ISSN 2074-1863 Уфимский математический журнал. Том 3. № 2 (2011). С. 81-86.

УДК 517.95+517.986.7

ЯВНЫЙ ВИД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ ГРУНТОВЫХ ВОД СО СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ

Х.Г. УМАРОВ

Аннотация. Для линейного дифференциального уравнения в частных производных, моделирующего эволюцию свободной поверхности фильтрующейся жидкости

$$\lambda u_t - \Delta_2 u_t = \alpha \Delta_2 u - \beta \Delta_2^2 u + f,$$

где $u(x, y, t)$ — искомая функция, характеризующая напор жидкости, $f = f(x, y, t)$ — заданная функция, учитывающая внешнее воздействие на фильтрационный поток, $\Delta_2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ — дифференциальный оператор Лапласа, λ, α, β — положительные постоянные зависящие от свойств водоносного грунта, получен явный вид решения задачи Коши в пространстве $L_p(R^2)$, $1 < p < +\infty$, сведением рассматриваемой задачи фильтрации к решению абстрактной задачи Коши в банаховом пространстве. По временной переменной t решение соответствующего однородного уравнения удовлетворяет полугрупповому свойству. Из полученной оценки решения задачи Коши в пространстве $L_p(R^2)$, $1 < p < +\infty$, следует непрерывная зависимость решения от начального данного на любом конечном временном отрезке.

Ключевые слова: свободная поверхность фильтрующейся жидкости, сильно непрерывные полугруппы операторов.

Рассмотрим в области $(x, y) \in R^2$, $0 < t \leqslant T < +\infty$, линейное дифференциальное уравнение в частных производных, моделирующее эволюцию свободной фильтрующейся жидкости [1]

$$(\lambda I - \triangle_2) u_t = \alpha \triangle_2 u - \beta \triangle_2^2 u + f, \tag{1}$$

где $u = u(x, y, t)$ — искомая функция, характеризующая напор жидкости; $f = f(x, y, t)$ — заданная функция, учитывающая внешнее воздействие на фильтрационный поток: инфильтрацию, испарение, перетоки из нижележащего прослоя и т.д.; $\triangle_2 = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$ — дифференциальный оператор Лапласа; I — тождественный оператор; λ, α, β — положительные постоянные зависящие от свойств грунта.

В работе [2] приведено решение начально-краевой задачи в ограниченной области для уравнения (1). Различные прямые и обратные начально-краевые задачи, для уравнения обобщающего уравнение (1), исследовались многими авторами (см., например, [3] и приведенную там библиографию).

Наша цель — получить для уравнения (1) явный вид решения задачи Коши[1] в R^2.

Будем предполагать, что начальное данное φ:

$$u|_{t=0} = \varphi(x, y), \tag{2}$$

Kh.G. Umarov, Explicit solution of the Cauchy problem for motion equation of the subterranean waters with free surface.

Поступила 11 января 2011 г.

[1]Явный вид решения задачи Коши, первой начально-краевой задачи в полупространстве и смешанной задачи в пространственном слое, в предположении анизотропии среды, получен в [4].

свободный член f и искомое решение u уравнения (1), для всех значений «параметра» — временной переменной $t \in [0,T]$, по «пространственным» переменным $(x,y) \in R^2$ принадлежат банахову пространству $L_p(R^2)$, $1 < p < +\infty$.

В пространстве $L_p(R^2)$, оператор Лапласа $\triangle_2$, с областью определения $D(\triangle_2) = \{\psi \in L_p(R^2) : \triangle_2\psi \in L_p(R^2)\}$, является производящим оператором сжимающей сильно непрерывной полугруппы $U(t;\triangle_2)$ класса C_0 ([6], с. 58; [7], с. 228):

$$U(t;\triangle_2)\psi(x,y) = \frac{1}{4\pi t}\iint\limits_{R^2} e^{-\left((x-\xi)^2+(y-\eta)^2\right)/(4t)}\psi(\xi,\eta)d\xi\, d\eta, \tag{3}$$

