ISSN 2074-1863 Уфимский математический журнал. Том 3. № 2 (2011). С. 43-56.

УДК 517.5

ОБЛАСТЬ СХОДИМОСТИ РЯДОВ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНЫХ МОНОМОВ

О.А. КРИВОШЕЕВА

Аннотация. В работе изучаются вопросы сходимости рядов экспоненциальных мономов, частными случаями которых являются ряды экспонент, ряды Дирихле и степенные ряды. Дается описание пространства коэффициентов рядов экспоненциальных мономов, сходящихся в заданной выпуклой области комплексной плоскости. При одном естественном ограничении на степени мономов приводится полный аналог теоремы Абеля для таких рядов, из которого, в частности, вытекают результаты о продолжении сходимости рядов экспоненциальных мономов. Получен также полный аналог теоремы Коши -Адамара, в которой приводится формула, позволяющая восстанавливать область сходимости указанных рядов по их коэффициентам. Полученные результаты включают в себя как частные случаи все известные ранее результаты, связанные с теоремами Абеля и Коши-Адамара для рядов экспонент, рядов Дирихле и степенных рядов.

Ключевые слова: ряд экспонент, выпуклая область, аналитическая функция.

1. Введение

В работе изучается сходимость рядов экспоненциальных мономов, т.е. рядов вида

$$\sum_{k=1,n=0}^{\infty,m_k-1} d_{k,n} z^n \exp(\lambda_k z) \tag{1.1}$$

Исследуется задача описания пространства коэффициентов сходящихся рядов (1.1), характер сходимости этих рядов, описывается область их сходимости и изучается вопрос о продолжении сходимости рядов (1.1).

Пусть $\Lambda = \{\lambda_k, m_k\}_{k=1}^{\infty}$ — кратная последовательность, где λ_k — комплексные числа, которые пронумерованы по неубыванию модулей, $|\lambda_k| \to \infty$ при $k \to \infty$, и m_k — натуральные числа. Нам понадобятся некоторые известные характеристики последовательности Λ:

$$m(\Lambda) = \overline{\lim_{k\to\infty}} \frac{m_k}{|\lambda_k|}, \quad \sigma(\Lambda) = \overline{\lim_{j\to\infty}} \frac{\ln j}{|\xi_j|},$$

где ξ_k — неубывающая по модулю последовательность, составленная из точек λ_k, причем каждая λ_k встречается в ней ровно m_k раз.

Тематика, связанная с рядами экспоненциальных мономов и их частными случаями — рядами экспонент (т.е. рядами вида (1.1), где $m_k = 1, k = 1, 2, \ldots$), рядами Дирихле (т.е. рядами вида (1.1), где $m_k = 1$ и λ_k — положительные числа) и рядами Тейлора имеет богатую историю. Их исследование берет свое начало в трудах Тейлора, Коши, Адамара, Абеля и Дирихле. Указанные выше задачи для таких рядов изучались в работах Е. Хилле [3], Г.Л. Лунца [4,5], А.Ф. Леонтьева [1,2], А.В. Братищева [6] и других математиков. Ряды

O.A. Krivosheyeva, A convergence domain of exponential monomials series.

Поступила 8 ноября 2010 г.

экспоненциальных мономов являются естественным обобщением рядов экспонент. Достаточно полное изложение теории последних имеется в монографии А. Ф. Леонтьева [1]. Основной результат теории рядов экспонент, ставший уже классическим, также принадлежит А.Ф. Леонтьеву. Ему удалось доказать, что любую функцию, аналитическую в выпуклой области $D \subset \mathbb{C}$, можно разложить в ряд экспонент с фиксированными показателями $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ при определенных условиях на эти показатели. Известно, что экспоненты (и только они) являются собственными функциями оператора дифференцирования. Поэтому задачу представления рядами экспонент можно рассматривать как задачу разложения по собственным функциям этого оператора. Поскольку запас собственных функций оператора дифференцирования в $H(D)$ ($H(D)$ — пространство функций, аналитических в области D, с топологией равномерной сходимости на компактных подмножествах D) достаточно большой (точнее говоря, все экспоненты), то существует много различных наборов показателей $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$, при помощи которых удается получить представление всех функций из $H(D)$ посредством ряда экспонент. Если же от всего пространства $H(D)$ перейти к его замкнутому подпространству W, инвариантному относительно оператора дифференцирования (таковым является, например, пространство решений однородного уравнения свертки или их систем), то, как правило, одних лишь собственных функций этого оператора (в этом случае имеется только счетный набор собственных функций) уже недостаточно для разложения всех функций из W. Однако, ситуация меняется, если наряду с собственными функциями рассматривать еще и присоединенные функции оператора дифференцирования в W. Таковыми являются экспоненциальные мономы

$$z^n \exp(\lambda_k z), \quad n = 1, 2, \ldots, m_k - 1,$$

где m_k — кратность собственного значения λ_k. Задача разложения функций из замкнутого инвариантного относительно оператора дифференцирования подпространства $W \subset H(D)$ по собственным и присоединенным функциям этого оператора называется проблемой фундаментального принципа. Такое название связано с тем, что в частном случае, когда инвариантное подпространство является пространством решений линейного однородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами, возможность разложения произвольного решения по собственным и присоединенным функциям оператора дифференцирования называют фундаментальным принципом Л. Эйлера. Таким образом, важное значение приобретают вопросы, связанные с поведением рядов вида (1.1). Для таких рядов, как и в теории рядов экспонент (и, в частности, для степенных рядов и рядов Дирихле), первоочередными являются задачи описания классов областей сходимости (это включает в себя задачу о продолжении сходимости) и характер сходимости рядов, а также восстановление области сходимости по коэффициентам ряда. В теории степенных рядов первые две задачи решаются при помощи теоремы Абеля (чаще ее называют леммой Абеля), а последняя — при помощи теоремы Коши-Адамара. Для рядов Дирихле имеется аналог теоремы Абеля (см., напр., [2], глава 2, лемма 1.1), в котором утверждается, что сходимость ряда Дирихле

$$\sum_{k=1}^{\infty} d_k \exp(\lambda_k z)$$

в одной точке z_0 влечет за собой его сходимость в полуплоскости $\{z \in \mathbb{C} : Re\ z < Re\ z_0\}$. Если при этом величина $\sigma(\Lambda)$ равна нулю, то (см. [2], глава 2, теорема 1.1) эта сходимость будет абсолютной и равномерной в любой полуплоскости $\{z \in \mathbb{C} : Re\ z < Re\ z_0 - \varepsilon\}$, где $\varepsilon > 0$.

