ISSN 2074-1863 Уфимский математический журнал. Том 3. № 2 (2011). С. 57-80.

УДК 517.442

ИНТЕГРАЛЫ ОТ ЭКСПОНЕНТЫ ПО МЕРЕ РАДОНА

С.Г. МЕРЗЛЯКОВ

Аннотация. В данной статье изучаются свойства множеств сходимости интегралов от экспонент в конечномерном евклидовом пространстве. К таким множествам, в частности, относятся множества абсолютной сходимости рядов экспонент. Показано, что эти множества всегда выпуклы.

Вводится специальный класс выпуклых множеств, и в терминах этого класса для открытых и относительно замкнутых выпуклых множеств найдено полное описание множеств сходимости.

Приводятся необходимые и достаточные условия, при которых любое множество сходимости открыто и, отдельно, неограничено.

Ключевые слова: выпуклые множества, меры Радона, интегралы Лапласа, абсолютно сходящиеся ряды экспонент.

1. Введение

Первым результатом, относящимся к тематике данной статьи, можно считать следующее свойство рядов экспонент (см. [1], [2], с. 194–195).

Множество абсолютной сходимости ряда экспонент

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{\lambda_n z},\ \ a_n, \lambda_n \in \mathbb{C},\ \ n \in \mathbb{N},\ \ |\lambda_n| \to \infty,$$

выпукло, внутри этого множества ряд сходится равномерно на компактах.

На многомерные ряды экспонент доказательство о выпуклости переносится непосредственно, вторая же часть из приведенных работ не следует.

Свойства множеств абсолютной сходимости рядов экспоненциальных мономов одной комплексной переменной в зависимости от показателей, удовлетворяющих некоторым условиям, рассматривались в статье [3].

2. Определения и предварительные результаты

Пусть $\mathbb{E}$ — конечномерное евклидово пространство над полем вещественных чисел. Скалярное произведение элементов $x,\ y \in \mathbb{E}$ будем записывать как xy.

Типичным примером такого пространства служит пространство $\mathbb{R}^m$, $m \in \mathbb{N}$, с обычным скалярным произведением.

Другой пример — конечномерное евклидово пространство $\mathbb{H}$ над полем комплексных чисел со скалярным произведением zw, если новое скалярное произведение задать как

$$\langle z, w\rangle = \operatorname{Re} zw,$$

где $z,\ w \in \mathbb{H}$.

Через $\mathbb{S}$ и $\mathbb{B}$ будем обозначать соответственно единичную сферу и замкнутый единичный шар с центрами в нуле пространства $\mathbb{E}$.

S.G. Merlyakov, Integrals from exponential functions by Radon measure.

Работа поддержана РФФИ (грант 08-01-00 779) и Гранта Президента РФ НШ 3081.2008.1.

Поступила 21 февраля 2011 г.

Опорная функция множества $M \subset \mathbb{E}$ определяется по формуле

$$H(\lambda, M) = \sup_{x \in M} \lambda x, \;\; \lambda \in \mathbb{E}.$$

Это однородная выпуклая функция.

В силу однородности опорную функцию достаточно знать на единичной сфере.

Приведем примеры опорных функций.

Пример 1 Для вектора $\alpha \in \mathbb{S}$ и числа $c \in \mathbb{R}$ опорная функция гиперплоскости $M = \{x \in \mathbb{E} : \alpha x = c\}$ задается формулой

$$H(s, M) = \begin{cases} +\infty, & s \neq \pm\alpha \\ \pm c, & s = \pm\alpha \end{cases},$$

где $s \in \mathbb{S}$.

Действительно, пусть $s \in \mathbb{S}, \;\; s \neq \pm\alpha$. Ясно, что в таком случае число $t = \alpha s$ будет удовлетворять неравенству $|t| < 1$. Для фиксированного числа $r \in \mathbb{R}$ вектор

$$x = \frac{c - rt}{1 - t^2}\alpha + \frac{r - ct}{1 - t^2}s,$$

очевидно, обладает свойством $\alpha x = c, \;\; sx = r$, откуда и вытекает искомое.

Пример 2 Для вектора $\alpha \in \mathbb{S}$ и числа $c \in \mathbb{R}$ опорная функция полупространства $M = \{x \in \mathbb{E} : \alpha x \leqslant c\}$ задается формулой

$$H(s, M) = \begin{cases} +\infty, & s \neq \alpha \\ c, & s = \alpha \end{cases},$$

где $s \in \mathbb{S}$.

Это несложно вывести из предыдущего.

Замыкание и внутренность множества M будем записывать соответственно как $\overline{M}$ и $\operatorname{int} M$.

Через $\operatorname{aff} M$ обозначается аффинная оболочка множества M, то есть множество векторов вида $t_1x_1 + \cdots + t_kx_k$, где $x_j \in M, \;\; t_j \in \mathbb{R}, \;\; j = 1, \ldots, k$, и $t_1 + \cdots + t_k = 1$. Для любого вектора $a \in \operatorname{aff} M$ множество $\operatorname{aff} M - a$ является линейным пространством.

Относительную внутренность $\operatorname{ri} M$ множества M определим как его внутренность в пространстве $\operatorname{aff} M$ с индуцированной топологией.

Если выпуклое множество M не пусто, то и множество $\operatorname{ri} M$ будет не пустым (см. [4], с. 60).

Для линейного подпространства $L \subset \mathbb{E}$ через Π_L будем обозначать ортогональную проекцию пространства $\mathbb{E}$ на подпространство L.

Пусть S является замкнутым подмножеством единичной сферы $\mathbb{S}$.

Слабо S-выпуклую оболочку множества M определим как совокупность точек $x \in \mathbb{E}$, которые удовлетворяют условию

$$sx \leqslant \max_{1 \leqslant j \leqslant k} sx_j, \;\; s \in S, \tag{1}$$

для некоторой системы векторов $x_1, \ldots, x_k \in M$. Это множество будем записывать как $\operatorname{conv}_S M$. Множества, совпадающие со своей слабо S-выпуклой оболочкой, назовем слабо S-выпуклыми.

Очевидно, что слабо S-выпуклая оболочка сохраняет включения, а именно:

$$M_1 \subset M_2 \Rightarrow \operatorname{conv}_S M_1 \subset \operatorname{conv}_S M_2. \tag{2}$$

Несложно видеть, что в случае равенства $S = \mathbb{S}$, слабо S-выпуклая оболочка совпадает с обычной выпуклой оболочкой.

Как легко показать, для любого множества $M \subset \mathbb{E}$ имеет место равенство

$$H(s, \mathrm{conv}_S M) = H(s, M), \ s \in S. \tag{3}$$

Для числа $\varepsilon > 0$ будем полагать

$$S_\varepsilon = \{s \in S : \exists u \in S, \ |s - u| \leqslant \varepsilon\}.$$

В дальнейшем нам пригодится такой несложный результат.

Лемма 1. *Для множества $M \subset \mathbb{E}$ и компакта*

$$K \subset \{x \in \mathbb{E} : sx < H(s, M), \ s \in S\}$$

найдутся число $\varepsilon > 0$ и система векторов $x_1, \ldots, x_k \in M$, что будет выполнено включение:

$$K \subset \mathrm{conv}_{S_\varepsilon} \{x_1, \ldots, x_k\}.$$

Доказательство. Для любых фиксированных точек $y_0 \in K$ и $s_0 \in S$ найдется вектор $x_0 \in M$ с условием $s_0 y_0 < s_0 x_0$. В силу непрерывности получим неравенство $sy < sx_0$, где $|s - s_0| < \delta, \ |y - y_0| < \delta, \ s \in \mathbb{S}, y \in \mathbb{E}$, для некоторого числа $\delta > 0$.

Но множество $S \times K$ является компактом в топологическом произведении $\mathbb{S} \times \mathbb{E}$, поэтому можно найти число $\varepsilon > 0$ и вектора $x_1, \ldots, x_k \in M$, что

$$sy < \max_{1 \leqslant j \leqslant k} sx_j, \ s \in S_\varepsilon, \ y \in K,$$

из чего и вытекает искомое. □

Следствие 1. *Пусть множество $M \subset \mathbb{E}$ слабо S_ε-выпукло для любого числа $\varepsilon > 0$. Тогда множество $\mathrm{int}\, M$ является слабо S-выпуклым и имеет место равенство:*

$$\mathrm{int}\, M = \{x \in \mathbb{E} : sx < H(s, M), s \in S\}. \tag{4}$$

Действительно, если точка x принадлежит левой части этого соотношения, то найдется число $\varepsilon > 0$, для которого имеет место включение $x + \varepsilon \mathbb{B} \subset M$, и поэтому, $sx + \varepsilon \leqslant H(s, M), \ s \in \mathbb{S}$, так что эта точка лежит в правой части.

Обратное включение вытекает из условия на множество M и только что доказанной леммы.

Правая часть соотношения (4), очевидно, слабо S-выпукла.

Следствие 2. *Для выпуклого множества $M \subset \mathbb{E}$ и компакта $K \subset \mathrm{ri}\, M$ найдутся вектора $x_1, \ldots, x_k \in M$, что*

$$K \subset \mathrm{conv}\{x_1, \ldots, x_k\}.$$

Можно считать, что $0 \in \mathrm{ri}\, M$.

Положим $L = \mathrm{aff}\, M$. Применяя лемму для евклидова пространства L в случае $S = L \cap \mathbb{S}$, найдем систему точек $x_1, \ldots, x_k \in \mathrm{ri}\, M$, удовлетворяющих соотношению

$$sx \leqslant \max_{1 \leqslant j \leqslant k} sx_j, \ s \in S, \ x \in K.$$

Для произвольной точки $s \in \mathbb{S}$, очевидно, имеют место равенства $sx = \Pi_L(s)x, \ x \in M$, из чего и вытекает искомое.

Предложение 1. *Для слабо S-выпуклого множества $M \subset \mathbb{E}$ и компакта $K \subset \mathrm{ri}\, M$ имеет место включение $\overline{\mathrm{conv}_S K} \subset \mathrm{ri}\, M$.*

Доказательство. Согласно только что доказанному результату, найдутся точки $x_1, \dots, x_k \in M$, что выполняется включение

$$K \subset \operatorname{conv}\{x_1, \dots, x_k\},$$

и, значит, $K \subset \operatorname{conv}_S\{x_1, \dots, x_k\}$. Последнее множество слабо S-выпукло и замкнуто, из чего и вытекает искомое. $\square$

Множество M, для которого выполнено равенство

$$M = \{x \in \mathbb{E} : sx \leqslant H(s, M),\ s \in S\} \tag{5}$$

называется S-выпуклым (см. [5], гл. III). Такое множество, очевидно, будет замкнуто.

