ISSN 2074-1863 Уфимский математический журнал. Том 3. № 3 (2011). С. 15-25.

УДК 517.946

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ НАГРУЖЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО И СМЕШАННОГО ТИПОВ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

У.И. БАЛТАЕВА, И.Б. ИСЛОМОВ

Аннотация. В статье доказана однозначная разрешимость краевых задач для нагруженного дифференциального уравнения третьего порядка с гиперболическим и параболо-гиперболическим оператором. Краевые задачи для нагруженных дифференциальных уравнений сводятся к интегральному уравнению Вольтерра второго рода и, опираясь на это, методом интегральных уравнений доказывается существование и единственность решения краевых задач.

Ключевые слова: нагруженное уравнение, уравнения смешанного типа, интегральное уравнение, интегральное уравнение со сдвигом, функция Бесселя.

1. Введение

В последние годы в связи с интенсивным исследованием задач оптимального управления, долгосрочного прогнозирования и регулирования уровня грунтовых вод и почвенной влаги возникла необходимость в изучении нового класса уравнений, получивших название „нагруженное уравнение“. Такие уравнения впервые исследованы в работах Н.Н. Назарова и Н.Н. Кочина. Но ими не был использован термин "нагруженное уравнение". Впервые этот термин был использован в работах А.М. Нахушева, в которых дано наиболее общее определение нагруженного уравнения и подробная классификация различных нагруженных уравнений: нагруженных дифференциальных, интегральных, интегро-дифференциальных, функциональных уравнений, а также их многочисленные приложения.

Нагруженным дифференциальным уравнением с частными производными второго порядка посвящены работы А.М. Нахушева, М.Х. Шханкова, А.В. Бородина, В.М. Казиева, А.Х. Аттаева, C.C. Pomraning, E.W. Larsen, В.А. Елеева, М.Т. Дженалиева, Б. Исломова и Д.М. Курьязова, Д.М. Курьязова, К.У. Хубиева, М.И. Рамазанова и др.

Заметим, что краевые задачи для нагруженных уравнений гиперболического, параболо-гиперболического, эллиптико-гиперболического типов третьего порядка изучены сравнительно мало. Отметим только работы В.А. Елеева, Б. Исломова и Д.М. Курьязова, В.А. Елеева и А.В. Дзарахохова.

Данная работа посвящена постановке и исследованию аналога задачи Коши-Гурса для нагруженного уравнения гиперболического типа

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(u_{xx} - u_{yy} - \lambda u\right) - \mu u(x,0) = 0, \tag{1}$$

U.I. Baltayeva, B.I. Islomov, Boundary value problems for the loaded third order equations of the hyperbolic and mixed types.

Поступила 7 июля 2011 г.

и краевой задач для нагруженного уравнения смешанного параболо-гиперболического типа

$$\frac{\partial}{\partial x}(Lu) - \mu u(x,0) = 0, \tag{2}$$

где

$$Lu = \begin{cases} L_1 u \equiv u_{xx} - u_y - \lambda u, & y > 0, \\ L_2 u \equiv u_{xx} - u_{yy} - \lambda u, & y < 0, \end{cases}$$

λ, μ — действительные постоянные, причем $\lambda > 0$.

2. Аналог задачи Коши-Гурса для нагруженного уравнения гиперболического типа

Пусть D — область, ограниченная характеристиками

$$AC : x + y = 0, \qquad BC : x - y = 1$$

уравнений (1) и отрезком AB оси $y = 0$.

