ISSN 2074-1863 Уфимский математический журнал. Том 3. № 2 (2011). С. 20-27.

УДК 517.925

О НЕОБХОДИМЫХ УСЛОВИЯХ СУЩЕСТВОВАНИЯ ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ В ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЕ С РАЗРЫВНОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ И ВНЕШНИМ ПЕРИОДИЧЕСКИМ ВОЗДЕЙСТВИЕМ

В.В. ЕВСТАФЬЕВА

Аннотация. В евклидовом пространстве рассматривается система обыкновенных дифференциальных уравнений с разрывной нелинейностью типа неидеального реле и внешним непрерывным периодическим воздействием в правой части. Точными аналитическими методами получены необходимые условия на коэффициенты системы для существования периодических решений с заданными свойствами в задачах указанного класса. Предложен подход для нахождения моментов времени и точек переключения изображающей точки искомого решения в случае, когда период решения кратен периоду функции, описывающей внешнее возмущение.

Ключевые слова: точки переключения, вынужденные периодические колебания, автоматические системы управления, разрывная гистерезисная нелинейность.

Введение

Ключевой задачей в теории нелинейных колебаний является доказательство существования периодических режимов в нелинейных системах управления. В данной работе предлагается подход к решению этого вопроса для нелинейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений, содержащих гистерезисную нелинейность и внешнее возмущение, приложенное к объекту управления. В качестве объекта управления можно рассматривать автоматические системы, используемые на морских судах, к примеру, системы управления курсом судна или успокоителей качки. Математические модели таких объектов исследования изучались рядом авторов (см., например, работы [1]–[3]).

В отличие от работы [3] автором данной статьи используется другой подход к исследованию систем рассматриваемого класса, ослаблены ограничения на изучаемую систему, ищутся периодические решения с периодом не только равным, но и кратным периоду внешнего возмущения. В работе [4] рассматривалось непериодическое внешнее воздействие с изменяющейся во времени амплитудой, а в отличие от [5] в данной работе сделан акцент на поиске моментов времени переключения, при которых происходит переключение искомых режимов, и анализе пространства коэффициентов исходной системы.

1. Постановка задачи

В n-мерном евклидовом пространстве E^n рассматривается система обыкновенных дифференциальных уравнений вида

$$\dot{Y} = AY + Bu(\sigma) + Kf(t), \quad \sigma = (C, Y). \tag{1}$$

V.V. Yevstafyeva, On necessary conditions for existence of periodic solutions in a dynamic system with discontinuous nonlinearity and an external periodic influence.

© Евстафьева В.В. 2011.

Поступила 18 января 2011 г.

Здесь матрица A, векторы B, K, C — вещественные и постоянные, Y — вектор состояний системы ($Y \in E^n$). Функция $u(\sigma)$ описывает нелинейность типа неидеального реле с пороговыми числами ℓ_1, ℓ_2 и выходными числами m_1, m_2. Положим для определенности, что $\ell_1 < \ell_2$ и $m_1 < m_2$. Функция $u(\sigma(t))$ определена для $t \geq 0$ в классе непрерывных функций, может принимать только два значения m_1 и m_2 и задается следующим образом. При $\sigma(t) \leq \ell_1$ выполнено равенство $u(\sigma(t)) = m_1$, а при $\sigma(t) \geq \ell_2$ — равенство $u(\sigma(t)) = m_2$. Если же $\ell_1 < \sigma(t) < \ell_2$ при всех $t_1 < t < t_2$ и при этом $\sigma(t_1) = \ell_1$ или $\sigma(t_1) = \ell_2$, то положим $u(\sigma(t)) = u(\sigma(t_1))$. Наконец, если $\ell_1 < \sigma(t) < \ell_2$ при всех $0 \leq t < t_2$, то положим $u(\sigma(t)) = u_0$, где u_0 — одно из чисел m_1 или m_2. В ситуации, когда имеет место последний из случаев, динамика системы будет различной в зависимости от выбранного начального состояния u_0 реле. Петля гистерезиса, описываемая в координатах (σ, u) уравнениями $\sigma = \sigma(t)$, $u = u(\sigma(t))$, обегается против хода часовой стрелки. Функция $f(t)$ описывает внешнее воздействие на систему и принадлежит классу непрерывных периодических функций.