Кроме того, для рядов Дирихле имеется полный аналог теоремы Коши-Адамара, в котором при условии $\sigma(\Lambda) = 0$ вычисляется расстояние от начала координат до граничной прямой полуплоскости сходимости (см. [2], глава 2, теорема 1.2). В случае рядов экспонент полный аналог теоремы Абеля отсутствует. Имеется результат (см. [3], [2], глава 2, теорема 2.1) о том, что множество точек абсолютной сходимости ряда экспонент выпукло. Причем на компактных подмножествах внутренности этого множества ряд сходится равномерно (см. [2], глава 2, теорема 2.2). Если выполнено условие $\sigma(\Lambda) = 0$, то (см. [2], глава 2, теорема 2.3) простая и абсолютная сходимость ряда экспонент в выпуклой области равносильны. Кроме этого, для рядов экспонент известен также (см. [3], [4], [5] и [1], теорема 3.1.3) аналог теоремы Коши-Адамара. В ней дается описание области сходимости ряда экспонент, которая получается как пересечение некоторого семейства полуплоскостей. При этом приводится формула для расстояний от начала координат до граничных прямых этих полуплоскостей. В случае общих рядов вида (1.1) можно отметить лишь результат из работы [6]. Здесь доказывается, что область абсолютной сходимости ряда (1.1) выпуклая, если выполнено следующее условие: $m(\Lambda) = 0$.

В данной работе при условиях $\sigma(\Lambda) = m(\Lambda) = 0$ приводится полный аналог теоремы Абеля для рядов экспоненциальных мономов и, в частности, для рядов экспонент. Показывается, что областью сходимости ряда (1.1) является выпуклая область специального вида. Доказывается, что поточечная сходимость ряда (1.1) в этой области эквивалентна его абсолютной сходимости, равномерной сходимости на компактах и даже сходимости в более сильной топологии. Приводится также аналог теоремы Коши-Адамара, который, как частные случаи, содержит все предыдущие подобные результаты для рядов Дирихле и рядов экспонент.

2. Пространство коэффициентов сходящихся рядов

Пусть D — выпуклая область в $\mathbb{C}$. Опишем пространство последовательностей коэффициентов $\{d_{k,n}\}_{k=1,n=0}^{\infty,m_k-1}$, при которых в области сходится ряд (1.1). Через $K(D) = \{K_p\}_{p=1}^{\infty}$ обозначим последовательность выпуклых компактов в области D, которая строго исчерпывает ее, т.е. $K_p \subset int K_{p+1}, p = 1, 2, \dots$ и $D = \bigcup_{p=1}^{\infty} K_p$. Здесь символ int означает внутренность множества. Для каждого $p = 1, 2, \dots$ введем банахово пространство последовательностей комплексных чисел

$$Q_p = \{d = \{d_{k,n}\} : ||d||_p = \sup_{k,n} |d_{k,n}| \exp H_{K_p}(\lambda_k) < \infty\},$$

где $K_p \in K(D)$ и

$$H_M(\xi) = \sup_{z\in M} Re(z\xi)$$

— опорная функция множества $M \subset \mathbb{C}$ (точнее говоря, комплексно сопряженного к M множества. Пусть $Q(D) = \bigcap_p Q_p$. В пространстве $Q(D)$ определим метрику

$$\rho(d, d') = \sum_{p=1}^{\infty} 2^{-p} \frac{||d - d'||_p}{1 + ||d - d'||_p}.$$

С этой метрикой $Q(D)$ становится, очевидно, пространством Фреше. Отметим, что в силу вложения $K_p \subset int K_{p+1}$ и определения опорной функции для каждого $p = 1, 2, \dots$ найдется положительное число α_p такое, что

$$H_{K_p}(\xi) + \alpha_p|\xi| \leqslant H_{K_{p+1}}(\xi), \quad \forall \xi \in \mathbb{C}. \tag{2.1}$$

Следовательно, для каждого элемента $d \in Q(D)$ выполнены неравенства

$$||d||_1 \leqslant ||d||_2 \leqslant \dots \leqslant ||d||_p \leqslant \dots$$

Покажем, что пространство $Q(D)$ совпадает с пространством коэффициентов сходящихся в области D рядов вида (1.1). Но прежде докажем некоторые вспомогательные утверждения.

Лемма 2.1. *Ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty} m_k \exp(-\varepsilon|\lambda_k|) \tag{2.2}$$

сходится для любого $\varepsilon > 0$ *тогда и только тогда, когда* $\sigma(\Lambda) = 0$.

Доказательство. Пусть $\sigma(\Lambda) = 0$ и $\{\xi_j\}$ — неубывающая по модулю последовательность, составленная из точек λ_k , причем каждая λ_k встречается в ней ровно m_k раз. Тогда для каждого $\delta > 0$ существует номер $N(\delta)$ такой, что

$$\ln j < \delta|\xi_j|, \quad j \geq N(\delta).$$

Фиксируем $\varepsilon > 0$ и выберем $\delta < \varepsilon$. Имеем:

$$\sum_{j=N(\delta)}^{\infty} \exp(-\varepsilon|\xi_j|) < \sum_{m=N(\delta)}^{\infty} \exp(-\frac{\varepsilon lnj}{\delta}) = \sum_{m=N(\delta)}^{\infty} \frac{1}{j^{\frac{\varepsilon}{\delta}}} < \infty.$$

Следовательно, ряд (2.2) сходится для любого $\varepsilon > 0$. Покажем обратное. Пусть верно последнее утверждение. Поскольку члены ряда (2.2) положительны, то их перестановка не влияет на сходимость ряда. Поэтому можно считать, что λ_k пронумерованы по возрастанию модулей, т.е. $|\lambda_1| \leqslant |\lambda_2| \leqslant \ldots$. Кроме того, если последовательность $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ ограничена, то ряд (2.2) расходится. Следовательно, $|\lambda_k| \to \infty$, когда $k \to \infty$. Дальнейшее доказательство проведем от противного. Предположим, что $\sigma(\lambda) = 4c > 0$. Тогда существует подпоследовательность натуральных чисел $\{j(l)\}_{j=1}^{\infty}$ такая, что

$$lnj(l) \geq 2c|\xi_{j(l)}|, \quad l = 1, 2, \ldots.$$

Переходя еще раз к подпоследовательности, можно считать, что

$$2|\xi_{j(l)}| \leqslant |\xi_{j(l+1)}|, \quad l = 1, 2, \ldots.$$

Составим теперь новую подпоследовательность натуральных чисел

$$j(l, s), \quad l = 1, 2, \ldots, \quad s = 1, 2, \ldots, l'(l),$$

где $l'(l)$ — целая часть числа $j(l)/2$. Положим

$$j(l, s) = j(l) - l'(l) + s.$$

В силу неубывания модулей ξ_j имеем:

$$\frac{lnj(l,s)}{|\xi_{j(l,s)}|} \geq \frac{lnj(l,s)}{|\xi_{j(l)}|} \geq \frac{lnj(l,1)}{|\xi_{j(l)}|} \geq \frac{lnj(l) - ln2}{|\xi_{j(l)}|} \geq 2c - \frac{ln2}{|\xi_{j(l)}|}.$$

