{i-1} \lambda_{p,p}\psi^{\pm}_{i-p,i-p}, \quad x \in \mathbb{R}_{\pm}, \qquad i \geqslant 1. \tag{27}$$

Выведем условие сопряжения для $\psi^{\pm}_{i,i}$ в нуле из условий согласования (23). Уравнения (25) и равенства (21), (19) для $v_{i,i}$ и $V^{\pm}_{i,i}$ имеют вид:

$$\frac{d^2 v_{i,i}}{d\xi^2} = 0, \qquad V^{\pm}_{i,i}(\xi) \equiv \psi^{\pm}_{i,i}(0), \qquad i \geqslant 1. \tag{28}$$

Для функций $U^- \in C^\infty[-\delta,0]$ и $U^+ \in C^\infty[0,\delta]$ введем обозначения:

$$[U](0) := U^+(0) - U^-(0), \qquad [U'](0) := (U^+)'(0) - (U^-)'(0).$$

Из (28) и условия согласования (23) для $v_{i,i}$ последовательно вытекает, что

$$[\psi_{i,i}](0) = 0, \qquad i \geqslant 1, \tag{29}$$

$$v_{i,i}(\xi) = V^{\pm}_{i,i}(\xi) \equiv \psi^{+}_{i,i}(0) = \psi^{-}_{i,i}(0) := \psi_{i,i}(0), \quad i \geqslant 1. \tag{30}$$

Уравнения (25) и равенства (21), (19) для $v_{i+1,i}$ и $V^{\pm}_{i+1,i}$ имеют вид:

$$\frac{d^2 v_{i+1,i}}{d\xi^2} = V(\xi) v_{i-1,i-1}, \qquad i \geqslant 1 \tag{31}$$

$$V^{\pm}_{i+1,i}(\xi) = \left(\psi^{\pm}_{i,i}\right)'(0)\xi + \psi^{\pm}_{i+1,i}(0), \qquad i \geqslant 1. \tag{32}$$

Учитывая (26) получаем, что функции

$$\begin{aligned} v_{2,1}(\xi) =& \psi_0(0) \int\limits_{-\infty}^{\xi} \int\limits_{-\infty}^{\tau} V(t)dtd\tau + a_{2,1}\xi + b_{2,1}, \\ v_{j+1,j}(\xi) =& \psi_{j-1,j-1}(0) \int\limits_{-\infty}^{\xi} \int\limits_{-\infty}^{\tau} V(t)dtd\tau + a_{j+1,j}\xi + b_{j+1,j}, \qquad j \geqslant 2, \end{aligned} \tag{33}$$

при любых постоянных $a_{p+1,p}$, $b_{p+1,p}$ являются решениями уравнений (31). Из (33) вытекает, что

$$\begin{aligned} v_{i+1,i}(\xi) =& a_{i+1,i}\xi + b_{i+1,i}, \quad \xi \to -\infty, \qquad i \geqslant 1, \\ v_{2,1}(\xi) =& \psi_0(0)\left(\langle V(t)\rangle \xi - \langle tV(t)\rangle\right) + a_{2,1}\xi + b_{2,1}, \quad \xi \to +\infty \\ v_{j+1,j}(\xi) =& \psi_{j-1,j-1}(0)\left(\langle V(t)\rangle \xi - \langle tV(t)\rangle\right) + \\ & + a_{j+1,j}\xi + b_{j+1,j}, \quad \xi \to +\infty, \qquad j \geqslant 2. \end{aligned} \tag{34}$$

Сравнивая (32) и правые части (34), получаем справедливость следующего утверждения.

**Лемма 3.** *Если выполняются следующие условия сопряжения в нуле*

$$[\psi'_{1,1}](0) = \psi_0(0)\langle V(t)\rangle, \qquad [\psi'_{j,j}](0) = \psi_{j-1,j-1}(0)\langle V(t)\rangle, \qquad j \geqslant 2, \tag{35}$$