Рассматривается вопрос о существовании и нахождении таких моментов времени переключения, при которых в реле происходит переключение для возникновения и поддержания в системе периодических колебаний.

2. Общий подход к исследованию системы

В работе [3] А.В. Покровским получены сильные аналитические результаты для систем рассматриваемого класса. Доказана теорема о существовании, по крайней мере, одного асимптотически устойчивого решения с периодом, равным периоду внешнего воздействия. При этом предполагаются условие позитивности системы (ограничения на вектор коэффициентов обратной связи C) и гурвицевость матрицы A.

В данной работе для исследования систем вида (1) предлагается иной подход, позволяющий определять в пространстве коэффициентов системы такие множества, которым отвечают периодические решения с периодом, кратным периоду внешнего воздействия, а в случае равенства периодов снимаются выше упомянутые ограничения на систему.

В основе данного подхода лежат точные аналитические методы исследования, а именно, методы теории канонических преобразований систем, результаты В.И. Зубова [1], основанные на идеи построения вспомогательной системы с учетом свойства периодичности решения для автономных систем, и метод сечения пространства параметров системы, предложенный Р.А. Нелепиным [2].

В фазовом n-мерном пространстве траектория любого решения системы (1) может быть составлена из кусков траекторий в силу линейных систем следующего вида:

$$\dot{Y} = AY + Bm_1 + Kf(t), \quad \dot{Y} = AY + Bm_2 + Kf(t). \tag{2}$$

"Сшивание" кусков траекторий по непрерывности происходит в точках, лежащих на гиперплоскостях вида $(C, Y) = \ell_i$ $(i = 1, 2)$.

Будем искать решения системы (1) в классе непрерывных, периодических функций для определенности с двумя точками переключения, которыми в дальнейшем будем называть точки "сшивания". В n-мерном фазовом пространстве периодическим решениям системы (1) соответствуют замкнутые, ограниченные траектории. В расширенном $(n+1)$-м пространстве (Y, t) периодическому решению системы (1) отвечает интегральная кривая, состоящая из нескольких интегральных кривых в силу разных систем вида (2). Эти кривые повторяются с некоторым периодом T_B, который в дальнейшем будем называть периодом вынужденных колебаний системы (1). Точки переключения Y^1, Y^2 периодического решения (точки "сшивания" кусков траекторий) обладают следующим свойством:

$$Y^i = Y(t_0, m_j, t_0) = Y(t_0, m_j, t_0 + T_B), \;\; (C, Y^i) = \ell_k \;\; \forall i, j, k = 1, 2,$$

т. е. можно выписать 8 различных систем в зависимости от выбранной последовательности движения изображающей точки периодического решения от одной гиперплоскости к другой гиперплоскости.

Рассмотрим решение системы (1) в форме Коши

$$Y(t) = e^{A(t-t_0)}Y(t_0) + \int\limits_{t_0}^{t} e^{-A(\tau-t)}\left(Bm_i + Kf(\tau)\right)d\tau \quad (i = 1, 2).$$

Предположим, что система (1) имеет хотя бы одно периодическое решение с периодом T_B. Пусть изображающая точка искомого периодического решения системы (1) начинает свое движение в точке Y^1 на гиперплоскости $\sigma = \ell_1$ в момент времени $t_0 = 0$ и достигает точки Y^2 на гиперплоскости $\sigma = \ell_2$ в момент времени t_1 в силу системы (2) при условии, что $m_i = m_1$. Затем она возвращается в точку Y^1 на гиперплоскости $\sigma = \ell_1$ в момент времени T_B в силу системы (2) при условии, что $m_i = m_2$.

