ISSN 2074-1863 Уфимский математический журнал. Том 3. № 2 (2011). С. 91-98.

УДК 517.958

О КОММУТИРУЮЩИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРАХ В ДВУМЕРИИ

А.Б. ШАБАТ, З.С. ЭЛЬКАНОВА

Аннотация. Рассматривается обобщение на многомерный случай коммутативных колец дифференциальных операторов. Для операторов специального вида связанных с простой одномерной моделью, предложенной Берчналлом и Чаунди в работе 1932 г., сформулирован алгоритм построения коммутирующих двухмерных операторов. Задача классификации таких коммутирующих пар обсуждается. Предложенный нами алгоритм основан на общих необходимых условиях коммутативности и доказанной в работе лемме о приводимости.

Ключевые слова: коммутирующие кольца дифференциальных операторов, коммутирующие двухмерные операторы

Введение

Следующий простой пример коммутирующих дифференциальных операторов $[A,B]=AB-BA=0$ с двумя независимыми переменными наглядно демонстрируют существенные отличия двумерного случая $(N=2)$ от одномерного $(N=1)$:

$$A=\frac{1}{u}D_xD_y,\quad B=vA+\frac{1}{2}(D_y^2-D_x^2),\quad [A,B]=0\Leftrightarrow u_x=v_y,\ u_y=-v_x. \tag{0.1}$$

Условия коммутирования в данном примере сводятся к уравнениям Коши-Римана, и любая голоморфная функция $f=u+iv$ позволяет таким образом построить пару коммутирующих дифференциальных операторов второго порядка. Напомним, что при $N=1$, старшие коэффициенты коммутирующих дифференциальных операторов $[A,B]=0$ жестко связаны. В частности, при одинаковых порядках операторов A и B их старшие коэффициенты обязаны совпадать с точностью до постоянного сомножителя и, в силу этого, оператор B можно заменить на оператор меньшего порядка:

$$\widetilde{B}=B-\alpha A,\quad \alpha=const\Rightarrow[A,\widetilde{B}]=0.$$

Формула (0.1) показывает, что этого нельзя сделать при $N=2$. Заметим, что для проверки коммутирования в случае (0.1), достаточно воспользоваться очевидными формулами

$$[D_xD_y,a]=a_yD_x+a_xD_y+a_{xy},\quad [D_x^2,a]=2a_xD_x+a_{xx},\quad [D_y^2,a]=2a_yD_y+a_{yy},$$

из которых следует, что при постоянных α и β,

$$[aD_xD_y,\alpha D_x^2+\beta D_y^2+bD_xD_y]=c_1D_x^2D_y+c_2D_y^2D_x+ab_{xy}-ba_{xy}-\alpha a_{xy}-\beta a_{yy},$$

где

$$c_1=ab_y-ba_y-2\alpha a_x,\quad c_2=ab_x-ba_x-2\beta a_y.$$

A.B. Shabat, Z.S. Elkanova, Commuting differential operators in two-dimension.

© Шабат А.Б., Элъканова З.С. 2011.

Работа выполнена при поддержке грантов НШ-6501.2010.2 и 10-01-00088.
Поступила 10 мая 2011 г.

Несмотря на значительный интерес к задаче о коммутирующих дифференциальных операторах в многомерии (см. например [5]) мало что известно о структуре централизатора $\mathcal{C}(A)$ дифференциального оператора A при $N > 1$:

$$\mathcal{C}(A) = \{B \ : AB = BA\}. \tag{0.2}$$

Мы рассмотрим здесь предельно упрощенный случай задачи, ограничившись дифференциальными операторами специального вида:

$$\hat{A} = e^{\xi \cdot x} A(D), \qquad A(D) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{|\alpha| \le m} a_\alpha D^\alpha, \quad (D_j(a_\alpha) = 0, \ \forall \alpha, \ j), \tag{0.3}$$