*то существуют постоянные $a_{i+1,i}$, при которых*

$$\begin{aligned} v_{2,1}(\xi) - V^{+}_{2,1}(\xi) =& b_{2,1} - \psi^{+}_{2,1}(0) - \psi_0(0)\langle tV(t)\rangle, \quad \xi \to +\infty, \\ v_{2,1}(\xi) - V^{-}_{2,1}(\xi) =& b_{2,1} - \psi^{-}_{2,1}(0), \quad \xi \to -\infty, \\ v_{j+1,j}(\xi) - V^{+}_{j+1,j}(\xi) =& b_{j+1,j} - \psi^{+}_{j+1,j}(0) - \psi^{+}_{j-1,j-1}(0)\langle tV(t)\rangle, \ \ \xi \to +\infty, \\ v_{j+1,j}(\xi) - V^{-}_{j+1,j}(\xi) =& b_{j+1,j} - \psi^{-}_{j+1,j}(0), \quad \xi \to -\infty, \qquad j \geqslant 2. \end{aligned} \tag{36}$$

*Если, к тому же,*

$$\begin{aligned} [\psi_{2,1}](0) =& -\psi_0(0)\langle tV(t)\rangle, \\ [\psi_{j+1,j}](0) =& -\psi_{j-1,j-1}(0)\langle tV(t)\rangle, \qquad j \geqslant 2, \end{aligned} \tag{37}$$

*то существуют и постоянные $b_{i+1,i}$, при которых*

$$v_{i+1,i}(\xi) - V^{\pm}_{i+1,i}(\xi) = 0, \qquad \xi \to \pm\infty,$$

*т.е. выполняется (23) для $j = i+1$.*

Аналогично [4] легко показать справедливость следующего утверждения.

**Лемма 4.** *Пусть* $F^\pm \in L_2(\mathbb{R}_\pm)$, $F^+ \in C^\infty[0,\delta]$, $F^- \in C^\infty[-\delta,0]$ *и*

$$\int\limits_{-\infty}^{0} F^-\psi_0\,dx + \int\limits_{0}^{\infty} F^+\psi_0\,dx = 0.$$

*Тогда для любых чисел* $\alpha,\beta$ *существуют функции* $U^\pm \in W^2_{2,loc}(\mathbb{R}_\pm) \cap L_2(\mathbb{R}_\pm)$, $U^+ \in C^\infty[0,\delta]$, $U^- \in C^\infty[-\delta,0]$, *являющиеся решениями краевой задачи*

$$H_0U^\pm = \lambda_0U^\pm + F^\pm + \Lambda\psi_0, \quad x \gtrless 0, \qquad [U](0) = \beta, \quad [U'](0) = \alpha,$$

$$\int\limits_{-\infty}^{0} U^-\psi_0\,dx + \int\limits_{0}^{\infty} U^+\psi_0\,dx = 0$$

*при*

$$\Lambda = \alpha\psi_0(0) - \beta\psi_0'(0).$$

Из леммы вытекает

**Следствие 2.** *Если* $\psi_0(0) = \beta = 0$, *то* $\Lambda = 0$.

Из этой леммы следует, что при $\lambda_{1,1}$, определяемом равенством (5),

$$\lambda_{p,p} = \psi_0(0) < V(t) > \widetilde{\lambda}_{p,p}, \qquad p \geqslant 2, \tag{38}$$

где $\widetilde{\lambda}_{p,p}$ — некоторые постоянные, существуют функции вида

$$\psi^\pm_{i,i}(x) = \psi_0(0) < V(t) > \widetilde{\psi}^\pm_{i,i}(x), \qquad i \geqslant 1, \tag{39}$$

удовлетворяющие (27), (29), (35), (18). Найдя $\psi^\pm_{i,i}(x)$, окончательно определяем $v_{i,i}$ в соответствии (30), добиваемся условия согласования (23) для $v_{i,i}$, а в силу леммы 3 находим функции $v_{i+1,i}$ с точностью до произвольных слагаемых $b_{i+1,i}$, добиваясь равенства (36) для $v_{i+1,i}$.

Из (5), (38), (39), (30), в частности, следует, что

$$\text{если } \psi_0(0)\,\langle V(t)\rangle = 0, \text{ то } \psi^\pm_{i,i}(x) = v_{i,i}(\xi) \equiv \lambda_{i,i} = 0, \qquad i \geqslant 1. \tag{40}$$

Перейдем к следующим шагам построения асимптотик. Обозначим

$$\widetilde{V}^\pm_{i,j}(\xi) := V^\pm_{i,j}(\xi) - (\psi^\pm_{i-1,j})'(0)\xi - \psi^\pm_{i,j}(0), \quad 1 \leqslant j \leqslant i-1. \tag{41}$$

В силу уравнения (17) и определений (21), (19), (41) многочленов $V^\pm_{i,j}$, $\widetilde{V}^\pm_{i,j}$ получаем справедливость следующего утверждения.

