ISSN 2074-1863 Уфимский математический журнал. Том 3. № 3 (2011). С. 26-54.

УДК 517.918

СПЕКТРАЛЬНАЯ АСИМПТОТИКА НЕСАМОСОПРЯЖЕННЫХ ВЫРОЖДАЮЩИХСЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ОПЕРАТОРОВ С СИНГУЛЯРНЫМИ МАТРИЧНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ НА ОТРЕЗКЕ

М.Г. ГАДОЕВ

Аннотация. В работе исследуются некоторые спектральные свойства несамосопряженного эллиптического оператора A в пространстве $\mathcal{H}^l = L_2(0,1)^l$, ассоциированного с некоэрцитивной билинейной формой.

Рассмотрены такие вопросы, как суммируемость методом Абеля со скобками рядов Фурье элементов $f \in \mathcal{H}^l$ по системе корневых вектор-функций оператора A, оценка резольвенты оператора A.

Ключевые слова: Эллиптические дифференциальные операторы, резольвента оператора, суммируемость методом Абеля со скобками, система корневых вектор функций.

Введение

В работе исследуются некоторые спектральные свойства несамосопряженного эллиптического оператора A в пространстве $\mathcal{H}^l = L_2(0,1)^l$, ассоциированного с некоэрцитивной билинейной формой.

Рассмотрены такие вопросы, как суммируемость методом Абеля со скобками рядов Фурье элементов $f \in \mathcal{H}^l$ по системе корневых вектор-функций оператора A, оценка резольвенты оператора A.

Спектральная асимптотика вырождающихся эллиптических операторов, далеких от самосопряженных, изучалась в работах [1–6] в ситуации, когда собственные значения (с.з.) оператора делятся на две серии, одна из которых лежит вне угла $|\,arg\, z| \leqslant \varphi$, $\varphi < \pi$, а другая локализуется к лучу $R_+ = (0, \infty)$. Эта статья примыкает к работам [1, 2, 6], в которых наиболее общие результаты получены в [6], где предполагается, что старший коэффициент оператора A

$$a(t) \in C^m([0,1]; End\mathbf{C}^l) \tag{0.1}$$

и имеет простые различные с.з. при каждом $t \in [0,1]$.

Вместо (0.1) мы требуем лишь, чтобы $a(t) \in C([0,1];\, End\,\mathbf{C}^l)$. Результаты §2–§5 примыкают к работе [7], в которой на $a(t)$ накладываются такие же условия, как в [6]. При минимальных ограничениях на $a(t) \in C([0,1];\, End\,\mathbf{C}^l)$ мы обобщаем результаты работы [7].

M.G. Gadoev, Spectral asymptotics of nonselfadjoint degenerate elliptic operators with singular matrix coefficients on an interval.

Поступила 10 июня 2011 г.

Результаты §2–§5 являются качественно новыми и даже при более слабых ограничениях на $a(t)$. Здесь изучаются спектральные вопросы замкнутого расширения, которое задается граничными условиями, отличными от граничных условий Дирихле.

Применяемый метод основан на аппроксимации $a(t)$ гладкими матричными функциями $a_\delta(t)$. Однако к соответствующему оператору $\mathcal{A}_\delta$ не применимы оценки резольвенты, установленные в [6], поскольку $a_\delta(t)$ может иметь непростые с.з. Поэтому некоторая часть работы посвящена оценке резольвенты оператора $\mathcal{A}_\delta$. При исследовании асимптотики спектра также применяется этот метод.

Результаты данной статьи частично отражены в работах [9–11].

§1. Формулировка основных результатов

1. Оператор A, заданный в гильбертовом пространстве H, мы назовем далеким от самосопряженного, если он не приводится к виду

$$A = B(E+S), \quad B = B^*, \quad S \in \sigma_\infty(H). \tag{1.1}$$

Здесь и далее, символ $\sigma_\infty(H)$ обозначает класс линейных вполне непрерывных операторов в H; B^* — оператор сопряженный к B.

Спектральные свойства эллиптических дифференциальных и псевдодифференциальных операторов, близких к самосопряженным, т.е. приводящихся к виду (1.1), в литературе достаточно подробно изучены (см. [12, 13]). Также подробно исследованы спектральные свойства эллиптических дифференциальных операторов (д.о.) и псевдодифференциальных операторов (п.д.о.), далеких от самосопряженных, в случае, если они заданы на компактном многообразии без края (см. [6, 14–16], где имеется библиография). В случае областей с краями, д.о. и п.д.о., далекие от самосопряженных изучались в [2, 3, 17, 18, 19–22]; из них вырожденно-эллиптическим задачам посвящены [2, 3, 17].

2. В этой работе изучаются спектральные свойства несамосопряженного оператора в $L_2(0,1)^l$, порожденного билинейной формой

$$\mathcal{A}[u,v] = \sum_{i,j=0}^{m} \int_0^1 < p_i(t)a_{ij}(t)u^{(i)}(t), p_j(t)v^{(j)}(t) >_{\mathbf{C}^l} dt. \tag{1.2}$$

Здесь

$$p_i(t) = \{t(1-t)\}^{\theta+i-m} \quad (i=\overline{0,m}),\ \theta < m,\ u^{(i)}(t) = \frac{d^i u(t)}{dt^i},$$
$$a_{ij} \in L_\infty(J;\, End\,\mathbf{C}^l) \quad (i,j=\overline{0,m}),$$

где $J=(0,1)$. Символ $<\,,\,>_{\mathbf{C}^l}$ обозначает скалярное произведение в $\mathbf{C}^l$.

Обозначим через $\mathcal{H}_+$ замыкание линейного многообразия $C_0^\infty(J)$ по норме

$$|\varphi|_+ = (\int_J p_m^2(t)|\varphi^{(m)}(t)|^2 dt + \int_J |\varphi(t)|^2 dt)^{1/2}.$$

Положим:

$$\mathcal{H} = L_2(J), \quad \mathcal{H}^l = \mathcal{H}\oplus\cdots\oplus\mathcal{H} \quad (l - \text{раз}),$$
$$\mathcal{H}_+^l = \mathcal{H}_+\oplus\cdots\oplus\mathcal{H}_+ \quad (l - \text{раз}).$$

В дальнейшем скалярное произведение в пространствах $\mathcal{H}, \mathcal{H}^l$ будет обозначаться одним и тем же символом $(\,,\,)$. Аналогично, нормы в пространствах $\mathcal{H}_+, \mathcal{H}_+^l$ и $\mathcal{H}, \mathcal{H}^l, \mathbf{C}^l$ будут обозначаться соответственно через $|\ |_+, |\ |$. Символом $\|T\|$ обозначим норму ограниченного оператора T, заданного в $\mathcal{H}$ или $\mathcal{H}^l$.

За область определения билинейной формы $\mathcal{A}[u,v]$ (1.2) примем пространство $\mathcal{H}^l_+$.

Пусть выполнены следующие условия:

$$|a_{ij}(t)| \leqslant Mt^\delta(1-t)^\delta \quad (i+j<2m), \quad \delta>0, \tag{1.3}$$

$$\mu_j(t) \notin S \qquad (j=\overline{1,l},\, t\in \bar{J}), \tag{1.3'}$$

где $S\subset \mathbf{C}$ — некоторый замкнутый угол с началом в нуле, а $\mu_j(t)$ — с.з. матрицы $a(t)$.

При выполнении перечисленных выше условий имеет место следующая теорема:

Теорема 1.1. *Существует единственный замкнутый оператор A в $\mathcal{H}^l$, обладающий следующими свойствами:*

(i) $\quad D(A)\subset \mathcal{H}^l_+$, $(Au,v)=\mathcal{A}[u,v] \quad (\forall u\in D(A),\, v\in\mathcal{H}^l_+)$,

(ii) *при некотором $z_0\in\mathbf{C}$ существует непрерывный обратный*

$$(A-z_0E)^{-1} : \mathcal{H}^l \to \mathcal{H}^l.$$

3. Обозначим через $\mathcal{H}_-$ пополнение пространства $\mathcal{H}$ по норме

$$|u|_- = \sup_{0\neq\varphi\in\mathcal{H}_+} \frac{|(u,\varphi)|}{|\varphi|_+}.$$

Положим $\mathcal{H}^l_- = \mathcal{H}_-\oplus\cdots\oplus\mathcal{H}_-$ $\quad$ (l - раз). Элемент $F=(F_1,\ldots,F_l)\in\mathcal{H}^l_-$ порождает антилинейный непрерывный функционал над $\mathcal{H}^l_+$ по формуле

$$< F,v >= \lim_{i\to+\infty}(u_i,v), \qquad v\in\mathcal{H}^l_+,$$

где последовательность вектор-функций $u_1,u_2,\ldots\in\mathcal{H}^l$ выбирается так, что $u_i\to F$ $(i\to+\infty)$ в $\mathcal{H}^l_-$.

Заметим, что если $v=(v_1,\ldots,v_l)\in\mathcal{H}^l_+$, то

$$< F,v >= \sum_{i=1}^l < F_i,v_i >, \quad |F|_- = (\sum_{i=1}^l |F_i|^2_-)^{1/2}.$$

Здесь и далее, как при $l=1$, так и в случае произвольного $l\in N$ приняты одни и те же обозначения: $|\ |_-$, $<,>$.

Обратно, для любого антилинейного непрерывного функционала $g(v)\,(v\in\mathcal{H}^l_+)$ существует единственный элемент $F\in\mathcal{H}^l_-$ такой, что $g(v) =< F,v >$, $\forall v\in\mathcal{H}^l_+$. При этом норма функционала g равна $|F|_-$.

В дальнейшем антилинейные непрерывные функционалы над $\mathcal{H}^l_+$ отождествляются с элементами пространства $\mathcal{H}^l_-$.

4. При выполнении условия (1.3) согласно неравенству Харди имеем

$$|\mathcal{A}[u,v]| \leqslant M|u|_+|v|_+ \quad (\forall u,v\in\mathcal{H}^l_+).$$

Поэтому можно ввести в рассмотрение оператор $\mathcal{A} : \mathcal{H}^l_+\to\mathcal{H}^l_-$, действующий по формуле

$$< \mathcal{A}u,v >= \mathcal{A}[u,v] \qquad (\forall u,v\in\mathcal{H}^l_+).$$

§2. Одна лемма о матричных функциях

1. В данном параграфе сформулируем и докажем аналог леммы Шуры для матричных функций.

Рассмотрим матричную функцию $a(t)\in C^m(\overline{J}; End\mathbf{C}^l)$.

Предположим, что матрица $a(t)$, при каждом $t\in\overline{J}$, имеет l различных собственных значений $\mu_1(t),...,\mu_l(t)$. Тогда собственные значения матрицы $a(t)$ $\quad(t\in\overline{J})$ можно перенумеровать так, что $\mu_j(t)\in C(\overline{J})$, $\quad(j=\overline{1,l})$. Имеет место следующая

Лемма 2.1. *Существует матричная функция*

$$U(t) \in C^m(\overline{J}; End\mathbf{C}^l)$$

такая, что

$$U^{-1}(t) \in C^m(\overline{J}; End\mathbf{C}^l)$$

и при этом

$$a(t) = U(t)\Lambda(t)U^{-1}(t), \qquad (2.1)$$

где $\Lambda(t)$ *— диагональная матрица:*

$$\Lambda(t) = diag\{\mu_1(t), ..., \mu_l(t)\}, \mu_j(t) \in C^m(\overline{J}).$$

Доказательство леммы проведем в пунктах 2 и 3.

2. Пусть $t_0 \in \overline{J}$. Пусть $r \in \{1, ..., l\}$ — фиксированный индекс.

Введем матрицу

$$P(t) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_\varepsilon} (a(t) - zI)^{-1} dz, \quad (|t - t_0| < \varepsilon') \qquad (2.1'),$$

где I — единичная матрица, $\gamma_\varepsilon = \{z \in C : |z - \mu_r(t_0)| = \varepsilon\}$ — контур, ориентированный против часовой стрелки. Обозначим: $D_\varepsilon = \{z \in C : |z - \mu_r(t_0)| < \varepsilon\}$,

$$\Delta(\varepsilon') = \{t \in \overline{J} :]t - t_0| < \varepsilon'\}, \ \mu_j(\Delta(\varepsilon')) = \{\mu_i(t) : t \in \Delta(\varepsilon')\}.$$

При достаточно малых $\varepsilon, \varepsilon'$ имеем:

$$\mu_i(\Delta(\varepsilon')) \cap \mu_j(\Delta(\varepsilon')) = \emptyset \quad (i \neq j),$$

$$\mu_i(\Delta(\varepsilon')) \cap D_\varepsilon = \emptyset \quad (i \neq r),$$

$$\mu_r(\Delta(\varepsilon')) \subset D_\varepsilon.$$

Учитывая, что

$$tr \int\limits_{\gamma_\varepsilon} z(a(t) - zI)^{-1} dz = \sum_{i=1}^{l} \int\limits_{\gamma_\varepsilon} z(\mu_j(t) - z)^{-1} dz,$$

где $I \in End\mathbf{C}^l$ — единичная матрица, находим

$$\mu_r(t) = \frac{1}{2\pi i} tr \int\limits_{\gamma_\varepsilon} z(a(t) - zI)^{-1} dz. \qquad (2.2)$$

Так как $a(t) \in C^m(\overline{J}; End\mathbf{C}^l)$, следовательно $\mu_j(t) \in C^m(\overline{J})(j = \overline{1, l})$.

Пусть $y_\nu(t) = (y_{1\nu}(t), ..., y_{l\nu}(t))$ — собственный вектор (с.в.) матрицы $a(t) = (a_{ij}(t))_{i,j=1}^l$, отвечающий с.з. $\mu_\nu(t)$, т.е.

$$\sum_{\nu=1}^{l} a_{ij}(t) y_{j\nu}(t) = \mu_\nu(t) y_{i\nu}(t) \quad (i = \overline{1, l}).$$

Легко проверить, что матрица $U(t) = (y_{ij}(t))_{i,j=1}^l$ удовлетворяет равенствам

$$(a(t)U(t))_{pq} = \sum_{\nu=1}^{l} a_{pq}(t) y_{\nu q}(t) = \mu_q(t) y_{pq}(t),$$

$$(U(t)\Lambda(t))_{pq} = \sum_{\nu=1}^{l} y_{pq}(t)\delta_{\nu q}\mu_\nu(t) = \mu_q(t) y_{pq}(t),$$

где $\delta_{\nu q}$ обозначает символ Кронекерра-Капели. Следовательно $a(t)U(t) = U(t)\Lambda(t)$. Так как столбцы матрицы $U(t)$ составлены из линейно независимых с.в. матрицы $a(t)$, то имеем

$$\det U(t) \neq 0 \quad (t \in \Delta(\varepsilon')). \tag{2.3}$$

Учитывая, что

$$(a(t) - zI)^{-1} = U(t)(\Lambda(t) - zI)^{-1}U^{-1}(t), \quad (t \in \Delta(\varepsilon')),$$

получим

$$P(t) = \frac{1}{2\pi i} U(t)(\int\limits_{\gamma_\varepsilon} (\Lambda(t) - zI)^{-1} dz) U^{-1}(t) = U(t) T_r U^{-1}(t),$$

$$T_r = diag\{\delta_{1r}, ..., \delta_{lr}\}. \tag{2.4}$$

Из этих равенств легко выводится, что область значений оператора $P(t) : C^l \to C^l$ одномерная и содержит в себе с.в. $y_r(t), (t \in \Delta(\varepsilon'))$. Поэтому, матрица $P(t)$ действует по формуле

$$P(t)h =< h, \varphi_r(t) >_{C^l} y_r(t), \quad (\forall h \in C^l, t \in \Delta(\varepsilon')), \tag{2.5}$$

где $\varphi_r(t) \in C^l, \forall t \in \Delta(\varepsilon')$. Полагая $h = a(t)h_1 \quad (h_1 \in C^l)$ и принимая во внимание равенства

$$P(t)a(t)h_1 = a(t)P(t)h_1 =< a(t)h_1, \varphi_r(t) >_{C^l} y_r(t) =$$

$$=< h_1, a^*(t)\varphi_r(t) >_{C^l} y_r(t) = \mu_r(t) < h_1, \varphi_r(t) >_{C^l} y_r(t),$$

в силу произвольности $h_1 \in C^l$, находим

$$a^*(t)\varphi_r(t) = \overline{\mu_r(t)}\varphi_r(t).$$

Согласно (2.4), $trP(t) = trT_r = 1$. Поэтому $< y_r(t), \varphi_r(t) >_{C^l} = 1$.