отличающимся от операторов с постоянными коэффициентами лишь общим экспоненциальным сомножителем. Композиции дифференциальных операторов $\hat{A}$ и $\hat{B}$ вида (0.3) отвечает, очевидно, ассоциативная, но не коммутативная операция "умножения" соответствующих многочленов $A(D)$ и $B(D)$:

$$\hat{A} \circ \hat{B} = e^{\xi \cdot x} A(D) \circ e^{\eta \cdot x} B(D) = e^{(\xi + \eta)\cdot x} A(D + \eta) B(D). \tag{0.4}$$

Поэтому условия коммутирования сводятся здесь к чисто алгебраическим условиям на многочлены $A(D)$ и $B(D)$ от символа $D = (D_1, D_2, \dots D_N)$ с постоянными коэффициентами:

$$A(D + \eta) B(D) = A(D) B(D + \xi); \quad \xi, \ \eta \in \mathbb{C}^N. \tag{0.5}$$

Централизатор любого дифференциального оператора вида (0.3) содержит $N-1$ операторов $\hat{B}$ первого порядка с постоянными коэффициентами, соответствующих $N-1$ векторам $\gamma \in \mathbb{C}^N$ ортогональным вектору $\xi = 0$, так как

$$\hat{B} = \gamma \cdot D = \gamma_1 D_1 + \cdots + \gamma_N D_N, \quad \gamma \cdot \xi = 0 \Rightarrow \hat{B} \circ (e^{\xi \cdot x}) = e^{\xi \cdot x} \circ \hat{B}. \tag{0.6}$$

Нас интересует случай, когда централизатор $\mathcal{C}(A)$ расширяется и содержит не только многочлены от $\hat{A}$ и операторов (0.6). При $N = 1$ эта задача восходит к классической работе [3], где изучались дифференциальные операторы P и Q взаимно простых порядков m и n, удовлетворяющие операторному соотношению

$$P^n = Q^m. \tag{0.7}$$

В §1, следуя нашей работе [8], мы приведем примеры операторов (0.3) с $N = 1$, удовлетворяющих соотношению (0.7), и рассмотрим случай не взаимно простых порядков m и n. Случай $N = 2$ рассматривается в §2.

1. Случай $N = 1$

В одномерном случае удобно фиксировать калибровку исходного оператора (0.3) и представить его в виде

$$\hat{A} = e^{mt} A(D), \quad A(D) = a_0 D^m + a_1 D^{m-1} + \cdots + a_m, \ (a_0 \neq 0), \tag{1.1}$$

где m порядок оператора $\hat{A}$. Это достигается за счет выбора масштаба на оси t. В одномерии старшие коэффициенты коммутирующих дифференциальных операторов тесно связаны друг с другом, и поэтому оператор $\hat{B} \in \mathcal{C}(A)$ порядка n имеет ту же структуру:

$$\hat{B} = e^{nt} \left(b_0 D^n + b_1 D^{n-1} + \cdots + b_n \right).$$

Отметим, что из классической работы [1] следует также коммутативность централизатора при $N = 1$. Поэтому для двух различных операторов $\hat{A}$ их централизаторы либо полностью совпадают, либо не пересекаются.

При классификации операторов вида (1.1) можно использовать два преобразования типа сопряжения. Первое из них — сдвиг $D \to D + const$ соответствует операции сопряжения "нулевого порядка"

$$\hat{A} \mapsto e^{-\alpha t} \circ \hat{A} \circ e^{\alpha t}, \tag{1.2}$$

а второе — сопряжение *первого порядка*

$$\hat{A} \mapsto (D+\alpha) \circ \hat{A} \circ (D+\alpha)^{-1} \tag{1.3}$$

возможно только при условии, что $-\alpha \in \mathbb{C}$ является корнем многочлена $A(D)$. Причем при классификации пар коммутирующих операторов $[\hat{A}, \hat{B}] = 0$ корень $-\alpha$ должен быть общим для обоих многочленов $A(D)$ и $B(D)$. Легко видеть, что оба преобразования не нарушают коммутативности рассматриваемой пары операторов и сводятся к сдвигам корней соответствующих многочленов $A(D)$ и $B(D)$. Отметим еще, что эти корни связаны алгебраическим уравнением

$$A(D+n)B(D) = B(D+m)A(D), \tag{1.4}$$

которое следует из (0.5).