В области D рассмотрим следующий аналог задачи Коши-Гурса для нагруженного уравнения (1)

Задача А. Найти регулярное в области D решение $u(x,y)$ уравнения (1), непрерывное в $\bar{D}$, обладающее непрерывными производными u_x, u_y вплоть до $AB \cup AC$ и удовлетворяющее граничным условиям

$$u_y(x,y)|_{AB} = \nu(x), \quad 0 \le x < 1, \tag{3}$$

$$u(x,y)|_{AC} = \psi_1(x), \qquad \left.\frac{\partial u(x,y)}{\partial n}\right|_{AC} = \psi_2(x), \qquad 0 \le x \le \frac{1}{2}, \tag{4}$$

где n — внутренняя нормаль, $\nu(x), \psi_1(x), \psi_2(x)$ — заданные функции, причем $2\nu(x) = \sqrt{2}\psi_2(0) - \psi_1'(0)$,

$$\nu(x) \in C[0,1] \cap C^2(0,1), \tag{5}$$

$$\psi_1(x) \in C^1\left[0, \frac{1}{2}\right] \cap C^3\left(0, \frac{1}{2}\right), \quad \psi_2(x) \in C\left[0, \frac{1}{2}\right] \cap C^2\left(0, \frac{1}{2}\right). \tag{6}$$

Теорема 1. Если выполнены условия (5), (6), то в области D существует единственное решение задачи .

Доказательство теоремы 1.

При доказательстве теоремы 1 важную роль играет следующая лемма.

Лемма 1. Любое регулярное решение уравнения (1) представляется в виде

$$u(x,y) = z(x,y) + w(x), \tag{7}$$

где $z(x,y)$ — решение уравнения

$$\frac{\partial}{\partial x}(z_{xx} - z_{yy} - \lambda z) = 0, \tag{8}$$

а $w(x)$ — решение следующего обыкновенного дифференциального уравнения

$$w'''(x) - \lambda w'(x) - \mu w(x) = \lambda z(x,0). \tag{9}$$

Доказательство леммы 1

Пусть $u(x,y)$, представленное формулой (7), есть решение уравнения (1). Тогда, подставив (7) в (1), имеем

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(u_{xx}-u_{yy}-\lambda u\right)-\mu u(x,0)=\frac{\partial}{\partial x}\left(z_{xx}-z_{yy}-\lambda z\right)+$$

$$+w'''(x)-\lambda w'(x)-\mu w(x)-\mu\, z(x,0)=0,$$

то есть удовлетворяет уравнению (1).

Теперь, наоборот, пусть $u(x,y)$ — регулярное решение уравнения (1), а $w(x)$ — некоторое решение

$$w'''(x)-\lambda w'(x)=\mu u(x,0). \tag{10}$$

Докажем справедливость соотношения (7). Очевидно, что функция

$$u(x,y)=z(x,y)+\frac{\mu}{\lambda}\int\limits_0^x (ch\sqrt{\lambda}(x-t)-1)u(t,0)dt$$

есть решение уравнения (1), где $z(x,y)$ $-$ решение уравнения (8), а функция

$$u(x,y)=\frac{\mu}{\lambda}\int\limits_0^x (ch\sqrt{\lambda}(x-t)-1)u(t,0)dt$$

есть частное решение уравнения (1). Следовательно, из (1) следует справедливость представления (7), то есть $u(x,y)=z(x,y)+w(x)$.

Из последнего представления следует, что $u(x,0)=z(x,0)+w(x)$. Тогда из (10) имеем

$$w'''(x)-\lambda w'(x)-\mu w(x)-\mu\, z(x,0)=0,$$

а функция $z(x,y)=u(x,y)-w(x)$ удовлетворяет уравнению (8).

Лемма 1. доказана.

Учитывая, что функция $a\,\cos\sqrt{\lambda}x+b\,\sin\sqrt{\lambda}x+c\,e^{\sqrt{\lambda}x}$ удовлетворяет уравнению (8), при исследовании задачи без ограничения общности можно предполагать, что

$$w(0)=w'(0)=w''(0)=0. \tag{11}$$

Решим задачу Коши для уравнения (9) с условиями (11) относительно $w(x)$.

Характеристическое уравнение, соответствующее однородному уравнению (9), имеет вид

$$k^3-\lambda k-\mu=0. \tag{12}$$

Введем обозначение $\Delta=\frac{\mu^2}{4}-\frac{\lambda^3}{27}$.