Как несложно показать, для любого множества $D \subset \mathbb{E}$ множество

$$\{x \in \mathbb{E} : sx \leqslant H(s, D),\ s \in S\}$$

будет S-выпуклым. Частным случаем таких множеств, очевидно, является множество $\operatorname{conv}_S\{x_1, \dots, x_k\}$ для произвольной системы векторов $x_1, \dots, x_k \in \mathbb{E}$.

Ясно, что S-выпуклые множества будут слабо S-выпуклыми, а последние — выпуклыми.

Заметим, что определенные выше операции, как несложно показать, перестановочны со сдвигами, а именно:

$$\begin{gathered} \overline{x + M} = x + \overline{M},\ \operatorname{int}(x + M) = x + \operatorname{int} M, \\ \operatorname{ri}(x + M) = x + \operatorname{ri} M,\ \operatorname{aff}(x + M) = x + \operatorname{aff} M, \\ \operatorname{conv}_S(x + M) = x + \operatorname{conv}_S M,\ H(s, x + M) = sx + H(s, M), \end{gathered} \tag{6}$$

где множество $M \subset \mathbb{E},\ x \in \mathbb{E}$.

3. Свойства специальных выпуклых множеств

В данном параграфе мы приведем свойства S-выпуклых и слабо S-выпуклых множеств (см. также [6], §4).

Имеют место следующие простые факты.

Предложение 2. *Пересечение слабо S-выпуклых множеств слабо S-выпукло.*

Предложение 3. *Пусть $\{M_\alpha : \alpha \in A\}$ — семейство линейно упорядоченных по включению множеств $M_\alpha \subset \mathbb{E}$.*

Тогда имеет место равенство:

$$\operatorname{conv}_S \bigcup_{\alpha \in A} M_\alpha = \bigcup_{\alpha \in A} \operatorname{conv}_S M_\alpha.$$

Следствие *Объединение возрастающей по включению последовательности слабо S-выпуклых множеств слабо S-выпукло.*

Предложение 4. *Пусть множество $M \subset \mathbb{E}$ слабо S-выпукло и не пусто.*

Тогда следующие множества также будут слабо S-выпуклыми:

1. $M + x_0,\ x_0 \in \mathbb{E}$.
2. $tM,\ t > 0$.
3. $\operatorname{ri} M$.
4. $\overline{M}$.
5. $\operatorname{aff} M$.

Доказательство. Для первых двух множеств это очевидно.

Принимая во внимание равенства (6), можно считать, что $0 \in \operatorname{ri} M$, и последние три множества будут слабо S-выпуклыми в силу известных равенств

$$\operatorname{ri} M = \bigcup_{0<t<1} tM,\ \overline{M} = \bigcap_{t>1} tM,\ \operatorname{aff} M = \bigcup_{t>0} tM,$$

и предыдущих утверждений. □

Для дальнейшего нам понадобится следующий результат.

Предложение 5. *Пусть $M \subset \mathbb{E}$ выпуклое множество, для которого выполнено условие*

$$\operatorname{ri} M \bigcap \operatorname{ri} \operatorname{conv}_S M \neq \varnothing.$$

Тогда

$$\operatorname{ri} \operatorname{conv}_S M = \operatorname{conv}_S \operatorname{ri} M.$$

Доказательство. Без ограничения общности можно считать, что

$$0 \in \operatorname{ri} M \bigcap \operatorname{ri} \operatorname{conv}_S M.$$

Применяя доказанные свойства слабо S-выпуклых оболочек, получим:

$$\operatorname{ri} \operatorname{conv}_S M = \bigcup_{t<1} t \operatorname{conv}_S M = \bigcup_{t<1} \operatorname{conv}_S tM = \operatorname{conv}_S \bigcup_{t<1} tM = \operatorname{conv}_S \operatorname{ri} M,$$

что и доказывает утверждение. □

Следствие 1 *Пусть для выпуклого относительно открытого множества $U \subset \mathbb{E}$ имеет место соотношение*

$$U \bigcap \operatorname{ri} \operatorname{conv}_S U \neq \varnothing.$$

Тогда множество $\operatorname{conv}_S U$ также является относительно открытым.

Следствие 2 *Пусть $M \subset \mathbb{E}$ выпуклое множество, для которого выполнено включение*

$$\operatorname{ri} \operatorname{conv}_S M \subset M.$$

Тогда множество $\operatorname{ri} M$ будет слабо S-выпуклым.

Действительно, из условия на множество и соотношения $M \subset \operatorname{conv}_S M$ заключаем, что выпуклые множества $\operatorname{conv}_S M$ и M будут одной размерности. В таком случае, очевидно, выполняется включение $\operatorname{ri} \operatorname{conv}_S M \subset \operatorname{ri} M$, и искомое вытекает из вышеприведенного утверждения и включения $\operatorname{conv}_S \operatorname{ri} M \supset \operatorname{ri} M$.

Для точки $x \in \mathbb{E}$ и множества $M \subset \mathbb{E}$ через $\rho(x, M)$ будем обозначать расстояние от точки x до множества M.

Для множества $M \subset \mathbb{E}$ через ∂M будем обозначать относительную границу множества M.

Нам понадобится следующий результат.

Лемма 2. *Пусть $M \subset \mathbb{E}$ замкнутое выпуклое множество.*
Имеет место соотношение

$$\max_{s \in \mathbb{S}} [sx - H(s, M)] = \begin{cases} \rho(x, \partial M),\ x \notin M \\ -\rho(x, \partial M),\ x \in M \end{cases}.$$

Доказательство. Для точки $x \in \mathbb{E}$ положим $r = \rho(x, \partial M)$ и обозначим через $x_0 \in \mathbb{E}$ точку, для которой выполнено равенство $|x_0 - x| = r$.

Если $x \notin M$, то из теоремы Хана–Банаха несложно вывести существование вектора $s_0 \in \mathbb{S}$, что для любых векторов $y \in \mathbb{E}$ и $w \in M$выполнена импликация

$$|y - x| \leqslant r \Rightarrow s_0 y \geqslant s_0 w,$$

из чего следует неравенство $s_0 x - r \geqslant H(s_0, M)$.

С другой стороны, для любого вектора $s \in \mathbb{S}$ получим

$$-H(s, M) \leqslant -s x_0 = s\left[-x + (x_0 - x)\right] \leqslant -sx + r,$$

и первая половина леммы доказана.

Пусть теперь $x \in M$. В таком случае будет выполнено неравенство $sx + r \leqslant H(s, M),\ s \in \mathbb{S}$.

Обратно, для точки $s_0 \in \mathbb{S}$, определяющей касательную гиперплоскость к множеству M в точке x_0, получим

$$H(s_0, M) = s_0 x_0 = s_0\left[x + (x_0 - x)\right] \leqslant s_0 x + r,$$

что и доказывает лемму. □

Следствие *Для замкнутого выпуклого множества $M \subset \mathbb{E}$ функция*

$$f(x) = \begin{cases} \rho(x, \partial M),\ x \notin M \\ -\rho(x, \partial M),\ x \in M \end{cases}$$

является выпуклой.

Действительно, это вытекает из только что доказанной леммы и теоремы 5.5 монографии [4].

Предложение 6. *Пусть $L_1 \subset \mathbb{E}$ линейное подпространство, $\{0\} \neq L_1 \neq \mathbb{E},\ L_2 = L_1^{\perp}$, множество $S = \{s \in \mathbb{S} : |\Pi_{L_1}(s)| \geqslant \varepsilon\}$ для некоторого числа $\varepsilon,\ 0 < \varepsilon \leqslant 1$, а выпуклое множество $U \subset L_1$ открыто в топологии пространства L_1.*

Тогда выполнено соотношение

$$\begin{aligned} \operatorname{conv}_S U = \{&x \in \mathbb{E} : x = x_1 + x_2,\ x_1 \in U,\ x_2 \in L_2, \\ &\sqrt{1-\varepsilon^2}|x_2| < \varepsilon\rho(x_1, \partial U)\Big\}. \end{aligned} \tag{7}$$

Доказательство. Обозначим правую часть равенства (7) через D и покажем, что имеет место соотношение

$$D = \{x \in \mathbb{E} : sx < H(s, U),\ s \in S\}. \tag{8}$$

Заметим, что в силу включения $U \subset L_1$ выполнено равенство

$$H(s, U) = H(\Pi_{L_1}(s), U).$$

Любой вектор x, принадлежащий правой части (8), единственным образом представляется в виде $x = x_1 + x_2,\ x_1 \in L_1,\ x_2 \in L_2$. Если $x_2 \neq 0$, то положим

$$s_2 = \frac{\sqrt{1-\varepsilon^2}x_2}{|x_2|},$$

в противном случае пусть s_2 произвольный вектор пространства L_2 с условием $|s_2| = \sqrt{1-\varepsilon^2}$.

Для любой точки $s_1 \in L_1,\ |s_1| = \varepsilon$ вектор $s = s_1 + s_2$ принадлежит множеству S, поэтому $sx = s_1x_1 + s_2x_2 = s_1x_1 + \sqrt{1-\varepsilon^2}|x_2| < H(s_1, U)$, и из леммы 2 несложно вывести, что $x_1 \in L_1$ и $\sqrt{1-\varepsilon^2}|x_2| < \varepsilon\rho(x_1, \partial U)$.

Обратно, пусть точка x принадлежит левой части (8). Любой вектор $s \in S$ можно представить в виде $s = s_1 + s_2$, $s_1 \in L_1$, $s_2 \in L_2$, и, по условию, будут выполняться неравенства $|s_1| \geqslant \varepsilon$, $|s_2| \leqslant \sqrt{1-\varepsilon^2}$. Используя лемму 2, получим

$$sx = s_1x_1 + s_2x_2 < H(s_1, U) - |s_1|\rho(x_1, \partial U) + \varepsilon\rho(x_1, \partial U) \leqslant H(s_1, U),$$

что и доказывает равенство (8).