Построим систему трансцендентных уравнений относительно точек переключения и моментов времени переключения, исходя из свойства периодичности искомого решения и учитывая, что точки переключения лежат на гиперплоскостях, а изображающая точка решения движется по траектории в предписанной выше ей последовательности. Имеем

$$\ell_1 = \left(C, Y^1\right), \quad \ell_2 = \left(C, Y^2\right), \tag{3}$$

где

$$Y^2 = e^{At_1}Y^1 + \int\limits_{0}^{t_1} e^{A(t_1-\tau)}(Bm_1 + Kf(\tau))d\tau,$$

$$Y^1 = e^{A(T_B-t_1)}Y^2 + \int\limits_{t_1}^{T_B} e^{A(T_B-\tau)}(Bm_2 + Kf(\tau))d\tau.$$

Полученную систему из 4-х уравнений можно решать относительно t_1, T_B, Y^1, Y^2 численными методами. Для разрешимости системы (3) в аналитическом виде преобразуем исходную систему.

Пусть для определенности матрица A имеет только простые, ненулевые, вещественные собственные числа λ_i $(i = \overline{1, n})$, система (1) полностью управляема по отношению ко входу $u(\sigma)$, т. е. выполняется неравенство

$$\det ||B, AB, A^2B, \ldots, A^{n-1}B|| \neq 0.$$

В этом случае система (1) может быть приведена к каноническому виду неособым преобразованием $Y = SX$:

$$\dot{X} = A_0X + B_0u(\sigma) + K_0f(t), \quad \sigma = (\Gamma, X), \tag{4}$$

где

$$A_0 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}, \quad B_0 = S^{-1}B = \begin{pmatrix} 1 \\ \ldots \\ 1 \end{pmatrix}, \quad K_0 = S^{-1}K, \quad \Gamma = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \ldots \\ \gamma_n \end{pmatrix}.$$

Коэффициенты γ_i $(i = \overline{1, n})$ вычисляются по формуле:

$$\gamma_i = \frac{-1}{D'(\lambda_i)} \sum_{k=1}^{n} c_k N_k(\lambda_i), \tag{5}$$

где $D'(\lambda_i) = \frac{dD(p)}{dp}\Big|_{p=\lambda_i}$, c_k — элементы вектора C, $N_k(\lambda_i) = \sum\limits_{j=1}^{n} b_j D_{jk}(\lambda_i)$. Здесь b_j — элементы вектора B, D_{jk} — алгебраическое дополнение элемента a_{jk} матрицы A, λ_i — корни алгебраического уравнения $D(p) = \det\,[a_{k\alpha} - \delta_{k\alpha}p] = 0$, $a_{k\alpha}$ — элементы матрицы A, $\delta_{k\alpha}$ — символ Кронекера. Матрица преобразования S имеет следующий вид:

$$S = -\begin{pmatrix} \dfrac{N_1(\lambda_1)}{D'(\lambda_1)} & \cdots & \dfrac{N_1(\lambda_n)}{D'(\lambda_n)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{N_n(\lambda_1)}{D'(\lambda_1)} & \cdots & \dfrac{N_n(\lambda_n)}{D'(\lambda_n)} \end{pmatrix}.$$

Далее, следуя [2], предполагаем, что $(n-1)$ корней уравнения $D(p) = 0$ совпадают с $(n-1)$ корнями уравнения $\sum\limits_{k=1}^{n} c_k N_k(p) = 0$. Тогда $(n-1)$ величин γ_i, определяемых по формуле (5), обращаются в нуль, а одна величина γ_i не равна нулю. Индекс, при котором $\gamma_i \neq 0$, обозначим через s, т. е. $\gamma_s \neq 0$.

Таким образом, система n-го порядка распадается на системы более низкого порядка, которые могут быть последовательно проинтегрированы. Это приводит и к упрощению систему трансцендентных уравнений (3).