**Лемма 5.** *Многочлены* $\widetilde{V}^\pm_{i,j}(\xi)$ *могут зависеть только от* $\lambda_{p,q}$ *и* $\psi^\pm_{p,q}(x)$ *при* $p \leqslant j-1$, $q \leqslant j$ *и удовлетворяют равенствам*

$$\left(\widetilde{V}^\pm_{i,j}\right)'(0) = \widetilde{V}^\pm_{i,j}(0) = 0,$$

$$\begin{aligned}\frac{d^2\widetilde{V}^\pm_{i,j}}{d\xi^2} =& \sum_{t=0}^{i-2} \frac{W^{(i-t-2)}(0)}{(i-t-2)!}\xi^{i-t-2}V^\pm_{t,j} - \lambda_0 V^\pm_{i-2,j} + \\ &+ \sum_{p=1}^{i-1}\sum_{q=1}^{j-1} \lambda_{p,q}V^\pm_{i-p-2,j-q}, \qquad \xi \in \mathbb{R}_\pm, \qquad 1 \leqslant j \leqslant i-1.\end{aligned}$$

В [4] показана справедливость следующего утверждения.

**Лемма 6.** *Пусть функция* $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ *совпадает с многочленами* $f^\pm(\xi)$ *при* $\xi \to \pm\infty$, *а для многочленов* $\widetilde{v}^\pm(\xi)$ *справедливы равенства*

$$\frac{d^2\widetilde{v}^\pm}{d\xi^2} = f^\pm, \qquad (\widetilde{v}^\pm)'(0) = \widetilde{v}^\pm(0) = 0.$$

*Тогда для общего решения уравнения*

$$\frac{d^2 v}{d\xi^2} = f$$

*справедливы равенства*

$$\begin{aligned} v(\xi) =& \widetilde{v}^-(\xi) + a\xi + b, \quad \xi \to -\infty, \\ v(\xi) =& \widetilde{v}^+(\xi) + A\xi + B + a\xi + b, \quad \xi \to +\infty, \end{aligned}$$

*где* $A$, $B$ *— некоторые константы, зависящие от* $f$, *а* $a$, $b$ *— произвольные постоянные.*

На следующем шаге в силу лемм 5, 6 находим решения $v_{q+2,q}$ уравнений (25) такие, что

$$\begin{aligned} v_{q+2,q}(\xi) - V^+_{q+2,q}(\xi) = &\left(A_{q+2,q} + a_{q+2,q} - \left(\psi^+_{q+1,q}\right)'(0)\right)\xi + \\ &+ B_{q+2,q} + b_{q+2,q} - \psi^+_{q+2,q}(0), \quad \xi \to +\infty, \\ v_{q+2,q}(\xi) - V^-_{q+2,q}(\xi) = &\left(a_{q+2,q} - \left(\psi^-_{q+1,q}\right)'(0)\right)\xi + \\ &+ b_{q+2,q} - \psi^-_{q+2,q}(0), \quad \xi \to -\infty, \qquad q \geqslant 1, \end{aligned} \tag{42}$$

где $A_{q+2,q}$, $B_{q+2,q}$ — вполне определенные постоянные, которые не зависят от $A_{p+2,p}$, $B_{p+2,p}$ при $p > q$, а $a_{q+2,q}$, $b_{q+2,q}$ — произвольные постоянные. Помимо условий сопряжения (37) наложим и условия сопряжения

$$[\psi'_{q+1,q}](0) = A_{q+2,q}, \qquad q \geqslant 1. \tag{43}$$

В силу леммы 4 существуют постоянные $\lambda_{q+1,q}$ и функции $\psi^\pm_{q+1,q}(x)$, удовлетворяющие (17), (18) при $i = q+1$, $j = q$ и условиям сопряжения (37), (43). Определив $\psi^\pm_{q+1,q}(x)$, последовательно находим $b_{q+1,q}$, $a_{q+1,q}$, окончательно определяем функции $v_{q+1,q}(\xi)$, добиваясь равенств $v_{q+1,q}(\xi) = V^\pm_{q+1,q}(\xi)$ при $\xi \to \pm\infty$, и функции $v_{q+2,q}(\xi)$ с точностью до произвольных слагаемых $b_{q+2,q}$, добиваясь равенств

$$\begin{aligned} v_{q+2,q}(\xi) - V^+_{q+2,q}(\xi) =& B_{q+2,q} + b_{q+2,q} - \psi^+_{q+2,q}(0), \quad \xi \to +\infty, \\ v_{q+2,q}(\xi) - V^-_{q+2,q}(\xi) =& b_{q+2,q} - \psi^-_{q+2,q}(0), \quad \xi \to -\infty, \qquad q \geqslant 1 \end{aligned}$$