Из следствия 1 леммы 1 вытекает равенство

$$\operatorname{int}\operatorname{conv}_S U = D,$$

а так как множество D, очевидно, открыто и $U \subset D$, то искомое, в конце концов, получим из следствия 1 предложения 5. □

Предложение 7. *Пусть гиперплоскость $L = \{x \in \mathbb{E} : \alpha x = 0\}$ для некоторого вектора $\alpha \in \mathbb{S}$, множество $S = \{s \in \mathbb{S} : \alpha s \leqslant \varepsilon\}$ для фиксированного числа ε, $0 \leqslant \varepsilon < 1$, а выпуклое множество $U \subset L$ открыто в топологии пространства L.*

Тогда выполнено соотношение

$$\begin{aligned} \operatorname{ri}\operatorname{conv}_S U = \{&x \in \mathbb{E} : x = x_1 + t\alpha,\ x_1 \in U, \\ &t > 0,\ \varepsilon t < \sqrt{1-\varepsilon^2}\rho(x_1, \partial U)\Big\}. \end{aligned} \tag{9}$$

Доказательство. Как и выше, обозначим правую часть равенства (9) через D и покажем, что имеет место соотношение (8).

Любой вектор x, принадлежащий правой части (8), единственным образом представляется в виде $x = x_1 + t\alpha$, $x_1 \in L$, $t \in \mathbb{R}$, и так как точка $-\alpha$, очевидно, принадлежит множеству S, должно выполняться неравенство

$$-\alpha x = -t < H(\alpha, U) = 0,$$

т. е., $t > 0$.

Для любого вектора $s_1 \in L$, $|s_1| = 1$ вектор $s = \sqrt{1-\varepsilon^2}s_1 + \varepsilon\alpha$ принадлежит множеству S, поэтому $sx = s_1x_1 + \varepsilon t < H(s_1, U)$, и из леммы 2 несложно вывести, что $x_1 \in L_1$ и $t\varepsilon < \sqrt{1-\varepsilon^2}\rho(x_1, \partial U)$.

Обратное включение доказывается как и выше, и искомое вытекает из соотношения (3). □

Приведем несколько результатов о S-выпуклости слабо S-выпуклых множеств.

Предложение 8. *Замкнутое слабо S-выпуклое множество $M \subset \mathbb{E}$ с непустой внутренностью будет S-выпуклым.*

Доказательство. Можно считать, что $0 \in \operatorname{int} M$.

Из предложения 4 и следствия 1 леммы 1 заключаем, что

$$\operatorname{int} M = \{x \in \mathbb{E} : sx < H(s, M), s \in S\}.$$

Это представление, как несложно видеть, влечет соотношение

$$M \subset \{x \in \mathbb{E} : sx \leqslant H(s, M), s \in S\}.$$

Обратно, пусть $x \in \mathbb{E}$ и $sx \leqslant H(s, M), s \in S$. Как легко видеть,

$$H(s, M) > 0,\ s \in \mathbb{S},$$

поэтому для числа t, $0 < t < 1$ будет выполнено

$$sy < H(s, M), s \in S,$$

где $y = tx$, так что $tx \in \operatorname{int} M$, и, следовательно, $x \in M$. □

Предложение 9. *Для выпуклого компакта $K \subset \mathbb{E}$ имеет место равенство:*
$$\overline{\mathrm{conv}_S K} = \{x \in \mathbb{E} : sx \leqslant H(s,K), s \in S\}\,. \tag{10}$$

Доказательство. Без ограничения общности можно считать, что $0 \in \mathrm{ri}\, K$.

Очевидно, что левая часть соотношения (10) является подмножеством правой.

Обратно, пусть для точки $x \in \mathbb{E}$ выполнено неравенство
$$sx \leqslant H(s,K), s \in S.$$
Тогда для числа $t,\ 0 < t < 1$, получим:
$$sy \leqslant H(s,tK), s \in S,$$
где $y = tx$.

Компакт tK, очевидно, есть подмножество $\mathrm{ri}\, K$, поэтому из следствия 2 леммы 1 заключаем, что
$$H(s,tM) \leqslant \max_{1 \leqslant j \leqslant k} sx_j,\ \ s \in \mathbb{S}$$
для некоторых векторов $x_1, \ldots, x_k \in K$.

Итак, $tx \in \mathrm{conv}_S K$ для любого числа $t,\ 0 < t < 1$, из чего и вытекает искомое. □

Как известно, выпуклая оболочка компакта является компактом. Покажем, что слабо S-выпуклая оболочка компакта, вообще говоря, незамкнута.

Пример 3 Пусть
$$\mathbb{E} = \mathbb{R}^3,\ s_0 = \frac{\sqrt{2}}{2}(1,0,1),\ s_n = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\frac{1}{n}, \sin\frac{1}{n}, 1\right),\ n \in \mathbb{N},$$
$$S = \{s_0, s_1, s_2, \ldots,\}\,,\ K = \left\{(a,b,0) \in \mathbb{R}^3 : a^2 + b^2 \leqslant 1\right\}.$$

Ясно, что S замкнутое подмножество единичной сферы, а K — выпуклый компакт.

Докажем, что точка $y = (0,0,1)$ не принадлежит множеству $\mathrm{conv}_S K$.

Действительно, предположим, что найдутся точки $x_1, \ldots, x_k \in K$, для которых выполнены соотношения
$$s_n y \leqslant \max_{1 \leqslant j \leqslant k} s_n x_j,\ n \in \mathbb{N}. \tag{11}$$

Пусть $x_j = r_j(\cos t_j, \sin t_j, 0),\ 0 \leqslant r_j \leqslant 1,\ 0 \leqslant t_j < 2\pi,\ j = 1, \ldots, k$, а $j(n)$ — индекс, для которого достигается максимум в формуле (11).

В таком случае
$$\frac{\sqrt{2}}{2} \leqslant r_{j(n)} \frac{\sqrt{2}}{2} \cos\left(\frac{1}{n} - t_{j(n)}\right),$$
или $r_{j(n)} = 1,\ t_{j(n)} = \frac{1}{n}$. Последнее равенство для всех n не выполнимо, получили противоречие.

С другой стороны $H(s_n, K) = \sqrt{2}/2 = s_n(0,0,1),\ n \in \mathbb{N}_0$, и из предложения 9 заключаем, что $(0,0,1) \in \overline{\mathrm{conv}_S K}$, следовательно, слабо S-выпуклая оболочка компакта K незамкнута.

Предложение 10. *Для вектора $\alpha \in \mathbb{S}$ и числа $c \in \mathbb{R}$ гиперплоскость $M = \{x \in \mathbb{E} : \alpha x = c\}$ слабо S-выпукла тогда и только тогда, когда $\pm\alpha \in S$.*

В этом случае она будет S-выпуклой.

Доказательство. Будем считать, что $c = 0$, и положим:
$$K = M \cap \mathbb{S}.$$

Если $\pm\alpha \in S$, то, согласно примеру 1, множество M удовлетворяет соотношению (5), так что оно будет S-выпуклым.

Обратно, предположим, что гиперплоскость M слабо S-выпукла, но $\alpha \notin S$. В силу замкнутости множества S найдется число $\varepsilon, 0 < \varepsilon < 1$, для которого выполняется условие:

$$|s-\alpha| \geqslant \varepsilon,\ s \in S.$$

Множество M также замкнуто и, применяя утверждение 9 и свойство (2), получим:

$$\{x \in \mathbb{E} : sx \leqslant H(s,K),\ s \in S\} \subset M. \tag{12}$$

Любой вектор $s \in \mathbb{S}$ однозначно представляется в виде

$$s = t\alpha + u,\ t \in \mathbb{R},\ u \in \mathbb{E},\ \alpha u = 0,$$

и, следовательно, $1 = t^2 + |u|^2$. Для точек $s \in S$ будем иметь:

$$|s-\alpha| = 1 - 2t + t^2 + |u|^2 = 2 - 2t \geqslant \varepsilon.$$

Для опорной функции компакта K, очевидно, выполняется равенство:

$$H(s,K) = |u| = \sqrt{1-t^2},$$

и из предыдущих выкладок несложно вывести включение вектора

$$\frac{2\varepsilon^2 - \varepsilon^4}{4-\varepsilon^2}\alpha$$

в левую часть соотношения (12), но в правую часть этот вектор не входит.

Полученное противоречие показывает, что $\alpha \in S$. Для точки $-\alpha$ ситуация аналогична, и утверждение доказано. □

Покажем теперь, что классы S-выпуклых и слабо S-выпуклых множеств различны.

Пример 4 Пусть

$$\mathbb{E} = \mathbb{R}^3,\ M = \left\{\left(x^1, x^2, 0\right) \in \mathbb{R}^3 : x^1 \leqslant 0\right\},$$
$$\varphi(t) = \left(\sin t \cos t, \cos^2 t, \sin t\right),\ S = \{\varphi(t) : -\pi \leqslant t \leqslant \pi\}.$$

Предположим, что для точек $x \in \mathbb{R}^3,\ x_1, \ldots, x_k \in M$ выполняется соотношение (1):

$$x^1 \sin t \cos t + x^2 \cos^2 t + x^3 \sin t \leqslant \max_{1 \leqslant j \leqslant k}\left(x_j^1 \sin t \cos t + x_j^2 \cos^2 t\right),\ -\pi \leqslant t \leqslant \pi.$$

Подставляя значения $t = \pm\pi$ в эти неравенства, получим: $x^3 = 0$.

После сокращения будем иметь:

$$x^1 \sin t + x^2 \cos t \leqslant \max_{1 \leqslant j \leqslant k}\left(x_j^1 \sin t + x_j^2 \cos t\right),\ -\pi < t < \pi,$$

из чего следует неравенство $x^1 \leqslant 0$, так что множество M слабо S-выпукло.

Выясним теперь, для каких точек $x \in \mathbb{R}^3$ имеет место неравенство

$$sx \leqslant H(s,M),\ s \in S. \tag{13}$$

Опорная функция множества M, очевидно, удовлетворяет соотношению:

$$H(\varphi(t), M) = \begin{cases} +\infty, & t \neq \pm\pi \\ 0, & t = \pm\pi \end{cases},$$

поэтому неравенство (13) эквивалентно равенству $x^3 = 0$, так что множество M не S-выпукло.

Покажем, как связаны аффинная и слабо S-выпуклая оболочки.

Предложение 11. *Для выпуклого множества $M \subset \mathbb{E}$ имеет место равенство*

$$\operatorname{aff} \operatorname{conv}_S M = \operatorname{aff} \operatorname{conv}_S \operatorname{aff} M.$$

Доказательство. Левая часть этого соотношения, очевидно, лежит в правой.