тип которой равен нулю, при этом область определения оператора Лапласа является пространством Соболева: $\mathcal{D}(\triangle_2) = W_p^2(R^2)$. Положительная полуось принадлежит резольвентному множеству оператора $\triangle_2$ и для резольвенты $(\lambda I - \triangle_2)^{-1}$, $\lambda > 0$, справедливы оценка

$$\|(\lambda I - \triangle_2)^{-1}\psi(x,y)\|_{L_p(R^2)} \leqslant \frac{1}{\lambda}\|\psi(x,y)\|_{L_p(R^2)} \tag{4}$$

и представление

$$(\lambda I - \triangle_2)^{-1}\psi(x,y) = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t}U(t;\triangle_2)\psi(x,y)dt. \tag{5}$$

Наличие в точке $\lambda > 0$ резольвенты $(\lambda I - \triangle_2)^{-1}$ позволяет существенно преобразовать уравнение (1), разрешив его относительно производной по времени и представив в виде уравнения «параболического типа». Именно, полагая $u = (\lambda I - \triangle_2)^{-1}v$, приходим к уравнению:

$$v_t = (\alpha I - \beta\triangle_2)\triangle_2(\lambda I - \triangle_2)^{-1}v + f. \tag{6}$$

Линейный замкнутый оператор $(\alpha I - \beta\triangle_2)\triangle_2(\lambda I - \triangle_2)^{-1} = (\lambda I - \triangle_2)^{-1}(\alpha I - \beta\triangle_2)\triangle_2$ определен на функциях ψ из $L_p(R^2)$, для которых существуют обобщенные производные $\triangle_2\psi$ и $\triangle_2^2\psi$, и его можно продолжить до оператора $A + B$, где $A = \beta\triangle_2$, $B = -(\alpha - \beta\lambda)[I - \lambda(\lambda I - \triangle_2)^{-1}]$, определенного на пространстве Соболева $W_p^2(R^2)$.

Таким образом, приходим к абстрактному дифференциальному уравнению первого порядка, обобщающему уравнение (6) в банаховом пространстве $L_p(R^2)$,

$$\mathrm{v}_t = (A+B)\mathrm{v} + \mathfrak{f}(t), \tag{7}$$

где $\mathrm{v} = \mathrm{v}(t) : t \to v(x,y,t)$ — искомая, а $\mathfrak{f}(t) : t \to f(x,y,t)$ — заданная функции, опеределенные для $t \in [0,T]$ и со значениями в $L_p(R^2)$. Для уравнения (7) начальное условие (2) в $L_p(R^2)$ перепишется в виде

$$\mathrm{v}|_{t=0} = \phi, \tag{8}$$

здесь $\phi = (\lambda I - \triangle_2)\varphi(x,y)$ — элемент пространства $L_p(R^2)$.

Оператор $A = \beta\triangle_2$, $\mathcal{D}(A) = W_p^2(R^2)$, является производящим оператором сжимающей сильно непрерывной полугруппы $U(t;A)$ класса C_0:

$$U(t;A) = U(t;\beta\triangle_2) = U(\beta t;\triangle_2). \tag{9}$$

Возмущающий оператор $B = -(\alpha - \beta\lambda)[I - \lambda(\lambda I - \triangle_2)^{-1}]$, $\mathcal{D}(B) = L_p(R^2)$, линеен и ограничен на всем пространстве, поэтому является производящим оператором сильно непрерывной полугруппы (более того – группы) класса C_0 : $U(t;B) = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{t^k}{k!}B^k$, для которой справедливы представление

$$\begin{aligned} U(t;B) &= e^{-(\alpha-\beta\lambda)t}U\left((\alpha-\beta\lambda)\lambda t;(\lambda I - \triangle_2)^{-1}\right) = \\ &= e^{-(\alpha-\beta\lambda)t}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(\alpha-\beta\lambda)^k\lambda^k t^k}{k!}(\lambda I - \triangle_2)^{-k} \end{aligned} \tag{10}$$

и оценка $\|U(t;B)\| \leqslant e^{-(\alpha-\beta\lambda)t}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{|\alpha-\beta\lambda|^k\lambda^k t^k}{k!}\|(\lambda I - \triangle_2)^{-1}\|^k$.