Используя это уравнение, нетрудно перечислить все, с точностью до сопряжений нулевого порядка (1.2), нетривиальные коммутирующие пары операторов (1.1) малых порядков (см. [8]).

Пример 1. *Коммутирующая пара операторов из работы* [8]

$$\hat{A} = e^{4t} D(D+5)(D+6)(D+11), \quad \hat{B} = e^{5t}\ D(D+4)(D+6)(D+8)(D+12), \tag{1.5}$$

в результате преобразования (1.3) *с* $\alpha = 0$ *и последующего сдвига* (1.2) *приводит к новой паре многочленов*

$$D(D+1)(D+2)(D+7), \quad D(D+1)(D+2)(D+4)(D+8),$$

с общим корнем $\alpha = 0$. *Полученные многочлены также удовлетворяют уравнению коммутативности* (1.4).

Определение 1. *Каноническим* оператором (1.1) порядка m называется оператор следующего вида

$$\hat{A} = e^{mt} D(D+1)(D+2)\cdots(D+m-1). \tag{1.6}$$

Замена $x = e^{-t} \Rightarrow dx = -e^{-t}dt$ приводит, как нетрудно проверить, канонический оператор (1.6) к виду D_0^m, где $D_0 = d/dx$.

Из результатов работы [3] (см. также [4]) можно извлечь следующее основополагающее утверждение.
Теорема 1. Любую коммутирующую пару операторов (1.1) взаимно простых порядков m и n можно привести сопряжениями нулевого (1.2) и первого порядков (1.3) к каноническому виду (1.6).

Для уточнения этой теоремы отметим, что соответствующие коммутирующим операторам многочлены, должны иметь в силу уравнения (1.4) общий максимальный вещественный корень $-\alpha$. Именно этот максимальный корень используется в (1.3) для приведения операторов к каноническому виду. В приведенном выше примере (1.5) это требует не одного, а нескольких шагов. На каждом шагу максимальный корень $-\alpha$ многочлена $A(D)$ сдвигается на $-m$ в соответствии с формулой

$$(D+\alpha) \circ e^{mt} = e^{mt} \circ (D+\alpha+m), \tag{1.7}$$

этот же корень $B(D)$ сдвигается при этом на $-n$. В качестве иллюстрации приведем еще один пример приведения коммутирующей пары операторов к каноническому виду

$$\hat{A} = e^{4t}\begin{cases}(D)(D+1)(D+6)(D+7)\\(D)(D+3)(D+5)(D+6)\\(D)(D+1)(D+2)(D+3)\end{cases} \quad \hat{B} = e^{5t}\begin{cases}(D)(D+1)(D+4)(D+7)(D+8)\\(D)(D+3)(D+4)(D+6)(D+7)\\(D)(D+1)(D+2)(D+3)(D+4)\end{cases}.$$

Техника, развитая в работе [8], позволяет исследовать коммутирующие пары операторов (1.1), порядки которых не взаимно просты. Единственное отличие сводится к появлению свободных параметров в коэффициентах многочленов $A(D)$ и $B(D)$, удовлетворяющих уравнению (1.4). Можно проверить, например, справедливость следующего утверждения. Теорема 2. Полный, с точностью до сопряжений (1.2) нулевого порядка, список коммутирующих пар операторов (1.1) порядков 4 и 6 исчерпывается тремя случаями:

$$\hat{A} = e^{4t}\begin{cases}D(D+2)(D+\alpha)(D+\alpha+2)\\D(D+2)(D+\alpha)(D+\alpha+6)\\D(D+6)(D+\alpha)(D+\alpha+6)\end{cases}$$

$$\hat{B} = e^{6t}\begin{cases}D(D+2)(D+4)(D+\alpha)(D+\alpha+4)(D+\alpha+8)\\D(D+2)(D+4)(D+\alpha)(D+\alpha+2)(D+\alpha+4)\\D(D+4)(D+8)(D+\alpha)(D+\alpha+4)(D+\alpha+8)\end{cases}.$$