Для доказательства обратного включения достаточно показать, что

$$\operatorname{aff}\operatorname{conv}_S M \supset \operatorname{conv}_S \operatorname{aff} M,$$

и можно предполагать выполненным условие $0 \in \operatorname{ri} M$.

Пусть точка x принадлежит правой части последней формулы:

$$sx \leqslant \max_{1 \leqslant j \leqslant k} sx_j, \ s \in S,$$

для некоторых точек $x_1, \ldots, x_j \in \operatorname{aff} M$.

Множество M является окрестностью нуля в линейном топологическом пространстве $\operatorname{aff} M$, поэтому найдется число $t > 0$, что $tx_j \in M, \ j = 1, \ldots, k$, и, значит, $tx \in \operatorname{conv}_S M$.

Утверждение доказано. □

Приведем теперь результат для частного случая сферических множеств.

Назовем множество S сферически выпуклым, если конус

$$\{ts : t \geqslant 0, \ s \in S\}$$

является выпуклым.

Предложение 12. *Пусть множество $M \subset \mathbb{E}$ выпукло, множество $S \subset \mathbb{S}$ сферически выпукло, и $V = \operatorname{conv}_S \{0\}$.*

Тогда

$$\operatorname{conv}_S M = M + V.$$

Доказательство. Для точки $x_0 \in \operatorname{conv}_S M$ найдутся вектора $x_1, \ldots, x_k \in M$ с условием

$$sx_0 \leqslant \max_{1 \leqslant j \leqslant k} sx_j, \ s \in S.$$

Положим $K = \operatorname{conv}\{x_1, \ldots, x_k\}, \ C = \operatorname{conv} S$. Из сферической выпуклости множества S вытекает неравенство

$$0 \leqslant \max_{x \in K} s(x - x_0), \ s \in C,$$

и, применяя теорему минимакса (см. [4], с. 404), получим

$$0 \leqslant \max_{x \in K} \min_{s \in C} s(x - x_0).$$

Таким образом, найдется точка $y \in K$, для которой $0 \leqslant s(y - x_0), \ s \in C$, следовательно, $x_0 - y \in V$, так что имеет место включение $x_0 \in M + V$.

Обратно, пусть вектор $x_0 \in M + V$. В таком случае, очевидно, $x_0 \in \operatorname{conv}_S \{x_1\}$ для некоторой точки $x_1 \in M$, и утверждение доказано. □

Следствие *Пусть выполнены условия предложения 12.*

Множество M слабо S-выпукло тогда и только тогда, когда имеет место соотношение

$$M + V = M.$$

Утверждение 12 допускает обращение и чтобы, это показать, нам понадобится следующий результат.

Лемма 3. *Для множества S и шара $\mathbb{B}$ имеет место равенство*

$$\mathbb{S} \setminus \operatorname{int}\operatorname{conv}_S \mathbb{B} = S. \tag{14}$$

Доказательство. Пусть точка x принадлежит левой части формулы (14). По следствию 1 леммы 1 это означает, что для некоторого вектора $s \in S$ выполнено неравенство $sx \geqslant 1$. Но так как точки s и x лежат на единичной сфере, имеет место равенство $x = s$, поэтому $x \in S$.

Обратно, предположим, что $x \in S$. Очевидно, соотношение $sx < 1,\ s \in S$, не выполнено, следовательно, точка x принадлежит левой части равенства (14).

Лемма доказана. □

Следствие. *Шар $\mathbb{B}$ является слобо S-выпуклым тогда и только тогда, когда имеет место равенство $S = \mathbb{S}$.*

Предложение 13. *Пусть для множества S меет место равенство*

$$\mathrm{conv}_S \mathbb{B} = \mathbb{B} + V,$$

где $V = \mathrm{conv}_S \{0\}$.

Тогда множество S будет сферически выпуклым.

Доказательство. Обозначим через S_1 множество

$$\mathbb{S} \cap \mathrm{conv}\left\{ts : t \geqslant 0,\ s \in S\right\}.$$

Как несложно показать, это множество будет замкнутым, сферически выпуклым и выполняется равенство $\mathrm{conv}_{S_1}\{0\} = V$, поэтому из предложения 12 следует равенство $\mathrm{conv}_{S_1}\mathbb{B} = \mathbb{B} + V$. В таком случае из равенства 14 вытекает равенство $S = S_1$, что и доказывает искомое. □

4. Интегралы от экспонент

В данном параграфе мы покажем, что множества сходимости интегралов от экспонент тесно связаны со слабо S-выпуклыми множествами.

Пусть Λ — произвольное замкнутое подмножество пространства $\mathbb{E}$. Для комплексной меры Радона μ на множестве Λ мы будем изучать множество точек $x \in \mathbb{E}$, в которых определен интеграл

$$\int_\Lambda e^{\lambda x}\, d\mu(\lambda). \tag{15}$$

Как известно, интеграл $\int_\Lambda f(\lambda)\, d\mu(\lambda)$ от непрерывной функции f определен тогда и только тогда, когда определен интеграл $\int_\Lambda |f(\lambda)|\, d|\mu|(\lambda)$.

Важным примером интеграла (15) является ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{\lambda_n x},\ x \in \mathbb{E},\ a_n \in \mathbb{C},\ \lambda_n \in \Lambda,\ n \in \mathbb{N}, \tag{16}$$

для которого выполнено условие

$$\forall R \in \mathbb{R} \sum_{|\lambda_n| \leqslant R} |a_n| < \infty.$$

Заметим, что интегралы вида (15) участвуют в описании решений дифференциальных уравнений в частных производных с постоянными коэффициентами.

Предложение 14. *Множество $M \subset \mathbb{E}$ существования интеграла* (15) *является выпуклым, а сам интеграл сходится равномерно на компактах множества* $\mathrm{ri}\, M$ *к непрерывной функции.*

Доказательство. Функция вида

$$f_n(x) = \int_{\{\lambda\in\Lambda:|\lambda|\leqslant n\}} e^{\lambda x}\, d\mu(\lambda),\ \ n \in \mathbb{N},$$

представляется всюду сходящимся рядом Тейлора

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\int_{\{\lambda\in\Lambda:|\lambda|\leqslant n\}} \lambda^k\, d\mu(\lambda) \right) \frac{x^k}{k!},$$

поэтому она является вещественно–аналитической функцией. Так же как в теореме 3.1.1 монографии [2] показывается, что интеграл

$$\int_\Lambda e^{\lambda x}\, d|\mu|(\lambda)$$

сходится на некотором выпуклом множестве $M \subset \mathbb{E}$ и, очевидно, определяет выпуклую на нем функцию. В таком случае эта функция непрерывна на множестве $\operatorname{ri} M$ (см. [4]), и по теореме Дини

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\{\lambda\in\Lambda:|\lambda|\leqslant n\}} e^{\lambda x}\, d|\mu|(\lambda) = \int_\Lambda e^{\lambda x}\, d|\mu|(\lambda)$$

равномерно на любом компакте множества $\operatorname{ri} M$. □

Следствие *Пусть интеграл*

$$\int_\Lambda e^{\langle\lambda, z\rangle}\, d\mu(\lambda)$$

в пространстве $\mathbb{H}$ *сходится на множестве* M *и множество* $\operatorname{ri} M$ *имеет комплексную структуру. Тогда на этом множестве интеграл голоморфен.*

Непустое множество $M \subset \mathbb{E}$ назовем множеством Λ-интегрируемости, если найдется положительная мера Радона μ на множестве Λ и совокупность точек $x \in \mathbb{E}$ существования интеграла (15) совпадает с множеством M. Как показано выше, множество Λ-интегрируемости выпукло.

Ниже будем предполагать, что μ — положительная мера Радона на множестве Λ. Имеет место простой, но важный результат.

Лемма 4. *Пусть для множества* $S \subset \mathbb{S}$ *и числа* $R \geqslant 0$ *выполнено условие*

$$\lambda \in \Lambda,\ |\lambda| > R \Rightarrow \frac{\lambda}{|\lambda|} \in S. \tag{17}$$

Тогда для точек $x, x_1, \dots, x_k \in \mathbb{E},\ x \in \operatorname{conv}_S \{x_1, \dots, x_k\}$ *имеют место следующие неравенства:*

$$f(x) \leqslant e^{R|x-x_1|} f(x_1) + \sum_{j=2}^{k} f(x_j),$$

где

$$f(x) = \int_\Lambda e^{\lambda x}\, d\mu(\lambda). \tag{18}$$

Доказательство. Для показателей с условием $|\lambda| > R$, очевидно, имеет место неравенство

$$\lambda x \leqslant \max_{1\leqslant j\leqslant k} \lambda x_j,$$

из чего заключаем:

$$e^{\lambda x} \leqslant \sum_{j=1}^{k} e^{\lambda x_j}$$

для таких показателей.

Оценим теперь функцию f в точке x:

$$f(x) = \int_{\{\lambda\in\Lambda:|\lambda|\leqslant R\}} e^{\lambda x}\,d\mu(\lambda) + \int_{\{\lambda\in\Lambda:|\lambda|>R\}} e^{\lambda x}\,d\mu(\lambda) \leqslant$$

$$\leqslant \int_{\{\lambda\in\Lambda:|\lambda|\leqslant R\}} e^{\lambda(x-x_1)}e^{\lambda x_1}\,d\mu(\lambda) + \sum_{j=2}^{k}\int_{\{\lambda\in\Lambda:|\lambda|>R\}} e^{\lambda x}\,d\mu(\lambda) \leqslant$$

$$\leqslant e^{R|x-x_1|}f(x_1) + \sum_{j=2}^{k} f(x_j).$$

□

Для множества Λ введем множество предельных направлений $P(\Lambda)$ как совокупность точек $s\in\mathbb{S}$, для которых найдется последовательность элементов $\{\lambda_n\in\Lambda,\ n\in\mathbb{N}\}$, что

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\lambda_n}{|\lambda_n|} = s,\ \lim_{n\to\infty}|\lambda_n| = \infty.$$

Очевидно, это множество замкнуто.

Покажем, что условие предыдущей леммы выполняется для вздутия множества предельных направлений множества Λ.

Предложение 15. *Для любого числа $\varepsilon>0$ найдется число $R=R(\varepsilon)\geqslant 0$, что множество $S=P(\Lambda)_\varepsilon$ удовлетворяет соотношению* (17).