1) если $\Delta>0$, то известно[3], что уравнение (12) имеет один действительный и два комплексно сопряженных корня, которые имеют вид

$$k_1=u_1+v_1,\qquad k_{2,3}=-\frac{1}{2}(u_1+v_1)\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i(u_1-v_1),$$

где

$$u_1=\sqrt[3]{\frac{\mu}{2}+\sqrt{\Delta}},\quad v_1=\sqrt[3]{\frac{\mu}{2}-\sqrt{\Delta}}.$$

Таким образом, решение задачи Коши для уравнения (9) с условиями (11), при $\Delta > 0$, имеет вид

$$w(x) = \int\limits_0^x T_1(x,t)z(t,0)dt, \tag{13}$$

где

$$T_1(x,t) = \frac{\mu}{3\left(u_1^2 + u_1 v_1 + v_1^2\right)}\left\{e^{\frac{3}{2}(u_1+v_1)(x-t)} + \frac{\sqrt{3}\,(u_1+v_1)}{u_1-v_1}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}(u_1-v_1)(t-x) - \right.$$
$$\left. - \cos\frac{\sqrt{3}}{2}(u_1-v_1)(t-x)\right\}e^{-\frac{1}{2}(u_1+v_1)(x-t)};$$

2) если $\Delta = 0$, то уравнение (12) имеет три действительных корня, причем два из них равны:

$$k_1 = \frac{3\mu}{\lambda}, \qquad k_2 = k_3 = -\frac{3\mu}{2\lambda}.$$

Решение задачи Коши для уравнения (9) с условиями (11), при $\lambda = -3\,(\mu/2)^{\frac{2}{3}}$ имеет вид

$$w(x) = \int\limits_0^x T_2(x,t)z(t,0)dt, \tag{14}$$

где

$$T_2(x,t) = \frac{2}{9}\left(\frac{\mu}{2}\right)^{\frac{1}{3}} e^{\sqrt[3]{\frac{\mu}{2}}(x-t)}\left(e^{\sqrt[3]{\frac{\mu}{2}}(x-t)} - 3\left(\frac{\mu}{2}\right)^{\frac{1}{3}}(x-t) - 1\right).$$

3) если $\Delta < 0$, то уравнение (12) имеет три различных действительных корня, которые имеют вид [3]

$$k_1 = 2\left|\sqrt[3]{r}\right|\cos\frac{\varphi}{3}, \quad k_2 = 2\left|\sqrt[3]{r}\right|\cos\frac{\varphi+2\pi}{3}, \quad k_3 = 2\left|\sqrt[3]{r}\right|\cos\frac{\varphi+4\pi}{3},$$

где

$$r = \left|\left(\frac{\lambda}{3}\right)^{\frac{3}{2}}\right|, \;\; \cos\varphi = \frac{\mu}{2}\left|\left(\frac{\lambda}{3}\right)^{\frac{3}{2}}\right|^{-1}.$$

Соответственно, решение задачи Коши для уравнения (9) с условиями (11), при $\Delta < 0$, имеет вид

$$w(x) = \int\limits_0^x T_3(x,t)z(t,0)dt, \tag{15}$$

где

$$T_3(x,t) = \frac{\mu}{(k_2-k_1)(k_3-k_1)(k_2-k_3)}\left\{(k_2-k_3)\,e^{k_1(x-t)} + \right.$$
$$\left. + (k_3-k_1)\,e^{k_2(x-t)} - (k_2-k_1)\,e^{k_3(x-t)}\right\}.$$

В силу представления (7), задача A редуцируется к задаче A* нахождения регулярного в области D решения $z(x,y)$ уравнения (8), удовлетворяющего условиям

$$z_y(x,y)|_{AB} = \nu(x), \quad 0 < x < 1, \tag{16}$$

$$z(x,y)|_{AC} = \psi_1(x) - w(x), \quad \left.\frac{\partial z(x,y)}{\partial n}\right|_{AC} = \psi_2(x) - \frac{1}{\sqrt{2}}w'(x), \;\; 0 \le x \le \frac{1}{2}, \tag{17}$$