Так как $|\xi_j| \to \infty$ то найдется номер l_0 такой, что

$$\frac{lnj(l,s)}{|\xi_{j(l,s)}|} \geq c, \quad l \geq l_0, \quad s = 1, 2, \ldots, l'(l).$$

Отсюда для всех $l \geq l_0$ и $\varepsilon = c$ получаем:

$$\sum_{j=j(l)-l'(l)+1}^{j(l)} \exp(-\varepsilon|\xi_j|) = \sum_{s=1}^{l'(l)} \exp(-\varepsilon|\xi_{j(l,s)}|) \geq \sum_{s=1}^{l'(l)} \exp(\frac{-\varepsilon}{c} \ln j(l, s)) =$$

$$= \sum_{s=1}^{l'(l)} \frac{1}{j(l,s)^{\frac{\varepsilon}{c}}} = \sum_{l=1}^{l'(l)} \frac{1}{j(l,s)} \geq \frac{l'(l)}{j(l)} \geq \frac{2^{-1}j(l)-1}{j(l)}.$$

Поскольку $j(l) \to \infty$, когда $l \to \infty$, то это противоречит сходимости ряда (2.2) при $\varepsilon = c$. Таким образом, $\sigma(\Lambda) = 0$ и лемма доказана.

Символом $\mathbb{S}$ будем обозначать окружность единичного радиуса с центром в начале координат. Пусть E — множество в $\mathbb{C}$, Θ — замкнутое подмножество окружности $\mathbb{S}$. Θ – выпуклой оболочкой E называется множество

$$E(\Theta) = \{z \in \mathbb{C} : Re(z\xi) < H_E(\xi), \xi \in \Theta\}.$$

Отметим, что внутренность E лежит в $E(\Theta)$. В самом деле, если z — внутренняя точка E, то из определения опорной функции следуют неравенства $Re(z\xi) < H_E(\xi)$, $\forall\xi \in \Theta$. Это означает, что $z \in E(\Theta)$. В частном случае, когда $\Theta = \mathbb{S}$, Θ — выпуклая оболочка множества совпадает с его обычной выпуклой оболочкой (точнее говоря, с внутренностью этой выпуклой оболочки) и, таким образом, является выпуклой областью. Последнее имеет место и в общем случае. Что и подтверждается следующим утверждением.

Лемма 2.2. *Пусть E — множество в $\mathbb{C}$, Θ — замкнутое подмножество окружности $\mathbb{S}$. Тогда множество $E(\Theta)$ является выпуклой областью.*

Доказательство. По определению множество $E(\Theta)$ есть пересечение полуплоскостей, а потому выпукло. Выпуклость влечет за собой связность $E(\Theta)$. Остается показать, что $E(\Theta)$ — открытое множество. Предположим, что это не так. Тогда существует точка $z_0 \in E(\Theta)$ и последовательность $\{z_k\}$ такие, что $z_k \to z_0$ при $k \to \infty$ и $z_k \notin E(\Theta)$ для всех $k \geq 1$, то есть $Re(z_k\xi_k) \geq H_E(\xi_k)$ для некоторого $\xi_k \in \Theta$, $k = 1, 2, \ldots$ Переходя к подпоследовательности, можно считать, что $\{\xi_k\}$ сходится к точке $\xi_0 \in \Theta$. Тогда из последнего неравенства с учетом полунепрерывности снизу опорной функции (см. [7]) получаем

$$Re(z_0\xi_0) = \lim_{k\to\infty} Re(z_k\xi_k) \geq \underline{\lim}_{k\to\infty} Re(z_k\xi_k) \geq \underline{\lim}_{k\to\infty} H_E(\xi_k) \geq H_E(\xi_0).$$

Получили противоречие с определением $E(\Theta)$, так как $z_0 \in E(\Theta)$, а $\xi_0 \in \Theta$. Лемма доказана.

Пусть $\Lambda = \{\lambda_k, m_k\}_{k=1}^{\infty}$. Через $\Theta(\Lambda)$ обозначим множество всех частичных пределов последовательности $\{\lambda_k/|\lambda_k|\}_{k=1}^{\infty}$ (исключая точку $\lambda_k = 0$, если она есть). Очевидно, что $\Theta(\Lambda)$ — замкнутое подмножество окружности $\mathbb{S}$.

Лемма 2.3. *Пусть последовательность Λ такова, что $m(\Lambda) = 0$. Предположим, что общий член ряда (1.1) ограничен на множестве $E \subset \mathbb{C}$, т.е.*

$$|d_{k,n}z^n \exp(\lambda_k z)| \leqslant A(z), \quad k = 1, 2, \ldots, \quad n = 0, 1, \ldots, m_k - 1, \quad z \in E.$$

Кроме того, если $0 \in E$, то ограничена также последовательность $\{d_{k,n}\}_{k=1,n=0}^{\infty,m_k-1}$.

Тогда имеет место включение $d = \{d_{k,n}\} \in Q(D)$, где $D = E(\Theta(\Lambda))$.

Доказательство. Предположим, что $d \notin Q(D)$. Тогда $d \notin Q_p$ для некоторого номера $p = 1, 2, \ldots$ Это означает, что найдется подпоследовательность $\{d_{k_l,n_l}\}$ такая, что

$$|d_{k_l,n_l}| \exp H_{K_p}(\lambda_{k_l}) \to +\infty, \quad p \to \infty. \tag{2.3}$$

Переходя еще раз к подпоследовательности, можно считать, что $\{\lambda_{k_l}/|\lambda_{k_l}|\}$ сходится к некоторой точке $x_0 \in \Theta(\Lambda)$. Поскольку K_{p+1} — компакт в области $D = E(\Theta(\Lambda))$, то из определений множества $E(\Theta(\Lambda))$ и опорной функции следует, что для некоторого $z_0 \in E$ верна оценка: $Re(z_0x_0) > H_{K_{p+1}}(x_0)$.