Используя (2.5), легко найти элементы матрицы $P(t)$:

$$(P(t))_{ij} = y_{ir}(t)\overline{\varphi_{jr}(t)},$$

где $\varphi_{jr}(t) \quad (j = \overline{1, l})$ — компоненты вектора $\varphi_r(t)$.

Отсюда и из $(2.1')$ следует, что

$$y_{ir}(t)\overline{\varphi_{jr}(t)} \in C^m(\Delta(\varepsilon')) \quad (i, j = \overline{1, l}). \tag{2.6}$$

Заменяя число ε', если нужно, на более меньшее положительное число, мы можем найти индекс $w \in \{1, ..., l\}$ такой, что $\varphi_{wr}(t) \neq 0 \quad (\forall t \in \Delta(\varepsilon'))$. Далее заменяя, если нужно, $y_r(t), \varphi_r(t)$ соответственно на $\varphi_{wr}^{-1}(t)y_r(t), \varphi_{wr}^{-1}(t)\varphi_r(t)$ без ограничения общности можно считать, что $\varphi_{wr}(t) \equiv 1 \quad (t \in \Delta(\varepsilon'))$.

Полагая в (2.6) $j = w$, получим $y_{ir}(t) \in C^m(\Delta(\varepsilon')), i = 1, ..., l$.

В силу (2.5) имеем

$$U^{-1}(t) \in C^m(\Delta(\varepsilon'); End\mathbf{C}^l).$$

3. Пусть $\Delta_1, \Delta_2 \subset \overline{J}$ — замкнутые отрезки, $mes\Delta \neq 0$, $\Delta = \Delta_1 \cap \Delta_2$.

Пусть так же, как выше, построены матричные функции

$$U_j(t) \in C^m(\Delta_j; End\mathbf{C}^l) \quad (j = 1, 2)$$

такие, что

$$U_j^{-1}(t) \in C^m(\Delta_j; End\mathbf{C}^l) \quad (j = 1, 2),$$

$$a(t) = U_j(t)\Lambda(t)U_j^{-1}(t) \quad (t \in \Delta_j), \quad (j = 1, 2).$$

Построим матричную функцию

$$U(t) \in C^m(\Delta_1 \cup \Delta_2); End\mathbf{C}^l)$$

такую, что

$$U^{-1}(t) \in C^m(\Delta_1 \cup \Delta_2); End\mathbf{C}^l),$$

$$a(t) = U(t)\Lambda(t)U^{-1}(t) \ \ (t \in \Delta_1 \cup \Delta_2).$$

Столбцы матриц $U_1(t), U_2(t) \quad (t \in \Delta)$ составлены из с.в. матрицы $a(t)$ и поэтому коллинеарны. Следовательно

$$U_1(t) = U_2(t)\Omega(t), \quad \Omega(t) = diag\{w_1(t), ..., w_l(t)\}, \quad t \in \Delta,$$

где $w_j(t), w_j^{-1}(t) \in C^m(\Delta) \quad (j = \overline{1, l})$. Продолжим функции $w_j(t)$ $(t \in \Delta)$,$j = \overline{1, l}$ до функций $\tilde{w}_j(t) \in C^m(\Delta_2)$ так, что $\tilde{w}_j^{-1}(t) \in C^m(\Delta_2) \quad (j = \overline{1, l})$.

Положим

$$\tilde{\Omega}(t) = diag\{\tilde{w}_1(t), ..., \tilde{w}_l(t)\} \quad (t \in \Delta_2).$$

Легко проверить, что матричная функция

$$U(t) = \begin{cases} U_1(t), t \in \Delta_1 \\ U_2(t)\tilde{\Omega}(t), t \in \Delta_2 \end{cases}$$

удовлетворяет перечисленным выше условиям. Доказательство леммы завершается применением метода склейки.

§ 3. Дифференциальные операторы с матричными коэффициентами

1. В пространстве $\mathcal{H}^r = L_2(J)^r$, $r \in \{1, \ldots, l\}$ рассмотрим билинейную форму

$$Q'[u, v] = \int\limits_J \rho^{2\theta}(t) < Q(t)u^{(m)}(t), v^{(m)}(t) >_{\mathbf{C}^r} dt, \; D[Q'] = \mathcal{H}_+^r,$$

где $\rho(t) = t(1-t), \theta < m$. Пространство $\mathcal{H}_+^r$ такое же, как в §1, матричная функция $Q(t)$ имеет вид

$$Q(t) = \begin{pmatrix} q(t) & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & q(t) & 1 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & q(t) & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & q(t) \end{pmatrix},$$

$Q(t) \in C^m(\bar{J}; End\, \mathbf{C}^r), q(t) \in C^m(\bar{J}), q(t)\bar{\in} S\,(\forall t \in \bar{J})$, где $S \subset \mathbf{C}$ — некоторый замкнутый сектор, расположенный в левой полуплоскости с вершиной в нуле.

Обозначим через $\mathcal{H}^r_\nu, \nu > 0$ пространство функций $u \in \mathcal{H}^r_+$ с нормой

$$|u|_\nu = \left(\int\limits_J \rho^{2\theta}(t)|u^{(m)}(t)|^2 dt + \nu \int\limits_J |u(t)|^2 dt \right)^{1/2}.$$

Очевидно, что $\mathcal{H}^r_\nu = \mathcal{H}^r_+, \forall \nu > 0$, и нормы в этих пространствах эквивалентны. Пусть $\mathcal{H}^r_{-\nu}, \nu > 0$, обозначает пространство элементов $F \in \mathcal{H}^r_-$ с нормой

$$|F|_{-\nu,r} = \sup_{\substack{v \in \mathcal{H}^r_+ \\ |v|_\nu \leqslant 1}} |< F, v >|.$$

Введем оператор $Q_{\nu,r} : \mathcal{H}^r_\nu \to \mathcal{H}^r_{-\nu}, \nu > 0$, по формуле

$$< Q_{\nu,r} u, v >= Q'[u,v], \quad \forall u, v \in \mathcal{H}^r_\nu.$$

Имеет место следующая

Лемма 3.1. *Найдется достаточно большое число $c' > 0$ такое, что при $\lambda \in S, \ |\lambda| > c'$ и $\nu \in [1, 2|\lambda|]$ существует непрерывный обратный*

$$(Q_{\nu,r} - \lambda E)^{-1} : \mathcal{H}^r_{-\nu} \to \mathcal{H}^r_\nu,$$

норма которого не превосходит некоторого числа M, не зависящего от λ, ν.

Доказательство. Для простоты рассуждений будем считать, что сектор S расположен в левой полуплоскости и симметричен по отношению к R_- и имеет угол раствора меньше, чем $\pi/2$.

Так как $q(t)$ — непрерывная функция, то существует сектор $\tilde{S}$, который тоже расположен в левой полуплоскости и симметричен по отношению к $R_- = (-\infty, 0)$ и имеет угол раствора меньше, чем $\pi/2$, так что $\bar{S} \subset Int\, \tilde{S}$, и $q(t)\bar{\in}\tilde{S}$.

Пусть b_+ — биссектриса угла, образованного сторонами секторов S и $\tilde{S}$ из верхней полуплоскости, а β_+ — угол от биссектрисы до мнимой оси.

Очевидно, что $\beta_+ < \pi/2$, и имеет место неравенство $Re\, \lambda e^{-i\beta_+} \leqslant 0$, для каждого $\lambda \in S\,(|\lambda| > 1)$ и $Re\, \lambda e^{-i\beta_+} q(t) > 0$ для всех t, таких, что $Im\, q(t) \geq -\frac{\beta_+}{4}$. Аналогично для $Im\, q(t) < \frac{\beta_+}{4}$ находим число β_- такое, что имеют место неравенства

$$Re\, \lambda e^{-i\beta_-} \leqslant \frac{\beta_-}{4}, \forall \lambda \in S\,(|\lambda| > 1);\ Re\, e^{-i\beta_-} q(t) > 0.$$

Теперь покрываем отрезок $[0,1]$ интервалами $I_1, \ldots, I_k$ так, что правый конец I_i пересекается с левым концом I_{i+1}, и

$$mes\,(I_i \cap I_{i+1}) \neq 0, \quad i = \overline{1, k-1},$$

кратность покрытия равна 2 и для каждого фиксированного i

$$\text{либо} \quad Im\, q(t) \geq -\frac{\beta_+}{2}, \forall t \in I_i, \quad \text{либо} \quad Im\, q(t) \leqslant \frac{\beta_+}{2}, \forall t \in I_i.$$

Построим неотрицательные функции $\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_k(t), \psi_1(t)$, $\psi_2(t), \ldots, \psi_k(t) \in C^\infty(\bar{J})$ такие, что

$$\sum_{j=1}^k \varphi_j(t) \equiv 1 \quad (t \in \bar{J})$$

и

$$\psi_j(t) = 1, \quad \forall t \in supp\, \varphi_j, \quad supp\, \psi_j \subset I_j.$$

Поэтому
$$Re\,\lambda e^{i\alpha_j}<0,\quad Re\,q(t)e^{i\alpha_j}>0,\quad \forall t\in supp\,\psi_j,$$
где α_j равен $-\beta_+$ или $-\beta_-$.

Поскольку $q(t)$ — непрерывная функция на $[0,1]$, и $supp\,\psi_j$ — компакт, то имеем
$$Re\,e^{i\alpha_j}q(t)>c_j>0,\quad \forall t\in supp\,\psi_j,$$
и значит,
$$Re\,e^{i\alpha_j}q(t)>c>0,\quad \text{где}\quad c=min\,c_j,\ j=\overline{1,k}.$$
Умножая, если нужно, исходную билинейную форму на число $\frac{8}{c}$, можем получить следующее неравенство
$$Re\,e^{i\alpha_j}q(t)\geq 8.$$
Далее, для завершения доказательства леммы нам понадобится ряд утверждений. Поэтому оставшуюся часть доказательства приведем в п. 6 настоящего параграфа.

Имеет место следующая

Лемма 3.2. *Пусть выполнены перечисленные выше условия и $Re\,e^{i\alpha_j}q(t)\geq 8$. Тогда для любого вектора $h\in \mathbf{C}^r$ имеет место неравенство*
$$Re<e^{i\alpha_j}Q(t)h,h>_{\mathbf{C}^r}\geq 7|h|^2_{\mathbf{C}^r}.$$

Доказательство. Имеем
$$<e^{i\alpha_j}Q(t)h,h>_{\mathbf{C}^r}=\sum_{k=1}^{r-1}(\frac{e^{i\alpha_j}q(t)}{2}|h_k|^2+e^{i\alpha_j}\bar h_k h_{k+1}+\frac{e^{i\alpha_j}q(t)}{2}|h_{k+1}|^2)+$$
$$+\frac{e^{i\alpha_j}q(t)}{2}|h_1|^2+\frac{e^{i\alpha_j}q(t)}{2}|h_r|^2.$$
Отсюда с учетом неравенства $Re\,e^{i\alpha_j}q(t)\geq 8$ получаем
$$Re<e^{i\alpha_j}Q(t)h,h>_{\mathbf{C}^r}\geq\sum_{k=1}^{r-1}(4|h_k|^2-|h_k||h_{k+1}|+4|h_{k+1}|^2)+$$
$$+4(|h_1|^2+|h_r|^2)\geq\sum_{k=1}^{r-1}(4|h_k|^2-\frac{1}{2}|h_k|^2-\frac{1}{2}|h_{k+1}|^2+4|h_{k+1}|^2)+$$
$$+4(|h_1|^2+|h_r|^2)=\frac{7}{2}[\sum_{k=1}^{r-1}(|h_k|^2+|h_{k+1}|^2)]+$$
$$+4(|h_1|^2+|h_r|^2)=7(\sum_{k=1}^{r}|h_k|^2)+\frac{13}{2}(|h_1|^2+|h_r|^2)\geq 7|h|^2_{\mathbf{C}^r}.$$
Лемма 3.2 доказана.

2. В этом пункте приведем формулировку теоремы 2.0.1 из [23] в нужной для нас форме.

В пространстве $\mathcal{H}^r_\nu$ рассмотрим билинейную форму
$$B[u,v]=\sum_{i,j=0}^{m}(a_{ij}p_iu^{(i)},p_jv^{(j)})_{L_2(J)^r},$$
где a_{ij},p_i — такие же объекты, как в §1, $r\in\{1,\dots,l\}$.

Утверждение 3.1. *(см. предл. 2.0.1 статьи [23]) Пусть билинейная форма $B[u,v]$ удовлетворяет неравенствам*
$$|B[u,v]|\leqslant M|u|_{\mathcal{H}^r_+}|v|_{\mathcal{H}^r_+},\tag{3.1}$$
$$Re\,B[u,u]+\lambda_0(u,v)\geq\delta|u|^2_{\mathcal{H}^r_\nu}.\tag{3.2}$$

Тогда:

1) существует линейный оператор Λ, осуществляющий гомеоморфизм пространств $\mathcal{H}^r_\nu$ и $\mathcal{H}^r_{-\nu}$ и такой, что

$$< \Lambda u, v >= B[u,v] + \lambda_0(u,v), \quad \forall u, v \in \mathcal{H}^r_\nu,$$

где символом $< f, v >$ обозначено действие функционала f на элемент v;

2) всякий антилинейный непрерывный функционал $l(v)$ над $\mathcal{H}^r_\nu$ допускает представление

$$l(v) = B[u_0, v] + \lambda_0(u_0, v) =< \Lambda u_0, v >, \quad \forall u \in \mathcal{H}^r_{-\nu},$$

где u_0 — некоторый элемент из $\mathcal{H}^r_+$.

Последнее означает, что оператор Λ^{-1} существует и имеет конечную норму

$$|\Lambda^{-1}|_{\mathcal{H}^r_{-\nu}\to\mathcal{H}^r_\nu} < +\infty.$$

Следующая лемма дополняет утверждение 3.1.

Лемма 3.3. *Пусть выполнены условия 1) и 2). Тогда справедливо следующее неравенство*

$$|\Lambda^{-1}|_{\mathcal{H}_{-\nu}\to\mathcal{H}_{+\nu}} \leqslant \frac{1}{\delta}, \quad \delta > 0. \tag{3.3}$$

Доказательство. Последнее неравенство означает, что

$$\delta|\Lambda^{-1}v|_{\mathcal{H}_\nu} \leqslant |v|_{\mathcal{H}_{-\nu}} \quad \forall v \in \mathcal{H}_{-\nu}. \tag{3.4}$$

Так как $< \Lambda u, v >= B[u,v] + \lambda_0(u,v)_{\mathcal{H}}$, то

$$Re\ < \Lambda u, u >\geq \delta|u|^2_{\mathcal{H}_{+\nu}}, \quad \forall u \in \mathcal{H}_+.$$

Но по определению нормы функционала,

$$|Re\ < \Lambda u, u > | \leqslant | < \Lambda u, u > | \leqslant |\Lambda u|_{\mathcal{H}_{-\nu}}|u|_{\mathcal{H}_{+\nu}}.$$

Поэтому

$$|\Lambda u|_{\mathcal{H}_{-\nu}}|u|_{\mathcal{H}_{+\nu}} \geq \delta|u|^2_{\mathcal{H}_{+\nu}}$$

и

$$|\Lambda u|_{\mathcal{H}_{-\nu}} \geq \delta|u|_{\mathcal{H}_{+\nu}}, \quad \forall u \in \mathcal{H}_+.$$

Подставляя $v = \Lambda u$, получим (3.4). Лемма 3.3 доказана.