При условии, что $\gamma_i = 0$ $(i \neq s)$, функция $\sigma(t) = (\Gamma, X(t))$ определяется из системы первого порядка

$$\sigma(t) = \gamma_s x_s, \;\; \dot{x}_s = \lambda_s x_s + u(\sigma) + k_s^0 f(t), \tag{6}$$

остальные переменные x_i $(i \neq s)$ определяются из неоднородных линейных уравнений первого порядка

$$\dot{x}_i = \lambda_i x_i + u(\sigma) + k_i^0 f(t), \quad i \neq s. \tag{7}$$

Выпишем дифференциальное уравнение относительно функции $\sigma(t)$:

$$\dot{\sigma}(t) = \lambda_s \sigma(t) + \gamma_s(u(\sigma(t)) + k_s^0 f(t)). \tag{8}$$

Поскольку ищутся периодические решения системы (1) и $\sigma(t) = \sigma(x_s(t))$, то предполагаем, что функция $\sigma(t)$ относится к классу непрерывных периодических функций. С помощью решения уравнения (8) можно определить условия периодичности функции $\sigma(t)$ и его свойства (период T_B и момент времени переключения t_1).

Решение системы уравнений (6), (7) имеет следующий вид:

$$x_i(t) = x_i(0)e^{\lambda_i t} + e^{\lambda_i t}\int\limits_0^t (u(\sigma(\tau)) + k_i^0 f(\tau))e^{-\lambda_i \tau} d\tau,$$

$$x_s(t) = \sigma(t)/\gamma_s = (\sigma_0/\gamma_s)e^{\lambda_s t} + e^{\lambda_s t}\int\limits_0^t (u(\sigma(\tau) + k_s^0 f(\tau))e^{-\lambda_s \tau} d\tau. \tag{9}$$

Система уравнений (9) определяет точечное отображение одной плоскости переключения в другую. Выпишем решение уравнения (8) в общем виде

$$\sigma(t) = \sigma_0 e^{\lambda_s(t-t_0)} + \gamma_s e^{\lambda_s t}\left(m_i \int\limits_{t_0}^t e^{-\lambda_s \tau} d\tau + k_s^0 \int\limits_{t_0}^t e^{-\lambda_s \tau} f(\tau) d\tau\right)$$

с начальными и граничными условиями

$$\ell_1 = \sigma(\ell_1, 0, m_1, 0), \;\; \ell_2 = \sigma(\ell_1, 0, m_1, t_1), \;\; \ell_1 = \sigma(\ell_2, t_1, m_2, T_B).$$

Система трансцендентных уравнений для нахождения только моментов времени переключения t_1, T_B имеет следующий вид:

$$\ell_2 = \left(\ell_1 + \frac{\gamma_s m_1}{\lambda_s}\right) e^{\lambda_s t_1} - \frac{\gamma_s m_1}{\lambda_s} + \gamma_s k_s^0 \int\limits_0^{t_1} e^{\lambda_s (t_1 - \tau)} f(\tau) d\tau,$$

$$\ell_1 = \left(\ell_2 + \frac{\gamma_s m_2}{\lambda_s}\right) e^{\lambda_s (T_B - t_1)} - \frac{\gamma_s m_2}{\lambda_s} + \gamma_s k_s^0 \int\limits_{t_1}^{T_B} e^{\lambda_s (T_B - \tau)} f(\tau) d\tau. \tag{10}$$

Точки переключения X^1, X^2 преобразованной системы (4) определяются по следующим формулам:

$$X^1 = \left(E - e^{A_0 T_B}\right)^{-1} \left(\int\limits_{t_1}^{T_B} e^{A_0 (T_B - \tau)} \left(B_0 m_2 + K_0 f(\tau)\right) d\tau + \right.$$

$$\left. \int\limits_0^{t_1} e^{A_0 (T_B - \tau)} \left(B_0 m_1 + K_0 f\left(\tau\right)\right) d\tau \right),$$

$$X^2 = \left(E - e^{A_0 T_B}\right)^{-1} \left(\int\limits_0^{t_1} e^{A_0 (t_1 - \tau)} \left(B_0 m_1 + K_0 f(\tau)\right) d\tau + \right.$$

$$\left. e^{A_0 t_1} \int\limits_{t_1}^{T_B} e^{A_0 (T_B - \tau)} \left(B_0 m_2 + K_0 f(\tau)\right) d\tau \right).$$