Тогда с учетом (2.1) и непрерывности опорной функции компакта (см. [7]) найдется $\delta > 0$ такое, что

$$Re(z_0x_0) > H_{K_{p+1}}(x) \geq H_{K_p}(x) + \alpha_p|x|, \quad x \in B(x_0, \delta). \tag{2.4}$$

Выберем номер l_0 так, что

$$\lambda_{k_l}/|\lambda_{k_l}| \in B(x_0, \delta), \quad l \geq l_0.$$

Пусть вначале $z_0 \neq 0$. По условию $m(\Lambda) = 0$. Следовательно, в силу определения величины $m(\Lambda)$ для каждого $\varepsilon > 0$ найдется $l_1 \geq l_0$ такое, что $m_{k_l} \leqslant \varepsilon|\lambda_{k_l}|$ для всех $l \geq l_1$. Фиксируем $\varepsilon > 0$ такое, что $\varepsilon \ln|z_0| > -\alpha_p$. Тогда с учетом (1.4) и положительной однородности опорной функции для всех $l \geq l_1$ получаем:

$$|z_0^{n_l}\exp(\lambda_{k_l}z_0)| = \exp(n_o l \ln|z_0| + Re(\lambda_{k_l}z_0)) >$$

$$> \exp(-n_l\alpha_p\varepsilon^{-1} + Re(\lambda_{k_l}z_0)) > \exp(-m_{k_l}\alpha_p\varepsilon^{-1} + Re(\lambda_{k_l}z_0)) \geq$$

$$\geq \exp(-\alpha_p|\lambda_{k_l}| + H_{K_p}(\lambda_{k_l}) + \alpha_p|\lambda_{k_l}|) = \exp H_{K_p}(\lambda_{k_l})$$

Таким образом, в силу (2.3) имеем:

$$|d_{k_l,n_l}z_0^{n_l}\exp(\lambda_{k_l}z_0)| \to +\infty, \quad p \to \infty.$$

Это противоречит условию леммы.

Пусть теперь $z_0 = 0$. Тогда с учетом (2.3) и (2.4) для всех $l \geq l_0$ получаем:

$$|d_{k_l,n_l}| = |d_{k_l,n_l}\exp(\lambda_{k_l}z_0)| \geq |d_{k_l,n_l}|\exp H_{K_p}(\lambda_{k_l}) \to +\infty, \quad p \to \infty.$$

Это снова противоречит условию леммы. Таким образом, $d \in Q(D)$. Лемма доказана.

Замечание. В случае, когда $0 \in E$, в лемме накладывается дополнительное условие ограниченности последовательности коэффициентов $\{d_{k,n}\}$. Оно существенно, если 0 – изолированная точка множества E. В качестве примера рассмотрим ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty}\exp(2k)z\exp(kz).$$

Здесь $\Theta(\Lambda) = \{1\}$. В качестве E возьмем множество, состоящее из двух точек $\{-2, 0\}$. Тогда $E(\Theta(\Lambda))$ совпадает с полуплоскостью $Rez < 0$, а общий член ряда ограничен на E. Однако ряд не сходится в этой полуплоскости (он расходится на окружности $\mathbb{S}$). Он сходится в полуплоскости $Rez < -2$, которая совпадает с множеством $E'(\Theta(\Lambda))$, где $E' = \{-2\}$. В этом случае нарушено условие ограниченности коэффициентов (остальные выполнены), и лемма перестает быть верной. В ситуации, когда $0 \in E$ не является изолированной точкой E, лемма останется верной и без условия ограниченности коэффициентов. Действительно, при сделанных предположениях точка 0 лежит в замыкании множества $E' = E\backslash\{0\}$. Остается заметить, что в этом случае области $E(\Theta(\Lambda))$ и $E'(\Theta(\Lambda))$ совпадают (т.к. совпадают, очевидно, опорные функции множеств E и E').

Положим

$$c_{p,k,n} = \sup_{z \in K_p}|z^n\exp(z\lambda_k)|, \quad p, k = 1, 2, \ldots, \quad n = 0, 1, \ldots, m_k - 1.$$

Лемма 2.4. *Пусть последовательность* Λ *такова, что* $m(\Lambda) = 0$. *Тогда для любого номера* p *существует постоянная* $C > 0$ *такая, что верны неравенства* $c_{p,k,n} \leqslant C\exp H_{K_{p+1}}(\lambda_k)$, $\forall k = 1, 2, \ldots$, $\forall n = 0, 1, \ldots, m_k - 1$.

Доказательство. Предположим, что утверждение леммы неверно. Тогда для некоторого номера p найдется подпоследовательность $\{k_l, n_l\}$ такая, что

$$c_{p,k_l,n_l} > l \exp H_{K_{p+1}}(\lambda_{k_l}), \quad l = 1, 2, \dots \tag{2.5}$$

Через z_0 обозначим точку компакта K_p с максимальным модулем. Можно считать, что $K_p \neq \{0\}$. Тогда $z_0 \neq 0$ и мы имеем:

$$c_{p,k_l,n_l} \leqslant |z_0|^{n_l} \exp H_{K_p}(\lambda_{k_l}) = \exp(n_l \ln |z_0| + H_{K_p}(\lambda_{k_l})) \leqslant$$

$$\leqslant \exp(m_{k_l} |\ln |z_0|| + H_{K_p}(\lambda_{k_l})).$$

По условию $m(\Lambda) = 0$. Следовательно, для каждого $\varepsilon > 0$ найдется номер l_0 такой, что $m_{k_l} \leqslant \varepsilon |\lambda_{k_l}|$ для всех $l \geq l_0$. Фиксируем $\varepsilon > 0$ такое, что $\varepsilon |\ln |z_0|| < \alpha_p$. Тогда по предыдущему с учетом (2.1) получаем:

$$c_{p,k_l,n_l} \leqslant \exp(\varepsilon |\lambda_{k_l}| \ln |z_0| + H_{K_p}(\lambda_{k_l})) \leqslant$$

$$\leqslant \exp(\alpha_p |\lambda_{k_l}| + H_{K_p}(\lambda_{k_l})) \leqslant \exp H_{K_{p+1}}(\lambda_{k_l}), \quad l \geq l_0.$$

Это противоречит (2.5). Лемма доказана.