(аналог равенств (36) на предыдущем шагу). И так далее.

В результате получаем справедливость следующей леммы

**Лемма 7.** *Существуют ряды (4), (15), (22) такие, что справедливы равенства (17), (24), (25), (23), где многочлены* $V_{i,0}(\xi)$ *и* $V^\pm_{i,j}(\xi)$ *определяются равенствами (21), (19).*

*Для коэффициентов этих рядов справедливы равенства (5), (26), (40).*

Заметим, что равенства (7) при условии (6) содержатся в (40).

Покажем справедливость равенства (9) при условии (8). В силу леммы 4 имеем:

$$\lambda_{2,1} = [\psi'_{2,1}](0)\psi_0(0) - [\psi_{2,1}](0)\psi'_0(0). \tag{44}$$

Значение $[\psi_{2,1}](0)$ определено в (37), а равенство (43) при $q = 1$ имеет вид

$$[\psi'_{2,1}](0) = A_{3,1}, \tag{45}$$

причем,

$$\begin{aligned} v_{3,1}(\xi) =& (A_{3,1} + a_{3,1})\,\xi + B_{3,1} + b_{3,1}, \quad \xi \to +\infty, \\ v_{3,1}(\xi) =& a_{3,1}\xi + b_{3,1}, \quad \xi \to -\infty \end{aligned} \tag{46}$$

согласно (42), а $v_{3,1}$ решение уравнения (25) при $i = 3$, $j = 1$. Так как $v_{1,1}(\xi) \equiv 0$, $v_{1,0}(\xi) = \psi_0'(0)\xi$ в силу (40) и (26) соответственно, то уравнение (25) для $v_{3,1}$ имеет вид

$$\frac{d^2 v_{3,1}}{d\xi^2} = \psi_0'(0)V(\xi)\xi. \tag{47}$$

Следовательно,

$$v_{3,1}(\xi) = \psi_0'(0)\int\limits_{-\infty}^{\xi}\int\limits_{-\infty}^{\tau} tV(t)dtd\tau + a_{3,1}\xi + b_{3,1}, \tag{48}$$

а $A_{3,1} = \psi_0'(0)\langle tV(t)\rangle$. Из этого равенства и равенств (37), (45), (44) вытекает равенство (9) при условии (8).

Покажем справедливость равенств (11) при условии (10). Так как $v_{j,j} \equiv 0$ при $j \geqslant 0$ в силу (40) и равенства $v_{0,0}(\xi) \equiv \psi_0(0) = 0$, то с учетом уравнений (31) и следствия 2 справедливость этих равенств вытекает из следующей цепочки:

$$v_{j,j} \equiv 0, \quad j \geqslant 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2}{d\xi^2}v_{i+1,i} \equiv 0, \quad i \geqslant 1 \quad \Rightarrow \quad v_{i+1,i}(\xi) = a_{i+1,i}\xi + b_{i+1,i}$$
$$\Rightarrow \quad [\psi_{i+1,i}](0) = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_{i+1,i} = 0.$$

Осталось показать справедливость равенства (12) при условии (10). В силу леммы 4 имеем:

$$\lambda_{3,1} = -[\psi_{3,1}](0)\psi_0'(0). \tag{49}$$

Так как $v_{1,1}(\xi) = 0$, а $v_{1,0}(\xi) = \psi_0'(0)\xi$ в силу (26), то уравнение (25) для $v_{3,1}$ опять имеет вид (47). Следовательно, справедливы равенство (48) и (46), где $B_{3,1} = -\psi_0'(0)\langle t^2 V\rangle$. Так как $[\psi_{3,1}](0) = B_{3,1}$, то из (49) следует равенство (12).