Введем функцию $\tilde{q}_j(t)$ совпадающую с $q(t)$ на интервале I_j, и гладко изменяющуюся вне $I_j, j = \overline{1,k}$.

Легко видеть, что имеет место следующее неравенство (см. лемму 3.2)

$$Re\ < e^{i\alpha_j}\tilde{Q}_j(t)h, h >_{\mathbf{C}^r} \geq c_0|h|^2_{\mathbf{C}^r}, \quad \forall t \in [0,1], \tag{3.5}$$

где $0 < c_0 < 7$, а матричная функция $\tilde{Q}_j(t)$ получается из $Q(t)$ заменой $q(t)$ на $\tilde{q}_j(t)$.

Введем билинейную форму

$$Q^0_j[u,v] = \int\limits_J \rho^{2\theta}(t) < \tilde{Q}_j(t)u^{(m)}(t), v^{(m)}(t) >_{\mathbf{C}^r} dt,\ u, v \in \mathcal{H}^r_\nu.$$

Имеет место следующая

Лемма 3.4. *Для любого $u \in \mathcal{H}^r_\nu$ справедливо неравенство*

$$Re\, e^{i\alpha_j}Q^0_j[u,u] \geq c_0|u^{(m)}|^2_{L_2(J)^r},\ 0 < c_0 < 7. \tag{3.6}$$

Доказательство. Подставляя $h = \rho^\theta(t)u^{(m)}(t)$ в неравенство (3.5), получим

$$Re\ < e^{i\alpha_j}Q_j(t)\rho^\theta u^{(m)}(t), \rho^\theta u^{(m)}(t) >_{\mathbf{C}^r}\geq$$

$$\geq c_0|\rho^\theta u^{(m)}(t)|^2_{\mathbf{C}^r}, \quad 0 \leqslant t \leqslant 1.$$

Интегрируя теперь по t от нуля до 1, получим (3.6), что доказывает лемму.

Так как $Re\,\lambda e^{i\alpha_j} \leqslant -c|\lambda|$, то из леммы 3.4 следует, что

$$Re\,[e^{i\alpha_j}Q_j^0[u,u] - \lambda e^{i\alpha_j}(u,u)] \geq$$

$$\geq c'|u|^2_{\mathcal{H}^r_\nu} = c'|u|^2_{\mathcal{H}^r_+} + \nu c'|u|^2_{L_2(J)^r},\ (1 \leqslant \nu < 2|\lambda|,\ |\lambda| \geq 1).$$

Введем оператор $L_{j,\nu} : \mathcal{H}^r_\nu \to \mathcal{H}^r_{-\nu}$ по формуле

$$< L_{j,\nu}u, v >= Q_j^0[u,v], \quad \forall u, v \in \mathcal{H}^r_\nu.$$

Применяя неравенство Коши-Буняковского, легко можно показать, что билинейная форма $Q_j^0[u,v]$ удовлетворяет неравенству

$$|Q_j^0[u,v]| \leqslant M|u|_{\mathcal{H}^r_\nu}|v|_{\mathcal{H}^r_\nu}.$$

Далее на основе леммы 3.4 заключаем, что выполнены все условия утверждения 3.1. Следовательно, существует непрерывный обратный

$$\mathcal{R}_{j,\nu}(\lambda) = (e^{i\alpha_j}L_{j,\nu} - \lambda e^{i\alpha_j}E)^{-1} : \mathcal{H}^r_{-\nu} \to \mathcal{H}^r_\nu,$$

$$(\lambda \in S, \quad |\lambda| \geq 1, \quad \nu \in [1; 2|\lambda|),$$

и

$$|\mathcal{R}_{j,\nu}(\lambda)| \leqslant \delta^{-1},$$

$0 < \delta$ — некоторое число, не зависящее от λ, ν.

Для $F \in \mathcal{H}^r_{-\nu}, v \in \mathcal{H}^r_\nu$ имеем

$$< \psi_j F, \varphi_j v >= (\rho^\theta(t)Q(t)e^{i\alpha_j}\partial_t^m\mathcal{R}_{j,\nu}(\lambda)\psi_j F, \rho^\theta\partial_t^m(v\varphi_j)) -$$

$$-\lambda e^{i\alpha_j}(\mathcal{R}_{j,\nu}(\lambda)\psi_j F, \varphi_j v), \tag{3.7}$$

где $\partial_t = \frac{d}{dt}$. Здесь и далее в этом пункте (,) означает скалярное произведение в $L_2(J)^r$.

Введем оператор

$$\mathcal{R}_\nu(\lambda) = \sum_{j=1}^k \varphi_j e^{i\alpha_j}\mathcal{R}_{j,\nu}\psi_j : \mathcal{H}^r_{-\nu} \to \mathcal{H}^r_\nu, (\lambda \in S, |\lambda| \geq 1, \nu \in [1, 2|\lambda|]). \tag{3.7$'$}$$

Легко заметить, что

$$< (Q_\nu - \lambda E)\mathcal{R}_\nu(\lambda)F, v >= \sum_{j=1}^k e^{i\alpha_j}(Q(t)\rho^\theta(t)\partial_t^m\varphi_j\mathcal{R}_{j,\nu}(\lambda)\psi_j F, \rho^\theta(t)v^{(m)}(t)) -$$

$$-\lambda\sum_{j=1}^k e^{i\alpha_j}(\varphi_j\mathcal{R}_{j,\nu}(\lambda)\psi_j F, v).$$

Учитывая (3.7) и равенство

$$\sum_{j=1}^k < \psi_j F, \varphi_j v >=< F, v >,$$

находим

$$< (Q_\nu - \lambda E)\mathcal{R}_\nu(\lambda)F, v >=< F, v > + X_\lambda(F,v) + Y_\lambda(F,v), \tag{3.8}$$

где

$$X_\lambda(F,v) = \sum_{j=1}^k e^{i\alpha_j}\{\sum_{\substack{m_1+m_2=m \\ m_2\neq 0}} C_{m_1,m_2}(\rho^\theta Q\partial_t^m\mathcal{R}_{j,\nu}(\lambda)\psi_j F, \rho^\theta v^{(m_1)}\varphi_j^{(m_2)})\}, \tag{3.8$'$}$$

$$Y_\lambda(F,v)=\sum_{j=1}^{k}e^{i\alpha_j}\{\sum_{\substack{m_1+m_2=m\\ m_2\neq 0}}C'_{m_1,m_2}(\rho^\theta Q\varphi_j^{(m_2)}\partial_t^m\mathcal{R}_{j,\nu}(\lambda)\psi_jF,\rho^\theta v^{(m)})\}. \tag{3.9}$$

Здесь $C_{m_1,m_2}, C'_{m_1,m_2}$ - некоторые постоянные числа, зависящие только от m_1, m_2. Интегрируя один раз по частям, получаем

$$X_\lambda(F,v)=-\sum_{j=1}^{k}e^{i\alpha_j}\{\sum_{\substack{m_1+m_2=m\\ m_2\neq 0}}C_{m_1,m_2}(\rho^\theta\partial_t^{m-1}(\mathcal{R}_{j,\nu}(\lambda)\psi_jF),$$

$$\rho^{-\theta}\partial_t(Q^*(t)\rho^{2\theta}v^{(m_1)}\varphi_j^{(m_2)}))\}. \tag{3.10}$$

3. Пусть P — самосопряженный оператор в $\mathcal{H}$ ассоциированный с билинейной формой

$$P'[u,v]=(\rho^\theta u^{(m)},\rho^\theta v^{(m)}),\quad D[P']=\mathcal{H}_+.$$

В дальнейшем нам понадобится следующая

Лемма 3.5. *Существует непрерывный обратный оператор $T_\omega : \mathcal{H}_-\to\mathcal{H}, \omega\ge 1$, такой, что $T_\omega u=(P+\omega E)^{-1/2}u, \forall u\in\mathcal{H}$, причем*

$$|T_\omega F|\leqslant M|F|_{-\nu}\quad (\forall\omega\ge 1,\nu\in[1,2\omega),\forall F\in\mathcal{H}_{-\nu}),$$

где число $M>0$ не зависит от ω,ν.

Доказательство. Пусть $F\in\mathcal{H}_{-\nu}$. В силу плотности пространства $\mathcal{H}$ в $\mathcal{H}_-$, найдутся элементы $u_1,u_2,\ldots\in\mathcal{H}$ такие, что $u_j\to_{\mathcal{H}_{-\nu}}F$ $(j\to+\infty)$. Далее имеем

$$|((P+\omega E)^{-1/2}(u_j-u_k),v)|=|(u_j-u_k,(P+\omega E)^{-1/2}v)|\leqslant$$

$$\leqslant|u_j-u_k|_{-\nu}|(P+\omega E)^{-1/2}v|_\nu\leqslant M|v||u_j-u_k|_{-\nu}$$

для всех $v\in\mathcal{H}_+$. Так как $\mathcal{H}_+$ плотно в $\mathcal{H}$, следовательно

$$|(P+\omega E)^{-1/2}(u_j-u_k)|\leqslant M|u_j-u_k|_{-\nu}.$$

Поэтому последовательность $(P+\omega E)^{-1/2}u_j, j=1,2,\ldots$ - фундаментальна в $\mathcal{H}$, и мы имеем

$$(P+\omega E)^{-1/2}u_j\to_{\mathcal{H}}g\quad(j\to+\infty),$$

где g — некоторый элемент из $\mathcal{H}$. Положим $T_\omega F=g, F\in\mathcal{H}$. Очевидно, что $|g|\leqslant M\lim\limits_{j\to+\infty}|u_j|_{-\nu}=M|F|_{-\nu},\forall F\in\mathcal{H}_{-\nu}$ и $T_\omega F=(P+\omega E)^{-1/2}F,\forall F\in\mathcal{H}$. Лемма доказана.

4. Ближайшей нашей целью является доказательство неравенства (см.$(3.8')-(3.10)$)

$$|X_\lambda(F,v)|+|Y_\lambda(F,v)|\leqslant M|\lambda|^{-\varepsilon'}|F|_{-\nu}|v|_\nu \tag{3.11}$$

$$(\forall F\in\mathcal{H}_-^r, v\in\mathcal{H}_+^r,\lambda\in S,|\lambda|\ge 1,\nu\in[1,2|\lambda|)),$$

с некоторым $\varepsilon'>0$. Заметим, что билинейная форма

$$P'_{j,\lambda}[u,v]=e^{i\alpha_j}(\rho^\theta Qu^{(m)},\rho^\theta Q^{(m)})-\lambda e^{i\alpha_j}(u,v),\ (u,v\in\mathcal{H}_+^r),$$

где $\lambda\in S,|\lambda|\ge 1$, плотно определена в $\mathcal{H}^r$, замкнута и секториальна. По известной теореме (см. теорему 2.1 из [24, Гл.VI, §2]), существует m-секториальный оператор $P_{j,\lambda}$ в $\mathcal{H}^r$ такой, что $D(P_{j,\lambda})\subset\mathcal{H}_+^r$, причем

$$(P_{j,\lambda}u,v)=P'_{j,\lambda}[u,v]\quad(\forall u\in D(P_{j,\lambda}),\ v\in\mathcal{H}_+^r).$$

Аналогично, найдется положительный самосопряженный оператор $P_{j,\lambda}^0$ в $\mathcal{H}$ такой, что $D(P_{j,\lambda}^0)=\mathcal{H}_+^r$ и

$$(P_{j,\lambda}^0u,v)=\frac{1}{2}(P'_{j,\lambda}[u,v]+\overline{P'_{j,\lambda}[v,u]}),\ \forall u,v\in\mathcal{H}_+.$$

Применяя теорему 3.2 из [24, Гл.VI, §3], получим
$$P_{j,\lambda}^{-1} = (P_{j,\lambda}^0)^{-1/2}\mathcal{F}_{j,\lambda}(P_{j,\lambda}^0)^{-1/2},$$
где
$$\|\mathcal{F}'_{j,\lambda}\|_{\mathcal{H}^r\to\mathcal{H}^r} \leqslant M;$$
число M не зависит от $\lambda \in S\,(|\lambda| \geq 1)$. Отсюда очевидным образом выводится, что
$$P_{j,\lambda}^{-1} = (P+|\lambda|E)^{-1/2}\mathcal{F}_{j,\lambda}(P+|\lambda|E)^{-1/2},$$
где P — такой же оператор, как в лемме 3.5, а
$$\|\mathcal{F}_{j,\lambda}\|_{\mathcal{H}^r\to\mathcal{H}^r} \leqslant M', \quad (\lambda \in S, |\lambda| \geq 1).$$

Докажем, что
$$\mathcal{R}_{j,\nu}(\lambda) = (P+|\lambda|E)^{-1/2}\mathcal{F}_{j,\lambda}T_{|\lambda|},\ (\lambda \in S, |\lambda| \geq 1, \nu \in [1, 2|\lambda|)). \tag{3.12}$$
Из определения операторов $\mathcal{R}_{j,\nu}(\lambda), P_{j,\lambda}$ следует
$$P_{j,\lambda}^{-1}u = \mathcal{R}_{j,\nu}(\lambda)u \quad (\forall u \in \mathcal{H}_+^r, \lambda \in S, |\lambda| \geq 1, \nu \in [1, 2|\lambda|)).$$
Поэтому
$$\mathcal{R}_{j,\nu}(\lambda)u = (P+|\lambda|E)^{-1/2}\mathcal{F}_{j,\lambda}T_{|\lambda|}u \quad (\forall u \in \mathcal{H}^r).$$
Так как операторы $\mathcal{R}_{j,\nu}(\lambda), (P+|\lambda|E)^{-1/2}\mathcal{F}_{j,\lambda}T_{|\lambda|}$ непрерывны из $\mathcal{H}_\nu^r$ в $\mathcal{H}_{-\nu}^r$, и пространство $\mathcal{H}^r$ плотно в $\mathcal{H}_{-\nu}^r$, следовательно
$$\mathcal{R}_{j,\nu}(\lambda)F = (P+|\lambda|E)^{-1/2}\mathcal{F}_{j,\lambda}T_{|\lambda|}F,$$
$$(\forall F \in \mathcal{H}_{-\nu}, \lambda \in S, |\lambda| \geq 1, \nu \in [1, 2|\lambda|)),$$
что и доказывает (3.12).

Теперь мы можем легко завершить доказательство неравенства (3.11). Заменим в формулах (3.9), (3.10) $\mathcal{R}_{k,\nu}(\lambda)$ на правую часть (3.12). После этого нам остается только показать, что для $\lambda \in S, |\lambda| \geq 1$, выполняются неравенства
$$\|\rho^\theta\partial_t^{m_1}(P+|\lambda|E)^{-1/2}\|_{\mathcal{H}\to\mathcal{H}} \leqslant M|\lambda|^{-\varepsilon'}\,(m_1 < m),$$
$$\|\rho^{\theta-\delta}\partial_t^{m_1}(P+|\lambda|E)^{-1}\|_{\mathcal{H}\to\mathcal{H}} \leqslant M|\lambda|^{-\varepsilon'},$$
$$|\rho^{\delta-\theta}\partial_t(\bar{Q}\rho^{2\theta}v^{(m_1)}\psi_j^{(m_2)})|_{\mathcal{H}^r} \leqslant M|v|_+,\ (m_1+m_2 = m, m_2 \neq 0),$$
где $\varepsilon', \delta > 0$ — достаточно малые числа. Первые два из этих неравенств выводятся из известных мультипликативных неравенств (см. напр. [25]). При этом число δ может быть произвольным из интервала $(0,1)$. Последняя оценка следует из неравенства Харди:
$$\sum_{m_1+m_2=m} |\rho^{\theta-m_2+\delta}v^{(m_1)}|_{\mathcal{H}^r} \leqslant M_\delta|v|_+ \quad (\forall v \in \mathcal{H}_+^r).$$
Если $\theta \neq \frac{1}{2}, \ldots, m-\frac{1}{2}$, то это неравенство справедливо также для $\delta = 0$.

