ISSN 2074-1863 Уфимский математический журнал. Том 3. № 2 (2011). С. 87-90.

УДК 517.9

НЕИЗОМОРФНЫЕ АЛГЕБРЫ ЛИ, ДОПУСКАЕМЫЕ МОДЕЛЯМИ ГАЗОВОЙ ДИНАМИКИ

С.В. ХАБИРОВ

Аннотация. Групповая классификация уравнений газовой динамики по уравнению состояния состоит из 13 типов алгебр Ли различных размерностей от 11 до 14. Некоторые типы зависят от параметра. Оказывается, пять пар алгебр эквивалентны. При этом преобразования эквивалентности для алгебр содержат преобразования эквивалентности для уравнений газовой динамики. В результате проверки на эквивалентность получилось девять неизоморфных алгебр Ли различной структуры. Один тип имеет 3 разные структуры при разных значениях параметра. Каждая из этих алгебр Ли представлена в виде полупрямой суммы шестимерного абелевого идеала и подалгебры, которая, в свою очередь, разбита в полупрямую или прямую сумму. Оптимальные системы для подалгебр построены. Добавление абелевого идеала при построении оптимальной системы сделано в шести случаях. Остается три алгебры Ли размерностей 12, 13, 14, для которых оптимальная система не построена.

Ключевые слова: газовая динамика, алгебра Ли, преобразование эквивалентности, ортимальная система

Уравнения газовой динамики таковы

$$\rho D\vec{u} + \nabla p = 0, \quad D\rho + \rho\nabla\cdot\vec{u} = 0, \quad Dp + \rho f_\rho \nabla\cdot\vec{u} = 0, \quad DS = 0 \tag{1}$$

с уравнением состояния общего вида $p = f(\rho, S)$, $D = \partial_t + \vec{u}\cdot\nabla$, $\vec{u}$, p, ρ, S — скорость, давление, плотность, энтропия.

Преобразования эквивалентности системы (1) не изменяют систему (1), а лишь изменяют уравнение состояния:

$$p' = g(\rho, p, S), \quad \rho' = h(\rho, p, S), \quad S' = k(\rho, p, S), \quad p' = f'(\rho', S'). \tag{2}$$

Утверждение 1. *Преобразования эквивалентности системы* (1) *имеют вид*

$$p' = ap + b, \quad \rho' = a\rho, \quad S' = K(S), \quad f'\left(a\rho, K(S)\right) = af(\rho, S) + b. \tag{3}$$

где a, b — произвольные постоянные, $K(S)$ — произвольная функция.

Доказательство. В систему (1) с переменными p', ρ', S' подставим выражения (2). В силу (1) получим равнества

$$g_\rho = f_\rho\left(h\rho^{-1} - g_p\right), \quad g_S = f_S\left(h\rho^{-1} - g_p\right),$$

$$k_\rho + f_\rho k_p = 0, \quad h_\rho + f_\rho h_p = \rho^{-1}h, \quad g = f'(h, k).$$

S.V. Khabirov, Nonisomorphic Lie algebras admitted by gasdynamic models.

Работа поддержана РФФИ (гранты 11-01-00026-а, 11-01-00147-а) и Советом по грантам Президента РФ для государсвтенной поддержки научных школ (№НШ-4368.2010.1).

Поступила 25 марта 2011 г.

Решение уравнений имеет вид

$$k = K(I,S), \quad g = pG_1(I) + G_2(I), \quad h = \rho G_1(I), \quad I = p - f(\rho, S),$$

$$f'\left(\rho G_1(I), K(I,S)\right) = \left(I + f(\rho,S)\right) G_1(I) + G_2(I).$$

Полагая $I = 0$, $a = G_1(0)$, $b = G_2(0)$, $K(0,S) = K(S)$, получаем формулы (3).