Следовательно, используя оценку (4) резольвенты оператора Лапласа, выводим: 1) если $\alpha-\beta\lambda \geq 0$, то полугруппа $U(t;B)$ является сжимающей: $\|U(t;B)\| \leqslant 1$; 2) если $\alpha-\beta\lambda < 0$, то справедлива оценка нормы $\|U(t;B)\| \leqslant e^{2|\alpha-\beta\lambda|t}$.

Дифференциальный оператор $-\lambda I + \triangle_2$, $\lambda > 0$, является производящим оператором сильно непрерывной полугруппы класса C_0, норма которой экспоненциально убывает: $U(t;-\lambda I+\triangle_2) = e^{-\lambda t}U(t;\triangle_2)$, поэтому, используя формулу ([6], с. 150) для отрицательных степеней производящего оператора полугруппы с отрицательным типом, найдём, для последующего использования, выражение для степеней резольвенты:

$$(\lambda I - \triangle_2)^{-k} = \frac{1}{(k-1)!}\int\limits_0^{+\infty} s^{k-1}e^{-\lambda s}U(s;\triangle_2)ds,\ \lambda>0,\ k=1,2,\dots. \tag{11}$$

Применяя соотношения (11), продолжим преобразование степенного ряда в (10):

1) если $\alpha-\beta\,\lambda \geq 0$, то

$$U(t;B)\psi = e^{-(\alpha-\beta\lambda)t}\left[\psi + \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(\alpha-\beta\lambda)^k\lambda^k t^k}{(k-1)!k!}\int\limits_0^{+\infty} s^{k-1}e^{-\lambda s}U(s;\triangle_2)\psi\,ds\right] =$$

$$= e^{-(\alpha-\beta\lambda)t}\left[\psi + \sqrt{(\alpha-\beta\lambda)\lambda\, t}\int\limits_0^{+\infty} e^{-\lambda s}I_1\left(2\sqrt{(\alpha-\beta\lambda)\lambda\, s\, t}\right)U(s;\triangle_2)\psi\,\frac{ds}{\sqrt{s}}\right],$$

где $I_1(z) = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(z/2)^{2k+1}}{k!(k+1)!}$ — модифицированная функция Бесселя ([8], с. 729), а ψ — произвольный элемент пространства $L_p(R^2)$;

2) если $\alpha-\beta\,\lambda < 0$, то

$$U(t;B)\psi = e^{-(\alpha-\beta\lambda)t}\times$$

$$\times\left[\psi - \sqrt{|\alpha-\beta\lambda|\lambda\, t}\int\limits_0^{+\infty} e^{-\lambda s}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k(\sqrt{|\alpha-\beta\lambda|\lambda\, s\, t})^{2k+1}}{k!(k+1)!}U(s;\triangle_2)\psi\,\frac{ds}{\sqrt{s}}\right] =$$

$$= e^{-(\alpha-\beta\lambda)t)}\left[\psi - \sqrt{|\alpha-\beta\lambda|\lambda\, t}\int\limits_0^{+\infty} e^{-\lambda s}J_1\left(2\sqrt{|\alpha-\beta\lambda|\lambda\, s\, t}\right)U(s;\triangle_2)\psi\,\frac{ds}{\sqrt{s}}\right],$$

где $J_1(z) = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k(z/2)^{2k+1}}{k!(k+1)!}$ — функция Бесселя ([8], с.727). Теперь, вводя обозначение

$$G_{J_1}^{I_1}(\alpha,\beta,\lambda,s,t) = \begin{cases} I_1(2\sqrt{(\alpha-\beta\lambda)\lambda\, st}),\ \text{если } \alpha-\beta\lambda \geq 0,\\ -J_1(2\sqrt{|\alpha-\beta\lambda|\lambda\, st}),\ \text{если } \alpha-\beta\lambda < 0,\end{cases} \tag{12}$$

представление для полугруппы, порождаемой оператором B, можно записать в виде

$$U(t;B)\psi = e^{-(\alpha-\beta\lambda)t}\left[\psi + \sqrt{|\alpha-\beta\lambda|\lambda\, t}\int\limits_0^{+\infty} e^{-\lambda s}G_{J_1}^{I_1}(\alpha,\beta,\lambda,s,t)U(s;\triangle_2)\psi\,\frac{ds}{\sqrt{s}}\right]. \tag{13}$$

Из полученных представлений (9) и (13) соответственно полугрупп $U(t;A)$ и $U(t;B)$ через полугруппу (3), порождаемую оператором Лапласа $\triangle_2$, следует их коммутирование.

