ISSN 2074-1863 Уфимский математический журнал. Том 3. № 3 (2011). С. 3-14.

УДК 517.946

ОЦЕНКА СНИЗУ СКОРОСТИ УБЫВАНИЯ РЕШЕНИЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С ДВОЙНОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ

Э.Р. АНДРИЯНОВА, Ф.Х. МУКМИНОВ

Аннотация. Доказывается существование сильного решения параболического уравнения с двойной нелинейностью в неограниченной области методом галеркинских приближений. В известных ранее работах существование решения доказывалось, как правило, в ограниченных областях, путем приближения эволюционного члена уравнения конечными разностями. Использование галеркинских приближений позволяет установить второе интегральное тождество, на основе которого получена оценка снизу скорости убывания нормы решения данного уравнения в ограниченной области. Ранее аналогичные оценки для квазилинейного параболического уравнения высокого порядка были установлены А.Ф.Тедеевым и Alikakos N., Rostmanian R.

Ключевые слова: параболическое уравнение с двойной нелинейностью, скорость убывания решения, оценки снизу, существование решения.

1. Введение

Пусть Ω — неограниченная область пространства $\mathbb{R}_n = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)\}$, $n \geq 2$. В цилиндрической области $D = \{t > 0\} \times \Omega$ для параболического уравнения с двойной нелинейностью рассматривается первая смешанная задача

$$(|u|^{\alpha-2}u)_t = \sum_{i=1}^{n} (|u_{x_i}|^{p-2}u_{x_i})_{x_i}, \quad \alpha, p > 1, \quad (t, \mathbf{x}) \in D; \tag{1}$$

$$u(t, \mathbf{x})\Big|_S = 0, \quad S = \{t > 0\} \times \partial\Omega; \quad u(0, \mathbf{x}) = \varphi(\mathbf{x}), \quad \varphi(\mathbf{x}) \in L_\alpha(\Omega). \tag{2}$$

Вопросы существования и единственности решения задачи рассматривались в работах Raviart P.A. [1], Lions J.L.[2], Bamberger A.[5], Grange O., Mignot F.[6], Alt, H.W., Luckhaus, S.[7] Bernis F.[10] и других. В основном рассматривались задачи в ограниченных областях. Сильное решение задачи в ограниченной области было установлено Raviart P.A. путем замены эволюционной производной разностным отношением. Bernis F. доказал существование слабого решения задачи в неограниченной области предельным переходом от решений, построенных в ограниченных областях Grange O., Mignot F. Однако работа со слабым решением вызывает затруднение в исследовании, например, убывания решения при $t \to \infty$. Bamberger A. установил единственность сильного положительного решения задачи.

Мы предлагаем обычный способ построения сильного решения задачи сразу в неограниченной области на основе галеркинских приближений. Их построение мало чем отличается от предложенного Ж.Л. Лионсом в книге [4] для случая $\alpha = 2$. Предлагаемый метод может быть адаптирован на существенно более широкий класс уравнений.

E.R. Andriyanova, F.Kh. Mukminov, The lower estimate of decay rate of solutions for doubly nonlinear parabolic equations.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант 10-01-00118-а).

Поступила 3 июня 2011 г.

Определим пространство $W^1_{\alpha,p}(\Omega)$ как пополнения $C_0^\infty(\Omega)$ по норме

$$||v||_{W^1_{\alpha,p}} = ||v||_\alpha + ||\nabla v||_p,$$

где $||v||_\alpha = ||v||_{\alpha,\Omega}$, $||v||_{\alpha,Q} = \left(\int\limits_Q v^\alpha dx\right)^{1/\alpha}$.

Через $V(D^T)$ будем обозначать пополнения $C_0^\infty(D^T)$ по норме

$$||v||_V = ||v||_{\alpha,D^T} + ||\nabla v||_{p,D^T}.$$

Обобщенным решением задачи (1),(2) назовем функцию $u \in V(D^T)$, удовлетворяющую при $\varphi \in C_0^\infty(D^T_{-1})$ тождеству

$$\int\limits_\Omega \left(-|u|^{\alpha-2}u\varphi_t + \sum_{i=1}^n \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\right) dxdt = \int\limits_\Omega |u_0|^{\alpha-2}u_0\varphi(0,x)dx+ \tag{3}$$

$$+ (f,\varphi)_{D^T}.$$

Здесь и далее через $(f,\varphi)_Q$ обозначаются значения обобщенной функции f на элементе $\varphi \in C_0^\infty(Q)$, где Q – область в $\mathbb{R}_n$ или в $\mathbb{R}\times\mathbb{R}_n$.

Теорема 1. *Пусть $f, f_t \in (V(D^T))', u_0 \in W^1_{\alpha,p}(\Omega)$. Тогда существует обобщенное решение u задачи (1),(2), удовлетворяющее условиям*

$$u \in L_\infty((0,T); W^1_{\alpha,p}(\Omega)), \tag{4}$$

$$|u|^{\frac{\alpha-2}{2}}u_t \in L_2(D^T), \alpha > 1, \tag{5}$$

$$u_t \in L_\alpha(D^T),\ C([0,T]; L_\alpha(\Omega)) \qquad \textit{при } \alpha \in (1,2) \tag{6}$$

$$|u|^{\alpha-2}u_t \in L_{\alpha'}(D^T) \qquad \textit{при } \alpha \geq 2. \tag{7}$$

Галеркинские приближения являются гладкими функциями, что облегчает доказательство для них разных оценок, которые затем предельным переходом распространяются на решение задачи (1),(2). В частности, в случае ограниченной области при $p > \alpha$ установлены оценки

$$c(1+t)^{-1/(p-\alpha)} \leq \|u(t)\|_{L_\alpha(\Omega)} \leqslant Mt^{-1/(p-\alpha)}, \quad t > 0. \tag{8}$$

Оценки (8) при $\alpha = 2$ получены А.Ф. Тедеевым [19] и Alikakos N., Rostmanian R. [19] для задачи Коши. Точные двусторонние оценки скорости убывания нормы решения линейного и квазилинейного параболического уравнения в неограниченной области установлены в работах Л.М. Кожевниковой [16] и Р. Х. Каримова, Л.М. Кожевниковой [17].