Лемма 2.5. *Пусть D — выпуклая область в $\mathbb{C}$, последовательность Λ такова, что $\sigma(\Lambda) = m(\Lambda) = 0$ и $d = \{d_{k,n}\} \in Q(D)$. Тогда для каждого $p = 1, 2, \dots$ найдется число $C_p > 0$ (не зависящее от последовательности d) такое, что*

$$\sum_{k=1,n=0}^{\infty,m_k-1} |d_{k,n}| c_{p,k,n} \leqslant C_p ||d||_{p+2}.$$

Доказательство. Пусть $d = \{d_{k,n}\} \in Q(D)$. В силу леммы 2.4 с учетом (2.1) и определения нормы в пространстве Q_{p+2} получаем:

$$\sum_{k=1,n=0}^{\infty,m_k-1} |d_{k,n}| c_{p,k,n} \leqslant C \sum_{k=1,n=0}^{\infty,m_k-1} |d_{k,n}| \exp H_{K_{p+1}}(\lambda_k) \leqslant$$

$$\leqslant C \sum_{k=1,n=0}^{\infty,m_k-1} |d_{k,n}| \exp(H_{K_{p+2}}(\lambda_k) + H_{K_{p+1}}(\lambda_k) - H_{K_{p+2}}(\lambda_k)) \leqslant$$

$$C ||d||_{p+2} \sum_{k=1}^{\infty} m_k \exp(-\alpha_{p+1} |\lambda_k|).$$

По условию $\sigma(\Lambda) = 0$. Следовательно, последний ряд сходится по лемме 2.1. Это дает нам требуемое неравенство с некоторой константой $C_p > 0$, не зависящей от $d = \{d_{k,n}\}$. Лемма доказана.

В следующей теореме дается описание пространства последовательностей коэффициентов рядов экспоненциальных мономов, сходящихся в выпуклой области $D \subset \mathbb{C}$.

Теорема 2.6. *Пусть D — выпуклая область в $\mathbb{C}$ и последовательность Λ такова, что $\sigma(\Lambda) = m(\Lambda) = 0$. Тогда эквивалентны утверждения:*

1) Ряд (1.1) сходится в области D.

2) Имеет место включение $d = \{d_{k,n}\} \in Q(D)$.

Доказательство. Пусть выполнено 1). Тогда общий член ряда (1.1) ограничен в каждой точке области D. Следовательно, по лемме 2.3 с учетом замечания к ней последовательность $d = \{d_{k,n}\}$ принадлежит пространству $Q(D(\Theta(\Lambda)))$. Поскольку область D лежит в $D(\Theta(\Lambda))$, то из определения пространства $Q(D)$ легко следует вложение $Q(D(\Theta(\Lambda))) \subset Q(D)$.

Таким образом, $d \in Q(D)$.

Пусть теперь выполнено 2). Тогда из неравенства в лемме 2.5 вытекает, что ряд (1.1) сходится на любом компакте области D, а значит, и в самой области D. Теорема доказана.

Замечание. При доказательстве импликации 2)→1) была использована лемма 2.5, согласно которой включение $d = \{d_{k,n}\} \in Q(D)$ влечет за собой не только поточечную сходимость ряда (1.1), но и его абсолютную и равномерную сходимость на компактах в области D (и даже сходимость в более сильной топологии). Имея еще ввиду импликацию 1)→2), можно утверждать, что простая сходимость ряда (1.1) в области D эквивалентна его абсолютной и равномерной сходимости на компактах этой области.

3. Аналог теоремы Абеля для рядов экспоненциальных мономов

Следующий результат является аналогом теоремы Абеля для ряда (1.1).

Теорема 3.1. *Пусть последовательность Λ такова, что $\sigma(\Lambda) = m(\Lambda) = 0$. Предположим, что общий член ряда (1.1) ограничен на множестве $E \subset \mathbb{C}$. Кроме того, если начало координат является изолированной точкой множества E, то ограничена также последовательность $\{d_{k,n}\}_{k=1,n=0}^{\infty,m_k-1}$. Тогда для каждого номера $p = 1, 2, \ldots$ найдется число $C_p > 0$ (не зависящее от последовательности d) такое, что*

$$\sum_{k=1,n=0}^{\infty,m_k-1} |d_{k,n}| c_{p,k,n} \leqslant C_p ||d||_{p+2},$$

где числа $c_{p,k,n}$ и нормы $||d||_p$ построены по последовательности компактов $K(D)$ и $D = E(\Theta(\Lambda))$. В частности, ряд (1.1) сходится абсолютно и равномерно на любом компакте из области D.

Доказательство. Пусть выполнены условия теоремы. Тогда по лемме 2.3 и замечанию к ней имеет место включение $d = \{d_{k,n}\} \in Q(D)$. Отсюда по лемме 2.5 для каждого $p = 1, 2, \ldots$ найдется число $C_p > 0$ (не зависящее от последовательности d) такое, что

$$\sum_{k=1,n=0}^{\infty,m_k-1} |d_{k,n}| c_{p,k,n} \leqslant C_p ||d||_{p+2}.$$

В частности, это означает, что ряд (1.1) сходится абсолютно и равномерно на любом компакте из области D. Теорема доказана.

Замечания. 1. Из теоремы 3.1 следует, что при условии $\sigma(\Lambda) = m(\Lambda) = 0$ внутренность множества сходимости ряда (1.1) всегда является выпуклой и даже Θ — выпуклой областью (т.е. областью, которая представляет из себя пересечение полуплоскостей $\{z : Re(z\xi) < h(\xi), \xi \in \Theta\}$), h — некоторая полунепрерывная снизу функция.

2. Если из теоремы 3.1 изъять условие $\sigma(\Lambda) = 0$, то ее утверждение становится неверным. В книге [2, глава 2] приведен пример ряда Дирихле, для которого $\sigma(\Lambda) > 0$. Этот ряд сходится в полуплоскости (а значит, его общий член ограничен в этой полуплоскости), но абсолютно расходится в каждой точке плоскости.

3. Условие $m(\Lambda) = 0$ также существенно. Действительно, пусть последовательность $\Lambda = \{k, m_k\}$ такова, что $m(\Lambda) = \tau > 0$ и при этом $\sigma(\Lambda) = 0$ (например, $m_k = 2k$). Рассмотрим ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \exp(2k) z^{m_k-1} \exp(kz).$$

Нетрудно показать, что этот ряд сходится в некоторой области, лежащей в полуплоскости $Re z < -a$, где $a > 1$ выбрано из условия $a > 2(\tau \ln a + 1)$, и в круге $B(0, r)$, где $r \in (0, 1)$ такое, что $-2^{-1}\tau \ln r > 3$. В то же время он, очевидно, расходится на окружности $\mathbb{S}$.