При возмущении производящего оператора A сильно непрерывной полугруппы $U(t;A)$ класса C_0 линейным ограниченным оператором B, оператор $A+B$ с областью определения $\mathcal{D}(A+B) = \mathcal{D}(A)$, также порождает ([9], с. 403) сильно непрерывную полугруппу $U(t;A+B)$ класса C_0, при этом возмущённая полугруппа определяется разложением в ряд: $U(t;A+B)\psi = \sum_{k=0}^{+\infty}U_k(t)\psi$, $t \geq 0$, где $U_0(t)\psi = U(t;A)\psi$ и

$U_k(t)\psi = \int_0^t U(t-s;A)BU_{k-1}(s)\psi\, ds,\ k \geq 0$, для произвольного элемента ψ банахова пространства, причём ряд абсолютно сходится, равномерно по t в любом конечном интервале положительной полуоси.

В нашем случае, возмущающий линейный ограниченный оператор B коммутирует с полугруппой, порождаемой возмущаемым оператором A : $BU(t;A)\psi = U(t;A)B\psi$, так как этим свойством обладает резольвента $(\lambda I - A)^{-1}$ и полугруппа $U(t;A)$, для любого производящего оператора A сильно непрерывной полугруппы класса C_0. Отсюда следует, что $U_k(t)\psi = \frac{t^k}{k!}B^kU(t;A)\psi = \frac{t^k}{k!}U(t;A)B^k\psi$, и, значит, представление для полугруппы, порождаемой оператором $A+B$:

$$U(t;A+B)\psi = U(t;A)U(t;B)\psi = U(t;B)U(t;A)\psi = e^{-(\alpha-\beta\lambda)t}\Bigg[U(\beta\, t;\triangle_2)\psi + \\ + \sqrt{|\alpha-\beta\lambda|\lambda\, t}\int\limits_0^{+\infty} e^{-\lambda\, s}G_{J_1}^{I_1}(\alpha,\beta,\lambda,s,t)U(s+\beta\, t;\triangle_2)\psi\,\frac{ds}{\sqrt{s}}\Bigg] \tag{14}$$

и оценка нормы

$$\|U(t;A+B)\| \leqslant \|U(t;A)\|\cdot\|U(t;B)\| \leqslant \begin{cases} 1, \text{ если } \alpha-\beta\lambda \geq 0, \\ e^{2|\alpha-\beta\lambda|t}, \text{ если } \alpha-\beta\lambda < 0. \end{cases} \tag{15}$$

Для того чтобы задача Коши для однородного уравнения, соответствующего (7), была равномерно корректной ([6], с. 64), необходимо и достаточно, чтобы оператор $A+B$ был производящим оператором полугруппы класса C_0, при этом решение задачи Коши для однородного уравнения даётся формулой $\mathrm{v} = U(t;A+B)\phi$, если начальное данное ϕ из условия (8) принадлежит области определения оператора $A+B$. Если свободный член $\mathfrak{f}(t)$ уравнения (7) удовлетворяет одному из двух условий ([6], с. 166): 1) значения $\mathfrak{f}(t)$ принадлежат области определения оператора $A+B$, и функция $\mathfrak{f}(t)$ непрерывна по норме банахова пространства или 2) функция $\mathfrak{f}(t)$ непрерывно дифференцируема по норме банахова пространства, то формула

$$\mathrm{v} = U(t;A+B)\phi + \int\limits_0^t U(t-\tau;A+B)\mathfrak{f}(\tau)d\tau \tag{16}$$

даёт решение задачи Коши (7), (8).

Принадлежность элемента ϕ множеству $\mathcal{D}(A+B)$ наверняка будет следовать из принадлежности как начального данного φ, так и функций $\triangle_2\varphi$ и $\triangle_2^2\varphi$ пространству $L_p(R^2)$. Соответственно, для выполнения выше приведённых требований к свободному члену $\mathfrak{f}$ достаточно, чтобы выполнялись следующие условия: 1) функции f и $\triangle_2 f$ по переменным (x,y) для всех $t\in[0,T]$ принадлежат пространству $L_p(R^2)$, причём функция $\triangle_2 f$ непрерывна по переменной t по норме пространства $L_p(R^2)$, или 2) функция f непрерывно дифференцируема по переменной t по норме банахова пространства $L_p(R^2)$.