2. Доказательство теоремы существования

Условия на f обеспечивают принадлежность

$$f \in C([0,T]; (W^1_{\alpha,p}(\Omega))').$$

В частности, $f(0) \in (W^1_{\alpha,p}(\Omega))'$.

Рассмотрим сначала случай $\alpha > 2$. Выберем последовательность $\omega_k \in C_0^\infty(\Omega)$ линейно независимых функций, линейная оболочка которых плотна в $W^1_{\alpha,p}(\Omega)$. Положим $I_m = \cup_{k=1}^m \mathrm{supp}\omega_k$. Галеркинские приближения к решению будем искать в виде

$$u_m(t,x) = \sum_{k=1}^m c_{mk}(t)\omega_k(x),$$

где функции $c_{mk}(t)$ определяются из уравнений

$$\int\limits_{\Omega}\left(\omega_j\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{u_m}{b_m}+|u_m|^{\alpha-2}u_m\right)+\sum_{i=1}^{n}|u_{mx_i}|^{p-2}u_{mx_i}(\omega_j)_{x_i}\right)dx=(f,\omega_j)_{\Omega}, \tag{9}$$
$$j=1,2,...,m.$$

Числа $b_m>0$ выберем позже. Убедимся, что уравнения (9) разрешимы относительно производных c'_{mk}. Очевидно, что уравнения (9) имеют вид

$$A_{jk}(t)c'_{mk}=F_j(c_{m_1},c_{m_2},...,c_{m_m})+f_j(t).$$

Матрица коэффициентов

$$A_{jk}(t)=\int\limits_{\Omega}\left(\frac{1}{b_m}+(\alpha-1)|u_m|^{\alpha-2}\right)\omega_j\omega_k dx$$

при каждом t является матрицей Грама системы линейно независимых векторов ω_k, $k=1,2,...,m$ и поэтому имеет обратную. Из уравнений (9) при начальных условиях $c_{mk}(0)$, подобранных так, чтобы $u_m(0,x)\to u_0(x)$, находим функции $c_{mk}(t)$. Сначала эти функции находятся на малом промежутке времени, но ограниченность галеркинских приближений позволяет определить их на бесконечном промежутке времени. Числа b_m выберем так, чтобы $||u_m(0)||_2^2/b_m\to 0$ при $m\to\infty$.

Установим теперь оценки для галеркинских приближений. Умножив уравнение (9) на $c_{mj}(t)$ и просуммировав, находим

$$\int\limits_{\Omega}\left(u_m\left(\frac{u_m}{b_m}+|u_m|^{\alpha-2}u_m\right)_t+\sum_{i=1}^{n}|u_{mx_i}|^{p}\right)dx=(f,u_m)_{\Omega}.$$

После интегрирования по t будем иметь

$$\int\limits_{\Omega}\left(\frac{u_m^2(t)}{2b_m}+\frac{\alpha-1}{\alpha}|u_m(t)|^{\alpha}\right)dx+||\nabla u_m||^p_{p,D_0^t}=(f,u_m)_{D_0^t}+ \tag{10}$$
$$+\int\limits_{\Omega}\left(\frac{u_m^2(0)}{2b_m}+\frac{\alpha-1}{\alpha}|u_m(0)|^{\alpha}\right)dx.$$

Последний интеграл в правой части ограничен постоянной, не зависящей от m, ввиду выбранных выше сходимостей. Далее,

$$|(f,u_m)_{D_0^t}|\leqslant\int\limits_0^t||u_m(\tau)||_{W^1_{\alpha,p}}||f(\tau)||_{(W^1_{\alpha,p})'}d\tau\leqslant c\int\limits_0^t(||u_m(\tau)||_{\alpha}+||\nabla u_m(\tau)||_p)d\tau\leqslant$$
$$\leqslant c(\varepsilon)+\varepsilon\int\limits_0^t(||u_m(\tau)||^{\alpha}_{\alpha}+||\nabla u_m(\tau)||^p_p)d\tau.$$

Поэтому из (10) и леммы Гроноулла следует ограниченность последовательности u_m в пространствах $C([0,T];L_{\alpha}(\Omega))$ и $V(D^T)$.

Умножим теперь уравнения (9) на $c'_{mj}(t)$ и просуммируем:

$$\int\limits_{\Omega}\left(u'_m\left(\frac{u_m}{b_m}+|u_m|^{\alpha-2}u_m\right)_t+\sum_{i=1}^{n}|u_{mx_i}|^{p-2}u_{mx_i}u'_{mx_i}\right)dx=(f,u'_m)_{\Omega}.$$

После интегрирования по t получим

$$\int\limits_{D_0^T}\left(\frac{1}{b_m}+(\alpha-1)|u_m|^{\alpha-2}\right)(u'_m)^2dxdt+\frac{1}{p}||\nabla u_m(T)||_p^p=$$

$$=\frac{1}{p}||\nabla u_m(0)||_p^p+(f,u'_m)_{D^T}. \tag{11}$$

Преобразуем последнее слагаемое интегрированием по частям:

$$(f,u'_m)_{D^T}=(f(T),u_m(T))_\Omega-(f(0),u_m(0))_\Omega-(f',u_m)_{D^T}.$$

Заметим, что

$$|(f(T),u_m(T))_\Omega|\leqslant ||f(T)||_{(W^1_{\alpha,p})'}||u_m(T)||_{W^1_{\alpha,p}}\leqslant c(\varepsilon)+\varepsilon(||u_m(T)||_\alpha^\alpha+||\nabla u_m(T)||_p^p).$$