6. Из неравенства (3.11) согласно (3.8) следует, что
$$(Q_\nu - \lambda E)\mathcal{R}_\nu(\lambda) = E + G_\nu(\lambda),\ (\lambda \in S, |\lambda| \geq 1, \nu \in [1, 2|\lambda|)),$$
где $G_\nu(\lambda) : \mathcal{H}_{-\nu}^r \to \mathcal{H}_{-\nu}^r$ — непрерывный оператор,
$$\|G_\nu(\lambda)\|_{\mathcal{H}_{-\nu}^r\to\mathcal{H}_{-\nu}^r} \leqslant M|\lambda|^{-\varepsilon'},\ \varepsilon' > 0.$$

Выберем число $\sigma_0 > 0$ так, что $M|\lambda|^{-\varepsilon'} \leqslant \frac{1}{2}$ для всех $|\lambda| \geq \sigma_0$. Тогда
$$(Q_\nu - \lambda E)\mathcal{R}_\nu(\lambda)G'_\nu(\lambda) = E,\ G'_\nu(\lambda) = (E + G_\nu(\lambda))^{-1},$$
$$\|(E - G'_\nu(\lambda)\|_{\mathcal{H}_{-\nu}^r\to\mathcal{H}_{-\nu}^r} < 1.$$

Покажем, что $ker\,(Q_\nu - \lambda E) = 0, \forall \lambda \in S, |\lambda| \geq \sigma_1$, где σ_1 — достаточно большое число, $\nu \in [1, 2|\lambda|)$. Тогда при $\lambda \in S, |\lambda| \geq \sigma' = max\{\sigma_0, \sigma_1\}, \nu \in [1, 2|\lambda|)$ мы будем иметь равенство

$$(Q_\nu - \lambda E)^{-1} = \mathcal{R}_\nu(\lambda) G'_\nu(\lambda). \tag{3.13}$$

Рассмотрим оператор $Q_{*,\nu} : \mathcal{H}^r_\nu \to \mathcal{H}^r_{-\nu}, \nu > 0$, действующий по формуле

$$< Q_{*,\nu} u, v >= (\rho^\theta \bar{Q} u^{(m)}, \rho^\theta v^{(m)}),\ (\forall u, v \in \mathcal{H}^r_\nu).$$

Так же, как и выше, строятся операторы

$$\mathcal{R}_{*,\nu}(\bar\lambda) : \mathcal{H}^r_{-\nu} \to \mathcal{H}^r_\nu,\ G_{*,\nu}(\bar\lambda) : \mathcal{H}^r_{-\nu} \to \mathcal{H}^r_{-\nu},$$

такие, что

$$(Q_{*,\nu} - \bar\lambda E)\mathcal{R}_{*,\nu}(\bar\lambda) = E + G_{*,\nu}(\bar\lambda), \tag{3.14}$$

$$\|G_{*,\nu}(\bar\lambda)\|_{\mathcal{H}_{-\nu}\to\mathcal{H}_{-\nu}} \leqslant \frac{1}{2} \quad (\lambda \in S, |\lambda| \geq \sigma_1, \nu \in [1, 2|\lambda|)). \tag{3.14$'$}$$

Пусть $u \in \mathcal{H}^r_{-\nu}$ такой элемент, что $(Q_\nu - \lambda E)u = 0$. Пусть кроме того, $|\lambda| \geq \sigma' = max\{\sigma_0, \sigma_1\}$. Тогда

$$< (Q_\nu - \lambda E)u, v >= 0, \quad \forall v \in \mathcal{H}^r_\nu,$$

т.е.

$$(\rho^\theta Q u^{(m)}, \rho^\theta v^{(m)}) - \lambda(u, v) = 0 \quad (\forall v \in \mathcal{H}^r_\nu).$$

Следовательно,

$$< (Q_{*,\nu} - \bar\lambda E)v, u >= (\bar{Q}(t)\rho^\theta(t) v^{(m)}(t), u^{(m)}(t)) - \bar\lambda(v, u) = 0.$$

Положим $v = \mathcal{R}_{*,\nu}(\bar\lambda)F, F \in \mathcal{H}^r_{-\nu}$. Тогда в силу (3.9),

$$< (E + G_{*,\nu}(\bar\lambda))F, u >= 0, \quad \forall F \in \mathcal{H}^r_{-\nu}.$$

Поскольку при $\lambda \in S, |\lambda| \geq \sigma', \nu \in [1, 2|\lambda|)$ оператор

$$(E + G_{*,\nu}(\bar\lambda)) : \mathcal{H}^r_{-\nu} \to \mathcal{H}^r_\nu$$

имеет непрерывный обратный, следовательно, $< F_1, u >= 0, \forall F_1 \in \mathcal{H}^r_{-\nu}$. Полагая $F_1 = 0$, получим $u = 0$. Тем самым установлено равенство (3.13), откуда следует оценка

$$\|(Q_\nu - \lambda E)^{-1}\|_{\mathcal{H}^r_{-\nu}\to\mathcal{H}^r_\nu} \leqslant 2\|\mathcal{R}_\nu(\lambda)\|_{\mathcal{H}^r_{-\nu}\to\mathcal{H}^r_\nu}.$$

Применяя теперь (3.7$'$), (3.12) и лемму 3.5, мы завершаем доказательство леммы 3.1.

Замечание. Результаты этого параграфа имеют место также в том случае, когда матрица $Q(t)$ диагональная и выводятся еще проще ввиду отсутствия единицы.

§ 4. Доказательство теоремы 1.1.

1. Рассмотрим билинейную форму $\mathcal{A}[u, v]$ (1.2). Пусть выполнены все условия теоремы 1.1. В этом разделе мы предполагаем, что матрица $a(t)$ имеет вид

$$a(t) = U(t)\Lambda(t)U^{-1}(t), \tag{4.1}$$

где матричные функции $U(t), U^{-1}(t) \in C^m(\bar{J}; End\,\mathbf{C}^l)$, а $\Lambda(t)$ — жорданова матрица следующей структуры. Найдутся числа $r_1, \ldots, r_p$ такие, что $\sum\limits_{i=1}^{p} r_i = l$, и если комплексное l-мерное пространство $\mathbf{C}^l$ представить в виде $\mathbf{C}^{r_1} \times \cdots \times \mathbf{C}^{r_p}$, то

$$\Lambda(t) = diag\,\{Q_1(t), \ldots, Q_p(t)\},$$

где $Q_i(t)$ является $r_i \times r_i$-матрицей вида

$$\begin{pmatrix} q_i(t) & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & q_i(t) & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & q_i(t)) \end{pmatrix}$$

или

$$Q_i(t) = diag\,\{q_i(t), \dots, q_i(t)\} \quad (r_i \quad \text{- раз}). \tag{4.2}$$

Увеличивая если нужно число блоков, можно добиться того, что в случае (4.2), $r_i = 1$, и тогда речь идет о скалярном случае (т.е. одномерной матрице).

Очевидно, что $\{q_i(t)\}$ — это собственные значения матрицы $a(t)$.

Согласно лемме 2.1 такие же представления имеют место, в частности, в том случае, если с.з. матрицы $q(t)$ в координатной плоскости все различны на концах отрезка. Потому, что тогда по непрерывности они будут различны в некоторых малых окрестностях концов отрезка.

Введем оператор $Q_{\nu,i} : \mathcal{H}_\nu^{r_i} \to \mathcal{H}_{-\nu}^{r_i}\, (\nu > 0, i = \overline{1,p})$ по формуле

$$< Q_{\nu,i}u, v >= Q^0_{\nu,i}[u,v] = (\rho^\theta Q_i(t)u^{(m)}, \rho^\theta v^{(m)})_{L_2(J)^l}\, (u, v \in \mathcal{H}_\nu^{r_i}).$$

В прямой сумме $\mathcal{H}_\nu^l = \mathcal{H}_\nu^{r_1} \oplus \mathcal{H}_\nu^{r_2} \oplus \dots \oplus \mathcal{H}_\nu^{r_p}$, введем оператор

$$\mathcal{B}_\nu = diag\,\{Q_{\nu,1}, \dots, Q_{\nu,p}\} \,:\, \mathcal{H}_\nu^l \to \mathcal{H}_{-\nu}^l,$$

где $\mathcal{H}_{-\nu}^l = \mathcal{H}_{-\nu}^{r_1} \oplus \mathcal{H}_{-\nu}^{r_2} \oplus \dots \oplus \mathcal{H}_{-\nu}^{r_p}$. Норма $|F|_{-\nu}$ элемента $F \in \mathcal{H}_{-\nu}^l$ равна верхней грани чисел $| < F, v > |$, по $v \in \mathcal{H}_\nu^l$ таким, что $|v|_\nu = 1$.

По лемме 3.1 при $r \in \{1, \dots, p\}, \lambda \in S, |\lambda| \geq c', \nu \in [1, 2|\lambda|)$, где $c' > 0$ — достаточно большое число, существуют непрерывные обратные

$$(Q_{\nu,r} - \lambda E)^{-1} \,:\, \mathcal{H}_{-\nu}^l \to \mathcal{H}_\nu^l, \quad r = \overline{1,p}.$$

Ясно, что

$$(\mathcal{B}_\nu - \lambda E)^{-1} = diag\,\{(Q_{\nu,1} - \lambda E)^{-1}, \dots, (Q_{\nu,p} - \lambda E)^{-1}\} \,:\, \mathcal{H}_{-\nu}^l \to \mathcal{H}_\nu^l$$

непрерывный оператор. Положим

$$X_\nu(\lambda) = U(\mathcal{B}_\nu - \lambda E)^{-1} U^{-1}, \tag{4.3}$$

где U обозначает оператор, действующий в $\mathcal{H}_{-\nu}^l$ по формуле

$$< UF, v >=< F, U^*(t)v(t) > \quad (\forall F \in \mathcal{H}_{-\nu}^l,\, v \in \mathcal{H}_{-\nu}^l).$$

Ясно, что $U \,:\, \mathcal{H}^l \to \mathcal{H}^l$, $U \,:\, \mathcal{H}_\nu^l \to \mathcal{H}_\nu^l$.

Отметим, что если

$$F = (F_1, \dots, F_l) \in \mathcal{H}_{-\nu}^l,\, v = (v_1, \dots, v_l) \in \mathcal{H}_\nu^l,\, \nu > 0,$$

то

$$|F|_{-\nu} = (\sum_{i=1}^l |F_i|_{-\nu}^2)^{1/2}, \quad |v|_\nu = (\sum_{i=1}^l |v_i|_\nu^2)^{1/2},$$

$$< F, v >= \sum_{i=1}^l < F_i, v_i > .$$

Аналогично, если $F = (F_1, \dots, F_p)$, где $F_i \in \mathcal{H}_{-\nu}^l$, $v = (v_1, \dots, v_p) \in \mathcal{H}_\nu^l,\ \nu > 0$, то

$$|F|_{-\nu} = (\sum_{i=1}^p |F_i|_{-\nu}^2)^{1/2}, \quad |v|_\nu = (\sum_{i=1}^p |v_i|_\nu^2)^{1/2},$$

$$< F, v >= \sum_{i=1}^{p} < F_i, v_i > .$$

Для $F \in \mathcal{H}^l$ имеем $< F, v >= (F, v)$, $\forall v \in \mathcal{H}^l_\nu$.

Из представления (4.3) согласно леммы 3.1 вытекает, что при достаточно больших по модулю $\lambda \in S$, имеет место неравенство

$$\|X_\nu(\lambda)\|_{\mathcal{H}^l_{-\nu} \to \mathcal{H}^l_\nu} \leqslant M, \tag{4.3'}$$

где число M не зависит от $\lambda, \nu \in [1, 2|\lambda|)$.

Для $F \in \mathcal{H}^l_{-\nu}, v \in \mathcal{H}^l_\nu$ в силу (1.2) выполняется равенство

$$\mathcal{A}[X_\nu(\lambda)F, v] = x_\lambda(F, v) + y_\lambda(F, v),$$

где

$$x_\lambda(F, v) = \sum_{j=0}^{m} \sum_{i=0}^{r_j} (p_i a_{ij} \partial_t^i X_\nu(\lambda)F, p_j v^{(j)}),\ r_j = min\{m, 2m - j - 1\},$$

$$y_\lambda(F, v) = (\rho^\theta a(t) \partial_t^m X_\nu(\lambda)F, \rho^\theta v^{(m)}).$$

Заметим, что $y_\lambda(F, v) = y^{(1)}_\lambda(F, v) + y^{(2)}_\lambda(F, v)$, где

$$y^{(1)}_\lambda(F, v) = (\rho^\theta U \Lambda \partial_t^m (\mathcal{B}_\nu - \lambda E)^{-1} U^{-1} F, \rho^\theta v^{(m)}),$$

$$y^{(2)}_\lambda(F, v) = \sum_{j=0}^{m-1} c_j (\rho^\theta a(t) (\partial_t^{m-j} U) \partial_t^j (\mathcal{B}_\nu - \lambda E)^{-1} U^{-1} F, \rho^\theta v^{(m)});$$

c_j — постоянные числа, зависящие только от m, j.