Таким образом, внутренность множества сходимости данного ряда не является выпуклой областью и даже просто областью (она несвязна).

Как уже говорилось ранее, теорема 3.1 является аналогом теоремы Абеля для степенных рядов. Действительно, как и в последней в теореме 3.1 доказывается, что ограниченность общего члена ряда в некоторых граничных точках области влечет за собой его абсолютную и равномерную сходимость внутри области. Степенной ряд является частным случаем ряда экспонент: при помощи простого преобразования переменной степенной ряд превращается в ряд вида $\sum d_k \exp(kz)$. Однако, если переформулировать теорему 3.1 для этого частного случая, то в результате получится более слабое утверждение чем теорема Абеля. Это объясняется тем, что круги, на которых должен абсолютно и равномерно сходиться степенной ряд, при указанном преобразовании переходят в неограниченные множества. В теореме же 3.1 равномерная сходимость гарантируется лишь на компактных подмножествах. Существенно усложнив доказательство этой теоремы, можно показать, что ряд (1.1) все-таки будет равномерно сходиться в некоторых случаях и на неограниченных множествах. Однако эти множества не всегда будут содержать образы кругов при преобразовании переменной, переводящем степенной ряд в ряд экспонент. Чтобы пояснить сказанное, приведем следующий пример. Рассмотрим ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty}(\exp(kz) + z\exp(kz)) \tag{3.1}$$

Множество $\Theta(\Lambda)$ в этом случае является одноточечным: $\Theta(\Lambda) = \{1\}$. Коэффициенты ряда равны единицы, а потому ограничены. Следовательно, по теореме 3.1 ряд (3.1) сходится в области $E(\Theta(\Lambda))$, где $E = \{0\}$, которая совпадает с левой полуплоскостью, и равномерно на ее компактах. Можно показать, что ряд (3.1) сходится равномерно и на некоторых неограниченных множествах (например, на углах раствора строго меньше π и с вершинами, принадлежащими отрицательной вещественной полуоси). Но он не сходится равномерно ни в какой полуплоскости вида $\Pi(a) = \{z : Re z < -a\}, \quad a > 0$.
Рассмотрим теперь ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty}\exp(kz). \tag{3.2}$$

Он получается из степенного ряда w^k при помощи преобразования $w = \exp z$. Последний сходится в круге $B(0,1)$, а по теореме Абеля он сходится равномерно в любом круге меньшего радиуса. Эти круги при указанном преобразовании переходят в полуплоскости $\Pi(a)$. Следовательно, ряд (3.2) сходится равномерно в каждой из этих полуплоскостей. Такое отличие в множествах равномерной сходимости у рядов (3.1) и (3.2) связано с наличием множителей z в ряде (3.1). Как показывает этот пример, сохраняя подобные множители, нельзя доказать теорему типа теоремы 3.1 так, чтобы ее частным случаем была теорема Абеля для степенных рядов. Однако эту ситуацию можно исправить, отказавшись от сомножителей z^n в ряде (1.1), т.е. рассматривая лишь "чистые"ряды экспонент, что и подтверждается следующим результатом.

Наряду с $E(\Theta)$ для каждого $\varepsilon > 0$ определим еще множество

$$E(\Theta, \varepsilon) = \{z \in \mathbb{C} : Re(z\xi) < H_E(\xi) - \varepsilon, \forall \xi \in \Theta\}.$$

Отметим, что в случае, когда Θ лежит в некотором угле с вершиной в нуле раствора не больше π множество $E(\Theta)$, а вместе с ним и $E(\Theta, \varepsilon)$ для достаточно малого $\varepsilon > 0$ является неограниченным.

Теорема 3.2. *Предположим, что члены ряда*

$$\sum_{k=1}^{\infty} d_k \exp(\lambda_k z) \tag{3.3}$$

равномерно ограничены на множестве E, то есть

$$|d_k \exp(\lambda_k z)| \leqslant A, \quad k = 1, 2, \dots, \quad z \in E.$$

Пусть далее $\sigma(\Lambda) = 0$ и замкнутое множество $\Theta \subset \mathbb{S}$ таково, что для некоторого номера k_0 верно включение

$$\lambda_k/|\lambda_k| \in \Theta, \quad k \geq k_0.$$

Тогда для каждого ε существует $c(\varepsilon, \Lambda) > 0$ такое, что выполнено неравенство

$$\sum_{k=k_0}^{\infty} |d_k \exp(\lambda_k z)| \leqslant Ac(\varepsilon, \Lambda), \quad z \in E(\Theta, \varepsilon).$$

В частности ряд (3.3) сходится абсолютно и равномерно на $E(\Theta(\Lambda), \varepsilon)$.

Доказательство. Пусть $\varepsilon > 0$ и $z \in E(\Theta, \varepsilon)$. Так как $\xi_k = \lambda_k/|\lambda_k| \in \Theta$ для всех $k \geq k_0$, то согласно определению $E(\Theta, \varepsilon)$ имеем оценку:

$$\sum_{k=k_0}^{\infty} |d_k \exp(\lambda_k z)| = \sum_{k=k_0}^{\infty} |d_k \exp(|\lambda_k|(\xi_k z))| =$$

$$= \sum_{k=k_0}^{\infty} |d_k| \exp(|\lambda_k| Re(\xi_k z)) \leqslant \sum_{k=k_0}^{\infty} |d_k| \exp(|\lambda_k|(H_E(\xi_k) - \varepsilon)).$$

Далее в силу определения опорной функции найдем точку $z_k \in E$, $k \geq k_0$ такую, что

$$Re(z_k \xi_k) \geq H_E(\xi_k) - \varepsilon/2.$$

Тогда из предыдущего и условия теоремы получаем:

$$\sum_{k=k_0}^{\infty} |d_k \exp(\lambda_k z)| \leqslant \sum_{k=k_0}^{\infty} |d_k| \exp(|\lambda_k|(H_E(\xi_k) - \varepsilon)) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=k_0}^{\infty} |d_k| \exp(|\lambda_k|(Re(z_k \xi_k) - \varepsilon/2)) = \sum_{k=k_0}^{\infty} |d_k| \exp((Re(z_k \lambda_k) - \varepsilon|\lambda_k|/2)) =$$

$$= \sum_{k=k_0}^{\infty} |d_k \exp(|\lambda_k z_k)| \exp(-\varepsilon|\lambda_k|/2) \leqslant A \sum_{k=k_0}^{\infty} \exp(-\varepsilon|\lambda_k|/2).$$

Так как $\sigma(\Lambda) = 0$, то по лемме 2.1 последний ряд сходится, и мы получаем требуемое неравенство. Теорема доказана.