3. Основной результат

Рассмотрим модель внешнего возмущения следующего вида:

$$f(t) = f_0 + f_1 \sin(\omega t + \varphi_1) + f_2 \sin(2\omega t + \varphi_2), \tag{11}$$

где f_0, f_1, f_2, φ_1, φ_2, ω — вещественные постоянные.

Функцию $f(t)$ вида (11) можно рассматривать как укороченный ряд Фурье. Поскольку любая периодическая функция, удовлетворяющая принципу Дирихле, может быть представлена в виде сходящегося ряда Фурье, то представление (11) является приближением произвольного периодического внешнего воздействия.

Основным результатом работы является следующая теорема.

Теорема. *Пусть функция $f(t)$ имеет вид (11). Пусть система (1) имеет периодическое решение с периодом $T_B = kT$, где $k \in \mathbf{N}$, $T = 2\pi/\omega$, $\omega > 0$. Пусть все собственные числа матрицы A являются простыми, вещественными, и, по крайней мере, одно из них положительное ($\lambda_s > 0$), причем элемент γ_s преобразованного вектора обратной связи Γ отличен от нуля. Пусть, наконец, имеют место неравенства*

1)

$$m_2 - m_1 e^{\lambda_s kT} + \lambda_s (1 - e^{\lambda_s kT})(\ell_1/\gamma_s + k_s^0 L) > 0,$$

$$m_1 < -\lambda_s \left(\frac{\ell_1}{\gamma_s} + k_s^0 L\right) < m_2,$$

где

$$L = \frac{f_0}{\lambda_s} + \frac{f_1 \sin(\varphi_1 + \delta_1)}{\sqrt{\lambda_s^2 + \omega^2}} + \frac{f_2 \sin(\varphi_2 + \delta_2)}{\sqrt{\lambda_s^2 + 4\omega^2}},$$

$$\delta_1 = \operatorname{arctg}(\omega/\lambda_s), \delta_2 = \operatorname{arctg}(2\omega/\lambda_s);$$

2)

$$\left(\ell_1 + \frac{\gamma_s}{\lambda_s}(m_1 + k_s^0 f_0)\right)(e^{\lambda_s kT}H - 1) +$$
$$\frac{\gamma_s k_s^0 f_1}{\sqrt{\lambda_s^2 + \omega^2}}\left(\sin(\varphi_1 + \delta_1)e^{\lambda_s kT}H - \sin\left(\frac{\omega}{\lambda_s}\ln H + \varphi_1 + \delta_1\right)\right) +$$
$$\frac{\gamma_s k_s^0 f_2}{\sqrt{\lambda_s^2 + 4\omega^2}}\left(\sin(\varphi_2 + \delta_2)e^{\lambda_s kT}H - \sin\left(\frac{2\omega}{\lambda_s}\ln H + \varphi_2 + \delta_2\right)\right) > 0,$$

где

$$H = \frac{m_2 - m_1}{\lambda_s(1 - e^{\lambda_s kT})(\ell_1/\gamma_s + k_s^0 L) + m_2 - m_1 e^{\lambda_s kT}};$$

и равенство

3)

$$\ell_2 = \ell_1 e^{\lambda_s kT}H + \frac{\gamma_s}{\lambda_s}(m_1 + k_s^0 f_0)(e^{\lambda_s kT}H - 1) +$$
$$\frac{\gamma_s k_s^0 f_1}{\sqrt{\lambda_s^2 + \omega^2}}\left(\sin(\varphi_1 + \delta_1)e^{\lambda_s kT}H - \sin\left(\frac{\omega}{\lambda_s}\ln H + \varphi_1 + \delta_1\right)\right) +$$
$$\frac{\gamma_s k_s^0 f_2}{\sqrt{\lambda_s^2 + 4\omega^2}}\left(\sin(\varphi_2 + \delta_2)e^{\lambda_s kT}H - \sin\left(\frac{2\omega}{\lambda_s}\ln H + \varphi_2 + \delta_2\right)\right).$$

Тогда система (10) имеет единственное решение $t_1 \in (0, kT)$, которое определяется по формуле $t_1 = kT + \frac{1}{\lambda_s}\ln H$.