## 5. Обоснование асимптотик

Пусть $\chi(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ — срезающая функция, равная нулю при $|x| < 1$ и — единице при $|x| > 2$, $\widehat{\lambda}_N(\varepsilon,\mu)$, $\widehat{\psi}_N^{\pm}(x,\varepsilon,\mu)$ и $\widehat{v}_N(\xi,\varepsilon,\mu)$ – частичные суммы по $\varepsilon$ до порядка $N$ включительно рядов (4), (15) и (22), соответственно. Обозначим

$$\Psi_N(x,\varepsilon,\mu) := \chi\left(x\varepsilon^{-\frac{1}{2}}\right)\left(\widehat{\psi}_N^{+}(x,\varepsilon,\mu) + \widehat{\psi}_N^{-}(x,\varepsilon,\mu)\right) + \\ + \left(1 - \chi\left(x\varepsilon^{-\frac{1}{2}}\right)\right)\widehat{v}_N\left(x\varepsilon^{-1},\varepsilon,\mu\right).$$

Из определения $\Psi_N$ следует, что эта функция принадлежит области определения оператора $\mathcal{H}_{\mu,\varepsilon}$ (совпадающей с областью определения оператора $\mathcal{H}_0$) и

$$\|\Psi_N\|_{L_2(\mathbb{R})} \to 1, \qquad \varepsilon \to 0. \tag{50}$$

Следующая лемма доказывается на основе утверждений леммы 7.

**Лемма 8.** *Справедливо равенство*

$$\mathcal{H}_{\mu,\varepsilon}\Psi_N = \widehat{\lambda}_N\Psi_N + F_N, \tag{51}$$

*где*

$$\|F_N\|_{L_2(\mathbb{R})} = O\left(\varepsilon^{\frac{N}{2}-1} + \varepsilon^{\gamma N-1}\right). \tag{52}$$

*Доказательство.* Из определений $\Psi_N$ и $\mathcal{H}_{\mu,\varepsilon}$ следует, что

$$F_N = F_{1,N} + F_{2,N} + F_{3,N}, \tag{53}$$

где

$$\begin{aligned}
F_{1,N}(x,\varepsilon,\mu) =&\chi\left(x\varepsilon^{-\frac{1}{2}}\right)\left(H_0-\widehat{\lambda}_N\right)\left(\widehat{\psi}_N^{+}(x,\varepsilon,\mu)+\widehat{\psi}_N^{-}(x,\varepsilon,\mu)\right),\\
F_{2,N}(x,\varepsilon,\mu) =&\left(1-\chi\left(x\varepsilon^{-\frac{1}{2}}\right)\right)\left(H_{\mu,\varepsilon}-\widehat{\lambda}_N\right)\widehat{v}_N\left(x\varepsilon^{-1},\varepsilon,\mu\right),\\
F_{3,N}(x,\varepsilon,\mu) =&-\left(\widehat{\psi}_N^{+}(x,\varepsilon,\mu)+\widehat{\psi}_N^{-}(x,\varepsilon,\mu)-\widehat{v}_N\left(x\varepsilon^{-1},\varepsilon,\mu\right)\right)\frac{d^2}{dx^2}\chi\left(x\varepsilon^{-\frac{1}{2}}\right)-\\
&-2\frac{d}{dx}\left(\widehat{\psi}_N^{+}(x,\varepsilon,\mu)+\widehat{\psi}_N^{-}(x,\varepsilon,\mu)-\widehat{v}_N\left(x\varepsilon^{-1},\varepsilon,\mu\right)\right)\frac{d}{dx}\chi\left(x\varepsilon^{-\frac{1}{2}}\right)
\end{aligned}$$

Из определения $F_{1,N}$ и равенств (17) следует, что

$$\|F_{1,N}\|_{L_2(\mathbb{R})}=O\left(\varepsilon^{N+1}\mu^{-N-1}\right). \tag{54}$$

Так как носитель функции $F_{2,N}$ лежит в отрезке $[-2\varepsilon^{\frac{1}{2}},2\varepsilon^{\frac{1}{2}}]$, $v_{i,j}(\xi)=O(\xi^{i-j})$ при $\xi\to\pm\infty$ (см. (23), (21), (19)), то в силу равенств (24), (25) получаем следующую оценку:

$$\|F_{2,N}\|_{L_2(\mathbb{R})}=O\left(\varepsilon^{\frac{N}{2}-\frac{3}{4}}\left(\varepsilon^{\frac{1}{2}}+\frac{\varepsilon}{\mu}\right)+\varepsilon^{\frac{1}{4}}\left(\frac{\varepsilon}{\mu}\right)^{N-1}\left(1+\frac{\varepsilon^{\frac{1}{4}}}{\mu}\right)\right). \tag{55}$$