где

$$w(x) = \int\limits_0^x T_i(x,t) z(t,0) dt\,, \qquad (i = 1,3). \tag{18}$$

С помощью общего представления, аналогично [4] и [5], можно выписать решение уравнения (8) в D с условиями (16), (17), с учетом (5), (6) и [6]:

$$\begin{gathered}
z(x,y) = \int\limits_0^{x+y} \nu(t) I_0\Big[\sqrt{\lambda(x+y-t)(x-y-t)}\Big]dt - \psi_1^*(0) I_0\Big[\sqrt{\lambda\,(x^2-y^2)}\Big] + \\
+\psi_1^*\left(\frac{x+y}{2}\right) + \psi_1^*\left(\frac{x-y}{2}\right) + \frac{1}{\sqrt{\lambda}}\int\limits_0^{x+y}\Big(\lambda\psi_1^*(t) - \sqrt{2}{\psi_2^*}'(t)\Big)\sin\sqrt{\lambda}\left(t - \frac{x+y}{2}\right)dt + \\
+\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\int\limits_0^{\frac{x-y}{2}}\Big(\lambda\psi_1^*(t) - \sqrt{2}{\psi_2^*}'(t)\Big)\sin\sqrt{\lambda}\left(t - \frac{x-y}{2}\right)dt - 2\int\limits_0^{\frac{x-y}{2}}\psi_1^*(t)\times \\
\times B_t\left(0, 2t; x+y, x-y\right)dt + \frac{1}{\sqrt{\lambda}}\int\limits_0^{y}\Big(\lambda\psi_1^*(-t) - \sqrt{2}{\psi_2^*}'(-t)\Big)\sin\sqrt{\lambda}(y-t)dt - \\
-\frac{2}{\sqrt{\lambda}}\int\limits_0^{\frac{x-y}{2}} B_t\left(0, 2t; x+y, x-y\right)dt \int\limits_0^{t}\Big(\lambda\psi_1^*(z) - \sqrt{2}{\psi_2^*}'(z)\Big)\sin\sqrt{\lambda}\left(-t+z\right)dz,
\end{gathered} \tag{19}$$

где

$$\psi_1^*(x) = \psi_1(x) - w(x), \qquad \psi_2^*(x) = \psi_2(x) - \frac{1}{\sqrt{2}}w'(x),$$

$B(t,z;x+y,x-y)$ — функция Римана-Адамара[6], $I_0[z]$ — модифицированная функция Бесселя [7].

Положив $y = 0$ в (19), с учетом (18) получим следующее функциональное соотношение, принесенное из области D на AB:

$$\tau(x) + \int\limits_0^x K(x,t)\tau\left(\frac{t}{2}\right)dt = \Phi(x), \quad 0 \le x \le 1, \tag{20}$$

где

$$\tau(x) = z(x,0),$$

$$K(x,t) = T_i\left(\frac{x}{2},\frac{t}{2}\right) + \frac{\lambda x}{2}\int\limits_t^x T_i\left(\frac{s}{2},\frac{t}{2}\right)\bar{I}_1\Big[\sqrt{\lambda x(x-s)}\Big]ds +$$

$$+\frac{1}{2\sqrt{\lambda}}\int\limits_t^x K^*\left(\frac{x}{2},\frac{t}{2}\right)\left(\lambda T_i\left(\frac{s}{2},\frac{t}{2}\right)-\frac{1}{4}T_i'\left(\frac{s}{2},\frac{t}{2}\right)\right)ds\,, \tag{21}$$

$$\Phi(x)=2\psi_1\left(\frac{x}{2}\right)-\psi_1(0)I_0\left[\sqrt{\lambda}x\right]+\int\limits_0^x \nu(t)I_0\left[\sqrt{\lambda}(x-t)\right]dt+$$

$$+\lambda x\int\limits_0^x \bar{I}_1\left[\sqrt{\lambda x(x-t)}\right]\psi_1\left(\frac{t}{2}\right)dt+ \tag{22}$$

$$+\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\int\limits_0^x K^*\left(\frac{x}{2},\frac{t}{2}\right)\left(\lambda\psi_1\left(\frac{t}{2}\right)-\frac{\sqrt{2}}{2}\psi_2'\left(\frac{t}{2}\right)\right)dt,$$

$$K^*(x,t)=\sin\sqrt{\lambda}(t-x)+\int\limits_t^x \lambda x\bar{I}_1\left[\sqrt{\lambda x(x-2s)}\right]\sin\sqrt{\lambda}\,(t-s)ds,$$

$\bar{I}_1(x)=I_1(x)/x,\ I_0(x),\ I_1(x)$ — модифицированные функции Бесселя [7].