Далее, ввиду ограниченности u_m в пространстве $V(D^T)$, имеем

$$|(f',u_m)_{D^T}|\leqslant ||f_t||_{(V(D^T))'}||u_m||_{V(D^T)}\leqslant c.$$

Поэтому из равенств (11) устанавливаем ограниченность последовательности $|u_m|^{\frac{\alpha-2}{2}}u'_m$ в $L_2(D^T)$ и последовательности ∇u_m в пространстве $C([0,T];L_p(\Omega))$. Установленные факты позволят выбрать подпоследовательность u_{m_k}, слабо сходящуюся в указанных ниже пространствах. Для упрощения записи под-индекс k будем опускать.

$$u_m\to u \text{ слабо в } V(D^T).$$

$$A(u_m)=-\sum_{i=1}^n\frac{\partial}{\partial x_i}\left(|u_{mx_i}|^{p-2}u_{mx_i}\right)\to\chi \qquad \text{слабо в } (V(D^T))'.$$

$$\left(|u_m|^{\frac{\alpha-2}{2}}u_m\right)'\to\tilde u \text{ слабо в } L_2(D^T).$$

Ниже докажем, что можно выбрать подпоследовательность u_{m_k}, почти всюду в D^T сходящуюся к u. Это позволит установить, что $\tilde u=\left(|u|^{\frac{\alpha-2}{2}}u\right)'$.

Последовательность $u_m\in C([0,T];W^1_{\alpha,p}(\Omega))$ ограничена. Для каждой ограниченной области $Q\subset\Omega$ с гладкой границей получаем компактность вложения $L_1(Q)\subset W^1_1(Q)$. Поэтому диагональным процессом можно выделить подпоследовательность $u_{m_k}(t_s)\to h_s$ сильно в $L_1(Q)$ на счетном плотном множестве $t_s\subset[0,T]$. Выбирая еще раз подпоследовательность, можно считать также (отбрасывая подиндексы), что $u_m(t_s,x)\to h_s(x)$ почти всюду в Q при каждом t_s. Совершенно аналогично, при $\alpha\le p$ можно также считать, что последовательность $u_m(t_s)\to h_s$ сильно в $L_\alpha(Q)$ при каждом t_s.

Установим теперь равностепенную непрерывность по t последовательности $v_m(t)$ в $L_2(\Omega)$, $v_m=|u_m|^{\frac{\alpha-2}{2}}u_m$.

$$||v_m(t_2)-v_m(t_1)||_2\leqslant\int\limits_{t_1}^{t_2}||v'_m(t)||_2dt\leqslant \tag{12}$$

$$\left(|t_2-t_1|\int\limits_{t_1}^{t_2}||v'_m(t)||_2^2dt\right)^{\frac12}\leqslant c|t_2-t_1|^{\frac12}.$$

Далее, последовательность $v_m(t)$ ограничена в пространстве $C([0,T];L_2(\Omega))$. Тогда можно выделить подпоследовательность $v_{m_k}(t)$, слабо сходящуюся в $L_2(\Omega)$ при тех же t_s, что и выше. Вместе с установленной выше сходимостью почти всюду в $Q\subset\Omega$ это влечет сильную сходимость в $L_1(Q)$ при каждом t_s (см. Ж.-Л. Лионс [4]).

Для ограниченной области Q из (12) нетрудно установить равномерную фундаментальность $v_m(t)$ по норме $L_1(Q)$:

$$||v_n(t)-v_m(t)||_{1,Q}=||v_n(t)-v_n(t_{s_k})+v_n(t_{s_k})-v_m(t_{s_k})+v_m(t_{s_k})-v_m(t)||_{1,Q}\leqslant$$

$$\leqslant C_Q|t-t_{s_k}|^{\frac{1}{2}}+||v_n(t_{s_k})-v_m(t_{s_k})||_{1,Q}.$$

Выбрав конечный набор чисел t_{s_k} с малым шагом и затем увеличивая n,m, добиваемся равномерной по t малости правой части.

Итак, установлена сходимость $v_{m_k}\to v$ в $C([0,T];L_1(Q))$. Сходимость будет также и в $L_1((0,T)\times Q)$, поэтому можно выделить подпоследовательность, сходящуюся в $(0,T)\times Q$ почти всюду. Благодаря произвольности Q диагональным процессом можно выделить подпоследовательность v_{m_k}, сходящуюся в D^T почти всюду. Тогда и последовательность u_{m_k} будет сходиться почти всюду в D^T к u (лемма 1.3. Ж.-Л. Лионс [4]). Итак, установлено, что $v_{m_k}\to v=|u|^{\frac{\alpha-2}{2}}u$.

Далее, $(v'_m,\varphi)_{D^T}=-(v_m,\varphi')_{D^T}$. Переходя к пределу, получим

$$(\tilde{u},\varphi)_{D^T}=-(v,\varphi')_{D^T}.$$

Отсюда следует, что $\tilde{u}=v'=(|u|^{\frac{\alpha-2}{2}}u)'$.

Покажем, что последовательность $|u_m|^{\alpha-2}u'_m$ ограничена в $L_{\alpha'}(D^T)$. В самом деле

$$|(|u_m|^{\alpha-2}u'_m,\varphi)_{D^T}|=\left|\left(|u_m|^{\frac{\alpha-2}{2}}u'_m,\varphi|u_m|^{\frac{\alpha-2}{2}}\right)_{D^T}\right|\leqslant C||\varphi|u_m|^{\frac{\alpha-2}{2}}||_{2,D^T}$$

$$\leqslant C||\varphi||_{\alpha',D^T}||u_m||^{\frac{\alpha-2}{2}}_{\alpha,D^T}\leqslant C_1||\varphi||_{\alpha',D^T}.$$

Тогда можно считать, что $|u_m|^{\alpha-2}u'_m\to|u|^{\alpha-2}u'$ слабо в $L_{\alpha'}(D^T)$.