Из определений (21), (19) многочленов $V_{i,j}^{\pm}$ и равенств (23) также следует, что при $x\in[-2\varepsilon^{\frac{1}{2}},-\varepsilon^{\frac{1}{2}}]\cup[\varepsilon^{\frac{1}{2}},2\varepsilon^{\frac{1}{2}}]$ верно дифференцируемое равенство

$$\begin{aligned}
&\widehat{\psi}_N^{+}(x,\varepsilon,\mu)+\widehat{\psi}_N^{-}(x,\varepsilon,\mu)-\widehat{v}_N\left(x\varepsilon^{-1},\varepsilon,\mu\right)=\\
&=O\left(x^{N+1}+\left(\frac{\varepsilon}{\mu}\right)^{N}x\right).
\end{aligned} \tag{56}$$

Так как носитель функции $F_{3,N}$ лежит в $[-2\varepsilon^{\frac{1}{2}},-\varepsilon^{\frac{1}{2}}]\cup[\varepsilon^{\frac{1}{2}},2\varepsilon^{\frac{1}{2}}]$ и

$$\frac{d}{dx}\chi\left(x\varepsilon^{-\frac{1}{2}}\right)=O(\varepsilon^{-\frac{1}{2}}),\qquad \frac{d^2}{dx^2}\chi\left(x\varepsilon^{-\frac{1}{2}}\right)=O(\varepsilon^{-1}),$$

то из (56) следует оценка

$$\|F_{3,N}\|_{L_2(\mathbb{R})}=O\left(\varepsilon^{-\frac{1}{4}}\left(\varepsilon^{\frac{1}{2}}+\frac{\varepsilon}{\mu}\right)^{N}\right). \tag{57}$$

Из (53), (54), (55), (57) и (3) вытекает оценка (52). □

В силу оценки резольвенты для линейных самосопряженных операторов (см., например, [1, Глава V, § 3]) для решения уравнения (51) имеем:

$$\|\Psi_N\|_{L_2(\mathbb{R})}\leqslant\frac{\|F_N\|_{L_2(\mathbb{R})}}{\left|\lambda^{\mu,\varepsilon}-\widehat{\lambda}_N\right|}.$$

Из этой оценки, леммы 8 и (50) вытекает равенство

$$\left|\lambda^{\mu,\varepsilon}-\widehat{\lambda}_N\right|=O\left(\varepsilon^{\frac{N}{2}-1}+\varepsilon^{\gamma N-1}\right).$$

Отсюда в силу произвола в выборе $N$ получаем, что построенный ряд (4) является полным асимптотическим разложением собственного значения $\lambda^{\mu,\varepsilon}$.

Теорема 2 доказана полностью.

В заключение авторы выражают признательность Д.И. Борисову за полезные замечания.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Като Т. *Теория возмущений линейных операторов* М.: Мир. 1972.
2. Головатий Ю.Д., Манько С.С. *Точні моделі для операторів Шредингера з $\delta'$ подобніми потенціалами* // Україньский математичний вісник. Т. 6, № 2. 2009. С. 173–207.
3. Владимиров В.С., Жаринов В.В. *Уравнения математической физики* М.: Физматлит, 2004.
4. Хуснуллин И.Х. *Возмущенная краевая задача на собственные значения для оператора Шредингера на отрезке* // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. Т. 50, № 4. 2010. С. 679–698.
5. Ильин А.М. *Согласование асимптотических разложений решений краевых задач* М.: Наука, 1989.

Рустем Рашитович Гадыльшин,
Башкирский государственный педагогический университет им. М.Акмуллы,
ул. Октябрьской рев., 3а,
450000, г. Уфа, Россия
E-mail: gadylshin@yandex.ru

Ильфат Хамзиевич Хуснуллин,
Башкирский государственный педагогический университет им. М.Акмуллы,
ул. Октябрьской рев., 3а,
450000, г. Уфа, Россия
E-mail: Khusnullini@yandex.ru