Отсюда заключаем, что интегральное уравнение (20) всегда имеет, причем единственное, решение [8].

Таким образом, доказано, что задача A однозначно разрешима.

Теорема 1 доказана.

3. Исследование задачи C для уравнения (2)

3.1. Постановка задачи C для уравнения (2).

Пусть Ω_1 — область, ограниченная отрезками AB, BB_0, AA_0, A_0B_0 прямых $y=0$, $x=1,\ x=0,\ y=h$, соответственно, при $y>0$. Ω_2 — характеристический треугольник, ограниченный отрезком AB оси OX и двумя характеристиками

$$AC: x+y=0,\quad BC: x-y=1$$

уравнения (2) при $y<0$.

Введем следующие обозначения:

$$I=\{(x,y): 0<x<1,\ \ y=0\},\quad \Omega=\Omega_1\cup\Omega_2\cup I.$$

Регулярным решением уравнения (2) назовем функцию $u(x,y)\in C(\bar{\Omega})\bigcap C^1(\Omega)\bigcap C^{3,1}(\Omega_1)\bigcap C^{3,2}(\Omega_2)$, удовлетворяющую уравнению (2) в Ω_1 и Ω_2.

Задача C. Требуется найти функцию $u(x,y)$, обладающую следующими свойствами:

1) $u(x,y)\in C(\bar{\Omega})$;

2) $u_x(u_y)$ непрерывна вплоть до $AA_0\ \cup AC\ \ (AB\ \cup AC)$;

3) $u(x,y)$ является регулярным решением уравнения (2) в областях Ω_1 и Ω_2;

4) на AB выполняются условия склеивания

$$u_y(x,-0)=u_y(x,+0),\quad (x,0)\in I;$$

5) $u(x,y)$ удовлетворяет краевым условиям

$$u(x,y)|_{AA_0}=\varphi_1(y),\ \ u(x,y)|_{BB_0}=\varphi_2(y),\ \ u_x(x,y)|_{AA_0}=\varphi_3(y),\ \ 0\le y\le h, \tag{23}$$

$$u(x,y)|_{AC}=\psi_1(x),\quad \left.\frac{\partial u(x,y)}{\partial n}\right|_{AC}=\psi_2(x),\quad 0\le x\le\frac{1}{2}, \tag{24}$$

где n — внутренняя нормаль, $\varphi_1(y)$, $\varphi_2(y)$, $\varphi_3(y)$, $\psi_1(x)$ и $\psi_2(x)$ — заданные функции, причем

$$\varphi_1(0) = \psi_1(0), \ \ \varphi_j(y) \in C^1[0,1], \ \ (j = 1, 2), \quad \varphi_3(y) \in C[0,1] \cap C^1(0,1), \tag{25}$$

$$\psi_1(x) \in C^1\left[0, \frac{1}{2}\right] \cap C^3\left(0, \frac{1}{2}\right), \ \ \psi_2(x) \in C\left[0, \frac{1}{2}\right] \cap C^2\left(0, \frac{1}{2}\right). \tag{26}$$

Теорема 2. Если $\lambda > 0$ и выполнены условия (25) и (26), то в области Ω существует единственное решение задачи C.

Доказательство теоремы 2.

Имеет место следующая лемма.