Основным здесь является случай, соответствующий первой строке таблицы, приведенной в Теореме 2. Обозначив $\hat{A}_1 = e^{2t}D(D+\alpha)$, где α свободный параметр, мы получаем, что в этом случае, аналогично (1.6),

$$[(\hat{A}_1)^2 = \hat{A}_1 \circ \hat{A}_1 = e^{4t}D(D+2)(D+\alpha)(D+\alpha+2) = \hat{A}, \quad \hat{B} = (\hat{A}_1)^3. \tag{1.8}$$

Вторая строка приводится к случаю (1.8) , сопряжением первого порядка, указанным в формуле (1.3). Это приводит к сдвигу корня $-\alpha$ в $A(D)$:

$$D(D+2)(D+\alpha)(D+\alpha+6) \mapsto \; D(D+2)(D+\alpha+4)(D+\alpha+6)$$

и остается переобозначить $\alpha+4$ через $\widetilde{\alpha}$. Третья строка приводится ко второй дополнительным сопряжением первого порядка, соответствующим нулевому корню в формуле (1.3).

Из теоремы 1 следует, что, применяя сопряжение (1.3) к паре $\hat{A}_0$, $\hat{B}_0$ канонических операторов (1.6) взаимно простых порядков m и n, мы можем, по крайней мере, в принципе описать все коммутирующие пары операторов вида (1.1), удовлетворяющие операторному соотношению (0.7). Например, используя следующий за максимальным корень $\alpha = -1$, мы получаем новую коммутирующую пару

$$\hat{A}_1 = (D+1)\circ\hat{A}_0\circ(D+1)^{-1} = e^{mt}D(D+2)\cdots(D+m-1)(D+m+1),$$
$$\hat{B}_1 = (D+1)\circ\hat{B}_0\circ(D+1)^{-1} = e^{nt}D(D+2)\cdots(D+n-1)(D+n+1).$$

Ясно, что полученные многочлены (1.4) будут иметь только целые корни, и это, таким образом, является характерным свойством решений уравнения коммутативности (1.4).

С другой стороны, конкретное построение связанных с Теоремой 1 цепочек преобразований (1.3), аналогичных рассмотренным выше примерам, к дифференциальным операторам порядка выше второго представляет интерес в связи с приложениями к спектральным задачам порядка три и выше.

Для приложений рассматриваемый класс операторов (1.1) с нетривиальным централизатором можно расширить, если вместо преобразования (1.3) использовать его естественное обобщение[1]

$$\hat{A} \mapsto (D-f)\circ\hat{A}\circ(D-f)^{-1}. \tag{1.9}$$

Здесь $f = D\log\psi$ является логарифмической производной общей собственной функции рассматриваемой пары операторов $\hat{A}\psi=\lambda\psi,\quad \hat{B}\psi=\varepsilon(\lambda)\psi$. Случай (1.3) соответствует $\lambda=1$ и при $\lambda\neq 0$, не ограничивая общности, можно положить $\lambda=1$. Решение ψ задачи об общей собственной функции можно искать при этом в виде "ряда Фурье":

$$\hat{A}\psi=\psi,\quad \hat{B}\psi=\varepsilon\psi,\quad \psi=\sum c(k)e^{kt}. \tag{1.10}$$

Коэффициенты $c(k)$ находятся при этом из уравнений

$$A(k)c(k)=c(k+m),\quad B(k)c(k)=\varepsilon c(k+n), \tag{1.11}$$

где m и n обозначают степени многочленов $A(D)$ и $B(D)$, соответственно. Для сходимости ряда $\sum c(k)e^{kt}$ необходимо обеспечить выполнение условий $c(k)=0$ при $k\gg 0$, так как в противном случае коэффициенты $c(k)$ будут иметь степенной рост при $k\to\infty$. Если m и n взаимно просты, то уравнения (1.11) сводятся, очевидно, при $\varepsilon^n=1$ к простой рекуррентной формуле

$$\gcd(m,n)=1\Rightarrow c(k-1)=a(k)c(k),\quad c(k)=0,\ k\gg 0, \tag{1.12}$$

где $a(k)$ — рациональная функция от k. Поэтому, в случае $\gcd(m,n)=1$, решение задачи (1.10) единственно с точностью до умножения на число, а логарифмическая производная $f=D\log\psi$ находится однозначно.