Переходим к доказательству равенства $\chi=A(u)$. Для этого потребуются интегральные соотношения. Умножим уравнение (9) на гладкую функцию $d_j(t)$, проинтегрируем по t и перейдем к пределу при $m\to\infty$, обозначив $d_j(t)\omega_j(x)$ через φ в конечном выражении:

$$((|u|^{\alpha-2}u)',\varphi)_{D^T}+(\chi,\varphi)_{D^T}=(f,\varphi)_{D^T}. \tag{13}$$

Отметим, что

$$\left(\frac{u'_m}{b_m},\varphi\right)_{D^T}=\frac{1}{b_m}\left(-(u_m,\varphi')_{D^T}+(u_m(T),\varphi(T))_\Omega-(u_m(0),\varphi)\right)\to 0,$$

благодаря ограниченности u_m в $C([0,T];L_\alpha(\Omega))$, и тому, что $b_m\to\infty$. Таким образом u будет являться обобщенным решением задачи (1),(2), если будет установлено, что $\chi=A(u)$.

Ясно, что функция $u\in V(D^T)$ может быть приближена линейными комбинациями

$$\sum_{j=1}^{N}d_j(t)\omega_j(x).$$

Поэтому из (13) получаем

$$(f-\chi,u)_{D^T}=((|u|^{\alpha-2}u)',u)_{D^T}=\frac{\alpha-1}{\alpha}\left(||u(T)||^\alpha_\alpha-||u(0)||^\alpha_\alpha\right). \tag{14}$$

Отметим еще, что принадлежность $v,v'\in L_2(D^T)$ влечет $v\in C([0,T];L_2(\Omega))$ и $\|u(t)\|_\alpha\in C([0,T]),\alpha>1$.

Далее проводятся стандартные аргументы монотонности. Легко проверить, что

$$X_m=\int_0^T(A(u_m(t))-A(h(t)),u_m(t)-h(t))_\Omega dt\geq 0\quad\forall h\in V(D^T). \tag{15}$$

Из уравнений (9) легко выводятся соотношения

$$(A(u_m),u_m)_{D^T}=(f,u_m)_{D^T}+\frac{\alpha-1}{\alpha}\left(||u_m(0)||_\alpha^\alpha-||u_m(T)||_\alpha^\alpha\right)+$$
$$+\frac{1}{2b_m}\left(||u_m(0)||_2^2-||u_m(T)||_2^2\right).$$

Поэтому

$$X_m=(f,u_m)_{D^T}+\frac{\alpha-1}{\alpha}(||u_m(0)||_\alpha^\alpha-||u_m(T)||_\alpha^\alpha)+$$
$$+\frac{1}{2b_m}\left(||u_m(0)||_2^2-||u_m(T)||_2^2\right)-(A(u_m),h)_{D^T}-(A(h),u_m-h)_{D^T}.$$

Откуда (поскольку $\liminf||u_m(T)||_\alpha\geq||u(T)||_\alpha$)

$$\limsup X_m\leqslant(f,u)_{D^T}+\frac{\alpha-1}{\alpha}\left(||u_0||_\alpha^\alpha-||u(T)||_\alpha^\alpha\right)-(\chi,h)_{D^T}-(A(h),u-h)_{D^T}.$$

Применив (14), из (15) получим

$$(\chi-A(h),u-h)\geq0.$$

Положим $h=u-\lambda\omega,\quad\lambda>0,\quad\omega\in V(D^T):$

$$\lambda(\chi-A(u-\lambda\omega),\omega)_{D^T}\geq0.$$

Устремляя $\lambda\to0$, будем иметь $(\chi-A(u),\omega)\geq0,\quad\forall\omega$. Отсюда $\chi=A(u)$.

Пусть теперь $\alpha\leqslant2$. Галеркинские приближения к решению будем искать в прежнем виде, но функции $c_{mk}(t)$ определяются из уравнений

$$\int\limits_\Omega\left(\omega_j\frac{\partial}{\partial t}\left(v_m^{\frac{\alpha}{2}-1}u_m\right)+\sum_{i=1}^n|u_{mx_i}|^{p-2}u_{mx_i}(\omega_j)_{x_i}\right)dx=\tag{16}$$
$$=(f,\omega_j)_\Omega,\quad j=1,2,...,m.$$

Здесь для регуляризации введены функции $v_m=u_m^2+\varepsilon_m$, числа $\varepsilon_m>0$ выберем позже. Убедимся, что уравнения (16) разрешимы относительно производных c'_{mk}. Очевидно, что они имеют вид

$$A_{jk}(t)c'_{mk}=F_j(c_{m_1},c_{m_2},...,c_{m_m})+f_j(t).$$

Матрица коэффициентов

$$A_{jk}(t)=\int\limits_\Omega((\alpha-1)u_m^2+\varepsilon_m)v_m^{\frac{\alpha}{2}-2}\omega_j\omega_k dx$$

при каждом t является матрицей Грама системы линейно независимых векторов ω_k, $k=1,2,...m$ и поэтому имеет обратную. Из уравнений (16) при начальных условиях $c_{mk}(0)$, подобранных так, чтобы $u_m(0,x)\to u_0(x)$, находим функции $c_{mk}(t)$.