Лемма 2. Любое регулярное решение уравнения (2) (при $y \neq 0$) представляется в виде

$$u(x,y) = z(x,y) + w(x), \tag{27}$$

где $z(x,y)$ — решение уравнения

$$0 = \frac{\partial}{\partial x}\begin{cases} z_{xx} - z_y - \lambda z, \ y > 0, \\ z_{xx} - z_{yy} - \lambda z, \ y < 0, \end{cases} \tag{28}$$

$w(x)$ — решение следующего обыкновенного дифференциального уравнения

$$w^{'''}(x) - \lambda w^{'}(x) - \mu w(x) = \lambda z(x,0). \tag{29}$$

Доказательство леммы приводится аналогично как лемма 1.

Учитывая, что функция $ae^{\sqrt{\lambda}x} + be^{-\sqrt{\lambda}x} + c$ удовлетворяет уравнению (28), функцию $w(x)$ можно подчинить условиям

$$w(0) = w'(0) = w''(0) = 0. \tag{30}$$

Решение задачи Коши для уравнения (29) с условиями (30) соответственно представимо в виде (13), (14), (15) при рассмотрении $\Delta > 0, \Delta = 0$ и $\Delta < 0$, причем

$$T_i(x,x) = T_i'(x,x) = 0, \quad T_i''(x,x) = \mu, \ \ (i = 1, 3).$$

В силу представления (27), уравнение (2) и краевые условия (23), (24), с учетом (30), сводятся к виду (28)

$$z(x,y)|_{AA_0} = \varphi_1(y), \ \ z(x,y)|_{BB_0} = \varphi_2(y) - w(1), \ \ \left.\frac{\partial z(x,y)}{\partial x}\right|_{AA_0} = \varphi_3(y), \, 0 \leq y \leq h, \tag{31}$$

$$z(x,y)|_{AC} = \psi_1(x) - w(x), \quad 0 \leq x \leq \frac{1}{2}, \tag{32}$$

$$\left.\frac{\partial z(x,y)}{\partial n}\right|_{AC} = \psi_2(x) - \frac{1}{\sqrt{2}}w'(x), \quad 0 \leq x \leq \frac{1}{2}. \tag{33}$$

3.2. Вывод основных функциональных соотношений

Как нам известно из задача A, решение уравнения (28) с краевыми условиями (32), (33) и

$$\left.\frac{\partial z(x,y)}{\partial y}\right|_{y=0} = \nu(x), \quad 0 < x < 1 \tag{34}$$

дается формулой (19).

Положив $y = 0$ в (19), с учетом (30), и

$$z(x,0)=\tau(x),\quad 0\le x\le 1, \tag{35}$$

получим функциональное соотношение, принесенное из области Ω_2 на AB:

$$\tau(x)+\int_0^x K(x,t)\tau\left(\frac{t}{2}\right)dt-\int_0^x I_0\left[\sqrt{\lambda}(x-t)\right]\nu(t)dt=f_1(x), \tag{36}$$

где

$$f_1(x)=2\psi_1\left(\frac{x}{2}\right)-\psi_1(0)J_0\left[\sqrt{\lambda}x\right]+\lambda x\int_0^x \bar{I}_1\left[\sqrt{\lambda x(x-t)}\right]\psi_1\left(\frac{t}{2}\right)dt+$$

$$+\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\int_0^x K^*\left(\frac{x}{2},\frac{t}{2}\right)\left(\lambda\psi_1\left(\frac{t}{2}\right)-\sqrt{2}\psi_2'\left(\frac{t}{2}\right)\right)dt, \tag{37}$$

где $K(x,t)$ представима в виде (21).

Обозначив

$$\tilde{f}_1(x)=\tau(x)+\int_0^x K(x,t)\tau\left(\frac{t}{2}\right)dt-f_1(x), \tag{38}$$

из (37), пользуясь формулой обращения для таких уравнений [9]:

$$\nu(x)=C_{OX}^{0,\sqrt{\lambda}}\left[\tilde{f}_1(x)\right]\equiv\tilde{f}_1'(x)-\lambda\int_0^x\tilde{f}_1(t)\bar{I}_1\left[\sqrt{\lambda}(x-t)\right]dt,$$