2. Случай $N = 2$

Если векторы $\xi,\ \eta\in\mathbb{C}^2$ в уравнении коммутативности (0.5) коллинеарны, то задача остается практически одномерной, и мы можем, в частности, извлечь из Теоремы 2 (см. также [7]) коммутирующие пары операторов в двумерии, заменив свободный параметр α на D_2. Например,

$$\hat{A}=e^{4x_1}D_1(D_1+6)(D_1+D_2)(D_1+D_2+6),$$
$$\hat{B}=e^{6x_1}D_1(D_1+4)(D_1+8)(D_1+D_2)(D_1+D_2+4)(D_1+D_2+8).$$

В ситуации общего положения, с другой стороны, линейно независимые векторы $\xi,\ \eta\in\mathbb{C}^2$ можно, за счет замены координат, превратить в базисные. В этом случае

$$\hat{A}=e^{\alpha x_1}A(D_1,D_2),\quad \hat{B}=e^{\beta x_2}B(D_1,D_2), \tag{2.1}$$

и коммутатор (ср. (0.5)) записывается в виде

$$[\hat{A},\hat{B}]=e^{\alpha x_1+\beta x_2}\left(A(D_1,D_2+\beta)B(D_1,D_2)-A(D_1,D_2)B(D_1+\alpha,D_2)\right). \tag{2.2}$$

Общая структура коммутирующих дифференциальных операторов вида (0.3) с двумя независимыми переменными определяется следующей леммой.

[1]известное под названием преобразования Дарбу

Лемма 2. Многочлены $a(x,y)$, $b(x,y)$, удовлетворяющие уравнению

$$a(x,y+\beta)b(x,y) = a(x,y)b(x+\alpha,y), \tag{2.3}$$

раскладываются на линейные множители.

Доказательство. Достаточно доказать линейность произвольного неприводимого делителя $f(x,y)$ многочлена $a(x,y)$. Если f зависит только от x или y, то он, очевидно, линеен в силу неприводимости. Пусть f зависит от обеих переменных. Тогда докажем такое предложение: при некотором k_1 многочлен $f(x-k_1\alpha, y+\beta)$ также делит $a(x,y)$.

Левая часть (2.3) делится на $f(x,y+\beta)$. В силу неприводимости, этот множитель делит в правой части либо $a(x,y)$, либо $b(x+\alpha,y)$. В первом случае наше предложение доказано при $k_1=0$. Во втором случае получаем, что левая часть (2.3) делится на $f(x-\alpha,y+\beta)$. Опять, этот множитель делит либо $a(x,y)$, либо $b(x+\alpha,y)$; в первом случае предложение доказано при $k_1=1$, во втором получаем, что левая часть (2.3) делится на $f(x-2\alpha,y+\beta)$. Повторяя рассуждение и учитывая, что степень многочлена b ограничена, получаем, что на некотором шаге $f(x-k_1\alpha,y+\beta)$ должен войти делителем в $a(x,y)$.