Предполагая выполнение всех этих требований и действуя на обе части соотношения (16) оператором $(\lambda I - \triangle_2)^{-1}$, выводим формулу для решения уравнения (1)

$$u = U(t;A+B)\varphi(x,y) + \int\limits_0^t U(\tau;A+B)(\lambda I - \triangle_2)^{-1}f(x,y,t-\tau)d\tau, \tag{17}$$

для которого, в силу соотношений (15), справедлива оценка

$$\begin{cases} \|u(x,y,t)\| \leqslant \|\varphi(x,y)\|_{L_p(R^2)} + \\ +\frac{1}{\lambda}\int\limits_0^t \|f(x,y,\tau)\|_{L_p(R^2)}d\tau, \text{ если } \alpha-\beta\lambda \geq 0; \\ \|u(x,y,t)\|_{L_p(R^2)} \leqslant e^{2|\alpha-\beta\lambda|t}\|\varphi(x,y)\|_{L_p(R^2)} + \\ +\frac{1}{\lambda}\int\limits_0^t e^{2|\alpha-\beta\lambda|\tau}\|f(x,y,\tau)\|_{L_p(R^2)}d\tau, \text{ если } \alpha-\beta\lambda < 0. \end{cases} \tag{18}$$

Теперь, используя представления (14) и (15) соответственно полугруппы $U(t;A+B)$ и резольвенты $(\lambda I - \triangle_2)^{-1}$ через полугруппу, порождаемую оператором Лапласа $\triangle_2$, из формулы (17) имеем

$$u(x,y,t) = e^{-(\alpha-\beta\lambda)t}\Bigg[U(\beta\, t;\triangle_2)\varphi(x,y) +$$

$$+\sqrt{|\alpha-\beta\lambda|\lambda\, t}\int\limits_0^{+\infty} e^{-\lambda\, s}G^{I_1}_{J_1}(\alpha,\beta,\lambda,s,t)U(s+\beta\, t;\triangle_2)\psi(x,y)\frac{ds}{\sqrt{s}}\Bigg] +$$

$$+\int\limits_0^t e^{-(\alpha-\beta\lambda)\tau}\Bigg[\int\limits_0^{+\infty} e^{-\lambda r}U(r+\beta\tau;\triangle_2)f(x,y,t-\tau)d\tau + \sqrt{|\alpha-\beta\lambda|\lambda\tau}\times$$

$$\times\int\limits_0^{+\infty} e^{-\lambda s}G^{I_1}_{J_1}(\alpha,\beta,\lambda,s,\tau)\frac{ds}{\sqrt{s}}\int\limits_0^{+\infty} e^{-\lambda r}U(r+s+\beta\tau;\triangle_2)f(x,y,t-\tau)dr\Bigg].$$

Наконец, применяя представление (3) полугруппы, порождаемой оператором Лапласа, получаем явный вид решения задачи Коши для уравнения движения грунтовых вод со свободной поверхностью

$$u(x,y,t) = \frac{1}{\pi}e^{-(\alpha-\beta\lambda)t}\Bigg[\iint\limits_{R^2} e^{-\xi^2-\eta^2}\varphi(x+2\sqrt{\beta t}\xi, y+2\sqrt{\beta t}\eta)d\xi d\eta +$$

$$+\sqrt{|\alpha-\beta\lambda|\lambda t}\int_0^{+\infty} e^{-\lambda s}G^{I_1}_{J_1}(\alpha,\beta,\lambda,s,t)\frac{ds}{\sqrt{s}}\times$$

$$\times\iint\limits_{R^2} e^{-\xi^2-\eta^2}\varphi(x+2\sqrt{s+\beta t}\xi, y+2\sqrt{s+\beta t}\eta)d\xi d\eta\Bigg] +$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_0^t e^{-(\alpha-\beta\lambda)\tau}d\tau\Bigg[\int_0^{+\infty} e^{-\lambda r}dr\times$$