Доказательство. Предположим, что для некоторого числа $\varepsilon>0$ такого R не существует, следовательно, найдется последовательность $\{\lambda_n : n\in\mathbb{N}\}$ элементов Λ, со свойством:

$$|\lambda_n|\geqslant n,\ \frac{\lambda_n}{|\lambda_n|}\notin S. \tag{19}$$

Из этой последовательности можно выбрать подпоследовательность $\{\lambda_{n_k} : k\in\mathbb{N}\}$, что для некоторой точки $s\in\mathbb{S}$

$$\lim_{k\to\infty}\frac{\lambda_{n_k}}{|\lambda_{n_k}|} = s.$$

В силу соотношения (19) точка s, очевидно, не принадлежит множеству $P(\Lambda)$, что противоречит определению этого множества, и искомое доказано. □

Предложение 16. *Пусть интеграл* (15) *определен на множестве $M\subset\mathbb{E}$ и S равно $P(\Lambda)$.*

Тогда этот интеграл будет определен и на множестве $\operatorname{int}\operatorname{conv}_S M$, причем для любого его компакта K существует число $c>0$ и точки $x_1\dots,x_k\in M$, зависящие только от множества Λ, что для функции (18) *выполнено неравенство*

$$\max_{x\in K} f(x)\leqslant c\max\{f(x_1),\dots,f(x_k)\}.$$

Доказательство. Обозначим через D множество точек существования интеграла (15). Из предложения 15, леммы 4 и следствия 1 леммы 1 вытекает, что множество $\operatorname{int}D$ является слабо S-выпуклым.

Как показано выше, множество $\overline{D}$ также будет слабо S-выпуклым, поэтому $\operatorname{conv}_S M\subset\overline{D}$, и, следовательно, $\operatorname{int}\operatorname{conv}_S M\subset\operatorname{int}D$, и утверждение вытекает из вышеперечисленных ссылок. □

Покажем, что подобный результат для относительной внутренности неверен.

Пример 5 Пусть

$$\mathbb{E}=\mathbb{R}^2,\ \lambda_{2n-1}=(n,n^2), \lambda_{2n}=(n,-n^2), n\in\mathbb{N},\ \Lambda=\{\lambda_n\}.$$

Множество M сходимости ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{\lambda_n x}, \ x \in \mathbb{R}^2,$$

очевидно, совпадает с множеством $\{(x^1, 0) : x^1 < 0\}$, а множество S предельных направлений последовательности Λ равно $\{(0,1), (0,-1)\}$.

Как легко показать, $\operatorname{conv}_S M = \{(x^1, 0) : x^1 \in \mathbb{R}\}$, так что

$$\operatorname{ri}\operatorname{conv}_S M = \operatorname{conv}_S M \neq M.$$

Покажем, что для изучения неполномерных множеств Λ-интегрируемости можно ограничиться мерами на подпространствах.

Предложение 17. *Пусть постоянные функции интегрируемы по мере μ и L — подпространство пространства $\mathbb{E}$.*

Тогда найдется положительная мера Радона μ_1 на множестве $\Lambda_1 = \overline{\Pi_L(\Lambda)}$, что для точек $x \in L$, в которых μ-интегрируема функция $\exp \lambda x$, $\lambda \in \Lambda$, будет μ_1-интегрируема функция $\exp \lambda_1 x$, $\lambda_1 \in \Lambda_1$, и выполняется равенство

$$\int_\Lambda e^{\lambda x}\, d\mu(\lambda) = \int_{\Lambda_1} e^{\lambda_1 x}\, d\mu_1(\lambda_1). \tag{20}$$

Доказательство. Определим функционал F на пространстве $C_0(\Lambda_1)$ непрерывных функций на множестве Λ_1 с компактным носителем по формуле

$$\langle F, f\rangle = \int_\Lambda f(\Pi_L(\lambda))\, d\mu(\lambda).$$

Из неравенства

$$\langle F, f\rangle \leqslant \max_{\Lambda_1} |f(\lambda)| \int d\mu(\lambda)$$

заключаем, что этот функционал дает положительную меру Радона μ_1 на множестве Λ_1. Равенство (20) вытекает из элементарных свойсв интеграла. □

Для описания свойств неполномерных множеств Λ-интегрируемости нам понадобится следующая конструкция, сопоставляющая линейным подпространствам пространства $\mathbb{E}$ замкнутые подмножества единичной сферы.

Пусть $L \subset \mathbb{E}$ линейное пространство. Введем по индукции следующий набор объектов.

Положим

$$S_0 = \varnothing, \ L_1 = \mathbb{E}, \ \Lambda_1 = \Lambda, \ \widetilde{S}_j = P(\Lambda_j), \ S_j = S_{j-1} \cup \widetilde{S}_j,$$
$$L_{j+1} = \operatorname{aff}\operatorname{conv}_{S_j} L, \ \Lambda_{j+1} = \overline{\Pi_{L_{j+1}}(\Lambda)}, \ j \in \mathbb{N}.$$

Ясно, что множества S_j будут замкнутыми подмножествами единичной сферы, а L_j — линейными пространствами, убывающими по включению, $j \in \mathbb{N}$, поэтому для некоторого числа $m \in \mathbb{N}$ получим равенство $L_m = L_{m+1}$.

Множество S_m и будем сопоставлять пространству L. Обозначим это множество через $T(L, \Lambda)$.

Заметим, что множества $\widetilde{S}_2, \ldots, \widetilde{S_{m-1}}$ не пусты, иначе последовательность стабилизировалась бы раньше.

Этот набор объектов назовем (Λ, L)-цепочкой.

Назовем (Λ, L)-цепочку точной, если $\left(\Lambda, \widetilde{L}\right)$-цепочка для любого линейного подпространства $\widetilde{L} \subset L$, $\widetilde{L} \neq L$, стабилизируется на линейном пространстве, отличном от L_m.

Ясно, что всегда найдется линейное подпространство $\widetilde{L} \subset L$, что $\left(\Lambda, \widetilde{L}\right)$-цепочка будет точной, и ее последнее линейное пространство совпадает с L_m.

Теорема 1. *Пусть интеграл* (15) *определен на множестве $M \subset \mathbb{E}$, а линейное пространство $L \subset \mathbb{E}$ параллельно пространству* $\operatorname{aff} M$.

Тогда этот интеграл будет существовать на множестве $D = \operatorname{ri}\operatorname{conv}_S M$, где $S = T(L, \Lambda)$.

Доказательство. Без ограничения общности можно считать, что множество M выпуклое и $0 \in \operatorname{ri} M$.

Множество D, очевидно, лежит в линейном пространстве L_m и, по утверждению 11, открыто в его топологии.

Для точек $x \in L_m$ интеграл (15), как показано выше, можно записать в виде

$$\int_{\Lambda_m} e^{\lambda x}\, d\mu_m(\lambda),\ x \in L_m,$$

для некоторой положительной меры Радона μ_m на множестве Λ_m.

Таким образом, это интеграл в евклидовом пространстве L_m, определенный на множестве $M \subset L_m$. Утверждение 16 влечет, что интеграл будет определен и на множестве $\operatorname{ri}\operatorname{conv}_{\widetilde{S_m}} M$. Но множество $\widetilde{S_m}$, по построению, содержится во множестве S, и, следовательно, множество существования данного интеграла включает в себя множество D. $\square$

Следствие. *Пусть $M \subset \mathbb{E}$ является множеством Λ-интегрируемости, линейное пространство $L \subset \mathbb{E}$ параллельно пространству $\operatorname{aff} M$, а множество S равно $T(L, \Lambda)$.*

Тогда множество $\operatorname{ri} M$ будет слабо S-выпуклым.

Действительно, из только что доказанной теоремы вытекает включение

$$\operatorname{ri}\operatorname{conv}_S M \subset M,$$

и искомое вытекает из следствия 2 предложения 5.

Покажем теперь, что в вышеприведенной конструкции возможна любая цепочка пространств.

Предложение 18. *Пусть $\mathbb{E} = L_1 \supset \cdots \supset L_m \supset L$ — линейные пространства, $L_j \neq L_{j+1},\ j = 1, \dots, m-1$.*

Тогда найдется последовательность $\Lambda = \{\lambda_n \in \mathbb{E} : n \in \mathbb{N}\}$, уходящая на бесконечность, что (Λ, L)-цепочка точна, и ее линейные пространства совпадают с последовательностью $\{L_1, \dots, L_m\}$.

Доказательство. Построим ортонормированную систему векторов

$$e_1, \dots, e_{k_1}, \dots, e_{k_{m-1}} \in \mathbb{E},$$

для которой вектора $e_1, \dots, e_{k_1}, \dots, e_{k_j}$ образуют базис в пространстве $L_{j+1}^{\perp},\ j = 1, \dots, m-1$, и последовательность $\{s_n \in L \cap \mathbb{S} : n \in \mathbb{N}\}$, всюду плотную на множестве $L \cap \mathbb{S}$.

В качестве последовательности Λ возьмем множество

$$\bigcup_{j_1=1}^{k_1} \bigcup_{j_2=k_1+1}^{k_2} \cdots \bigcup_{j_{m-1}=k_{m-2}-1}^{k_{m-1}} \{\pm n^m e_{j_1} \pm n^{m-1} e_{j_2} \pm \dots$$
$$\pm n^2 e_{j_{m-1}} \pm n s_n : n \in \mathbb{N}\}.$$

Как несложно видеть, множество $S_1 = P(\Lambda)$ равно $\{\pm e_1, \dots, \pm e_{k_1}\}$. Покажем, что имеет место равенство

$$\operatorname{conv}_{S_1} L = L_2.$$

Действительно, для любых векторов $x \in \mathbb{E}$ и $x_1, \dots, x_k \in L$ условия

$$sx \leqslant \max_{1 \leqslant j \leqslant k} sx_j,\ s \in S_1,$$

очевидно, эквивалентны равенствам $e_1x = 0, \ldots, e_{k_1}x = 0$, что, в свою очередь, эквивалентно включению $x \in L_2$.