Система (1) с произвольным уравнением состояния допускает 11-мерную алгебру Ли L_{11}, базис которой в декартовой системе координат задается следующими операторами $X_i = \partial_{x^i}$, $X_{3+i} = t\partial_{x^i} + \partial u^i$, $X_{6+i} = \varepsilon_{ij}^k \left(x^j_{x^k} + u^j \partial_{u^k}\right)$, $i = 1,2,3$, $X_{10} = \partial_t$, $X_{11} = t\partial_t + x^j \partial_{x^j}$. Для специальных уравнений состояния алгебра L_{11} расширяется [1]. Расширения с точностью до преобразований (3) представлены в таблице, где $Y_0 = t\partial_t - u^i \partial_{u^i}$, $Y_{\varphi(p)} = \rho\varphi'(p)\partial_\rho + \varphi(p)\partial_p$, φ, f — произвольные функции, γ, $\gamma_1 = 2\gamma(\gamma-1)^{-1}$ — параметры, k — размерность алгебры.

№	$p = f(\rho,S)$	k	Дополнительные операторы
1	$f(\rho,S)$	11	—
2	$\rho^\gamma f(S\rho)$	12	$Y_0 - (\gamma_1 - 2)\rho\partial_\rho - \gamma_1 p\partial_p$, $\gamma_1 \neq 0, 2$
3	$\rho f(S\rho)$	12	Y_p
4	$f(S\rho)$	12	$Y_0 + 2\rho\partial_\rho = X_{12}$
5	$Sf(\rho)$	12	$Y_0 + 2p\partial_p$
6	$S\rho^\gamma$	13	Y_p, $Y_0 + 2\rho\partial_\rho$
7	$S\rho^{5/3}$	14	Y_p, $Y_0 + 2\rho\partial_\rho$, $x^i X_{3+i} + t(Y_0 - 3\rho\partial_\rho - 5p\partial_p) = Z$
8	$\ln\rho + f(\rho S)$	12	$Y_0 + 2\rho\partial_\rho + 2\partial_p$
9	$f(\rho) + S$	12	Y_1
10	$\rho^\gamma + S$	13	Y_1, $Y_0 - (\gamma_1 - 2)\rho\partial_\rho - \gamma_1 p\partial_p$, $\gamma \neq 0, \pm 1$
11	$\rho + S$	13	Y_1, Y_p
12	$\ln\rho + S$	13	Y_1, $Y_0 + 2\rho\partial_\rho$
13	S	∞	$Y_{\varphi(p)}$, $Y_0 + 2\rho\partial_\rho$

Для построения различных подмоделей системы (3) необходимо перечислить неподобные подалгебры алгебр Ли из таблицы расширений (оптимальная система). Подалгебры изоморфных алгебр изморфны. Поэтому сначала определим неизоморфные алгебры из таблицы расширений.

Утверждение 2. [2]. *Конечномерные подалгебры алгебры $L_\infty = \{X_{\varphi(p)}\}$ подобны следующим $\{Y_1\}$, $\{Y_1, Y_p\}$, $\{Y_1, Y_p, Y_{p^2}\}$.*

Утверждение 3. *Таблица неизоморфных конечномерных алгебр Ли такова Таблица 1.*

$f(\rho,S)$	L_{11}
$f(S\rho)$	$\{Y_0 + 2\rho\partial_\rho\} \dot{\oplus} L_{11}$
$f(\rho) + S$	$\{Y_1\} \oplus L_{11}$
$S\rho^\gamma$	$\{Y_p, Y_0 + 2\rho\partial_\rho\} \dot{\oplus} L_{11}$
$\rho^\gamma + S$	$\{Y_1, Y_0 - (\gamma_1 - 2)\rho\partial_\rho - \gamma_1 p\partial_p\} \dot{\oplus} L_{11} = M_{\gamma_1}$, $\gamma_1 = 0, \pm 1$
$\rho^{-1} + S$	$\{Y_1, Y_0 + \rho\partial_\rho - p\partial_p\} \dot{\oplus} L_{11} = M_1$
$\rho^{1/3} + S$	$\{Y_1, Y_0 + 3\rho\partial_\rho + p\partial_p\} \dot{\oplus} L_{11} = M_{-1}$
$\rho + S$	$\{Y_1, Y_p\} \oplus L_{11}$
$S\rho^{5/3}$	$\{X_{10}, X_{11}, Y_p, Y_0 + 2\rho\partial_\rho, Z\} \dot{\oplus} L_9 = L_{14}$
S	$\{Y_1, Y_p, Y_{p^2}\} \oplus L_{11}$

Здесь L_9, L_{11} — идеалы, $\dot{\oplus}$ — полупрямая сумма, $\oplus$ — прямая сумма идеалов.