$$\times\iint\limits_{R^2} e^{-\xi^2-\eta^2}f(x+2\sqrt{r+\beta\tau}\xi, y+2\sqrt{r+\beta\tau}\eta, t-\tau)d\xi d\eta +$$

$$+\sqrt{|\alpha-\beta\lambda|\lambda\tau}\int_0^{+\infty} e^{-\lambda s}G^{I_1}_{J_1}(\alpha,\beta,\lambda,s,\tau)\frac{ds}{\sqrt{s}}\int_0^{+\infty} e^{-\lambda r}dr\times$$

$$\times\iint\limits_{R^2} e^{-\xi^2-\eta^2}f(x+2\sqrt{r+s+\beta\tau}\xi, y+2\sqrt{r+s+\beta\tau}\eta, t-\tau)d\xi d\eta\Bigg]. \tag{19}$$

Таким образом, имеет место

Теорема. *Пусть в задаче Коши* (1), (2) *для уравнения движения грунтовых вод со свободной поверхностью решение* $u(x, y, t)$ *ищется в пространстве* $L_p(R^2)$, $1 < p < +\infty$*; начальное данное* $\varphi(x, y)$ *и функция* $\triangle_2\varphi(x, y)$ *принадлежат пространству Соболева* $W_p^2(R^2)$*; свободный член* $f(x, y, t)$ *удовлетворяет одному из двух условий: 1) функция* $f(x, y, t)$ *по переменным* (x, y) *для всех* $t \in [0, T]$ *принадлежит пространству Соболева* $W_p^2(R^2)$*, причём функция* $\triangle_2 f(x, y, t)$ *непрерывна по переменной* t *по норме пространства* $L_p(R^2)$*, или 2) функция* $f(x, y, t)$ *непрерывно дифференцируема по переменной* $t \in [0, T]$ *по норме пространства* $L_p(R^2)$*, тогда единственное решение этой задачи даётся формулой (19) и для него справедлива оценка (18).*

Замечание. *Отметим, что 1) по переменной* t *решение однородного уравнения, соответствующего* (1)*, удовлетворяет полугрупповому свойству; 2) из оценки (18) следует непрерывная зависимость решения от начального данного на любом конечном временном отрезке, причем если* $\alpha - \beta\lambda \geq 0$*, то норма решения однородного уравнения не более нормы начального данного на всем временном отрезке рассмотрения, если же* $\alpha - \beta\lambda < 0$*, то решение может расти как* $e^{2|\alpha-\beta\lambda|t}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Дзекцер Е.С. *Обобщение уравнения движения грунтовых вод со свободной поверхностью* // ДАН СССР, 1972. Т. 202, № 5. С. 1031–1033.
2. Свиридюк Г.А. *К общей теории полугрупп операторов* // Успехи матем. наук, 1994. Т. 49, № 4. С. 47–74.
3. Свиридюк Г.А., Загребина С.А. *Задача Шоуолтера-Сидорова как феномен уравнений соболевского типа* // Известия Иркутского гос. ун-та. Серия «Математика», 2010. Т. 3, № 1. С. 104–125.
4. Умаров Х.Г. *Явный вид решения уравнения движения грунтовых вод со свободной поверхностью* / Чеченский гос. ун-т. - Грозный, 2010. - 26 с. – Деп. в ВИНИТИ 24.05.10 N304-B2010.
5. Крейн С.Г. *Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве.* М.: Наука, 1987. 464 с.
6. Трибель Х. *Теория интерполяции, функциональные пространства, дифференциальные операторы.* М.: Мир, 1980. 664 с.
7. Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. *Интегралы и ряды. Специальные функции.* – М.: Наука, 1983. 752 с.
8. Хилле Э., Филлипс Р.С. *Функциональный анализ и полугруппы.* М.: ИЛ, 1962. 829 с.
9. Данфорд Н., Шварц Дж.Т. *Линейные операторы. Общая теория.* М.: ИЛ, 1962. 895 с.

Хасан Галсанович Умаров,
Чеченский государственный университет,
ул. Шерипова, 32,
364907, г. Грозный, Россия
E-mail: umarov50@mail.ru