с учетом (26) и (38) находим $\nu(x)$ относительно $\tau(x)$ в виде

$$\nu(x)=\tau'(x)-\lambda\int_0^x\tau(t)\bar{I}_1\left[\sqrt{\lambda}(x-t)\right]dt+$$

$$+\int_0^x\tau\left(\frac{t}{2}\right)\left(K'(x,t)-\lambda\int_t^x K(s,t)\bar{I}_1\left[\sqrt{\lambda}(x-s)\right]ds\right)dt- \tag{39}$$

$$-f_1'(x)+\lambda\int_0^x f_1(t)\bar{I}_1\left[\sqrt{\lambda}(x-t)\right]dt.$$

В силу свойства задачи C и с учетом (34), (35), из уравнения (28) в Ω_1, устремляя $y\to-0$, получаем [4]:

$$\tau''(x)-\lambda\tau(x)=k+\nu(x), \tag{40}$$

где k — неизвестная константа, подлежащая определению.

Равенство (40) является вторым функциональным соотношением между $\tau(x)$ и $\nu(x)$, принесенным из области Ω_1 на AB.

3.3. Существование решения задачи C

Решая уравнение (40) относительно $\tau(x)$ с условиями

$$\tau(0)=\varphi_1(0),\quad \tau'(0)=\varphi_3(0), \tag{41}$$

имеем

$$\begin{gathered}\tau(x)=\tfrac{1}{\sqrt{\lambda}}\int\limits_0^x sh\sqrt{\lambda}(x-t)\nu(t)dt-\tfrac{k}{\lambda}(1-ch\sqrt{\lambda}x)+\\+\varphi_1(0)ch\sqrt{\lambda}x+\tfrac{1}{\sqrt{\lambda}}\varphi_3(0)sh\sqrt{\lambda}x.\end{gathered}\tag{42}$$

Исключая из (39) и (42) функцию $\nu(x)$, с учетом условия склеивания, получим интегральное уравнение со сдвигом относительно $\tau(x)$:

$$\begin{gathered}\tau(x)-\int\limits_0^x K_1(x,t)\tau(t)dt-\int\limits_0^x K_2(x,t)\tau\left(\tfrac{t}{2}\right)dt=\\=-\tfrac{k}{\lambda}\left(1-ch\sqrt{\lambda}x\right)+\Phi_1(x),\end{gathered}\tag{43}$$

где

$$K_1(x,t)=ch\sqrt{\lambda}(x-t)-\sqrt{\lambda}\int\limits_t^x sh\sqrt{\lambda}(x-s)\bar{I}_1\left[\sqrt{\lambda}(s-t)\right]ds,$$

$$K_2(x,t)=-\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\int\limits_t^x sh\sqrt{\lambda}(x-s)\left(K'(s,t)-\lambda\int\limits_t^x K(z,t)\bar{I}_1\left[\sqrt{\lambda}(s-z)\right]dz\right)ds,$$

$$\Phi_1(x)=\varphi_1(0)ch\sqrt{\lambda}x+\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\varphi_3(0)sh\sqrt{\lambda}x-\int\limits_0^x K_1(x,t)f_1(t)dt.\tag{44}$$

Полагая

$$\alpha(x)=\Phi_1(x)-\frac{k}{\lambda}\left(1-ch\sqrt{\lambda}x\right)+\int\limits_0^x K_2(x,t)\tau\left(\frac{t}{2}\right)dt,\tag{45}$$

уравнение (43) запишем в виде

$$\tau(x)-\int\limits_0^x K_1(x,t)\tau(t)dt=\alpha(x),\quad 0\le x\le 1.\tag{46}$$

Следовательно, уравнение (43) является интегральным уравнением Вольтерра второго рода, которое безусловно и однозначно разрешимо в классе $C(0\leqslant x\leqslant 1)$. Таким образом, решение уравнения (46) имеет вид

$$\tau(x)=\alpha(x)+\int\limits_0^x R_1(x,t)\alpha(t)dt,\tag{47}$$

где $R_1(x,t)$ — резольвента ядра $K_1(x,t)$.