Доказательство теоремы.

Система трансцендентных уравнений (10) при условии $\lambda_s > 0$ принимает следующий вид:

$$\ell_2 = \left(\ell_1 + \frac{\gamma_s}{\lambda_s}(m_1 + k_s^0 f_0) + \frac{\gamma_s k_s^0 f_1}{\sqrt{\lambda_s^2 + \omega^2}}\sin(\varphi_1 + \delta_1) +\right.$$
$$\left.\frac{\gamma_s k_s^0 f_2}{\sqrt{\lambda_s^2 + 4\omega^2}}\sin(\varphi_2 + \delta_2)\right)e^{\lambda_s t_1} - \frac{\gamma_s}{\lambda_s}(m_1 + k_s^0 f_0) -$$
$$\frac{\gamma_s k_s^0 f_1}{\sqrt{\lambda_s^2 + \omega^2}}\sin(\omega t_1 + \varphi_1 + \delta_1) - \frac{\gamma_s k_s^0 f_2}{\sqrt{\lambda_s^2 + 4\omega^2}}\sin(2\omega t_1 + \varphi_2 + \delta_2),$$
$$\ell_1 = \left(\ell_2 + \frac{\gamma_s}{\lambda_s}(m_2 + k_s^0 f_0) + \frac{\gamma_s k_s^0 f_1}{\sqrt{\lambda_s^2 + \omega^2}}\sin(\omega t_1 + \varphi_1 + \delta_1) +\right.$$
$$\left.\frac{\gamma_s k_s^0 f_2}{\sqrt{\lambda_s^2 + 4\omega^2}}\sin(2\omega t_1 + \varphi_2 + \delta_2)\right)e^{\lambda_s(T_B - t_1)} - \frac{\gamma_s}{\lambda_s}(m_2 + k_s^0 f_0) -$$
$$\frac{\gamma_s k_s^0 f_1}{\sqrt{\lambda_s^2 + \omega^2}}\sin(\omega T_B + \varphi_1 + \delta_1) - \frac{\gamma_s k_s^0 f_2}{\sqrt{\lambda_s^2 + 4\omega^2}}\sin(2\omega T_B + \varphi_2 + \delta_2). \quad (12)$$

В случае, когда периодическое решение системы (1), (11) ищется с наперед заданным периодом, а именно, $T_B = kT$, $k \in \mathbf{N}$, $T = 2\pi/\omega$, система трансцендентных уравнений (12) зависит только от одной переменной t_1, а в результате указанного выбора коэффициентов обратной связи γ_i $(i = \overline{1, n})$ аналитически разрешима относительно этой переменной.

Первое уравнение системы (12) подставим во второе уравнение и после преобразования имеем:

$$(1-e^{\lambda_s kT})\left(\ell_1+\gamma_s k_s^0\left(\frac{f_0}{\lambda_s}+\frac{f_1}{\sqrt{\lambda_s^2+\omega^2}}\sin(\varphi_1+\delta_1)+\right.\right.$$

$$\left.\left.\frac{f_2}{\sqrt{\lambda_s^2+4\omega^2}}\sin(\varphi_2+\delta_2)\right)\right)+\frac{\gamma_s}{\lambda_s}(m_2-m_1e^{\lambda_s kT})=\frac{\gamma_s}{\lambda_s}(m_2-m_1)e^{\lambda_s(kT-t_1)},$$

отсюда получаем формулу для определения переменной t_1.