Установим теперь оценки для галеркинских приближений. Умножив уравнения (16) на $c_{mj}(t)$ и просуммировав, находим

$$\int\limits_\Omega\left(u_m\left((\alpha-1)v_m^{\frac{\alpha}{2}-1}-\varepsilon_m(\alpha-2)v_m^{\frac{\alpha}{2}-2}\right)u'_m+\sum_{i=1}^n|u_{mx_i}|^p\right)dx=(f,u_m)_\Omega.$$

Поскольку $u_mu'_m=v'_m/2$, то после интегрирования по t будем иметь

$$\int\limits_{I_m}\left(\frac{\alpha-1}{\alpha}v_m(t)^{\frac{\alpha}{2}}-\varepsilon_m v_m(t)^{\frac{\alpha}{2}-1}\right)dx+||\nabla u_m||^p_{p,D_0^t}=(f,u_m)_{D_0^t}\tag{17}$$

$$+\int\limits_{I_m}\left(\frac{\alpha-1}{\alpha}v_m(0)^{\frac{\alpha}{2}}-\varepsilon_m v_m(0)^{\frac{\alpha}{2}-1}\right)dx.$$

Последний интеграл в правой части ограничен постоянной, не зависящей от m, ввиду выбранных выше сходимостей. Как и ранее,

$$|(f,u_m)_{D_0^t}|\leqslant c(\varepsilon)+\varepsilon\int\limits_0^t(||u_m(\tau)||_\alpha^\alpha+||\nabla u_m(\tau)||_p^p)d\tau.$$

Отметим далее, что выбором ε_m обеспечивается справедливость неравенств

$$\int\limits_{I_m}\varepsilon_m v_m(t)^{\frac{\alpha}{2}-1}dx\leq\int\limits_{I_m}\varepsilon_m^{\frac{\alpha}{2}}dx\leq\varepsilon_m^{\frac{\alpha}{4}}. \qquad (18)$$

Поэтому из (17) и леммы Гронуолла следует равномерная ограниченность интегралов $\int\limits_{I_m} v_m(t)^{\frac{\alpha}{2}}dx$ по t и m, и следовательно, последовательности u_m в пространствах $C([0,T];L_\alpha(\Omega))$ и $V(D^T)$.

Умножим теперь уравнения (16) на $c'_{mj}(t)$ и просуммируем:

$$\int\limits_\Omega\left((u'_m)^2((\alpha-1)u_m^2+\varepsilon_m)v_m^{\frac{\alpha}{2}-2}+\sum_{i=1}^n|u_{mx_i}|^{p-2}u_{mx_i}u'_{mx_i}\right)dx=(f,u'_m)_\Omega.$$

После интегрирования по t получим

$$\int\limits_{D_0^T}(u'_m)^2((\alpha-1)u_m^2+\varepsilon_m)v_m^{\frac{\alpha}{2}-2}dxdt+\frac{1}{p}||\nabla u_m(T)||_p^p= \qquad (19)$$

$$=\frac{1}{p}||\nabla u_m(0)||_p^p+(f,u'_m)_{D^T}.$$

Как и ранее, имеем $|(f,u'_m)_{D^T}|\leqslant c$. Кроме того, $(\alpha-1)u_m^2+\varepsilon_m\geq(\alpha-1)v_m$. Полагая $g(u)=\int\limits_0^u(t^2+\varepsilon_m)^{\frac{\alpha-2}{4}}dt$, из равенств (19) устанавливаем ограниченность последовательности $v_m^{\frac{\alpha-2}{4}}u'_m=(g(u_m))'$ в $L_2(D^T)$ и последовательности ∇u_m в пространстве $C([0,T];L_p(\Omega))$. Установленные факты позволят выбрать подпоследовательность u_{m_k}, слабо сходящуюся в указанных ниже пространствах. Для упрощения записи подиндекс k будем опускать.

$$u_m\to u \text{ слабо в } V(D^T).$$

$$A(u_m)\to\chi \qquad \text{слабо в } (V(D^T))'.$$

$$(g(u_m))'\to\tilde{u} \text{ слабо в } L_2(D^T).$$

Ниже докажем, что можно выбрать подпоследовательность u_{m_k}, почти всюду в D^T сходящуюся к u. Это позволит установить, что $\tilde{u}=|u|^{\frac{\alpha-2}{2}}u'$.

Действуя как выше, можно считать (отбрасывая подиндексы), что $u_m(t_s,x)\to h_s(x)$ почти всюду в Q при каждом t_s, а при $\alpha\leq p$ можно также считать, что последовательность $u_m(t_s)\to h_s$ сильно в $L_\alpha(Q)$ при каждом t_s.

Установим теперь равностепенную непрерывность по t последовательности $g(u_m(t))$ в $L_2(Q)$.

$$||g(u_m(t_2))-g(u_m(t_1))||_{2,Q}\leqslant\int\limits_{t_1}^{t_2}||(g(u_m(t)))'||_{2,\Omega}dt\leqslant$$

$$\leqslant \left(|t_2 - t_1| \int\limits_{t_1}^{t_2} ||(g(u_m(t)))'||_2^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \leqslant c|t_2 - t_1|^{\frac{1}{2}}. \tag{20}$$

Последовательность $g(u_m(t))$ ограничена в пространстве $C([0,T];L_2(Q))$. Тогда можно выделить подпоследовательность $g(u_{m_k}(t))$, слабо сходящуюся в $L_2(\Omega)$ при тех же t_s, что и выше. Вместе с установленной выше сходимостью почти всюду в $Q \subset \Omega$ это влечет сильную сходимость в $L_1(Q)$ при каждом t_s. Для ограниченной области Q из (20) следует равномерная фундаментальность $g(u_m(t))$ по норме $L_1(Q)$. Итак, установлена сходимость $g(u_{m_k}) \to v$ в $C([0,T];L_1(Q))$. Сходимость будет также и в $L_1((0,T)\times Q)$, поэтому можно выделить подпоследовательность, сходящуюся в $(0,T)\times Q$ почти всюду. Благодаря произвольности Q диагональным процессом можно выделить подпоследовательность $g(u_{m_k})$, сходящуюся в D^T почти всюду. Тогда и последовательность u_{m_k} будет сходиться почти всюду в D^T к u. Итак, установлено, что $g(u_{m_k}) \to v = \frac{2}{\alpha}|u|^{\frac{\alpha-2}{2}}u$. При этом $\tilde{u} = |u|^{\frac{\alpha-2}{2}}u'$.