Ортогональная проекция последовательности Λ на пространство L_2, как легко видеть, совпадает с замкнутым множеством

$$\bigcup_{j_2=k_1+1}^{k_2} \cdots \bigcup_{j_{m-1}=k_{m-2}-1}^{k_{m-1}} \left\{\pm n^{m-1}e_{j_2} \pm \cdots \pm n^2 e_{j_{m-1}} \pm ns_n : n \in \mathbb{N}\right\},$$

так что имеем равенства $S_2 = \left\{\pm e_1, \ldots, \pm e_{k_1}, \ldots, \pm e_{k_2}\right\}$ и $\operatorname{conv}_{S_2} L = L_3$.

Наконец, найдем

$$S_{m-1} = \left\{\pm e_1, \ldots, \pm e_{k_1}, \ldots, \pm e_{k_{m-1}}\right\},$$
$$\operatorname{conv}_{S_{m-1}} L = L_m, \; S_m = S_{m-1} \cup (L \cap \mathbb{S}).$$

Покажем теперь, что $\operatorname{conv}_{S_m} L = L_m$.

Левая часть этого соотношения, очевидно, содержится в правой. Для доказательства обратного предположим, что вектор $x \in L_m$. В таком случае найдутся элементы $x_1 \in L$ и $y \in L_m \cap L^{\perp}$ с условием $x = x_1 + y$, и, очевидно, будет выполнено соотношение

$$sx = sx_1, \; s \in S_m,$$

и искомое включение доказано.

Предположим теперь, что $\widetilde{L} \subset L$ собственное линейное подпространство. Начало цепочки линейных пространств для него совпадает с аналогичной для пространства L.

Существует вектор $x \in L$ с условиями $|x| = 1, \; x \perp \widetilde{L}$. Для него, очевидно, будет выполнено соотношение $x \notin \operatorname{conv}_{S_m} \widetilde{L}$, что и доказывает утверждение. □

Из вышедоказанного вытекает, что относительно открытые и замкнутые множества Λ-интегрируемости, аффинная оболочка которых параллельна линейному пространству $L \subset \mathbb{E}$, будут слабо S-выпуклыми, где $S = T(L, \Lambda)$.

Для доказательства обратных результатов нам понадобятся несколько свойств рядов экспонент и их показателей.

Лемма 5. *Пусть ряд* (16) *с неотрицательными коэффициентами равномерно сходится на множестве $M \subset \mathbb{E}$, а на компакте $K \subset \mathbb{E}$ общий член этого ряда неограничен.*

Тогда для любых чисел $N \in \mathbb{N}$ и c, $0 < c < 1$, найдутся номера $p, q \in \mathbb{N}$, $N \leqslant p \leqslant q$, для которых будут выполнены неравенства

$$\max_{x \in M} \sum_{n=p}^{q} a_n e^{\lambda_n x} \leqslant c, \; \min_{x \in K} \max_{p \leqslant n \leqslant q} a_n e^{\lambda_n x} \geqslant c^{-1}.$$

Доказательство. Из равномерной сходимости ряда (16) на множестве M вытекает существование такого номера $p \in \mathbb{N}$, $p \geqslant N$, что для любого числа $m \in \mathbb{N}$, $m \geqslant p$, будет выполнено неравенство

$$\max_{x \in M} \sum_{n=p}^{m} a_n e^{\lambda_n x} \leqslant c.$$

С другой стороны, для любой точки $x \in K$ имеет место соотношение

$$a_r e^{\lambda_r x} > c^{-1}$$

для некоторого числа $r \in \mathbb{N}$, $r \geqslant p$. В силу непрерывности это неравенство будет выполнено в окрестности точки x. Принимая во внимание компактность множества K, несложно доказать существование номера $q \in \mathbb{N}$ с нужным свойством. □

Лемма 6. *Пусть множество S предельных направлений множества Λ не пусто.*

Тогда найдется последовательность $\{\lambda_n \in \Lambda : n \in \mathbb{N}\}$, что ее множество предельных направлений совпадает с S и

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|\lambda_n|} < \infty.$$

Доказательство. Существует последовательность $\{s_n \in S : n \in \mathbb{N}\}$, множество членов которой всюду плотно на множестве S, и каждый член повторяется бесконечное число раз. Для любого индекса $n \in \mathbb{N}$, по условию, можно найти точку $\lambda_n \in \Lambda$, для которой выполнены условия

$$\left|\frac{\lambda_n}{|\lambda_n|} - s_n\right| \leqslant \frac{1}{n},\ |\lambda_n| \geqslant 2^n.$$

Как несложно показать, последовательность $\{\lambda_n : n \in \mathbb{N}\}$ будет обладать нужными свойствами. $\square$

Докажем теперь результат, показывающий точность теоремы 1.

Предложение 19. *Пусть для выпуклого компакта $M \subset \mathbb{E}$ линейное пространство $L \subset \mathbb{E}$ параллельно пространству $\operatorname{aff} M$, и множество S равно $T(L, \Lambda)$.*

Тогда найдется ряд (16)*, который равномерно сходится на множестве M, а его общий член неограничен вне множества $\overline{\operatorname{conv}_S M}$.*

Доказательство. Очевидно, без ограничения общности можно предполагать, что $0 \in M$.

Множества $\widetilde{S}_1, \ldots, \widetilde{S_{m-1}}$ в (Λ, L)-цепочке не пусты, будем считать для определенности, что и множество $\widetilde{S_m} \neq \varnothing$.

Применяя лемму 6, найдем последовательности $\Lambda^j = \{\lambda_n^j \in \Lambda : n \in \mathbb{N}\}$ со свойствами

$$P(\Lambda^j) = \widetilde{S}_j,\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|\Pi_{L_j}(\lambda_n^j)|} < \infty,$$

$j = 1, \ldots, m$. У этих последовательностей, вообще говоря, могут быть общие члены.

Из различных элементов последовательностей $\Lambda^1, \ldots, \Lambda^m$ образуем подпоследовательность $\Gamma = \{\gamma_n : n \in \mathbb{N}\}$.

Рассмотрим следующие ряды:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^j e^{\lambda_n^j x},\ a_n^j = \frac{e^{-H\left(\Pi_{L_j}(\lambda_n^j), M\right)}}{\left|\Pi_{L_j}(\lambda_n^j)\right|},\ j = 1, \ldots, m,\ n \in \mathbb{N}. \tag{21}$$

Так как, очевидно, $H(\Pi_{L_j}(\lambda_n^j), M) = H(\lambda_n^j, M)$, то все эти ряды равномерно сходятся на множестве M.

Сумма рядов (21) после приведения подобных членов запишется в виде

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{\gamma_n x}. \tag{22}$$

Предположим, что члены ряда (22) ограничены в точке $x \in \mathbb{E}$. Так как члены рядов (21) положительны, то и они будут ограничены некоторым числом $c > 0$ в этой точке:

$$a_n^j e^{\lambda_n^j x} \leqslant c,\ j = 1, \ldots, m,\ n \in \mathbb{N}.$$

Для любой точки $s \in \widetilde{S}_1$ найдется последовательность $\left\{\lambda_{n_k}^1 : k \in \mathbb{N}\right\}$, что

$$\lim_{k\to\infty} |\lambda_{n_k}^1| = \infty,\ \lim_{k\to\infty} \frac{\lambda_{n_k}^1}{|\lambda_{n_k}^1|} = s,$$

поэтому
$$-\ln|\lambda^1_{n_k}| - H(\lambda^1_{n_k}, M) + \lambda^1_{n_k} x \leqslant \ln c,\ k \in \mathbb{N},$$
из чего, очевидно, получим неравенство
$$sx \leqslant H(s, M). \tag{23}$$

Из предложения (9) получаем включение $x \in \overline{\mathrm{conv}_{\widetilde{S_1}} M}$, и, значит, $x \in L_2$. Ясно, что в таком случае $\lambda^2_n x = \Pi_{L_2}(\lambda^2_n)x,\ n \in \mathbb{N}$, и, кроме того, очевидно, $H(\lambda^2_n, K) = H(\Pi_{L_2}(\lambda^2_n), K)$.

Повторяя эти рассуждения несколько раз, в конце получим искомое. □

Займемся теперь вторым основным результатом данной статьи.

Теорема 2. *Пусть множество $M \subset \mathbb{E}$ выпукло, линейное пространство $L \subset \mathbb{E}$ параллельно пространству* aff M, *и множество S равно $T(L, \Lambda)$. Пусть, далее, множество M слабо S-выпукло и либо замкнуто, либо относительно открыто.*

Тогда найдется ряд (16), *у которого множества абсолютной сходимости и ограниченности общего члена совпадают с множеством M.*

Доказательство. Как обычно, можно считать, что $0 \in \mathrm{ri}\, M$.

Предположим вначале, что множество M замкнуто.

Компакты $K_r = \{x \in M : |x| \leqslant r\},\ r \in \mathbb{N}$, исчерпывают множество M, и их аффинная оболочка, очевидно, совпадает с линейным пространством L. С другой стороны, компакты
$$F_r = \{x \in \mathbb{E} \setminus M : |x| \leqslant r, \rho(x, M) \geqslant 1/r\},\ r \in \mathbb{N},$$
исчерпывают дополнение множества M.

Множество $M_r = \overline{\mathrm{conv}_S K_r}$, очевидно, лежит во множестве M, и поэтому, не пересекается с множеством $F_r,\ r \in \mathbb{N}$. В таком случае, применяя утверждение 19 и лемму 5, последовательно найдем натуральные числа $p_1, q_1, p_2, q_2, \ldots$, с условием $p_r \leqslant q_r < p_{r+1}$, и $a_{p_r}, \ldots, a_{q_r} \geqslant 0,\ r \in \mathbb{N}$, для которых выполнены неравенства
$$\max_{x\in K_r} \sum_{n=p_r}^{q_r} a_n e^{\lambda_n x} \leqslant 2^{-r},\ \min_{x\in F_r} \max_{p_r \leqslant n \leqslant q_r} a_n e^{\lambda_n x} \geqslant 2^r.$$

Полагая $a_n = 0$ для индексов $n = 1, \ldots, p_1 - 1$ и $q_r < n < p_{r+1},\ r \in \mathbb{N}$, получим ряд (16) с нужными свойствами.

Рассмотрим теперь случай относительно открытого множества M.

Множество $\partial M = \overline{M} \setminus M$ замкнуто, ибо оно является границей множества M в пространстве L, поэтому если добавить к множеству F_r множество $\{x \in \partial M : |x| \leqslant r\},\ r \in \mathbb{N}$, то получатся компакты, исчерпывающие дополнение множества M.