Равенство (47) с учетом (45) и формулы Дирихле имеет вид

$$\tau(x)-\int\limits_0^x K_2^*(x,t)\tau\left(\frac{t}{2}\right)dt=\Phi_2(x),\tag{48}$$

где

$$K_2^*(x,t)=K_2(x,t)+\int\limits_t^x K_2(s,t)R_1(x,s)ds,$$

$$\Phi_2(x)=\Phi_1(x)+\int\limits_0^x R_1(x,t)\Phi_1(t)dt-\frac{k}{\lambda}\left[1-ch\sqrt{\lambda}x+\int\limits_0^x\left(1-ch\sqrt{\lambda}t\right)R_1(x,t)dt\right].$$

Отсюда заключаем, что уравнение (48) всегда имеет, и притом единственное, решение, которое представимо в виде [8]

$$\tau(x)=\Phi_2(x)+\int\limits_0^x R_2(x,t)\Phi_2\left(\frac{t}{2}\right)dt,\quad 0\le x\le 1, \tag{49}$$

где $R_2(x,t)$ — резольвента ядра $K_2^*(x,t)$.

Отсюда, в силу условия $\tau(1)=\varphi_2(0)-w(1)$, однозначно определяются k.

После определения $\tau(x)$ функцию $\nu(x)$ и $w(x)$ находим из (39) и (18).

Таким образом, решение задачи C в области Ω_2 с учетом (18) и (19) определяется однозначно по формуле (27), а в области Ω_1 приходим к задаче для ненагруженного уравнения третьего порядка [4].

Итак, решение задачи C в областях Ω_1и Ω_2 можно построить из (27) с учетом (18), (19) и задачи Γ_{11} [4].

Таким образом, задача C однозначно разрешима.

Теорема 2. доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Нахушев А.М. *О задаче Дарбу для одного вырождающегося нагруженного интегро-дифференциального уравнения второго порядка* // Дифф. уравнения. 1976. Т. 12, № 1. С. 103–108.
2. Нахушев А.М. *Нагруженные уравнения и их приложения* // Дифф. уравнения. 1983. Т 19, № 1. С. 86–94.
3. Окунев Л.Я. *Высшая алгебра.* М.: Просвещение. 1966. 335 с.
4. Джураев Т.Д., Сопуев А., Мамажонов М. *Краевые задачи для уравнений параболо-гиперболического типа.* Т.: ФАН. 1986. 220с.
5. Салахитдинов М.С. *Уравнение смешанно-составного типа.* Т.: Фан. 1974. 156 с.
6. Сабитов К.Б. *Построения в явном виде решений задач Дарбу для телегрфного уравнения и их применение при обращении интегральных уравнений. 1.* // Дифф. уравнения. 1990. Т. 26, № 6. С. 1023–1032.
7. Бейтмен Г., Эрдейи А. *Высшие трансцендентные функции.* М.: Наука. 1966. Т. 2. 296 с.
8. Михлин С.Г. *Лекции по линейным интегральным уравнениям.* М.: Физматгиз. 1959. 224 с.
9. Салахитдинов М.С. Уринов А.К. *Краевые задачи для уравнений смешанного типа со спектральным параметром.* Т.: Фан, 1982. 166с.
10. Исломов Б., Балтаева У.И. *Аналог задачи Дарбу для нагруженного интегро-дифференциального уравнения третьего порядка* // ДАНРУз 2010. № 5.
11. Балтаева У.И. *Краевые задачи для нагруженного уравнения смешанного типа третьего порядка* Дис. канд. физ.-мат. наук., Ташкент, 2008, 111 с.

Умида Исмаиловна Балтаева,
Ургенчский Государственный университет,
ул. Х. Алимджана, 14,
220100, г. Ургенч, Узбекистан
E-mail: umida-baltayeva@mail.ru

Бозор Исломович Исломов,
Институт математики и информационных технологий АН РУз,
ул. Дурмон, 29,
110100, г. Ташкент, Узбекистан
E-mail: `Nosirislamov@mail.ru`