При $\alpha \leqslant 2$ последовательность u'_m ограничена в $L_\alpha(D^T)$. Действительно, из (19) получаем, что

$$|(u'_m,\varphi)_{D^T}| = |\left(v_m^{\frac{\alpha-2}{4}}u'_m, \varphi v_m^{\frac{2-\alpha}{4}}\right)_{D^T}| \leqslant C||\varphi v_m^{\frac{2-\alpha}{4}}||_{2,D^T_m}$$

$$\leqslant C||\varphi||_{\alpha',D^T}||v_m||^{\frac{2-\alpha}{4}}_{\frac{\alpha}{2},D^T_m} \leqslant C_1||\varphi||_{\alpha',D^T}; \quad D^T_m = (0,T)\times I_m.$$

Поэтому можно считать, что $u'_m \to u'$ слабо в $L_\alpha(D^T)$, и тогда $u \in C([0,T];L_\alpha(\Omega))$.

Переходим к доказательству равенства $\chi = A(u)$. Для этого потребуются интегральные соотношения. Умножим уравнения (16) на гладкую функцию $d_j(t)$, проинтегрируем по $t \in (0,T)$ и проинтегрируем по частям в первом члене. Тогда, обозначив $d_j(t)\omega_j(x)$ через φ, будем иметь

$$(v_m^{\frac{\alpha}{2}-1}(T)u_m(T),\varphi(T))_\Omega - (v_m^{\frac{\alpha}{2}-1}u_m,\varphi_t)_{D^T} + (|\nabla u_m|^{p-2}\nabla u_m,\varphi_{x_i})_{D^T}$$

$$= (f,\varphi)_{D^T} + (v_m^{\frac{\alpha}{2}-1}(0)u_m(0),\varphi(0))_\Omega.$$

Заметим, что $|v_m^{\frac{\alpha}{2}-1}u_m| \leqslant v_m^{\frac{\alpha}{2}-1}v_m^{\frac{1}{2}} \in C([0,T],L_{\alpha'}(Q))$, так как $\left(v_m^{\frac{\alpha-1}{2}}\right)^{\alpha'} = v_m^{\frac{\alpha}{2}}$ ограниченная последовательность в $C([0,T];L_1(Q))$. Следовательно, можно выделить подпоследовательность так, чтобы обеспечивались слабые сходимости $v_m^{\frac{\alpha}{2}-1}u_m \to |u|^{\alpha-2}u$ в $L_{\alpha'}(D^T)$ и $v_m^{\frac{\alpha}{2}-1}(T)u_m(T) \to |u|^{\alpha-2}u(T)$ в $L_{\alpha'}(\Omega)$. То, что предельные функции будут именно такими, обосновывается установленной выше сходимостью подпоследовательности u_m почти всюду в D^T, а также почти всюду в Ω при $t = T$. Тогда после предельного перехода $m \to \infty$ будем иметь

$$(|u|^{\alpha-2}(T)u(T),\varphi(T))_\Omega - (|u|^{\alpha-2}u,\varphi_t)_{D^T} + (\chi,\varphi)_{D^T} \tag{21}$$

$$= (f,\varphi)_{D^T} + (|u|^{\alpha-2}(0)u(0),\varphi(0))_\Omega.$$

Подставляя в (21) $\varphi = u$, получим

$$(f-\chi,u)_{D^T} = \frac{\alpha-1}{\alpha}\left(||u(T)||^\alpha_\alpha - ||u(0)||^\alpha_\alpha\right). \tag{22}$$

Соотношение (21) означает также, что u является обобщенным решением задачи (1),(2), если будет установлено, что $\chi = A(u)$.

Далее проводятся стандартные аргументы монотонности. Из уравнений (17) легко выводятся соотношения

$$(A(u_m), u_m)_{D^T} = (f, u_m)_{D^T} + \int\limits_{I_m} \left(\frac{\alpha-1}{\alpha} v_m^{\frac{\alpha}{2}}(0) - \varepsilon_m v_m^{\frac{\alpha}{2}-1}(0) \right) dx$$

$$- \int\limits_{I_m} \left(\frac{\alpha-1}{\alpha} v_m^{\frac{\alpha}{2}}(T) - \varepsilon_m v_m^{\frac{\alpha}{2}-1}(T) \right) dx. \tag{23}$$

Воспользуемся неравенством (18), тогда из (23) следует

$$X_m \leqslant (f, u_m)_{D^T} + \frac{\alpha-1}{\alpha} \int\limits_{I_m} \left(v_m^{\frac{\alpha}{2}}(0) - v_m^{\frac{\alpha}{2}}(T) \right) dx + 2\varepsilon_m^{\frac{\alpha}{4}} -$$

$$- (A(u_m), h)_{D^T} - (A(h), u_m - h)_{D^T}.$$

Откуда (поскольку $\liminf ||v_m^{\frac{\alpha}{4}}(T)||_2 \geq ||u(T)||_\alpha$ и $\varepsilon_m \to 0$)

$$\limsup X_m \leqslant (f, u)_{D^T} + \frac{\alpha-1}{\alpha} \left(||u_0||_\alpha^\alpha - ||u(T)||_\alpha^\alpha\right) - (\chi, h)_{D^T} - (A(h), u-h)_{D^T}.$$

Далее, аналогично случаю $\alpha > 2$, доказывается, что $\chi = A(u)$. Теорема доказана.