Замечание. Рассмотрим ряд экспонент

$$\sum_{k=1}^{\infty} d_k \exp(kz) \tag{3.4}$$

в который переходит степенной ряд $\sum d_k w^k$ при преобразовании $w = \exp z$. В этом случае $\sigma(\Lambda) = 0$ и для каждого номера $k = 1, 2, \dots$ верно включение $\lambda_k/|\lambda_k| \in \Theta = \{1\}$.

Предположим, что общий член ряда (3.4) ограничен в точке z_0 и положим $E = \{z_0\}$. Тогда по теореме 3.2 ряд (3.4) сходится абсолютно и равномерно на каждом из множеств

$E(\Theta,\varepsilon)$, $\varepsilon > 0$, которое совпадает с полуплоскостью $\{z : Rez < Rez_0 - \varepsilon\}$. Это дает нам теорему Абеля для степенного ряда.

4. Аналог теоремы Коши-Адамара для рядов экспоненциальных мономов

Приведем результат, который является аналогом теоремы Коши-Адамара для степенных рядов. В этой теореме дается формула для вычисления радиуса сходимости степенного ряда. Аналогом круга для рядов экспонент является полуплоскость, а аналогом радиуса круга — расстояние от начала координат до полуплоскости. Если $\Theta(\Lambda)$ состоит из двух точек, то соответствующая $\Theta(\Lambda)$ — выпуклая область сходимости ряда (1.1) является пересечением двух полуплоскостей. У этой области уже два "радиуса сходимости— расстояния от начала координат до двух прямых, являющихся границами этих полуплоскостей. Если же $\Theta(\Lambda)$ — бесконечное множество, то и соответствующих "радиусов сходимости"ряда (1.1) будет бесконечно много. Следует отметить, что некоторые расстояния нужно брать со знаком минус. Такая ситуация возникает в случае, когда область сходимости не содержит начало координат. Рассмотрим, например, ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} 2^k \exp(kz)$.
Применяя к соответствующему ему степенному ряду теорему Абеля, легко установить, что областью его сходимости является полуплоскость $\{z : Rez < \ln(1/2)\}$. Чтобы не возникало путаницы, "радиусом сходимости"здесь следует считать величину $\ln(1/2)$, равную расстоянию от начала координат до прямой, ограничивающей полуплоскость, взятому со знаком минус, а не само расстояние. Поясним сказанное. Рассмотрим еще ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} 2^{-k} \exp(kz)$.
Так же как и в первом случае находим, что областью сходимости этого ряда является полуплоскость $\{z : Rez < \ln 2\}$. И вот здесь уже "радиус сходимости"равен $\ln 2$, т.е. расстоянию от начала координат до прямой, ограничивающей полуплоскость.

Прежде чем сформулировать заявленный выше результат, введем еще обозначения. Пусть $\xi \in \Theta(\Lambda)$. Для последовательности коэффициентов $d = \{d_{k,n}\}$ ряда (1.1) положим

$$h(d,\xi) = \inf \underline{\lim}_{j\to\infty} \min_{0\leqslant n\leqslant m_{k(j)}-1} \frac{\ln(1/|d_{k(j),n}|)}{|\lambda_{k(j)}|},$$

где инфимум берется по всем подпоследовательностям $\{\lambda_{k(j)}\}$ последовательности $\{\lambda_k\}$ таким, что $\lambda_{k(j)}/|\lambda_{k(j)}|$ сходится к ξ, когда $j \to \infty$. Таким образом, мы получили функцию $h(d,\xi)$, $\xi \in \Theta(\Lambda)$. Из ее определения нетрудно вывести, что она является полунепрерывной снизу. Тогда, как и в лемме 2.2, показывается, что множество

$$D = D(d,\Lambda) = \{z : Re(z\xi) < h(d,\xi), \xi \in \Theta(\Lambda)\}$$

является $\Theta(\Lambda)$ — выпуклой областью.

Теорема 4.1. *Пусть последовательность Λ такова, что $\sigma(\Lambda) = m(\Lambda) = 0$. Тогда ряд (1.1) сходится в каждой точке области D и расходится в каждой точке ее внешности $\mathbb{C} \setminus \overline{D}$ за исключением начала координат, если ряд $\sum d_{k,0}$ сходится.*

Доказательство. Пусть $z \in D$. Выберем номер p так, что $z \in K_p$, где K_p элемент множества $K(D)$. Тогда согласно лемме 2.4 с учетом (2.1) получаем оценку

$$\sum_{k=1,n=0}^{\infty,m_k-1} |d_{k,n}||z|^n \exp(Re(z\lambda_k)) \leqslant C \sum_{k=1,n=0}^{\infty,m_k-1} |d_{k,n}| \exp H_{K_{p+1}}(\lambda_k) =$$

$$= C \sum_{k=1,n=0}^{\infty,m_k-1} |d_{k,n}| \exp(H_{K_{p+2}}(\lambda_k) + H_{K_{p+1}}(\lambda_k) - H_{K_{p+2}}(\lambda_k)) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=1,n=0}^{\infty,m_k-1} |d_{k,n}| \exp(H_{K_{p+2}}(\lambda_k) - \alpha_{p+1}|\lambda_k|). \tag{4.1}$$

Покажем, что

$$\overline{\lim}_{k\to\infty} \max_{0\leqslant n\leqslant m_k-1} |d_{k,n}| \exp(H_{K_{m+2}}(\lambda_k)) < +\infty \tag{4.2}$$

Предположим, что это не так. Тогда для некоторой подпоследовательности $\{k(j), n(j)\}$ имеем:

$$\overline{\lim_{j\to\infty}} |d_{k(j),n(j)}| \exp H_{K_{p+2}}(\lambda_{k(j)}) = +\infty,$$

или, что эквивалентно

$$\overline{\lim_{j\to\infty}} (\ln |d_{k(j),n(j)}| + H_{K_{p+2}}(\lambda_{k(j)})) = +\infty.$$