Далее, учитывая, что

$$y^{(1)}_\lambda(F, v) - \lambda(U^{-1}F, U^*(t)v(t)) =< U^{-1}F, U^*(t)v(t) >=< F, v >,$$

находим

$$\mathcal{A}[X_\nu(\lambda)F, v] - \lambda(F, v) =< F, v > + K_\lambda(F, v) + T_\lambda(F, v),$$

где

$$K_\lambda(F, v) = \sum_{j=0}^{m} \sum_{i=0}^{r_j} (p_i a_{ij} \partial_t^i X_\nu(\lambda)F, p_j v^{(j)}), \tag{4.4}$$

$$T_\lambda(F, v) = \sum_{j=0}^{m-1} c_j (\rho^\theta a(t) U^{(m-j)} \partial_t^j (\mathcal{B}_\nu - \lambda E)^{-1} F, \rho^\theta v^{(m)}). \tag{4.5}$$

Здесь $U^{(m-j)} = \partial_t^{m-j} U$. Используя формулы (3.7′), (3.12), (3.13), (4.3) и повторяя рассуждения, проведенные в §3, мы устанавливаем, что при $\lambda \in S, |\lambda| \geq c', \nu \in [1, 2|\lambda|)$, где $c' > 0$ — достаточно большое число, существует непрерывный обратный

$$(\mathcal{A}_\nu - \lambda E)^{-1} = X_\nu(\lambda)(E + \Gamma_\nu(\lambda)), \tag{4.6}$$

$$\|\Gamma_\nu(\lambda)\|_{\mathcal{H}^l_{-\nu} \to \mathcal{H}^l_{-\nu}} \leqslant M|\lambda|^{-\varepsilon'}, \quad \varepsilon' > 0. \tag{4.7}$$

Здесь оператор $\mathcal{A}_\nu : \mathcal{H}^l_\nu \to \mathcal{H}^l_{-\nu}$ определен по формуле

$$< \mathcal{A}_\nu u, v >= \mathcal{A}[u, v], \quad (\forall u, v \in \mathcal{H}^l_\nu).$$

2. Пусть $a_{mm}(t) \in C^m(\bar{J};\ End\,\mathbf{C}^l)$, и выполнено неравенство (1.3). Предположим, что с.з. матрицы $a(t) = a_{mm}(t) (t \in \bar{J})$ расположены вне некоторого замкнутого сектора $S \subset \mathbf{C}$ с вершиной в нуле. Пусть найдется число $\varepsilon \in (0, 1/2)$ такое, что имеет место представление

$$a(t) = U_\pm(t) \Lambda_\pm(t) U^{-1}_\pm(t),\ det\, U_\pm(t) \neq 0\, (t \in \Delta_\pm), \tag{4.8}$$

где

$$U_\pm(t), U_\pm^{-1}(t) \in C^m(\Delta_\pm; End\,\mathbf{C}^l),\ \Delta_+ = [0,\varepsilon),\ \Delta_- = (1-\varepsilon, 1], \tag{4.8$'$}$$

а $\Lambda_\pm(t)$ при каждом фиксированном $t \in \Delta_\pm$ является жордановой матрицей следующей структуры. Найдутся числа $r_1^+, \dots, r_p^+, r_1^-, \dots, r_p^-$ такие, что $\sum_{i=1}^p r_i^+ = \sum_{j=1}^p r_j^- = l$, и если комплексное l-мерное пространство $\mathbf{C}^l$ представить в виде $\mathbf{C}^{r_1^+} \times \dots \times \mathbf{C}^{r_p^+}$ и в виде $\mathbf{C}^{r_1^-} \times \dots \times \mathbf{C}^{r_p^-}$, то

$$\Lambda_+(t) = diag\,\{Q_1^+(t), \dots, Q_p^+(t)\},$$
$$\Lambda_-(t) = diag\,\{Q_1^-(t), \dots, Q_p^-(t)\},$$

где $Q_i^\pm(t)$ является $r_i^\pm \times r_i^\pm$-матрицей вида

$$\begin{pmatrix} q_i^\pm(t) & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & q_i^\pm(t) & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & q_i^\pm(t) \end{pmatrix},$$

$$q_i^\pm(t) \in C^m(\Delta_\pm; End\,\mathbf{C}^{r_i^\pm}),$$

или

$$Q_i^\pm(t) = diag\,\{q_i^\pm(t), \dots, q_i^\pm(t)\} \quad (r_i^\pm \ \text{- раз}). \tag{4.9}$$

Продолжим функции $q_i^+(t)$ с интервала $(0,\varepsilon)$ на весь отрезок $[0,1]$ так, что $\tilde{q}_i^+(t) \in C^m(\bar{J};\, End\,\mathbf{C}^l), \tilde{q}_i^+(t) \notin S$. В соответствии с этим продолжением, матрицу $\Lambda_+(t)$ продолжим до матрицы $\tilde{\Lambda}_+(t)$ так, что жордановые клетки не меняют своей структуры.

Аналогично продолжим матрицу $U_+(t)$ так, что $\tilde{U}_+(t) \in C^m(\bar{J};\, End\,\mathbf{C}^l)$ и

$$det\,\tilde{U}_+(t) \neq 0, \qquad t \in \bar{J}.$$

В соответствии с этим мы получаем продолжение матрицы $a(t)$ с интервала $(0,\varepsilon)$ на весь $\bar{J}$:

$$\tilde{a}^+(t) = \tilde{U}_+(t)\tilde{\Lambda}_+(t)\tilde{U}_+^{-1}(t). \tag{$*$}$$

Аналогично строится матрица $\tilde{a}^-(t)$, которой соответствуют матричные функции $\tilde{q}_i^-(t), \tilde{U}_-(t)$ и $\tilde{\Lambda}_-(t)$:

$$\tilde{a}^-(t) = \tilde{U}_-(t)\tilde{\Lambda}_-(t)\tilde{U}_-^{-1}(t), \quad t \in \bar{J}. \tag{$**$}$$

Введем оператор $Q_{\nu,i}^\pm : \mathcal{H}_\nu^{r_i^\pm} \to \mathcal{H}_{-\nu}^{r_i^\pm}\,(\nu > 0, i = \overline{1,p})$ по формуле

$$< Q_{\nu,i}^\pm u, v >= Q_{\nu,i}^0[u,v] = (\rho^\theta Q_i^\pm(t) u^{(m)}, \rho^\theta v^{(m)})_{L_2(J)^l}\,(u, v \in \mathcal{H}_\nu^{r_i^\pm}).$$

В прямой сумме $\mathcal{H}_\nu^l = \mathcal{H}_\nu^{r_1^\pm} \oplus \mathcal{H}_\nu^{r_2^\pm} \oplus \dots \oplus \mathcal{H}_\nu^{r_p^\pm}$ введем оператор

$$\mathcal{B}_\nu^\pm = diag\,\{Q_{\nu,1}^\pm, \dots, Q_{\nu,p}^\pm\} : \mathcal{H}_\nu^l \to \mathcal{H}_{-\nu}^l,$$

где

$$\mathcal{H}_{-\nu}^l = \mathcal{H}_{-\nu}^{r_1^\pm} \oplus \mathcal{H}_{-\nu}^{r_2^\pm} \oplus \dots \oplus \mathcal{H}_{-\nu}^{r_p^\pm}.$$

По лемме 3.1 при $r \in \{1, \dots, p\}, \lambda \in S, |\lambda| \geq c', \nu \in [1, 2|\lambda|)$, где $c' > 0$ — достаточно большое число, существуют непрерывные обратные

$$(Q_{\nu,r}^\pm - \lambda E)^{-1} : \mathcal{H}_{-\nu}^{r_i^\pm} \to \mathcal{H}_\nu^{r_i^\pm} \quad r = \overline{1,p}.$$

Ясно, что

$$(\mathcal{B}_\nu^\pm - \lambda E)^{-1} = diag\,\{(Q_{\nu,1}^\pm - \lambda E)^{-1}, \dots (Q_{\nu,p}^\pm - \lambda E)^{-1}\} : \mathcal{H}_{-\nu}^l \to \mathcal{H}_\nu^l$$

— непрерывный оператор.

Осуществим разбиение единицы отрезка $[0,1]$.

Существуют неотрицательные функции $\psi_j(t) \in C_0^\infty(\bar{J}), i = 1, 2, \ldots$, обладающие следующими свойствами:

1) $\sum\limits_{j=-\infty}^{\infty} \psi_j^2(t) \equiv 1\,(t \in R)$.

2) все функции $\psi_j(t)$ получаются "сдвигом"от одной функции.

3) кратность покрытия $[0,1] = \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} supp\,\psi_j$ равна 2.

Для любых $t, \tau \in supp\,\psi_j(\cdot, \delta)$, где $\delta > 0$ — некоторое число, имеет место неравенство

$$|t - \tau| \leqslant c|\lambda|^{-\varepsilon}, \quad c > 0. \tag{4.10}$$

Из 2) следует, что $\sum\limits_{j=-\infty}^{\infty} \psi_j^2(t|\lambda|^{-\varepsilon}) \equiv 1$.

Положим

$$R_0(\lambda, t, \tau) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \psi_j(\cdot, \delta) R_j(\lambda) \psi_j(\cdot, \delta),$$

где $R_j(\lambda)$ — п.д.о. с символом

$$R_j(s, \lambda) = (\rho^{2\theta}(\tau_j) a(\tau_j) s^{2m} - \lambda I)^{-1}, \tau_j \in supp\,\psi_j(\cdot, \delta).$$

Так как норма п.д.о. оценивается через нормы его символа, то можно показать, что

$$|R_j(s, \lambda)| \leqslant M(\rho^{2\theta}(t_i) s^{2m} + |\lambda|)^{-1},$$

где $M > 0, t_i \in supp\,\psi_j(\cdot, \delta), \lambda \in S$.

Построим теперь операторную функцию $X_\nu(\lambda)$, удовлетворяющую соотношениям типа (4.6), (4.7). Фиксируем неотрицательные функции $\psi_+(t), \psi_-(t), \psi(t) \in C^\infty[0,1]$, обладающие следующим свойством

$$\psi_+^2(t) + \psi_-^2(t) + \psi^2(t) \equiv 1, \quad \psi_-(t) = \psi_+(1 - t) \quad (t \in \bar{J}),$$

$$\psi_+(\tau) = 0 \quad (\frac{3}{4}\varepsilon < \tau < 1), \quad \psi_+(\tau) = 1 \quad (0 \leqslant \tau < \varepsilon/2).$$

Оператор $X_\nu(\lambda)$ введем по формуле

$$X_\nu(\lambda) = \psi_+ \tilde{U}_+ (\mathcal{B}_\nu^+ - \lambda E))^{-1} \tilde{U}_+^{-1} \psi_+ + R_0(\lambda, t, \tau) + \psi_- \tilde{U}_- (\mathcal{B}_\nu^- - \lambda E))^{-1} \tilde{U}_-^{-1} \psi_-,$$

где $\psi_\pm(t)$ обозначает оператор умножения на функцию $\psi_\pm(t)$, а $U_\pm : \mathcal{H}_-^l \to \mathcal{H}_-^l$ — непрерывный оператор такой, что $(U_\pm u)(t) = \tilde{U}_\pm(t) u(t), \forall u \in \mathcal{H}^l, (\lambda \in S, |\lambda| > c', c' > 0$ — достаточно большое число).

Представим $X_\nu(\lambda)$ в виде

$$X_\nu(\lambda) = \sum_{k=1}^{3} X_{\nu,k}(\lambda), \tag{4.11}$$

где

$$X_{\nu,1}(\lambda) = \psi_+ \tilde{U}_+ (\mathcal{B}_\nu^+ - \lambda E)^{-1} \tilde{U}_+^{-1} \psi_+,$$
$$X_{\nu,2}(\lambda) = \psi R_0 \psi,$$
$$X_{\nu,3}(\lambda) = \psi_- \tilde{U}_- (\mathcal{B}_\nu^- - \lambda E)^{-1} \tilde{U}_-^{-1} \psi_-.$$

В последующих пунктах а), б), в) получены представления для $\mathcal{A}_\nu[X_{\nu,i}F, v]$ при $i = 2, 1, 3$ соответственно.

а)для $F \in \mathcal{H}_{-\nu}^l, v \in \mathcal{H}_\nu^l$ имеем

$$\mathcal{A}_\nu[X_{\nu,2}F, v] = \sum_{i,j=0}^{m} (p_i a_{ij}(t) \partial_t^i (X_{\nu,2}F), p_j v^{(j)}(t))_{L_2} =$$

$$= x_\lambda(F,v) + y_\lambda(F,v), \tag{4.12}$$

где

$$x_\lambda(F,v) = \sum_{j=0}^{m}\sum_{i=0}^{r_j}(p_i a_{ij}\partial_t^i(X_{\nu,2}(\lambda)F), p_j v^{(j)}),\ r_j = min\{m, 2m-j-1\},$$

$$y_\lambda(F,v) = (\rho^{2\theta}a(t)\partial_t^m(X_{\nu,2}(\lambda)F), v^{(m)}).$$

Здесь и далее опускаем индекс $L_2(\varepsilon, 1-\varepsilon)$.

Для дальнейшего исследования нам понадобятся некоторые вспомогательные леммы.

Пусть $\hat{\mathcal{H}}_\nu^l$ — замыкание $C_0^\infty(R^n)^l$ по норме

$$|u|_\nu = (|u^{(m)}(t)|_{L_2}^2 + \nu|u|_{L_2}^2)^{1/2}.$$

Обозначим $\hat{\mathcal{H}}_{-\nu}$ — пополнение пространства $L_2(J)$ по норме

$$|F|_{-\nu} = \sup_{v\neq 0}\frac{|(F,v)|}{|v|_{\hat{\mathcal{H}}_\nu^l}}.$$

Элементы из $\hat{\mathcal{H}}_{-\nu}^l$ отождествляются с соответствующими антилинейными непрерывными функционалами над $\hat{\mathcal{H}}_\nu^l$.

Таким образом мы получили тройку плотно вложенных пространств

$$\hat{\mathcal{H}}_\nu^l \subset L_2^l \subset \hat{\mathcal{H}}_{-\nu}^l.$$

В этом вложении $\hat{\mathcal{H}}_\nu^l$ — позитивное пространство, а $\hat{\mathcal{H}}_{-\nu}^l$ — негативное пространство (см. [23, §2.0]).

Ясно, что имеют место вложения

$$\hat{\mathcal{H}}_\nu^l \subset \mathcal{H}_\nu^l \subset L_2^l \subset \hat{\mathcal{H}}_{-\nu}^l \subset \mathcal{H}_{-\nu}^l.$$

Лемма 4.1. *Справедливо неравенство*

$$|F|_{\hat{\mathcal{H}}_{-\nu}^l} \leqslant |F|_{\mathcal{H}_{-\nu}^l}.$$

Доказательство. Очевидно следующее неравенство

$$|v|_{\hat{\mathcal{H}}_\nu^l} \geq |v|_{\mathcal{H}_\nu^l}.$$

Используя это неравенство, имеем

$$|F|_{\hat{\mathcal{H}}_{-\nu}^l} = \sup_{v\neq 0}\frac{|(F,v)|}{|v|_{\hat{\mathcal{H}}_\nu^l}} \leqslant \sup_{v\neq 0}\frac{|(F,v)|}{|v|_{\mathcal{H}_\nu^l}} = |F|_{\mathcal{H}_{-\nu}^l}.$$

Лемма доказана.

Введем оператор $\overset{\circ}{P}{}'_\nu$, действующий следующим образом:

$$(\overset{\circ}{P}{}'_\nu u, v) = (u^{(m)}, v^{(m)}) + \nu(u,v), \quad (u, v \in \hat{\mathcal{H}}_\nu^l),$$

с областью определения

$$D(\overset{\circ}{P}{}'_\nu) = \hat{\mathcal{H}}_\nu^l.$$

Определим оператор $\overset{\circ}{P}_\nu : \hat{\mathcal{H}}_\nu \to L_2$, по формуле

$$\overset{\circ}{P}_\nu = (\overset{\circ}{P}{}'_\nu)^{1/2}, \quad D(\overset{\circ}{P}_\nu) = D((\overset{\circ}{P}{}'_\nu)^{1/2}) = \hat{\mathcal{H}}_\nu^l.$$

Лемма 4.2. *Пусть $\alpha(t) \in C^m(J; End\,\mathbf{C}^l)$, $T : L_2(J) \to L_2(J)$ — ограниченный оператор. Тогда для любых $F \in \mathcal{H}_{-\nu}^l, v \in \mathcal{H}_\nu$ справедливо неравенство*

$$| < \alpha(t)TF, v^{(j)} > | \leqslant \sup_{t\in J}|\alpha(t)|\|\overset{\circ}{P}_\nu T^*\|_{L_2\to L_2}|F|_{-\nu}|v|_\nu.$$

Доказательство. Поскольку $L_2(J)^l$ плотно в $\mathcal{H}^l_{-\nu}$, то, не нарушая общности, можно полагать, что $F \in L_2(J)^l$. Тогда имеем

$$|<\alpha(t)TF, v^{(j)}>| = |(\alpha(t)TF, v^{(j)})| =$$
$$= |(\alpha(t)T \overset{\circ}{P}_\nu (\overset{\circ}{P}_\nu)^{-1}F, v^{(j)})| \leqslant$$
$$\leqslant (\sup_{t\in J}|\alpha(t)|)\| \overset{\circ}{P}_\nu T^*\|_{L_2}\|(\overset{\circ}{P}_\nu)^{-1}F\|_{L_2}|v|_\nu.$$

Утверждение леммы следует отсюда, если учесть, что

$$\|(\overset{\circ}{P}_\nu)^{-1}F\|_{L_2} = |F|_{\hat{\mathcal{H}}^l_{-\nu}} \leqslant |F|_{\mathcal{H}^l_{-\nu}}.$$

Докажем теперь следующее неравенство (см.(4.12))

$$|x_\lambda(F,v)| \leqslant M(|\lambda|^{-\varepsilon'} + \nu^{-\varepsilon''})|F|_{-\nu}|v|_\nu, \tag{4.13}$$

где $M > 0, \varepsilon' > 0, \varepsilon'' > 0, \nu \in [1, 2|\lambda|], \lambda \in S$.