3. Оценка снизу нормы решения в ограниченной области

Пусть теперь $\alpha \leqslant p$ и область Ω ограничена. Установим оценки снизу скорости убывания решения при $t \to \infty$. Поскольку единственность решения пока не установлена, фактически будут установлены оценки снизу только для построенного решения в области D^T при каждом T, достаточно большом.

Рассмотрим сначала случай $\alpha \geq 2$. Введем обозначения

$$E(t) = \int\limits_\Omega \left(\frac{u_m^2(t)}{2b_m} + \frac{\alpha-1}{\alpha} |u_m(t)|^\alpha \right) dx,$$

$$H(t) = ||\nabla u_m(t)||_p^p.$$

Формула (10) при $f = 0$ после дифференцирования по t примет вид

$$E' + H = 0. \tag{24}$$

Формула (11) после дифференцирования запишется в виде

$$\int\limits_\Omega \left(\frac{1}{b_m} + (\alpha-1)|u_m(t)|^{\alpha-2} \right) u_m'^2(t) dx + \frac{1}{p} H'(t) = 0. \tag{25}$$

Справедливы оценки

$$(E')^2 = \left(\int\limits_\Omega \left(\frac{u_m u_m'(t)}{b_m} + (\alpha-1)|u_m(t)|^{\alpha-2} u_m'(t) \right) dx \right)^2 \leqslant$$

$$\left(\left(\int\limits_\Omega \frac{u_m^2(t)}{b_m} dx \int\limits_\Omega \frac{u_m'^2(t)}{b_m} dx \right)^{\frac{1}{2}} + (\alpha-1) \left(\int\limits_\Omega |u_m|^\alpha dx \int\limits_\Omega |u_m|^{\alpha-2} u_m'^2(t) dx \right)^{\frac{1}{2}} \right)^2 \leqslant$$

Применяя неравенство Коши-Буняковского для скалярного произведения в $\mathbb{R}_2$, выводим

$$\leqslant \left(\int\limits_\Omega \frac{u_m'^2(t)}{b_m} dx + (\alpha-1) \int\limits_\Omega |u_m|^{\alpha-2} u_m'^2(t) dx \right) \left(\int\limits_\Omega \frac{u_m^2(t)}{b_m} dx + (\alpha-1) \int\limits_\Omega |u_m|^{\alpha} dx \right),$$

отсюда

$$(E')^2 \leqslant -\frac{\alpha}{p} H'(t) E(t). \tag{26}$$

При помощи (24) перепишем последнее в виде

$$-HE' \leqslant -\frac{1}{\gamma} EH', \quad \gamma = \frac{p}{\alpha}.$$

Отсюда $\gamma \frac{E'}{E} \geq \frac{H'}{H}$, или после интегрирования

$$H(t) \leqslant \frac{H(0)E^\gamma(t)}{E^\gamma(0)}.$$

Тогда

$$E'(t) = -H(t) \geq -\frac{H(0)E^\gamma(t)}{E^\gamma(0)},$$

или

$$\frac{E'}{E^\gamma} \geq -\frac{H(0)}{E^\gamma(0)}.$$

Отсюда имеем

$$E^{1-\gamma}(t) - E^{1-\gamma}(0) \leqslant (\gamma-1) \frac{H(0)t}{E^\gamma(0)}.$$

Таким образом,

$$E(t) \geq E(0) \left(1 + (\gamma-1) \frac{H(0)t}{E(0)} \right)^{\frac{1}{1-\gamma}}. \tag{27}$$

При фиксированном $t \in [0,T]$ при $\alpha \leq p$ в случае ограниченной области можно выделить подпоследовательность $u_{m_k}(t)$, сильно сходящуюся в пространстве $L_\alpha(\Omega)$. Поэтому

$$E_m(t) \to \frac{\alpha-1}{\alpha} ||u(t)||_\alpha^\alpha.$$

Функции

$$u_m(t) = \sum_{k=1}^n c_{mk}(t) \omega_k$$

принадлежат линейной оболочке функций $\omega_1, \omega_2, ..., \omega_m$. В конечномерном пространстве все нормы эквивалентны, поэтому

$$\int\limits_\Omega u_m^2(t) dx \leqslant c_m \|u_m(t)\|_\alpha^2 \leqslant \widetilde{c_m}.$$

Выберем числа b_m так, чтобы $\widetilde{c_m} \leqslant b_m/m$. После предельного перехода в (27) при $m \to \infty$ получим

$$||u(t)||_\alpha^\alpha \geq ||u(0)||_\alpha^\alpha (1 + C(u_0)t)^{-\frac{\alpha}{p-\alpha}}. \tag{28}$$

Пусть теперь $\alpha \leqslant 2$. Обозначим в этом случае

$$E(t) = \int\limits_{I_m} \left(\frac{\alpha - 1}{\alpha} v_m^{\frac{\alpha}{2}} - \varepsilon_m v_m^{\frac{\alpha-2}{2}} \right) dx + 2\varepsilon_m^{\frac{\alpha}{4}}.$$

Заметим, что из (18) следует неравенство $E(t) \geq \varepsilon_m^{\frac{\alpha}{4}}$.