Далее определим условия на параметры, при которых существует решение t_1.

По предположению $m_2>m_1$, поэтому в формуле, определяющей переменную t_1, стоящее в знаменателе под логарифмом выражение должно быть положительным, отсюда следует первое неравенство условия 1) теоремы.

Поскольку переменная t_1 определена как первый момент переключения, то она, очевидно, должна принадлежать промежутку $(0,kT)$, где $k\in\mathbf{N}$. Это возможно, если выполняются следующие неравенства:

$$m_2-m_1<\lambda_s(1-e^{\lambda_s kT})\left(\ell_1/\gamma_s+k_s^0L\right)+m_2-m_1e^{\lambda_s kT},$$

$$m_2-m_1>\lambda_s\frac{(1-e^{\lambda_s kT})}{e^{\lambda_s kT}}\left(\ell_1/\gamma_s+k_s^0L\right)+\frac{m_2}{e^{\lambda_s kT}}-m_1.$$

После преобразования последние неравенства принимают вид второго неравенства условия 1) теоремы.

Условие 2) теоремы следует из предположения, что $\ell_2>\ell_1$.

Решение t_1 является решением системы трансцендентных уравнений, если оно удовлетворяет первому уравнению системы (12). Отсюда следует условие 3) теоремы.

Теорема доказана полностью.

Замечание 1. Система неравенств и равенств в условиях 1)–3) доказанной теоремы установлена строгими аналитическими выкладками с использованием равносильных переходов и свойств логарифмической функции, поэтому представляется непротиворечивой. В связи с этим возможно построение примера существования kT-периодического решения. Действительно, например, при $f(t)=1+2\sin(t+\frac{\pi}{3})+5\sin(2t)$, $T_B=2\pi$, $\lambda_s=0,2$, $\gamma_s=-0,5$ упомянутая система неравенств и равенств справедлива при $m_1=-5$, $m_2=15,73$, $\ell_1=-6$, $k_s^0=-2$, а система (10) имеет единственное решение $t_1=3,51$.

Замечание 2. В теореме сформулированы необходимые условия существования периодического решения канонической системы уравнений, а в силу неособого преобразования — исходной системы. Кроме того, определены свойства искомого периодического решения для заданного периода $T_B=kT$, а именно, момент времени первого переключения t_1 и две точки переключения $Y^1=SX^1$, $Y^2=SX^2$.

Замечание 3. Система трансцендентных уравнений составлена из необходимых условий существования хотя бы одного периодического решения с заданными свойствами. Поэтому условия на коэффициенты канонической системы, при которых система трансцендентных уравнений не имеет решения t_1, определяют множества в пространстве коэффициентов канонической системы (в силу неособого преобразования в пространстве исходной системы), в которых не могут возникнуть искомые периодические решения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Зубов В.И. *Колебания в нелинейных и управляемых системах.* Л.: Судпромгиз, 1962. 631 с.
2. Нелепин Р.А. *Точные аналитические методы в теории нелинейных автоматических систем.* Л.: Судостроение, 1967. 447 с.
3. Покровский А.В. *Существование и расчет устойчивых режимов в релейных системах* // Автоматика и телемеханика. 1986. № 4. С. 16–23.

4. Евстафьева В.В., Камачкин А.М. *Динамика системы управления с неоднозначными нелинейностями при наличии внешнего воздействия* // Анализ и управление нелинейными колебательными системами / Под ред. Г.А. Леонова, А.Л. Фрадкова. СПб.: Наука, 1998. С. 22–39.
5. Евстафьева В.В., Камачкин А.М. *Управление динамикой гистерезисной системы с внешним воздействием* // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 10. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2004. Вып. 2. С. 101–109.

Виктория Викторовна Евстафьева,
Санкт-Петербургский государственный университет,
Университетская наб., 7/9,
199034, Санкт-Петербург, Россия
E-mail: `vica@apmath.spbu.ru`