Используя формулу Лейбница, имеем

$$x_\lambda(F,v) = \sum_{j=0}^{m}\sum_{i=0}^{r_j}(p_i a_{ij}\partial_t^i(X_{\nu,2}(\lambda)F), p_j v^{(j)}) =$$
$$= \sum_{i,j=0}^{m-1}(p_i p_j a_{ij}\partial_t^i(X_{\nu,2}(\lambda)F), v^{(j)}) + \sum_{i=0}^{m-1}(p_i p_m a_{im}\partial_t^i(X_{\nu,2}(\lambda)F), v^{(m)}) +$$
$$+ \sum_{j=0}^{m-1}(p_j p_m a_{mj}\partial_t^m(X_{\nu,2}(\lambda)F), v^{(j)}) = x_1(F,v) + x_2(F,v) + x_3(F,v).$$

Далее

$$x_1(F,v) = \sum_{i,j=0}^{m-1}(p_i p_j a_{ij}\partial_t^i(\sum_{k=1}^{+\infty}\psi\psi_k(\cdot,\delta)R_k(\lambda)\psi\psi_k(\cdot,\delta)F), v^{(j)}) =$$
$$= \sum_{k=1}^{+\infty}\sum_{i,j=0}^{m-1}(p_i p_j a_{ij}\partial_t^i(\psi\psi_k(\cdot,\delta)R_k(\lambda)\psi\psi_k(\cdot,\delta)F), v^{(j)}) =$$
$$= \sum_{k=1}^{+\infty}\sum_{i,j=0}^{m-1}(p_i p_j a_{ij}\psi\psi_k(\cdot,\delta)\partial_t^i(R_k(\lambda)\psi\psi_k(\cdot,\delta)F), v^{(j)}) +$$
$$+ \sum_{k=1}^{+\infty}\sum_{i,j=0}^{m-1}(p_i p_j a_{ij}(\sum_{l=0}^{i-1}C_i^l\partial^{i-l}(\psi\psi_k(\cdot,\delta))\partial_t^l(R_k(\lambda)\psi\psi_k(\cdot,\delta)F), v^{(j)}) =$$
$$= \sum_{k=1}^{+\infty}\sum_{i,j=0}^{m-1}(p_i p_j a_{ij}\psi\psi_k(\cdot,\delta)\partial_t^i(R_k(\lambda)\psi\psi_k(\cdot,\delta)F), v^{(j)}) +$$
$$+ \sum_{k=1}^{+\infty}\sum_{i,j=0}^{m-1}\sum_{l=0}^{i-1}(p_i p_j a_{ij}C_i^l\partial^{i-l}(\psi\psi_k(\cdot,\delta))\partial_t^l(R_k(\lambda)\psi\psi_k(\cdot,\delta)F), v^{(j)}) =$$
$$= \sum_{k=1}^{+\infty}\sum_{i,j=0}^{m-1}(p_i p_j a_{ij}\psi\psi_k(\cdot,\delta)\partial_t^i(R_k(\lambda)F)\psi\psi_k(\cdot,\delta), v^{(j)}) +$$
$$+ \sum_{k=1}^{+\infty}\sum_{i,j=0}^{m-1}\sum_{n=0}^{i-1}(p_i p_j a_{ij}\psi\psi_k(\cdot,\delta)C_i^n\partial^{i-n}(\psi\psi_k(\cdot,\delta))\partial_t^n(R_k(\lambda)F), v^{(j)}) +$$

$$+\sum_{k=1}^{+\infty}\sum_{i,j=0}^{m-1}\sum_{l=0}^{i-1}(p_ip_ja_{ij}C_i^l\partial^{i-l}(\psi\psi_k(\cdot,\delta))\partial_t^l(R_k(\lambda)\psi\psi_k(\cdot,\delta)F),v^{(j)}) =$$

$$=\sum_{k=1}^{+\infty}\sum_{i,j=0}^{m-1}(p_ip_ja_{ij}\psi\psi_k(\cdot,\delta)R_k^i(\lambda)F\psi\psi_k(\cdot,\delta),v^{(j)})+$$

$$+\sum_{k=1}^{+\infty}\sum_{i,j=0}^{m-1}\sum_{n=0}^{i-1}(p_ip_ja_{ij}\psi\psi_k(\cdot,\delta)C_i^n\partial^{i-n}(\psi\psi_k(\cdot,\delta))(R_k^n(\lambda)F),v^{(j)})+$$

$$+\sum_{k=1}^{+\infty}\sum_{i,j=0}^{m-1}\sum_{l=0}^{i-1}(p_ip_ja_{ij}C_i^l\partial^{i-l}(\psi\psi_k(\cdot,\delta))R_k^l(\lambda)F\psi\psi_k(\cdot,\delta),v^{(j)})+$$

$$+\sum_{k=1}^{+\infty}\sum_{i,j=0}^{m-1}\sum_{l=0}^{i-1}\sum_{\eta=0}^{l-1}(p_ip_ja_{ij}C_i^l\partial^{i-l}(\psi\psi_k(\cdot,\delta))C_l^\eta(\psi\psi_k(\cdot,\delta))\partial^{l-\eta}(\psi\psi_k(\cdot,\delta))R_k^\eta(\lambda)F,v^{(j)}) =$$

$$=\sum_{k=1}^{+\infty}\sum_{i,j=0}^{m-1}(p_ip_ja_{ij}\psi\psi_k(\cdot,\delta)R_k^i(\lambda)\overset{\circ}{P}_\nu(\overset{\circ}{P}_\nu^{-1}F)\psi\psi_k(\cdot,\delta),v^{(j)})+$$

$$+\sum_{k=1}^{+\infty}\sum_{i,j=0}^{m-1}\sum_{n=0}^{i-1}(p_ip_ja_{ij}\psi\psi_k(\cdot,\delta)C_i^n\partial^{i-n}(\psi\psi_k(\cdot,\delta))(R_k^n(\lambda)\overset{\circ}{P}_\nu(\overset{\circ}{P}_\nu^{-1}F),v^{(j)})+$$

$$+\sum_{k=1}^{+\infty}\sum_{i,j=0}^{m-1}\sum_{l=0}^{i-1}(p_ip_ja_{ij}C_i^l\partial^{i-l}(\psi\psi_k(\cdot,\delta))R_k^l(\lambda)\overset{\circ}{P}_\nu(\overset{\circ}{P}_\nu^{-1}F)\psi\psi_k(\cdot,\delta),v^{(j)})+$$

$$+\sum_{k=1}^{+\infty}\sum_{i,j=0}^{m-1}\sum_{l=0}^{i-1}\sum_{\eta=0}^{l-1}(p_ip_ja_{ij}C_i^l\partial^{i-l}(\psi\psi_k(\cdot,\delta))\cdot$$

$$\cdot C_l^\eta(\psi\psi_k(\cdot,\delta))\partial^{l-\eta}(\psi\psi_k(\cdot,\delta))R_k^\eta(\lambda)\overset{\circ}{P}_\nu(\overset{\circ}{P}_\nu^{-1}F),v^{(j)}) \equiv$$

$$\equiv I_1+I_2+I_3+I_4,$$

где через R_k^i обозначено $\partial_t^i(R_k(\lambda))$.

Теперь, полагая в I_j $(j=\overline{1,4})$

$$T_1^+=\psi\psi_kR_k^i(\lambda),\quad T_2^+=\psi\psi_kR_k^n(\lambda),$$

$$T_3^+=\psi\psi_k(\cdot,\delta)R_k^l(\lambda),\quad T_4^+=\psi\psi_kR_k^\eta(\lambda)$$

соответственно, а потом привлекая лемму 4.2, а также учитывая, что

$$|v^{(j)}|_{L_2}\leqslant M\nu^{\frac{j-m}{2m}}|v|_\nu,\quad \delta=|\lambda|^{-\varepsilon'},$$

приходим к неравенству

$$|x_1(F,v)|\leqslant M\sup_{t\in J}|p_ip_ja_{ij}||F|_{\mathcal{H}^l_{-\nu}}\nu^{\frac{j-m}{2m}}|v|_\nu(\sum_{\mu=1}^{4}\|\overset{\circ}{P}_\nu T_\mu^*\|).$$

Теперь займемся оценкой $\|\overset{\circ}{P}_\nu T_\mu^*\|$, $\mu=\overline{1,4}$. Имеем

$$\|\overset{\circ}{P}_\nu T_\mu^*\|_{L_2}\leqslant\|\partial^mT_\mu^*\|_{L_2}+\nu^{1/2}\|T_\mu^*\|_{L_2},\ \mu=\overline{1,4}.$$

Теперь, используя легко проверяемое неравенство

$$\frac{s^{i+m}}{s^{2m}+|\lambda|}\leqslant M|\lambda|^{-\varepsilon},\quad \text{где}\quad \varepsilon=\frac{m-i}{2m}>0,$$

получим (при $\mu=1$)

$$\| \overset{\circ}{P}_\nu T_1^*\|_{L_2} \leqslant \|\partial^m T_1^*\|_{L_2} + \nu^{1/2}\|T_1^*\|_{L_2} \leqslant$$
$$\leqslant M \sup_s (\frac{s^{i+m}}{s^{2m}+|\lambda|} + \nu^{1/2}\frac{s^i}{s^{2m}+|\lambda|}) \leqslant M|\lambda|^{-\varepsilon'}, \quad \text{где} \quad \varepsilon' = \frac{m-i}{2m} > 0.$$

Аналогичные оценки существуют для $\| \overset{\circ}{P}_\nu T_\mu^*\|, \mu = \overline{2,4}$:

$$\| \overset{\circ}{P}_\nu T_2^*\| \leqslant M|\lambda|^{-\varepsilon''}, \quad \text{где} \quad \varepsilon'' = \frac{n-m}{2m} > 0,$$
$$\| \overset{\circ}{P}_\nu T_3^*\| \leqslant M|\lambda|^{-\varepsilon'''}, \quad \text{где} \quad \varepsilon''' = \frac{l-m}{2m} > 0,$$
$$\| \overset{\circ}{P}_\nu T_4^*\| \leqslant M|\lambda|^{-\varepsilon^{IV}}, \quad \text{где} \quad \varepsilon^{IV} = \frac{\eta-m}{2m} > 0.$$

Таким образом, имеет место оценка

$$\sum_{\mu=1}^{4} \| \overset{\circ}{P}_\nu T_\mu^*\| \leqslant M|\lambda|^{-\varepsilon_1}, \quad \text{где} \quad \varepsilon_1 = min(\varepsilon', \varepsilon'', \varepsilon''', \varepsilon^{IV}).$$

Следовательно

$$A) \quad |x_1(F,v)| \leqslant M|\lambda|^{-\varepsilon_2}|F|_{-\nu}|v|_\nu, \quad \text{где} \quad \varepsilon_2 > 0.$$

Действуя аналогично, получим оценки для $x_2(F,v), x_3(F,v)$:

$$B) \quad |x_2(F,v)| \leqslant M|\lambda|^{-\varepsilon_3}|F|_{-\nu}|v|_\nu, \quad \varepsilon_3 > 0,$$
$$C) \quad |x_3(F,v)| \leqslant M\nu^{\frac{j-m}{2m}}|F|_{-\nu}|v|_\nu.$$

Теперь из $A), B), C)$ легко следует (4.13).

Представим теперь матрицу $\rho^{2\theta}(t)a(t)$ в виде

$$\rho^{2\theta}(t)a(t) = \rho^{2\theta}(t_j)a(t_j) + \rho^{2\theta}(t)a(t) - \rho^{2\theta}(t_j)a(t_j),$$

где $t_j \in supp\, \psi_j(\cdot,\delta)$.

Тогда (см. (4.12))

$$y_\lambda(F,v) = (\rho^{2\theta}(t)a(t)\partial_t^m(\psi R_0(\lambda)\psi F), v^{(m)}) =$$
$$= (\rho^{2\theta}(t_j)a(t_j)\partial_t^m(\psi R_0(\lambda)\psi F), v^{(m)}) +$$
$$+([\rho^{2\theta}(t)a(t) - \rho^{2\theta}(t_j)a(t_j)]\partial_t^m(\psi R_0(\lambda)\psi F), v^{(m)}) =$$
$$= y_\lambda^{(1)}(F,v) + y_\lambda^{(2)}(F,v),$$

где

$$y_\lambda^{(1)}(F,v) = (\rho^{2\theta}(t_j)a(t_j)\partial_t^m(\psi R_0(\lambda)\psi F), v^{(m)}), \tag{4.14}$$
$$y_\lambda^{(2)}(F,v) = ([\rho^{2\theta}(t)a(t) - \rho^{2\theta}(t_j)a(t_j)]\partial_t^m(\psi R_0(\lambda)\psi F), v^{(m)}). \tag{4.15}$$

Далее, используя формулу Лейбница, получим

$$y_\lambda^{(1)}(F,v) = (-1)^m \sum_{j=1}^{+\infty}(\rho^{2\theta}(t_j)a(t_j)\partial_t^{2m}[\psi\psi_j(\cdot,\delta)R_j(\lambda)\psi_j(\cdot,\delta)\psi F], v) =$$
$$= (-1)^m \sum_{j=1}^{+\infty}(\rho^{2\theta}(t_j)a(t_j)\psi\psi_j(\cdot,\delta)(\partial_t^{2m}R_j(\lambda))\psi\psi_j(\cdot,\delta)F, v) +$$
$$+(-1)^m \sum_{j=1}^{+\infty}(\rho^{2\theta}(t_j)a(t_j) \sum_{k=1}^{2m-1} C_{2m}^k(\partial^{2m-k}(\psi\psi_k(\cdot,\delta))(\partial^k R_j(\lambda))\psi\psi_j(\cdot,\delta)F, v) =$$
$$= T_1(F,v) + T_2(F,v),$$

где

$$T_1(F,v)=(-1)^m\sum_{j=1}^{+\infty}(\rho^{2\theta}(t_j)a(t_j)\psi\psi_j(\cdot,\delta)(\partial_t^{2m}R_j(\lambda))\psi\psi_j(\cdot,\delta)F,v),$$

$$T_2(F,v)=(-1)^m\sum_{j=1}^{+\infty}(\rho^{2\theta}(t_j)a(t_j)\sum_{k=1}^{2m-1}C_{2m}^k(\partial^{2m-k}(\psi\psi_k(\cdot,\delta))\cdot$$
$$\cdot(\partial^k(R_j(\lambda))\psi\psi_j(\cdot,\delta)F,v).$$

Легко заметить, что

$$T_1(F,v)-\lambda(\psi\psi_j(\cdot,\delta)R_j(\lambda)\psi\psi_j(\cdot,\delta)F,v)=<\psi^2F,v>. \tag{4.16}$$

Произведем оценку $|T_2(F,v)|$. Поступая так же, как при доказательстве неравенства (4.13), воспользовавшись очевидными неравенствами

$$\|\partial^{2m-n}(\psi\psi_j(\cdot,\delta)\|_{L_2}\leqslant M|\lambda|^{\varepsilon'(n-2m)},$$

$$\|\partial^nR_j(\lambda)F\|_{L_2}\leqslant\sup_s\frac{|s^n||F|_{-\nu}}{s^{2m}+|\lambda|}\leqslant M|\lambda|^{-\frac{1}{2m}}|F|_{-\nu},$$

$$|v|_{L_2}\leqslant\nu^{-1/2}(|\partial^mv|_{L_2}+\nu^{1/2}|v|_{L_2})\leqslant M\nu^{-1/2}|v|_\nu,$$

получим

$$\|T_2(F,v)\|_{L_2}\leqslant M_1\nu^{-1/2}|\lambda|^{\varepsilon'(n-2m)-\frac{1}{2m}}|F|_{-\nu}|v|_\nu,$$

или

$$\|T_2(F,v)\|_{L_2}\leqslant M|\lambda|^{-\varepsilon''}|F|_{-\nu}|v|_\nu, \tag{4.17}$$

где

$$\varepsilon''=\frac{m-2m\varepsilon(n-2m)+1}{2m}>0.$$

Докажем оценку (см.(4.15))

$$|y_\lambda^{(2)}(F,v)|\leqslant M|\lambda|^{-\varepsilon'}|F|_{-\nu}|v|_\nu,\ M>0,\ \nu\in[1:2|\lambda|],\ \lambda\in S. \tag{4.18}$$

По теореме Лагранжа имеем

$$|\rho^{2\theta}(t)a(t)-\rho^{2\theta}(t_j)a(t_j)|\leqslant M_1|t-t_j|.$$

Если $t\in supp\,\psi_j$, то $|t-t_j|\leqslant c|\lambda|^{-\varepsilon'}$, следовательно

$$|\rho^{2\theta}(t)a(t)-\rho^{2\theta}(t_j)a(t_j)|\leqslant M_2|\lambda|^{-\varepsilon'}. \tag{4.19}$$

Используя (4.19) и повторяя рассуждения, приведенные выше, мы устанавливаем неравенство (4.18).