Отсюда

$$\overline{\lim_{j\to\infty}} |\lambda_{k(j)}|^{-1} (\ln |d_{k(j),n(j)}| + H_{K_{p+2}}(\lambda_{k(j)})) \geq 0. \tag{4.3}$$

Переходя еще раз к подпоследовательности, можно считать, что $\lambda_{k(j)}/|\lambda_{k(j)}|$ сходится к некоторой точке $\xi \in \Theta(\Lambda)$. Тогда с учетом непрерывности, положительной однородности опорной функции компакта и определения величины $h(d,\xi)$ получаем:

$$\overline{\lim_{j\to\infty}} |\lambda_{k(j)}|^{-1} (\ln |d_{k(j),n(j)}| + H_{K_{p+2}}(\lambda_{k(j)})) \leqslant$$

$$\leqslant \overline{\lim_{j\to\infty}} |\lambda_{k(j)}|^{-1} \ln |d_{k(j),n(j)}| + \overline{\lim_{j\to\infty}} |\lambda_{k(j)}|^{-1} |H_{K_{p+2}}(\lambda_{k(j)}) \leqslant$$

$$\leqslant \overline{\lim_{j\to\infty}} |\lambda_{k(j)}|^{-1} \ln |d_{k(j),n(j)}| + H_{K_{p+2}}(\xi) \leqslant -h(d,\xi) + H_{K_{p+2}}(\xi) < 0.$$

Последняя оценка здесь следует из того, что

$$H_{K_{p+2}}(\xi) < H_D(\xi)$$

(т. к. K_{p+2} — компакт в области D) и

$$H_D(\xi) \leqslant h(d,\xi)$$

(в силу определения области $D = D(d,\Lambda)$ и опорной функции H_D). Таким образом, мы получили противоречие с (4.3). Следовательно, (4.2) верно. Поэтому, согласно (4.1), имеем:

$$\sum_{k=1,n=0}^{\infty,m_k-1} |d_{k,n}||z|^n \exp Re(z\lambda_k) \leqslant C' \sum_{k=1,n=0}^{\infty,m_k-1} m_k \exp(-\alpha_{p+1}|\lambda_k|).$$

По условию $\sigma(\Lambda) = 0$. Тогда в силу леммы 2.1 последний ряд сходится. Это означает, что ряд (1.1) сходится в точке z.

Пусть теперь $z \in \mathbb{C} \setminus \overline{D}$. Если $z = 0$ и ряд $\sum d_{k,0}$ сходится, то ряд (1.1) сходится в точке $z = 0$.

Пусть $z \neq 0$. По определению области D найдется $\xi \in \Theta(\Lambda)$ такое, что

$$Re(z\xi) > h(d,\xi). \tag{4.4}$$

Согласно определению величины $h(d,\xi)$ найдем подпоследовательность $\{k(j), n(j)\}$ такую, что $\lambda_{k(j)}/|\lambda_{k(j)}|$ сходится к точке ξ и

$$h(d,\xi) = \lim_{j\to\infty} \frac{\ln(1/|d_{k(j),n(j)}|)}{|\lambda_{k(j)}|} \tag{4.5}$$

Предположим, что ряд (1.1) все-таки сходится в точке z. Тогда общий член ряда (1.1) ограничен на множестве $E = \{z\} \cup D$, и по лемме 2.3 последовательность его коэффициентов d принадлежит пространству $Q(D')$, где D' — $\Theta(\Lambda)$ — выпуклая оболочка множества E. При этом z является граничной точкой области D' (т.к. не лежит в D). Следовательно, с учетом (4.4) в области D' найдется точка z' такая, что

$$Re(z'\xi) > h(d,\xi). \tag{4.6}$$

Выберем номер p, для которого компакт $K'_p \in K(D')$ содержит z'. Как уже отмечалось, $d \in Q(D')$. Поэтому, согласно определению пространства $Q(D')$, имеем:

$$|d_{k,n}| \leqslant B \exp(-H_{K'_p}(\lambda_k)), \quad k = 1,2,\ldots, \quad n = 0,1,\ldots,m_k - 1,$$

где B — положительная постоянная. Так как $z' \in K'_p$, то

$$Re(z'\lambda_k) \leqslant H_{K'_p}(\lambda_k), \quad k = 1,2,\ldots$$

С учетом этого по предыдущему получаем:

$$|d_{k,n}| \leqslant B \exp(-Re(z'\lambda_k)).$$

Отсюда и из (4.6) следует, что

$$\lim_{j\to\infty} \frac{\ln(1/|d_{k(j),n(j)}|)}{|\lambda_{k(j)}|} \geq \frac{-\ln B + Re(z'\lambda_{k(j)})}{|\lambda_{k(j)}|} = Re(z'\xi) > h(d,\xi).$$

Это противоречит (4.5). Теорема доказана.

Замечание. В частном случае для ряда (3.4) имеем формулу

$$h(d,1) = \underline{\lim}_{k\to\infty} \frac{\ln(1/|d_k|)}{k} = \underline{\lim}_{k\to\infty}(-\ln \sqrt[k]{|d_k|}).$$

Делая преобразование $w = \exp z$, переводящее ряд (3.4) в степенной ряд, получаем следующую формулу для радиуса сходимости последнего

$$R = \exp h(d,1) = \underline{\lim}_{k\to\infty} \frac{1}{\sqrt[k]{|d_k|}}.$$

Таким образом, мы получили формулу Коши-Адамара для степенных рядов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Леонтьев А.Ф. *Ряды экспонент.* // М.: Наука. 1976.
2. Леонтьев А.Ф. *Целые функции. Ряды экспонент.* // М.: Наука. 1983.
3. E. Hille *Note on Dirichlet's series with complex exponents.* // Ann. Of Math. 1924. V. 25. P. 261-278.
4. Лунц Г.Л. *О некоторых обобщениях рядов Дирихле.* // Матем. сб. 1942. Т. 10(52), № 1-2, С. 35-50.
5. Лунц Г. Л. *Об одном классе обобщенных рядов Дирихле.* // УМН. 1957. Т. 12, вып. 3(75). С. 173-179.
6. Братищев А.В. *Базисы Кете, целые функции и их приложения.* // Дисс. на соискание уч. ст. докт. физ.-мат. наук. Ростов-на-Дону . 1995.
7. Лейхтвейс К. *Выпуклые множества.* // М.: Наука, 1985.

Олеся Александровна Кривошеева,
Башкирский государственный университет,
ул. Заки Валиди, 32,
450074, г. Уфа, Россия
E-mail: kriolesya2006@yandex.ru