Продифференцируем формулу (17) по t и перепишем при $f = 0$:

$$E' + H = 0. \tag{29}$$

Из формулы (19) следует, что

$$\int\limits_{I_m} ((\alpha - 1)u_m^2 + \varepsilon) v_m^{\frac{\alpha-4}{2}} u_m'^2 dx = -\frac{1}{p} H'(t). \tag{30}$$

При каждом $\nu > 0$ очевидны неравенства

$$(E'(t))^2 = \left(\int\limits_{I_m} \left(\frac{\alpha - 1}{2} v_m^{\frac{\alpha-2}{2}} (2u_m u_m') - \varepsilon_m \frac{\alpha - 2}{2} v_m^{\frac{\alpha-4}{2}} (2u_m u_m') \right) dx \right)^2$$

$$\leqslant \frac{1}{4} \left((\alpha - 1) \int\limits_{I_m} v_m^{\frac{\alpha-2}{2}} (\nu u_m^2 + u_m'^2/\nu) dx + \varepsilon_m (2 - \alpha) \int\limits_{I_m} v_m^{\frac{\alpha-4}{2}} (\nu u_m^2 + u_m'^2/\nu) dx \right)^2$$

$$\leqslant \frac{1}{4} \left(-\frac{1}{p\nu} H' + \alpha E(t)\nu + \varepsilon_m (3 - \alpha)\nu \int\limits_{I_m} v_m^{\frac{\alpha-2}{2}} dx - 2\alpha\nu\varepsilon_m^{\frac{\alpha}{4}} \right)^2.$$

Теперь, учитывая (18), получим

$$(E'(t))^2 \leqslant \frac{1}{4} \left(-\frac{1}{p\nu} H' + \alpha E(t)\nu \right)^2.$$

Минимизируя правую часть по ν, устанавливаем (26).

Дальнейшие рассуждения проводятся аналогично случаю $\alpha > 2$.

Покажем, что оценка (28), установленная для ограниченной области, точна. Воспользуемся неравенством типа Стеклова-Фридрихса

$$\|\varphi\|_p \leq C \|\nabla \varphi\|_p, \quad \forall\, \varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

При $p > \alpha$ справедливы неравенства

$$\|\varphi\|_\alpha \leq C_1 \|\varphi\|_p \leq C_2 \|\nabla \varphi\|_p. \tag{31}$$

Дифференцируя (14) или (22) по T, при помощи (31), записанного для u, находим, что

$$\frac{\alpha - 1}{\alpha} \frac{d}{dt} \|u(t)\|_\alpha^\alpha = -(A(u), u(t))_\Omega = -\|\nabla u(t)\|_p^p \leq -C_2^{-1} \|u(t)\|_\alpha^p.$$

Решая это дифференциальное неравенство будем иметь оценку

$$||u(t)||_\alpha^\alpha \leqslant ||u(0)||_\alpha^\alpha (1 + c(u_0)t)^{-\frac{\alpha}{p-\alpha}},$$

доказывающую точность неравенства (28).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. P.A. Raviart *Sur la resolution de certaines equations paraboliques non lineaires* // J. Funct. Anal. 5 (1970). P. 209–328.
2. J.L. Lions *Quelques methodes de resolution de problemes aux limites non lineaires.* Dunod, Paris, 1969.
3. J.L. Lions, E. Magenes *Problemes aux limites non homogenes et applications. Vol. I.* Paris: Dunod 1968.
4. Лионс Ж.Л. *Некоторые методы решения нелинейных краевых задач.* Издательство "Мир". Москва. 1972. 587 с.
5. A. Bamberger *Etude d'une equation doublement non lineaire* // J. Funct. Anal. 24 (1977). P. 148–155.
6. O. Grange, F. Mignot *Sur la resolution d'une equation et d'une inequation paraboliques non lineaires* // J. Funct. Anal. 11 (1972). P. 77–92.
7. H.W. Alt, S. Luckhaus*Quasilinear elliptic-parabolic differential equations* // Math. Z. 1983. 183. P. 311–341.
8. A. Bamberger *Etude d'une equation doublement non lineaire.* Rapport Interne No. 4 du Centre de Mathematiques Appliquees de l'Ecole Polytechnique, Palaiseau 1-34 (1975)
9. F. Bernis *Qualitative properties for some nonlinear higher order degenerate parabolic equations.* IMA Preprint 184, University of Minnesota, 1985.
10. F. Bernis *Existence results for doubly nonlinear higher order parabolic equations on unbounded domains* // Math. Ann. 1988. 279, P. 373-394.
11. H. Brezis *On some degenerate nonlinear parabolic equations* // Proc. Symp. Pure Math. 1970. 18, P. 28–38.
12. H. Brezis *Problemes unilateraux* // J. Math. Pures Appl. 1972. 51, P. 1-168.
13. H. Brezis *Operateurs maximaux monotones et semi-groupes de contractions dans les espaces de Hilbert.* Math. Studies 5. Amsterdam: North-Holland. 1973.
14. H. Brezis *Analyse fonetionnelle.* Paris: Masson. 1983.
15. N. Alikakos, R. Rostamian *Gradient estimates for degenerate diffusion equation.* // Proc. Roy. Soc. Edinburgh. 1982. V. 91. № 3–4. P. 335–346.
16. Кожевникова Л.М. *Стабилизация решений псевдодифференциальных параболических уравнений в неограниченных областях* // Изв. РАН. Сер. матем. 2010. Т. 74, № 2. С. 109-–130.
17. Каримов Р.Х., Кожевникова Л.М. *Стабилизация решений квазилинейных параболических уравнений второго порядка в областях с некомпактными границами* // Матем. сб. 2010. Т. 201, № 9. С. 3-–26.
18. Тедеев А.Ф. *Оценки скорости стабилизации при* $t \to \infty$ *решения второй смешанной задачи для квазилинейного параболического уравнения второго порядка* // Дифференциальные уравнения. 1991. Т. 27, № 10. С. 1795–1806.
19. Тедеев А.Ф. *Стабилизация решений начально-краевых задач для квазилинейных параболических уравнений* // Укр. мат. журн. 1992 Т. 44 № 10. С. 1441–1450.

Элина Радиковна Андриянова,
Уфимский государственный авиационный технический университет,
ул. К. Маркса, 12,
450000, г. Уфа, Россия
E-mail: Elina.Andriyanov@mail.ru

Мукминов Фарит Хамзаевич
Уфимский государственный авиационный технический университет,
ул. К. Маркса, 12,
450000, г. Уфа, Россия
E-mail: mfkh@rambler.ru