Теперь из (4.13), (4.16), (4.17) и (4.8) следует

$$\mathcal{A}_\nu[X_{\nu,2}F,v]-\lambda(\psi\psi_jR_j\psi\psi_jF,v)=<\psi^2F,v>+T(F,v), \tag{4.20}$$

где оператор-функция $T(F,v)$ удовлетворяет оценке

$$\|T(F,v)\|_{L_2}\leqslant M|\lambda|^{-\varepsilon'}|F|_{-\nu}|v|_\nu,\quad M>0,\ \nu\in[1,2|\lambda|],\ \lambda\in S.$$

б) для $F\in\mathcal{H}_{-\nu}^l, v\in\mathcal{H}_\nu^l$ имеем

$$\mathcal{A}_\nu[X_{\nu,1}(\lambda)F,v]=\sum_{i,j=0}^m(p_ia_{ij}(t)\partial_t^i(X_{\nu,1}F),p_jv^{(j)})_{L_2}=$$
$$=x_\lambda(F,v)+y_\lambda(F,v),$$

где

$$x_\lambda(F,v)=\sum_{j=0}^{m}\sum_{i=0}^{r_j}(p_i a_{ij}(t)\partial_t^i(X_{\nu,1}(\lambda)F),p_j v^{(j)}),$$

$r_j=min(m,2m-j-1)$,

$$y_\lambda(F,v)=(\rho^{2\theta}(t)a(t)\partial_t^m(X_{\nu,1}(\lambda)F),v^{(m)})=$$
$$=(\rho^{2\theta}(t)a(t)\partial_t^m(\psi_+\tilde U_+(\mathcal{B}_\nu^+-\lambda E)^{-1}\tilde U_+^{-1}\psi_+F),v^{(m)}).$$

Продолжая по непрерывности матрицу $a(t)$ до $\tilde a^+(t)$ (см.формулу $(*)$), получим

$$\tilde y_\lambda(F,v)\equiv(\rho^{2\theta}(t)\tilde a(t)\partial_t^m(\psi_+\tilde U_+(\mathcal{B}_\nu^+-\lambda E)^{-1}\tilde U_+^{-1}\psi_+F),v^{(m)}).$$

Очевидно, что

$$\tilde y_\lambda(F,v)-\lambda(\psi_+\tilde U_+(\mathcal{B}_\nu^+-\lambda E)^{-1}\tilde U_+^{-1}\psi_+F),v)=<\psi_+^2F,v>. \quad (4.21)$$

Далее рассуждения, приведенные в §3, приведут нас к следующей оценке для $x_\lambda(F,v)$:

$$|x_\lambda(F,v)|\leqslant M|\lambda|^{-\varepsilon}|F|_{-\nu}|v|_\nu. \quad (4.22)$$

Таким образом, имеем

$$\mathcal{A}_\nu[X_{\nu,1}F,v]-\lambda(\psi_+\tilde U_+(\mathcal{B}_\nu^+-\lambda E)^{-1}\tilde U_+^{-1}\psi_+F),v)=$$
$$=<\psi_+^2F,v>+x_\lambda(F,v). \quad (4.23)$$

в) аналогично, как в предыдущем пункте, для $F\in\mathcal{H}_{-\nu}^l, v\in\mathcal{H}_\nu^l$ имеем

$$\mathcal{A}_\nu[X_{\nu,3}(\lambda)F,v]=\sum_{i,j=0}^{m}(p_i a_{ij}(t)\partial_t^i(X_{\nu,3}(\lambda)F),v^{(j)})_{L_2(1-\varepsilon,1)}=$$
$$=x_\lambda(F,v)+y_\lambda(F,v),$$

где

$$x_\lambda(F,v)=\sum_{j=0}^{m}\sum_{i=0}^{r_j}(p_i p_j a_{ij}(t)\partial_t^i(X_{\nu,3}(\lambda)F),v^{(j)}),$$

$r_j=min(m,2m-j-1)$,

$$y_\lambda(F,v)=(\rho^{2\theta}(t)a(t)\partial_t^m(X_{\nu,3}(\lambda)F),v^{(m)})=$$
$$=(\rho^{2\theta}(t)a(t)\partial_t^m(\psi_-\tilde U_-(\mathcal{B}_\nu^--\lambda E)^{-1}\tilde U_-^{-1}\psi_-F),v^{(m)}).$$

Заменяя матрицу $a(t)$ на $\tilde a^-(t)$ (см.формулу $(**)$), получим

$$\tilde y_\lambda(F,v)\equiv(\rho^{2\theta}(t)\tilde a(t)\partial_t^m(\psi_-\tilde U_-(\mathcal{B}_\nu^--\lambda E)^{-1}\tilde U_-^{-1}\psi_-F),v^{(m)}).$$

Ясно, что

$$\tilde y_\lambda(F,v)-\lambda(\psi_-\tilde U_-(\mathcal{B}_\nu^--\lambda E)^{-1}\tilde U_-^{-1}\psi_-F),v)=<\psi_-^2F,v>,$$

а $x_\lambda(F,v)$ удовлетворяет неравенству типа (4.22). Таким образом,

$$\mathcal{A}_\nu[X_{\nu,3}F,v]-\lambda(\psi_-\tilde U_-(\mathcal{B}_\nu^--\lambda E)^{-1}\tilde U_-^{-1}\psi_-F),v)=$$
$$=<\psi_-^2F,v>+x_\lambda(F,v). \quad (4.24)$$

г) из представлений (4.11), (4.20), (4.23) и (4.24) получим

$$\mathcal{A}_\nu[X_\nu(\lambda)F,v]-\lambda(X_\nu(\lambda)F,v)=<(\psi_+^2+\psi^2+\psi_-^2)F,v>+\tilde T(F,v)=$$
$$=<F,v>+\tilde T(F,v), \quad (4.25)$$

где о.-ф. $\tilde T(F,v)$ удовлетворяет оценке

$$\|\tilde T(F,v)\|\leqslant M|\lambda|^{-\varepsilon'}|F|_{-\nu}|v|_\nu. \quad (4.26)$$

3. Из неравенства (4.26) согласно (4.25) следует, что

$$(\mathcal{A}_\nu - \lambda E)X_\nu(\lambda) = E + \Gamma_\nu(\lambda), \quad (\lambda \in S, |\lambda| \geq 1, \nu \in [1, 2|\lambda|),$$

где $\Gamma_\nu(\lambda) : \mathcal{H}_{-\nu} \to \mathcal{H}_{-\nu}$ — непрерывный оператор,

$$\|\Gamma_\nu(\lambda)\|_{\mathcal{H}_{-\nu}\to\mathcal{H}_{-\nu}} \leqslant M(|\lambda|^{-\varepsilon'} + \nu^{-\varepsilon''}), \quad \varepsilon' > 0,\, \varepsilon'' > 0.$$

Выберем число $\sigma_0 > 0$ так, что $M(|\lambda|^{-\varepsilon'} + \nu^{-\varepsilon''}) \leqslant \frac{1}{2}$ для всех $|\lambda| \geq \sigma_0$. Тогда

$$(\mathcal{A}_\nu - \lambda E)X_\nu(\lambda)\Gamma'_\nu(\lambda) = E, \quad \Gamma'_\nu(\lambda) = (E + \Gamma_\nu(\lambda))^{-1},$$

$$\|E - \Gamma'_\nu(\lambda)\|_{\mathcal{H}_{-\nu}\to\mathcal{H}_{-\nu}} < 1.$$

Покажем, что $ker(\mathcal{A}_\nu - \lambda E) = 0, \forall \lambda \in S, |\lambda| \geq \sigma_1$, где σ_1 — достаточно большое число, $\nu \in [1, 2|\lambda|)$. Тогда при $\lambda \in S, |\lambda| \geq \sigma_1 = max\{\sigma_0, \sigma_1\}, \nu \in [1, 2|\lambda|)$ мы будем иметь равенство

$$(\mathcal{A}_\nu - \lambda E)^{-1} = X_\nu(\lambda)\Gamma'_\nu(\lambda). \tag{4.27}$$

Рассмотрим оператор $\mathcal{A}'_\nu : \mathcal{H}_\nu \to \mathcal{H}_{-\nu}, \nu > 0$, действующий по формуле

$$< \mathcal{A}'_\nu u, v >= \sum_{i,j=0}^{m} (a^*_{ij} p_i u^{(i)}, p_j v^{(j)}), \quad \forall u, v \in \mathcal{H}_\nu.$$

Так же, как и выше, строятся операторы

$$X'_\nu(\bar\lambda) : \mathcal{H}_{-\nu} \to \mathcal{H}_\nu, \quad G^*_\nu(\bar\lambda) : \mathcal{H}_{-\nu} \to \mathcal{H}_{-\nu},$$

такие, что

$$(\mathcal{A}'_\nu - \bar\lambda E)X'_\nu(\bar\lambda) = E + G^*_\nu(\bar\lambda), \tag{4.28}$$

$$\|G^*_\nu(\bar\lambda)\|_{\mathcal{H}_{-\nu}\to\mathcal{H}_{-\nu}} \leqslant \frac{1}{2}, \quad (\lambda \in S, |\lambda| \geq \sigma_1, \nu \in [1, 2|\lambda|). \tag{4.29}$$

Пусть $u \in \mathcal{H}_\nu$ такой элемент, что $(\mathcal{A}_\nu - \lambda E)u = 0$. Пусть, кроме того, $|\lambda| \geq \sigma_1 = max\{\sigma_0, \sigma_1\}$. Тогда

$$< (\mathcal{A}_\nu - \lambda E)u, v >= 0, \quad \forall v \in \mathcal{H}_\nu,$$

т.е.

$$\sum_{i,j=1}^{m} (a_{ij} p_i p_j u^{(i)}, v^{(j)}) - \lambda(u, v) = 0, \quad \forall v \in \mathcal{H}_\nu.$$

Следовательно,

$$< (\mathcal{A}'_\nu - \bar\lambda E)v, u >= (\sum_{i,j=0}^{m} (a^*_{ji} p_i p_j v^{(j)}, u^{(i)}) - \bar\lambda(v, u) = 0.$$

Положим $v = X'_\nu(\bar\lambda)F, f \in \mathcal{H}_{-\nu}$. Тогда

$$< (E + G^*_\nu(\bar\lambda))F, u >= 0, \quad \forall f \in \mathcal{H}_{-\nu}.$$

Поскольку при $\lambda \in S, |\lambda| \geq \sigma', \nu \in [1, 2|\lambda|)$ оператор

$$(E + G^*_\nu(\bar\lambda)) : \mathcal{H}_{-\nu} \to \mathcal{H}_{-\nu}$$

имеет непрерывный обратный, следовательно $< F, u >= 0, \forall f \in \mathcal{H}_{-\nu}$. Полагая $F = 0$, получим $u = 0$. Отсюда следует, что

$$ker(\mathcal{A}_\nu - \lambda E) = 0.$$

Из (4.27) следует оценка

$$\|(\mathcal{A}_\nu - \lambda E)^{-1}\|_{\mathcal{H}_{-\nu}\to\mathcal{H}_\nu} \leqslant 2\|X_\nu(\lambda)\|_{\mathcal{H}_{-\nu}\to\mathcal{H}_\nu}.$$

4. Для доказательства теоремы 1.1 положим $\nu = 1, \mathcal{A} = \mathcal{A}_1$. Ясно, что оператор

$$A = \mathcal{A}u, \quad D(A) = \{u \in \mathcal{H}^l_+; \mathcal{A}u \in \mathcal{H}^l\},$$

удовлетворяет условию (i) теоремы 1.1. Так как оператор $(\mathcal{A}-\lambda E)^{-1}$ взаимно-однозначно отображает $\mathcal{H}^l$ в $D(A)$, то существует обратный

$$(A-\lambda E)^{-1}u = (\mathcal{A}-\lambda E)^{-1}u \quad (\forall u \in \mathcal{H}^l, \lambda \in S, |\lambda| \geq c).$$

Из (4.3′), (4.6), (4.7), при $\nu = 1$ находим

$$|(A-\lambda E)^{-1}u| \leqslant |(A-\lambda E)^{-1}u|_+ = |(\mathcal{A}-\lambda E)^{-1}u|_+ \leqslant M|u|_- \leqslant M|u|,$$

откуда следует, что $(A-\lambda E)^{-1} : \mathcal{H}^l \to \mathcal{H}^l(\lambda \in S, |\lambda| \geq c)$ — непрерывный оператор.

Докажем единственность оператора A, обладающего свойствами $(i), (ii)$ теоремы 1.1. Пусть $A^{(1)}, A^{(2)}$ — два оператора, обладающие указанными свойствами. Так как $\theta < m$, то вложение $\mathcal{H}^l_+ \subset \mathcal{H}^l$ — компактно. Следовательно, операторы $A^{(1)}, A^{(2)}$ имеют дискретные спектры. Поэтому найдется достаточно большое по модулю $\lambda \in S$ такое, что существуют непрерывные обратные $(A^{(1)}-\lambda E)^{-1}, (A^{(2)}-\lambda E)^{-1}$. Для

$$u \in \mathcal{H}^l, F = (A^{(1)}-\lambda E)^{-1}u - (A^{(2)}-\lambda E)^{-1}u$$

имеем $(\mathcal{A}-\lambda E)F = 0$. Отсюда и из (4.6) следует, что $F = 0$. Таким образом,

$$(A^{(1)}-\lambda E)^{-1} = (A^{(2)}-\lambda E)^{-1}, \quad \text{т.е.} \quad A_1 = A_2.$$

5. Формула (4.6) в случае $\nu = |\lambda|$ нам понадобится далее в §5.

§5. Суммируемость в смысле Абеля-Лидского системы корневых вектор-функций оператора A

1. В этом параграфе в предположении того, что $a(t) \in C(\bar{J};\, End\, \mathbf{C}^l)$, получены следующие результаты

а) оценка резольвенты оператора A;

б) оценка обобщенной резольвенты (т.е. случай, когда оператор A действует из $\mathcal{H}_-$ в $\mathcal{H}_+$);

в) суммируемость в смысле Абеля-Лидского системы корневых вектор-функций оператора A.