Компакты
$$K_r = \left\{x \in \frac{r}{r+1}\overline{M} : |x| \leqslant r\right\},\ r \in \mathbb{N},$$
очевидно, исчерпывают множество M.

Принимая во внимание утверждение 1, можно, как и выше, построить нужную функцию.

Теорема доказана. □

Следствие 1. *Пусть выпуклое множества $M \subset \mathbb{E}$ замкнуто или относительно открыто и не является множеством Λ-интегрируемости.*

Тогда найдется точка $x \in \mathbb{E} \setminus M$, в которой определены все интегралы вида (15), *определенные на множестве M.*

Действительно, пусть линейное пространство $L \subset \mathbb{E}$ параллельно пространству aff M, и множество S равно $T(L, \Lambda)$.

По теореме 1, любой интеграл вида (15), определенный на множестве M, будет определен на множестве $\mathrm{ri}\,\mathrm{conv}_S M$. Если утверждение не верно, то должно выполняться включение $\mathrm{ri}\,\mathrm{conv}_S M \subset M$. В таком случае из следствия 2 предложения 5 вытекает, что множество $\mathrm{ri}\,M$, а следовательно, и $\overline{M}$ будут слабо Λ-выпуклыми. Но это противоречит теореме, и искомое доказано.

Следствие 2. *Пусть M подмножество $\mathbb{E}$ и $S = P(\Lambda)$.*

Для того чтобы любое множество Λ-интегрируемости, содержащее множество M, имело непустую внутренность, необходимо и достаточно условие $\mathrm{int}\,\mathrm{conv}_S M \neq \varnothing$.

Необходимость. Пусть линейное пространство $L \subset \mathbb{E}$ параллельно пространству $\mathrm{aff}\, M$, и множество $\widetilde{S}$ равно $T(L,\Lambda)$. Применяя следствие теоремы 1 и теорему 2, получим, что множество $D = \overline{\mathrm{conv}}_{\widetilde{S}} M$ будет множеством Λ-интегрируемости, очевидно, содержащим множество M. В таком случае множество D будет полномерным, а из определения множества $T(L,\Lambda)$ несложно вывести, что тогда выполняется равенство $T(L,\Lambda) = S$. По известным свойствам выпуклых множеств интересующее нас множество непусто.

Достаточность вытекает из предложения 16.

Докажем теперь усиление теоремы 2 для относительно открытых выпуклых множеств комплексного пространства.

Пусть $\mathbb{H}$ — конечномерное гильбертово пространство со скалярным произведением $zw,\ z,w \in \mathbb{H}$. Как указывалось выше, это пространство можно рассматривать как евклидово со скалярным произведением $\mathrm{Re}\, zw,\ z,w \in \mathbb{H}$, поэтому для него имеют место все вышеизложенные результаты.

Пусть Λ — замкнутое подмножество пространства $\mathbb{H}$. Рассмотрим ряды вида

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{\lambda_n z}, \tag{24}$$

где $z,\ \lambda_n \in \Lambda,\ a_n \in \mathbb{C},\ n \in \mathbb{N}$.

Теорема 3. *Пусть множество $U \subset \mathbb{H}$ выпукло и относительно открыто, вещественное линейное пространство $L \subset \mathbb{H}$ параллельно пространству $\mathrm{aff}\, U$ и множество S равно $T(L,\Lambda)$. Пусть, далее, множество U слабо S-выпукло.*

Тогда найдется ряд (24) с неотрицательнами коэффициентами, у которого множества абсолютной сходимости и ограниченности общего члена совпадают с множеством U, а сумма этого ряда $f(z)$ неограничена в точках относительной границы ∂U множества U:

$$\varlimsup_{z\to z_0, z\in U} |f(z)| = \infty,\ z_0 \in \partial U.$$

Доказательство. Можно считать, что $0 \in \mathrm{ri}\, U$.

Пусть $K_n,\ n \in \mathbb{N}$, последовательность компактов множества U, относительная внутренность которых исчерпывает это множество, а множество точек

$$\{s_n \in \mathbb{S} : n \in \mathbb{N}\}$$

всюду плотно на множестве $\{z/|z| : z \in \partial U\}$.

Положим $V_1 = K_1,\ M_1 = \overline{\mathrm{conv}_S V_1}$. Замкнутое множество M_1, как указывалось выше, лежит во множестве U, поэтому найдется число $t_1 > 0$, что точка $z_1 = t_1 s_1$ принадлежит множеству $U \setminus M_1$. В качестве множества V_2 возьмем первое из множеств $K_j,\ j \in \mathbb{N}$, которое содержит точку z_1.

Продолждая подобным образом, найдем последовательность компактов V_j и чисел $t_j > 0$ со свойством

$$z_j \in V_{j+1} \setminus \overline{\mathrm{conv}_S V_j},$$

где $z_j = t_j s_j,\ j \in \mathbb{N}$. Ясно, что эти компакты исчерпывают множество U.

В предыдущей теореме мы построили ряд с неотрицательными коэффициентами

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e^{\lambda_n z},\ \lambda_n \in \Lambda, \tag{25}$$

у которого множества абсолютной сходимости и ограниченности общего члена совпадают с множеством U. Сумму этого ряда обозначим через $h(z)$.

Применяя утверждение 19 и лемму 5, последовательно найдем числа $\beta_j > 0$ и точки $\mu_j \in \Lambda$, удовлетворяющие неравенствам

$$\max_{z \in V_j} |\beta_j e^{\mu_j z}| \leqslant 2^{-j},\ |\beta_j e^{\mu_j z_j}| \geqslant 2 + 2^j + \left| h(z_j) + \sum_{k=1}^{j-1} \beta_k e^{\mu_k z_j} \right|,$$

$j \in \mathbb{N}$.

Ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n e^{\mu_n z}, \tag{26}$$

очевидно, абсолютно сходится на множестве U. Покажем, что ряд, полученный как сумма последнего ряда и ряда (25) после приведения подобных членов, будет удовлетворять нужным условиям.

Действительно, коэффициенты этих рядов неотрицательны, поэтому общий член полученного ряда неограничен вне множества U, а для его суммы $f(z)$ выполнены неравенства $|f(z_j)| \geqslant 2^j,\ j \in \mathbb{N}$.

Пусть теперь z_0 — произвольная точка множества ∂U и $s = z_0/|z_0|$. В таком случае найдется последовательность точек $\{s_{n_k} : k \in \mathbb{N}\}$, сходящаяся к точке s, и нам осталось доказать, что будет выполнено соотношение

$$\lim_{k \to \infty} t_{n_k} s_{n_k} = z_0.$$

Предположим, что это не верно. Тогда найдется число $\varepsilon > 0$ и подпоследовательность $\{u_p : p \in \mathbb{N}\}$ последовательности $\{t_{n_k} s_{n_k} : k \in \mathbb{N}\}$, для которой имеют место либо неравенства $|u_p| \geqslant |z_0| + \varepsilon,\ p \in \mathbb{N}$, либо неравенства $|u_p| \leqslant |z_0| - \varepsilon,\ p \in \mathbb{N}$.

Рассмотрим вначале первый случай. Точки

$$\frac{u_p}{|u_p|} \left(|z_0| + \varepsilon \right),\ p \in \mathbb{N},$$

очевидно, принадлежат множеству U и сходятся к точке $z_0 + \varepsilon s$. Таким образом, точка z_0 лежит на интервале $(0, z_0 + \varepsilon s)$, причем точка $z_0 + \varepsilon s$ лежит во множестве $\overline{U}$, что противоречит соотношению $z_0 \notin U$ (см. [7], с. 9).

Во-втором случае можно считать, что последовательность $\{|u_p| : p \in \mathbb{N}\}$ сходится к некоторому числу t_0, и поэтому последовательность $\{u_p : p \in \mathbb{N}\}$ будет сходиться к точке $t_0 s$. Эта точка, как указывалось выше, принадлежит множеству U, и, следовательно, множество $\{u_p : p \in \mathbb{N}\} \cup \{t_0 s\}$ компактно лежит в U. Но любой компакт множества U попадает в некоторый компакт $V_j,\ j \in \mathbb{N}$, содержащий лишь конечное число точек последовательности $\{u_p : p \in \mathbb{N}\}$.

Полученное противоречие и доказывает теорему. □

5. Приложения

В данном параграфе мы приведем некоторые свойства множеств Λ-интегрируемости.

Предложение 20. *Эквивалентны следующие условия:*

1. *Множество $\{0\}$ не является множеством Λ-интегрируемости.*

2. *Множество Λ лежит в некотором полупространстве пространства $\mathbb{E}$.*
3. *Любое множество Λ-интегрируемости неограничено.*

Доказательство. $1 \Rightarrow 2$. Из следствия теоремы 2 вытекает, что найдется вектор $x_0 \in \mathbb{E}$, $x_0 \neq 0$, что любой интеграл вида (15), определенный в нуле, будет определен и в точке x_0. Докажем, что существует число $c \in \mathbb{R}$ со свойством

$$\lambda x_0 \leqslant c, \ \lambda \in \Lambda. \tag{27}$$

Действительно, в противном случае найдется последовательность

$$\{\lambda_n \in \Lambda : n \in \mathbb{N}\},$$

что $\lambda_n x_0 \geqslant n^2, \ n \in \mathbb{N}$. Ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{\lambda_n x}}{\lambda_n x_0}$$

сходится в нуле, но, очевидно, расходится в точке x_0, что и доказывает искомую импликацию.

$2 \Rightarrow 3$. По условию, найдется вектор $x_0 \in \mathbb{E}, \ x_0 \neq 0$, и число $c \in \mathbb{R}$, для которых выполнено неравенство (27). Если интеграл вида (15) определен в некоторой точке $x_1 \in \mathbb{E}$, то из неравенства

$$\int_\Lambda e^{\lambda(x_1+tx_0)}\, d\mu(\lambda) \leqslant e^{tc} \int_\Lambda e^{\lambda x_1}\, d\mu(\lambda), \ t \geqslant 0,$$

вытекает истинность второй импликации.

Последняя импликация очевидна. □

Предложение 21. *Любое множество Λ-интегрируемости имеет непустую внутренность тогда и только тогда, когда множество Λ лежит в некотором выпуклом остром конусе.*

Доказательство. Пусть

$$S = P(\Lambda), \ K_\varepsilon = \mathrm{conv} S_\varepsilon, \ U_\varepsilon = \{tx : t \geqslant 0, \ x \in K_\varepsilon\}, \ \varepsilon > 0.$$

Ясно, что множество U_ε является замкнутым выпуклым конусом с вершиной в нуле.