Применяя доказанное предложение, получаем, что многочлен $a(x,y)$ должен делиться на $f(x,y)$, $f(x-k_1\alpha,y+\beta)$, $f(x-k_2\alpha,y+2\beta)$, $\ldots$. Так как степень ограничена, то это возможно, только если эта последовательность принимает конечное число разных значений. Таким образом, $f(x,y)$ удовлетворяет уравнению $f(x,y)=f(x-k\alpha,y+m\beta)$. Отсюда следует, что $f(x,y)=F(t)$, где $t=m\beta x+k\alpha y$ (это легко доказывается переходом от переменных x,y к x,t). В силу неприводимости, многочлен F линеен. □

Возвращаясь к примеру (0.1) операторов второго порядка, приведенному в начале работы, мы находим из уравнения (2.2) (при нулевых младших членах) следующую пару коммутирующих операторов

$$\hat{A} = e^{\alpha x_1}D_1(\beta D_1+\alpha D_2),\ \ \hat{B} = e^{\beta x_2}D_2(\beta D_1+\alpha D_2). \tag{2.4}$$

В отличие от случая $N=1$, централизатор (0.2) не обязан быть коммутативен при $N=2$, и для оператора $B_1=D_2\in\mathcal{C}(\hat{A})$ мы находим, что $[B_1,\hat{B}]=B$. Линейная замена независимых переменных, приводящая оператор $\hat{A}$ к каноническому виду (ср. (0.1)), дает:

$$D_x=D_1,\quad D_y=D_1+\gamma D_2 \Rightarrow \hat{A}=e^{\gamma(x+y)}D_xD_y,\quad \hat{B}=e^{\alpha y}D_y(D_y-D_x)$$

Как и при $N=1$ полиномиальное уравнение (0.5) позволяет строить пары коммутирующих дифференциальных операторов при $N=2$, аналогичные рассмотренным в работе [8]. Для этого нужно, однако, ввести следующее определение, связанное с общими условиями коммутирования при $N=2$ из работы [9].

Определение 2. Будем говорить, что дифференциальные операторы порядков m и n коммутируют в главном, если их коммутатор имеет порядок $m+n-2$ (или ниже).

В интересующем нас случае операторных уравнений типа (0.4) условия коммутирования в главном сводятся, очевидно, к алгебраическим уравнениям на старшие коэффициентов многочленов $A(D)$ и $B(D)$.

Пример 2. *Пусть*

$$\hat{A} = e^x(a_1D_x^2+a_2D_y^2+a_3D_xD_y+a_4D_x+a_5D_y+a_6)$$
$$\hat{B} = e^y(b_1D_x^3+b_2D_x^2D_y+b_3D_xD_y^2+b_4D_y^3+b_5D_x^2+b_6D_y^2+b_7D_xD_y+\ldots).$$

Тогда условия коммутирования в главном дают следующую квадратичную систему из пяти уравнений для старших коэффициентов рассматриваемых многочленов:

$$\begin{cases} b_1(a_3 - 3a_1) = 0 \\ a_2(2b_4 - b_3) = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} b_2(a_3 - 2a_1) = b_1(3a_3 - 2a_2) \\ 2a_2(b_3 - b_2) = a_3(b_3 - b_4), \end{cases} \quad 2b_2(a_2 - a_3) + b_3(a_3 - a_1) = 3b_1 a_2.$$

При $b_1 a_2 \neq 0$ *мы получаем* $a_3 = 3a_1$, $b_3 = 2b_4$, *и,*

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{3}{2}\alpha \Rightarrow \frac{b_2}{b_1} = 9 - 3\alpha, \quad \frac{b_2}{b_4} = 2 - \frac{1}{\alpha}, \quad 4\frac{b_4}{b_1} = 9(\alpha - 2)(\alpha - 3) + \frac{9}{2}\alpha. \tag{2.5}$$

Эта система уравнений сводится к уравнению третьей степени для α. *Корни* $\alpha = \frac{3}{2}, \frac{4}{3}$ *полученного кубического многочлена дают в силу* (2.5)

$$\alpha = \frac{3}{2} \Rightarrow A = (2D_x + 3D_y)^2, \quad B = (2D_x + 3D_y)^3, \tag{2.6}$$

$$\alpha = \frac{4}{3} \Rightarrow A = (D_x + 2D_y)(D_x + D_y), \quad B = (D_x + 2D_y)^2(D_x + D_y).$$