В специальном случае, когда матрица $a(t) \in C^m(\bar{J};\, End\, \mathbf{C}^l)$, а на концах отрезка имеет место представление

$$a(t) = U_+(t)\Lambda(t)U_-(t),$$

мы получаем интегральное представление для резольвенты и обобщенной резольвенты.

Эти условия выполняются, например, в случае, когда $a(0)$, $a(1)$ имеют простые собственные значения.

Пусть матрица $a(t) \in C(\bar{J};\, End\, \mathbf{C}^l)$, ее собственные значения лежат вне сектора S; условия на $a_{ij}(t)$, $i+j < 2m$ — прежние (см. §1). Для любого $\delta > 0$ можно построить матрицу $a_\delta(t)$ такую, что:

1) $$a_\delta(t) \in C^{4m}(\bar{J};\, End\, \mathbf{C}^l);$$

2) $$|a_\delta(t) - a(t)| < \delta, \quad 0 \leqslant t \leqslant 1;$$

3) $$a_\delta(t) = U^{(\delta)}_\pm(t)\Lambda^{(\delta)}_\pm(t)U^{(\delta)}_\pm(t)^{-1}, \quad t \in \Delta_\pm,$$

длина $\Delta_\pm$ зависит от δ;

4) $$a_\delta(t) = a(0), \quad t \in \Delta_+,$$

$$a_\delta(t) = a(1), \quad t \in \Delta_-;$$

5) Собственные значения $a_\delta(t)$ лежат вне сектора S.

Ввиду 4) в 3) матрицы $U_\pm^{(\delta)}(t)$, $\Lambda_\pm^{(\delta)}(t)$ от δ не зависят:

$$U_+^{(\delta)}(t) = U_+(0),\, t \in \Delta_+, \quad U_-^{(\delta)}(t) = U_-(1),\, t \in \Delta_-,$$

$$\Lambda_+^{(\delta)}(t) \equiv \Lambda_+(0), \quad t \in \Delta_+$$

и

$$\Lambda_-^{(\delta)}(t) \equiv \Lambda_-(1), \quad t \in \Delta_-.$$

Пусть $\mathcal{A}^{(\delta)} : \mathcal{H}_\nu^l \to \mathcal{H}_{-\nu}^l$ — оператор, порожденный формой

$$< \mathcal{A}^{(\delta)}u, v >= \sum_{i+j<2m} \int_0^1 < p_j(t)a_{ij}(t)u^{(j)}(t), p_j(t)v^{(j)}(t) >_{\mathbf{C}^l} dt+$$

$$+ \int_0^1 < \rho^\theta(t)a_\delta(t)u^{(m)}(t), \rho^\theta(t)v^{(m)}(t) >_{\mathbf{C}^l} dt.$$

Мы будем брать $1 \leqslant \nu \leqslant |\lambda|$. Как в п.3 §4, можно показать, что при достаточно большом $|\lambda| > c_\delta$ имеет место представление

$$(\mathcal{A}^{(\delta)} - \lambda E)^{-1} = R^{(\delta)}(\lambda)(E + \mathcal{J}^{(\delta)}(\lambda)),$$

и

$$\|\mathcal{J}^{(\delta)}(\lambda)\|_{\mathcal{H}_{-\nu}\to\mathcal{H}_{-\nu}} \to 0, \quad \text{при} \quad \lambda \to +\infty \quad \text{в секторе} \quad S.$$

Здесь регуляризатор $R^{(\delta)}(\lambda)$ состоит из трех слагаемых

$$R^{(\delta)}(\lambda) = \psi_+(\mathcal{B}^{+,\delta} - \lambda E)^{-1}\psi_+ + \psi R_0^{(\delta)}(\lambda)\psi + \psi_-(\mathcal{B}^{-,\delta} - \lambda E)^{-1}\psi_-.$$

При достаточно большом $\lambda' = \lambda'(\delta)$ при $|\lambda| > \lambda'$, $\lambda \in S$ будет

$$\|\mathcal{J}^{(\delta)}(\lambda)\|_{\mathcal{H}_{-\nu}\to\mathcal{H}_{-\nu}} < 1/2, \quad \nu = |\lambda|.$$

Аналогично

$$\|R^{(\delta)}(\lambda)\|_{\mathcal{H}^l\to\mathcal{H}^l} \leqslant M(1 + |\lambda|)^{-1}, \quad \lambda \in S,\, \lambda \geq M',$$

M' от δ не зависит.

Заметим, что ввиду 4), $\mathcal{B}^{\pm,\delta}$ от δ не зависит. Поэтому

$$\|(\mathcal{B}^{\pm,\delta} - \lambda E)^{-1}\|_{\mathcal{H}^l\to\mathcal{H}^l} \leqslant M''(1 + |\lambda|)^{-1}, \quad |\lambda| > M'',\, \lambda \in S,$$

где M'' от δ не зависит.

Легко проверить по явному виду о.-ф. $R^{(\delta)}(\lambda)$, что

$$\|\psi R^{(\delta)}(\lambda)\psi\|_{\mathcal{H}_{-\nu}^l\to\mathcal{H}_{-\nu}^l} \leqslant M(1 + |\lambda|)^{-1}, \quad |\lambda| > M''',\, \lambda \in S.$$

Поэтому

$$\|R^{(\delta)}(\lambda)\|_{\mathcal{H}_{-\nu}^l\to\mathcal{H}_{-\nu}^l} \leqslant M(1 + |\lambda|)^{-1}, \quad \lambda \in S,\, |\lambda| > M_1,$$

где M_1, M''' от δ не зависят.

Теперь докажем, что

$$(\mathcal{A} - \lambda E)(\mathcal{A}^{(\delta)} - \lambda E)^{-1} = E + \Gamma^\delta(\lambda),$$

где

$$\|\Gamma^\delta(\lambda)\|_{\mathcal{H}_{-\nu}^l\to\mathcal{H}_{-\nu}^l} \leqslant M\delta, \quad \lambda > \lambda'(\delta),\, \lambda \in S. \tag{5.1}$$

Для $u, v \in \mathcal{H}_{-\nu}$ имеем

$$< (\mathcal{A} - \lambda E)(\mathcal{A}^{(\delta)} - \lambda E)^{-1}u, v >=< u, v > +$$

$$+ < (a(t) - a_\delta(t))\rho^\theta(t)\partial_t^m(\mathcal{A}_\delta - \lambda E)^{-1}u, \rho^\theta(t)\partial_t^m v > .$$

Второе слагаемое по модулю не превосходит

$$\delta\|(\mathcal{A}^{(\delta)}-\lambda E)^{-1}u\|_{\mathcal{H}^l_\nu}|v|_{\mathcal{H}^l_\nu}\leqslant M\delta|u|_{\mathcal{H}^l_{-\nu}}|v|_{\mathcal{H}^l_\nu},\ \lambda>\lambda'(\delta),\ \lambda\in S,$$

что доказывает (5.1). Аналогичное утверждение верно и для самосопряженной билинейной формы, откуда следует, что

$$ker\,(\mathcal{A}-\lambda E)^{-1}=0,\quad |\lambda|>M,\ \lambda\in S.$$

Таким образом, для $\lambda\in S$, $|\lambda|>M$:

$$(\mathcal{A}-\lambda E)^{-1}=(\mathcal{A}^{(\delta)}-\lambda E)^{-1}(E+\Gamma^\delta(\lambda))^{-1}=$$
$$=(\mathcal{A}^{(\delta)}-\lambda E)^{-1}(E+\Gamma^\delta_0(\lambda)),$$

где

$$\|\Gamma^\delta_0(\lambda)\|_{\mathcal{H}^l_{-\nu}\to\mathcal{H}^l_{-\nu}}\leqslant M'\delta,$$
$$4<\nu<2|\lambda|,\quad \lambda\in S,\quad |\lambda|>\lambda'(\delta).$$

На основании этого равенства и по прежней схеме докажем, что сужение A на $\mathcal{H}^l$ оператора $\mathcal{A}$ обладает следующими свойствами:

(i) A — есть единственный замкнутый оператор такой, что

$$D(A)\subset\mathcal{H}^l_+,\quad (Au,v)=\mathcal{A}[u,v],\quad \forall u\in D(A),\ v\in\mathcal{H}^l_+,$$

(ii)
$$\|(A-\lambda E)^{-1}\|_{\mathcal{H}^l\to\mathcal{H}^l}\leqslant M(1+|\lambda|)^{-1},\quad \lambda\in S,\ |\lambda|>M.$$

Применяя теорему 6.4.2 из [23], на основании оценки (ii), получаем следующий результат

Теорема 5.1. *Ряд Фурье любой вектор-функции $f\in\mathcal{H}^l$ по системе корневых вектор-функций оператора A суммируется к f методом Абеля со скобками порядка $\gamma=\frac{1}{2m}+\varepsilon$ с достаточно малым $\varepsilon>0$.*

С понятием суммируемости методом Абеля можно ознакомиться по работам [14,26]. Этот метод был введен Лидским [26]. Отметим также работы [21, 22, 27-30],(см. также [31,Гл.2.§1.3, 32]).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бойматов К.Х. *Асимптотическое поведение собственных значений несамосопряжённых операторов* // Функ. анализ и его приложения. Т. 11, № 4. 1977. С. 74–75.
2. Бойматов К.Х., Костюченко А.Г. *Спектральная асимптотика несамосопряженных эллиптических систем* // Математический сборник. Т. 181 , № 12. 1990. С. 1678–1693.
3. Бойматов К.Х., Костюченко А.Г. *Распределение собственных значений несамосопряженных дифференциальных операторов второго порядка* // Вестник МГУ. № 3. 1990. С. 24–31.
4. Розенблюм Г.В. *Спектральная асимптотика нормальных операторов* // Функц. анализ и его приложения. Т. 16. 1982. С. 82–83.
5. Розенблюм Г.В. *Условная асимптотика спектра операторов, близких к нормальным* // В кн.: Линейные и нелинейные краевые задачи. Спектральная теория. Ленинград: Изд-во ЛГУ. 1986. С. 180–195.
6. M.S. Agranovich and A.S. Markus *On spectral properties of elliptic pseudo-differential operators far from self-adjoint ones* // Zeitshrift fur Analysis und ihre Anwendungen. 1989. Bd., 8(3). P. 237–260.
7. Бойматов К.Х., Седдики К. *Граничные задачи для систем обыкновенных дифференциальных уравнений, ассоциированных с некоэрцитивными формами* // ДАН России. Т. 352. № 3. 1997. С. 295–297.
8. Бойматов К.Х., Седдики К. *Некоторые спектральные свойства дифференциальных операторов порожденных некоэрцитивными формами* // ДАН России. Т. 352. № 4. 1997. С. 439–442.

9. Бобокалонова Д.Ф., Гадоев М.Г. *Спектральная асимптотика несамосопряженных эллиптических систем дифференциальных операторов во всем пространстве* // Доклады АН Республики Таджикистан. Т. 36. № 1. 1993. С. 5–9.
10. Бобокалонова Д.Ф., Гадоев М.Г. *Спектральная асимптотика m-секториальных дифференциальных операторов II порядка в неограниченных областях, удовлетворяющих условию конуса* // Доклады АН Республики Таджикистан. Т. 41. № 9. 1998. С. 5–12.
11. Гадоев М.Г. *Спектральная асимптотика задачи Неймана для врожденно-эллиптических дифференциальных уравнений четвертого порядка* // Материалы IV-го Сибирского Конгресса по прикладной и индустриальной математике, ИНПРИМ-2000, Новосибирск. 2000. С. 48–49.
12. Бирман М.Ш. Соломяк М.З. *Спектральная теория самосопряжённых операторов в гильбертовом пространстве.* Л. Издательство ЛГУ. 1980. 264 с.
13. Розенблюм Г.В., Соломяк М.З., Шубин М.А. *Спектральная теория дифференциальных операторов* // Итоги науки и техники. ВИНИТИ. Совр. пробл. мат. Фунд. направления. Т. 64. 1988. С. 5–248.
14. Агранович М.С. *Эллиптические операторы на замкнутых многообразиях* // В кн.: Современные проблемы математики. Фундаментальные направления, ВИНИТИ, М. Т. 63. 1990. С. 5–129.
15. Агранович М.С. *Некоторые асимптотические формулы для эллиптических псевдодифференциальных операторов* // Функциональный анализ и его приложения. Т. 21. № 1. 1987. С. 63–65.
16. Кожевников А.Н. *Об асимптотике собственных значений эллиптических систем* // Функциональный анализ и его приложения. Т. 11. № 4. 1977. С. 82–83.
17. Бойматов К.Х. *Асимптотика спектра несамосопряженных систем дифференциальных операторов второго порядка* // Математические заметки. Т. 51. № 4. 1992. С. 8–16.
18. Бойматов К.Х. *Некоторые спектральные свойства матричных дифференциальных операторов далеких от самосопряженных* // Функциональный анализ и его приложения. Т. 29. № 3. 1995. С. 55–58.
19. M. Faierman *An elliptic boundary problem involving an indefinite weight* // Proc. of the Roy. Soc. of Edinburgh. 130A. № 2. 2000. P. 287–305.
20. A.N. Kozhevnikov *Asymptotics of the spectrum of Douglis-Nirenberg elliptic operators on a compact manifold* // Math. Nachr. Bd. 182. 1996. P. 261–293.
21. S.G. Pyatkov *Riesz's bases from the eigenvectors and associated vectors of elliptic eigenvalue problems with an indefinite weight function* // Siberian Journal of Differential Equations. 1995. V. 1. No. 2, P. 179–196.
22. M. Sango *A spectral problem with an indefinite weight for an elliptic system* // Electronic Journal of Diff. Equations. № 21. 1997. P. 1–14.
23. Никольский С.М., Лизоркин П.И., Мирошин Н.В. *Весовые функциональные пространства и их приложения к исследованию краевых задач для вырождающихся эллиптических уравнений* // Известия вузов. Математика. № 8. 1988. С.4–30.
24. Като Т. *Теория возмущений линейных операторов.* М.: Мир. 1972. 740 с.
25. Мирошин Н.В. *Обобщённая задача Дирихле для одного класса эллиптических дифференциальных операторов, вырождающихся на границе области. Некоторые спектральные свойства* // Дифференц. уравнения. Т. 12. № 6. 1976. С. 1099–1111.
26. Лидский В.Б *О суммируемости рядов по главным векторам несамосопряженных операторов* // Труды Моск. мат. об-ва. Т. 11. 1962. С. 3–35.
27. Агранович М.С. *О рядах по корневым векторам операторов, определяемых формами с самосопряжённой главной частью* // Функциональный анализ и его приложения. Т. 28. Вып. 3. 1994. С. 1–21.
28. Бойматов К.Х. *О спектральной асимптотике и суммируемости методом Абеля рядов по системе корневых вектор-функций негладких эллиптических дифференциальных операторов далеких от самосопряженных* // ДАН России. Т. 372. № 4. 2000. С. 442–445.
29. M.S. Agranovich *Nonselfadjoint elliptic operators in nonsmooth domains* // Russian J.Math.Phys. No. 2. 1994. P. 139–148.
30. S. Yakubov *Abel basis or root functions of regular boundary value problems* // Math.Nachr. V. 197. 1999. P. 157–187.

31. Егоров И.Е., Пятков С.Г., Попов С.В. *Неклассические дифференциально-операторные уравнения.* Новосибирск. 2000. 342 с.
32. Пятков С.Г. *Базисность по Риссу собственных и присоединенных элементов пучков линейных самосопряженных пучков* // Математический сборник. Т. 185. № 3. 1994. С. 93–116.

Махмадрахим Гафурович Гадоев,
Мирнинский политехнический институт (филиал) СВФУ им. М.К. Аммосова,
ул. Тихонова, 5/1,
678170, г.Мирный, Респ. Саха (Якутия), Россия
E-mail: gadoev@rambler.ru