Предположим, что все множества Λ-интегрируемости имеют непустую внутренность. В таком случае из следствия 2 теоремы 2 несложно вывести неравенство $\mathrm{int}\,\mathrm{conv}_S\{0\} \neq \varnothing$.

Докажем существование числа $\varepsilon > 0$, для которого конус U_ε будет острым.

Действительно, в противном случае для любого числа $\varepsilon > 0$ существуют различные точки $\alpha_\varepsilon, \ \beta_\varepsilon \in \mathbb{E}$, что прямая $\{t\alpha_\varepsilon + (1-t)\beta_\varepsilon : t \in \mathbb{R}\}$ лежит в конусе U_ε. В этом случае, как несложно показать, вектора $\pm s_\varepsilon$, где $s_\varepsilon = (\alpha_\varepsilon - \beta_\varepsilon)/|\alpha_\varepsilon - \beta_\varepsilon|$, будут принадлежать конусу U_ε.

Найдутся стремящаяся к нулю последовательность $\{\varepsilon_n\}$ и вектор $s_0 \in \mathbb{S}$, для которых $s_{\varepsilon_n} \to s_0$. Очевидно, что $\pm s_0 \in U_0$.

Как несложно показать, для точек x множества $\mathrm{conv}_S\{0\}$ выполняются неравенства

$$sx \leqslant 0, \ s \in V_0,$$

поэтому $s_0 x = 0$, что противоречит непустой внутренности этого множества.

Итак, существует число $\varepsilon > 0$ с нужным свойством. Согласно утверждению 15, найдется число $R \geqslant 0$, что множество Λ содержится во множестве $\{x \in \mathbb{E} : |x| < R\} \cup U_\varepsilon$. Но конус U_ε имеет непустую внутренность, и если $x_0 \in \mathrm{int}\, U_\varepsilon$, то для некоторого числа $t \geqslant 0$ конус $-tx_0 + U_\varepsilon$ будет содержать шар $\{x \in \mathbb{E} : |x| < R\}$ и конус U_ε. Первая половина предложения доказана.

Обратно, пусть для выпуклого острого замкнутого конуса $V \subset \mathbb{E}$ с вершиной в нуле и вектора $\alpha \in \mathbb{E}$ выполняется включение $\Lambda \subset \alpha + V$. В таком случае множество S, очевидно, будет лежать в конусе V.

Как легко видеть, нам достаточно доказать, что множество $\mathrm{conv}_S\{0\}$ имеет непустую внутренность.

Допустим это не верно. В таком случае, очевидно, последнее множество будет лежать в некоторой гиперплоскости, проходящей через начало координат, т. е. найдется вектор $\alpha \in \mathbb{S}$, что выполняется импликация

$$sx \leqslant 0,\ s \in S \Rightarrow \alpha x = 0.$$

Используя теорему Хана–Банаха, несложно вывести включение $\pm\alpha \in V$, и, поэтому конус V не острый.

Утверждение доказано. □

Предложение 22. *Пусть $L \subset \mathbb{E}$ линейное подпространство, $\{0\} \neq L \neq \mathbb{E}$.*

Для того чтобы любое множество Λ-интегрируемости, содержащее окрестность нуля пространства L, содержало окрестность нуля пространства $\mathbb{E}$, необходимо и достаточно выполнения соотношения $0 \notin \Pi_L(P(\Lambda))$.

Доказательство. Необходимость. Положим $M = \mathbb{B} \cap L,\ S = T(L, \Lambda)$. По теореме 1 множество $\overline{\mathrm{conv}_S M}$ является множеством Λ-интегрируемости, следовательно, оно содержит шар $\delta\mathbb{B}$ для некоторого числа $\delta > 0$. Из определения множества $T(L, \Lambda)$ заключаем, что имеет место равенство
$T(L, \Lambda) = P(\Lambda)$.

Как несложно видеть, выполнены соотношения

$$H(s, M) = H(\Pi_L(s), M) = |\Pi_L(s)|,\ s \in \mathbb{S},$$

поэтому из предложения 9 получим

$$sx \leqslant |\Pi_L(s)|,\ |x| \leqslant \delta,\ s \in S,$$

и, полагая $x = \delta s$, докажем первую половину предложения.

Так как проекция компакта является компактом, то достаточность легко выводится из предложения 6. □

Следствие *Пусть F — неприводимый многочлен n переменных над полем комплексных чисел, и его главная часть не обращается в нуль на вещественной сфере.*

Тогда любая функция $u \in C^\infty(\{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1\})$, удовлетворяющая уравнению

$$F\left(\frac{d}{dx}\right) u = 0,$$

будет вещественно–аналитической.

Если положить $\Lambda = \{\lambda \in \mathbb{C}^n : F(\lambda) = 0\}$, то множество $P(\Lambda)$ совпадает с множеством нулей главной части многочлена F на комплексной единичной сфере, и искомое несложно вывести из результатов статьи [8].

Рассмотрим теперь ряды типа Тейлора в конечномерном гильбертовом пространстве $\mathbb{H}$.

Предложение 23. *Для векторов $\alpha_1, \dots, \alpha_l \in \mathbb{H}$ положим*

$$V = \{z \in \mathbb{H} : \mathrm{Re}\,\alpha_j z \leqslant 0,\ j = 1, \dots, l\},$$

и обозначим через Λ занумерованное каким-нибудь образом множество

$$\left\{\sum_{j=1}^{l} n_j \alpha_j : n_j \in \mathbb{N}_0,\ j = 1, \dots, l\right\}.$$

Тогда ряды вида (24) обладают следующими свойствами.

1. *Ряд* (24)*, абсолютно сходящийся в точках* $z_1, \dots, z_k \in \mathbb{H}$*, будет абсолютно и равномерно сходиться на множестве* $\operatorname{conv}\{z_1, \dots, z_k\} + V$*.*
2. *Любое множество абсолютной* Λ*-интегрируемости* $M \subset \mathbb{H}$ *удовлетворяет равенству* $M + V = M$*.*
3. *Для выпуклого замкнутого множества* $M \subset \mathbb{H}$*,* $M + V = M$ *найдется ряд вида* (24)*, у которого множества абсолютной сходимости и ограниченности общего члена совпадают с множеством* M*.*
4. *Для выпуклого относительно открытого множества* $D \subset \mathbb{H}$*,* $D + V = D$ *найдется ряд вида* (24)*, абсолютно сходящийся на множестве* U*, сумма которого неограничена в каждой точке относительной границы этого множества.*

Доказательство. Обозначим через S множество

$$\mathbb{S} \cap \left\{ \sum_{j=1}^{l} t_j \alpha_j : t_j \geqslant 0,\ j = 1, \dots, l \right\}.$$

Очевидно, это замкнутое множество, удовлетворяющее включению $P(\Lambda) \subset S$. Покажем, что верно и обратное включение.

Действительно, пусть вектор $s = \sum_{j=1}^{l} t_j \alpha_j,\ t_j \geqslant 0$, имеет единичную норму и, для определенности, $t_1 > 0$. Найдутся последовательности натуральных чисел $\left\{ m_j^n : n \in \mathbb{N} \right\}$ $j = 1, \dots, l$, удовлетворяющие соотношениям

$$\lim_{n\to\infty} m_1^n = \infty,\ \lim_{n\to\infty} \frac{m_j^n}{m_1^n} = \frac{t_j}{t_1},\ j = 2, \dots, l.$$

В таком случае

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{j=1}^{l} m_j^n \alpha_j}{\left| \sum_{j=1}^{l} m_j^n \alpha_j \right|} = s,$$

а из равенства

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left| \sum_{j=1}^{l} m_j^n \alpha_j \right|}{m_1^n} = \frac{1}{t_1}$$

заключаем, что

$$\lim_{n\to\infty} \left| \sum_{j=1}^{l} m_j^n \alpha_j \right| = \infty,$$

и, следовательно, $s \in P(\Lambda)$.

Заметим, что множество S сферически выпуклое и выполнено равенство $\operatorname{conv}_S \{0\} = V$, поэтому из предложения 12 следует соотношение $\operatorname{conv}_S M = M + V$ для любого выпуклого множества $M \subset \mathbb{H}$.

Имеют место очевидные включения

$$\frac{\lambda_n}{|\lambda_n|} \in S,\ n \in \mathbb{N},$$

и первый пункт вытекает из леммы 4, который, в свою очередь, влечет пункт второй.

Предположим теперь, что для выпуклого множества $M \subset \mathbb{H}$ выполнено условие $M + V = M$, а линейное пространство $L \subset \mathbb{H}$ параллельно пространству $\operatorname{aff} M$. Так как $T(L, \Lambda) \supset P(\Lambda) = S$, то имеет место соотношение $\operatorname{conv}_{T(L,\Lambda)} M \subset \operatorname{conv}_S M = M$, поэтому, очевидно, $\operatorname{conv}_{T(L,\Lambda)} M = M$, и оставшиеся пункты вытекают из теорем 2 и 3.

Утверждение доказано. □

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. E. Hille *Note on Dirichlet's series with complex exponents* // Ann. Of Math, 1924, V. 25. P. 261–278.
2. Леонтьев А.Ф. *Ряды экспонент.* М.: Наука. 1976. 536 с.
3. Кривошеева О.А. *Ряды экспоненциальных мономов в комплексных областях* // Вестник УГАТУ. Математика. 2007. Т. 9, № 3(21). С. 96–104.
4. Рокафеллар Р. *Выпуклый анализ.* М.: Мир. 1973. 470 с.
5. Болтянский В.Г., Солтан П.С. *Комбинаторная геометрия различных классов выпуклых множеств.* Кишинев. 1978. 280 с.
6. Красичков-Терновский И.Ф. *Спектральный синтез и аналитическое продолжение* // УМН. 2003. 58:1(349). С. 33-–112.
7. К. Лейхтвейс, *Выпуклые множества*, М.: Наука. 1985. 335с.
8. S. Hansen *On the "fundamental principle"of L. Ehrenpreis* // Partial Differential Equations, Banach Center Publ. Vol. 10, PWN. 1983. P. 185–201.

Сергей Георгиевич Мерзляков,
Институт математики с ВЦ УНЦ РАН,
ул. Чернышевского, 112,
450077, г. Уфа, Россия
E-mail: msg2000@mail.ru