Доказательство. Алгебра Ли $N = 3'$ с дополнительным оператором $Y_{p'} = \rho'\partial_{\rho'} + p'\partial_{p'}$ для уравнения состояния $p' = \rho' f'(S'\rho')$ эквивалентна алгебре Ли $N = 9$ с дополнительным оператором $Y_1 = \partial_p$ для уравнения состояния с разделенным в сумму давлением $p = f(\rho) + S$. В этом можно убедиться, сделав замену $\rho = \dfrac{p'}{\rho'}$, $p = \ln p'$, $S = -\ln S'$, $f(f'(\tau)) = \ln(\tau f'(\tau))$. Замена согласована с уравнением состояния, но изменяет второе уравнение системы (1):

$$D\ln\rho = D\ln f'(\tau) = \tau f'_\tau \left(f'(\tau)\right)^{-1} D\ln\rho', \quad \tau = S'\rho'.$$

Алгебра Ли $N = 2'$ с дополнительным оператором $Y_0 - (\gamma_1 - 2)\rho'\partial_{\rho'} - \gamma_1 p'\partial_{p'}$ для уравнения состояния $p' = \rho'^{\gamma} f'(S'\rho')$ эквивалентна алгебре Ли $N = 4$ с дополнительным оператором $Y_0 + 2\rho\partial_\rho$ для уравнения состояния с разделенной в произведение плотностью $p = f(S\rho)$. В этом можно убедиться, сделав замену $\rho = \rho'^{\frac{1-\gamma}{2}}$, $p = p'\rho'^{-\gamma}$, $S = S'^{\frac{1-\gamma}{2}}$, $f'(\tau) = f\left(\tau^{\frac{1-\gamma}{2}}\right)$. Замена согласована с уравнением состояния, но изменяет второе уравнение системы (1) $D\ln\rho = \frac{1-\gamma}{2} D\ln\rho'$.

Алгебра Ли $N = 5'$ с дополнительным оператором $Y_0 + 2p'\partial p'$ для уравнения состояния $p' = S' f'(\rho')$ эквивалентна алгебре Ли $N = 4$ с дополнительным оператором $Y_0 + 2\rho\partial_\rho$ для уравнения состояния с разделенной плотностью $p = f(S\rho)$. Замена $p = \rho'$, $\rho = p'$, $S = S'^{-1}$, $f'(f(\tau)) = \tau$ согласована с уравнениями состояния, но изменяет второе уравнение системы (1) $D\ln\rho = \tau f'_\tau \left(f(\tau)\right)^{-1} D\ln\rho'$, $\tau = \rho'$.

Алгебра Ли $N = 8'$ с дополнительным оператором $Y_0 + 2\rho'\partial_{\rho'} + 2\partial_{p'}$ для уравнения состояния $p' = \ln\rho' + f'(\rho' S')$ эквивалентна алгебре Ли $N = 4$. Преобразование эквивалентности таковы: $p = p' - \ln\rho'$, $\rho = \rho'$, $S = S'$, $f(\tau) = f'(\tau)$. Замена согласована с уравнениями состояния, но изменяет первое уравнение системы $\rho^{-1} \bigtriangledown p = \rho'^{-1} \bigtriangledown p' - \rho'^{-2} \bigtriangledown \rho'$.

Алгебра Ли $N = 12'$ с дополнительными операторами $Y_1 = \partial_{p'}$, $Y_0 + 2\rho'\partial_{\rho'}$ для уравнения состояния $p' = \ln\rho' + S'$ эквивалентна алгебре Ли $N = 6$ с дополнительными операторами $Y_p = \rho\partial_\rho + p\partial_p$, $Y_0 + 2\rho\partial_\rho$ для уравнения состояния политропного газа $p = S\rho^\gamma$. Преобразования эквивалентности имеют вид $p = e^{p'}$, $\rho = \rho' e^{p'}$, $S = e^{(1-\gamma)S'}$. Замена согласована с уравнениями состояния только при $\gamma = \frac{1}{2}$ и изменяет только второе уравнение системы (1) $D\ln\rho = 2D\ln\rho'$.

Другие пары алгебр Ли из таблицы расширений не эквивалентны и неизоморфны, как это видно из разложений этих алгебр в полупрямые или прямые суммы.