При $b_1 = a_2 = 0$ *имеем* $a_3 = 2a_1$, $b_3 = 2b_4 = 4b_2$, *что дает*

$$A = D_x(D_x + D_y), \quad B = (D_x + 2D_y)D_y.$$

После решения рассмотренной в примере задачи о коммутировании в главном операторов второго и третьего порядков можно вернуться к полиномиальным соотношениям (2.3) из Леммы 2 и уточнить вид сомножителей в полученных разложениях многочленов $A(D)$ и $B(D)$. Последняя задача вполне аналогична одномерному случаю, рассмотренному в работе [8], и, например, случай (2.6) приводит после замены переменных к канонической паре коммутирующих операторов (1.6). Следующий, не претендующий на полноту, список коммутирующих пар двумерных операторов демонстрирует возникающие здесь варианты ответов:

$$\hat{A} = e^{x_1+2x_2} D_1 D_2 (D_2 + 3), \qquad \hat{B} = e^{x_1+3x_2} D_1 D_2 (D_2 + 2)(D_2 + 4);$$

$$\hat{A} = e^{x_1+x_2} (D_1 + \alpha) D_2, \qquad \hat{B} = e^{3x_2} D_2 (D_2 + 1)(D_2 + 2);$$

$$\hat{A} = e^{x_1+x_2} (D_1^2 + \alpha) D_2, \qquad \hat{B} = e^{x_1+2x_2} D_2 (D_2 + 1)(D_1^2 + \alpha);$$

$$\hat{A} = e^{2x_1+x_2} D_1 (D_1 + 1) D_2, \qquad \hat{B} = e^{x_1+3x_2} D_1 D_2 (D_2 + 1)(D_2 + 2)$$

Заключение.

Мы хотим выразить искреннюю благодарность В.Э. Адлеру и Р.А. Габиеву, которые принимали активное участие в обсуждении результатов данной работы. В.Э. Адлеру принадлежит, в частности, доказательство Леммы 2 о приводимости многочленов, удовлетворяющих уравнению (2.3).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. I. Schur *Uber vertauschbare lineare Differentialausdrucke // Sitzungsber. Berliner Math. Gen.*, **4**: 2–8, 1905.
2. J.L. Burchnall, T.W. Chaundy *Commutative ordinary differential operators // Proc.London Math. Soc.*, **211**: 420–440, 1923; *Proc. Roy. Soc. London, (A)*, **118**: 557–.., 1928.
3. J.L. Burchnall, T.W. Chaundy, *Commutative ordinary diff. operators, II. The identity* $P^n = Q^m$*// Proc. Roy. Soc. London, (A)*, **134**: 471-485, 1932.
4. Соколов В. *Примеры коммутативных колец дифф. операторов // Функц. Анализ*, **12**(1): 82–83, 1978.
5. J. Hietarinta *Pure quantum integrability // Phys. Lett. A*, **246**: 97-104, 1998.
6. Шабат А.Б. *Лекции по теории солитонов.* 60 стр., КЧГУ, Карачаевск, 2008.

7. Миронов А.Е. *О коммутирующих дифференциальных операторах ранга 2. Сиб. электр. матем. известия*, **6**: 533–536, 2009.
8. Шабат А.Б., Эльканова З.С. *О коммутирующих дифференциальных операторах. ТМФ*, **162**(3): 334-344, 2010.
9. Габиев Р.А., Шабат А.Б. *О дифференциальных операторах коммутирующих в главном. ТМФ*, to aapear, 2011.

Алексей Борисович Шабат,
Карачаево-Черкесский государственный университет
им. У.Д. Алиева,
ул. Ленина, 29,
369202, г. Карачаевск, Карачаево-Черкесская республика, Россия
E-mail: shabatab@mail.ru

Зарият Сайдахматовна Эльканова,
Карачаево-Черкесский государственный университет
им. У.Д. Алиева,
ул. Ленина, 29,
4369202, г. Карачаевск, Карачаево-Черкесская республика, Россия
E-mail: z.109@mail.ru