Системы подалгебр для алгебр M_{γ_1}, $\gamma_1 \neq \pm 1$, M_1, M_{-1} различаются друг от друга [3].

Для постоения оптимальных систем неизоморфных конечномерных алгебр Ли удобно разложить их в полупрямые суммы, у которых одним из слагаемых является абелев идеал $J_6 = \{X_1, \ldots, X_6\}$ $(J_3 = \{X_7, X_8, X_9\})$:

$$L_{11} = (J_3 \oplus \{X_{10}, X_{11}\}) \dot{\oplus} J_6 \quad [1],$$

$$\{X_{12}\} \dot{\oplus} L_{11} = \left(J_3 \oplus \left(\{X_{10}\} \dot{\oplus} \{X_{11}, X_{12}\}\right)\right) \dot{\oplus} J_6 \quad [4],$$

$$\{Y_1\} \oplus L_{11} = \left(J_3 \oplus \left(\{X_{10}, X_{11}\} \oplus \{Y_1\}\right)\right) \dot{\oplus} J_6,$$

$$\{Y_p, X_{12}\} \dot{\oplus} L_{11} = \left(\left(J_3 \oplus \left(\{X_{10}\} \dot{\oplus} \{X_{11}, X_{12}\}\right)\right) \oplus \{Y_p\}\right) \dot{\oplus} J_6 \quad [5],$$

$$M_{\gamma_1} = \left(\left(J_3 \oplus \{Y_1, Y_0 - (\gamma_1 - 2)\rho\partial_\rho - \gamma_1 p\partial_p\}\right) \dot{\oplus} \{X_{10}, X_{11}\}\right) \dot{\oplus} J_6 \quad [3],$$

$$\{Y_1, Y_p\} \oplus L_{11} = \left(J_3 \oplus \{X_{10}, X_{11}\} \oplus \{Y_1, Y_p\}\right) \dot{\oplus} J_6,$$

$$L_{14} = \Big(J_3 \oplus \{X_{10}, X_{11}, X_{12}, Z\} \oplus \{Y_p\}\Big)\dot{\oplus} J_6 \quad [6],$$

$$\{Y_1, Y_p, Y_{p^2}\} \oplus L_{11} = \Big(J_3 \oplus \{X_{10}, X_{11}\} \oplus \{Y_1, Y_p, Y_{p^2}\}\Big)\dot{\oplus} J_6.$$

Для алгебры Ли со ссылками оптимальные системы построены. Оптимальные системы подалгебр — дополнений к абелеву идеалу J_6 приведены в [2].

Итак, осталось закончить построение оптимальных систем для трех разложений, которые не найдены в научной литературе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Овсянников Л.В. *Программа подмодели. Газовая динамика* // ПММ. 1994. Т. 58, вып. 4. С. 30–55.
2. S. Khabirov *Optimal systems of symmetry subalgebras for big models of gasdynamics* // Selşuk Journal of Applied Mathematics. 2002. Vol. 3, № 2. P.65–80.
3. Хабиров С.В. *Оптимальные системы подалгебр, допускаемых уравнениями газовой динамики.* Препринт института механики УНЦ РАН. Уфа. 1998. 33с.
4. Макаревич Е.В. *Оптимальная система подалгебр, допускаемых уравнениями газовой динамики в случае уравнений состояния с разделенной плотностью* // Сибирские электронные математические известия. 2011. Т. 2. С. 19–38. (http://semr.math.nsc.ru)
5. Головин С.В. *Оптимальная система подалгебр для алгебры операторов, допускаемых уравнениями газовой динамики в случае политропного газа.* Препринт № 5-96. РАН. Сибирское отделение. Институт гидродинамики. Новосибирск. 1996. 31с.
6. Черевко А.А. *Оптимальная система поалгебр для алгебры операторов, допускаемых уравнениями газовой динамики в случае уравнения состоняия* $p = f(S)\rho^{5/3}$. Препринт № 4-96. РАН. Сибирское отделение. Институт гидродинамики. Новосибирск. 1996. 39с.

Салават Валеевич Хабиров,
Учреждение Российской академии наук
Институт механики Уфимского научного центра РАН,
Проспект Октября, 71,
450054, г. Уфа, Россия
E-mail: habirov@anrb.ru