ISSN 2074-1863 Уфимский математический журнал. Том 3. № 2 (2011). С. 34-42.

УДК 517.956.4

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С ПЕРЕМЕННЫМ НАПРАВЛЕНИЕМ ВРЕМЕНИ С ОБОБЩЕННЫМИ УСЛОВИЯМИ СОПРЯЖЕНИЯ

И.А. КАЛИЕВ, М.Ф. МУГАФАРОВ, О.В. ФАТТАХОВА

Аннотация. В работе исследована обратная задача нахождения решения и неизвестной правой части для параболического уравнения с изменяющимся направлением времени с обобщенными условиями склейки. С помощью разложения в ряды доказаны существование и единственность классических решений данной задачи.

Ключевые слова: обратная задача, параболическое уравнение с переменным направлением времени, обобщенные условия склейки.

1. Введение

Краевые задачи для параболических уравнений с изменяющимся направлением времени изучены во многих работах (см. например [1]–[7]).

На сегодняшний день постановки обратных задач для параболических уравнений все более усложняются в связи с потребностями моделирования и управления процессами в теплофизике и механике сплошной среды. Обратные задачи для параболических уравнений изучены достаточно хорошо [8]–[14]. Отличительной особенностью данной работы является рассмотрение обратной задачи для параболического уравнения с переменным направлением времени. Подобные уравнения имеют множество различных применений, например, описывают процессы распространения тепла в неоднородных средах, взаимодействия фильтрационных потоков, массопереноса вблизи поверхности летательного аппарата, описания сложных течений вязкой жидкости (см. напр. [15]). В качестве возможных приложений следует также указать задачи расчета теплообменников, в которых используется принцип противотока. В таких ситуациях, когда теплообмен происходит через разграничительную стенку, исключающую перемешивание жидкостей, могут возникать задачи со скачком температуры на границе раздела, аналогичные рассматриваемой в настоящей статье задаче с обобщенными условиями сопряжения. Результатом данной работы является решение, представленное в виде ряда, что позволяет производить необходимые численные расчеты с заданной точностью.

I.A. Kaliev, M.F. Mugafarov, O.V. Fattahova, Inverse problem for forward-backward parabolic equation with generalized sewing conditions.

Работа поддержана грантом МО и Науки по тематическим планам НИР СГПА им.Зайнаб Биишевой №1.1.07.

Поступила 14 декабря 2010 г.

2. Постановка задачи

Пусть $\Omega = \Omega_- \cup \Omega_+$, где $\Omega_- = (-1;0) \times (0;T)$, $\Omega_+ = (0;1) \times (0;T)$. Требуется найти функции $u(x,t)$, $f(x)$, связанные в области Ω уравнением

$$Lu \equiv \operatorname{sgn} x \cdot \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x). \tag{1}$$

Для функции $u(x,t)$ на границах $x = -1$ и $x = 1$ области Ω заданы условия второго рода

$$\frac{\partial u}{\partial x}(-1,t) = \frac{\partial u}{\partial x}(1,t) = 0, \qquad 0 \le t \le T. \tag{2}$$

На границах $t = 0$ и $t = T$ будем рассматривать следующие условия

$$u(x,0) = \varphi(x) = \begin{cases} \varphi_1(x), & -1 \le x \le 0, \\ \varphi_2(x), & 0 \le x \le 1, \end{cases} \tag{3}$$

$$u(x,T) = \psi(x) = \begin{cases} \psi_1(x), & -1 \le x \le 0, \\ \psi_2(x), & 0 \le x \le 1. \end{cases} \tag{4}$$

На линии $x = 0$ зададим условия сопряжения

$$\begin{cases} u_+ = u_-, & 0 \le t \le T, \\ u'_+ = -u'_-, & 0 \le t \le T. \end{cases} \tag{5}$$

Здесь и в дальнейшем

$$u_\pm = \lim_{x \to 0\pm} u(x,t), \qquad 0 \le t \le T,$$

$$u'_\pm = \lim_{x \to 0\pm} \frac{\partial u}{\partial x}(x,t), \qquad 0 \le t \le T.$$

В данной постановке $f(x)$ — неизвестная правая часть уравнения (1). Граничными условиями второго рода являются условия (2) для соответствующих параболических уравнений в областях Ω_- и Ω_+. С помощью функций φ_2 и ψ_1 заданы начальные условия, а функциями φ_1 и ψ_2 — условия финального переопределения, необходимые для нахождения функции $f(x)$.

3. Применение метода разделения переменных

Метод исследования обратной задачи в данной работе основан на исключении функции $f(x)$ из уравнения (1) с помощью дифференцирования по времени и переходе к задаче для функции

$$v(x,t) = \frac{\partial u}{\partial t}(x,t).$$

Из уравнения (1) и условий (2)–(5) получим следующую начально-граничную задачу. Найти функции $v(x,t)$ и $f(x)$, удовлетворяющие в области Ω уравнению

$$\operatorname{sgn} x \cdot \frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0, \tag{1}$$

граничным условиям

$$\frac{\partial v}{\partial x}(-1,t) = \frac{\partial v}{\partial x}(1,t) = 0, \qquad 0 \le t \le T. \tag{2}$$

$$\operatorname{sgn} x \cdot v(x,T) = f(x) + \psi''(x), \qquad x \in (-1;0) \cup (0;1), \tag{3}$$

$$\operatorname{sgn} x \cdot v(x,0) = f(x) + \varphi''(x), \qquad x \in (-1;0) \cup (0;1), \tag{4}$$

и условиям сопряжения на линии

$$\begin{cases} v_+ = v_-, & 0 \le t \le T, \\ v'_+ = -v'_-, & 0 \le t \le T. \end{cases} \tag{5}$$

Для решения задачи (1), (2), (5) применим метод разделения переменных. Будем искать решение уравнения (1) в виде $v(x,t) = X(x) \cdot \theta(t)$.

Относительно функции $X(x)$ получим задачу

$$\operatorname{sgn} x \cdot \frac{X''(x)}{X(x)} = \lambda = const, \tag{6}$$

$$X'(-1) = X'(1) = 0, \tag{7}$$

$$\begin{cases} X_+ = X_-, \\ X'_+ = -X'_-. \end{cases} \tag{8}$$

Для функций $X(x) \in C^2((-1;0) \cup (0;1))$, удовлетворяющих условиям (7), (8), введем в рассмотрение оператор

$$L_x X \equiv \operatorname{sgn} x \cdot X''(x). \tag{9}$$

Решения задачи (6) - (8) являются собственными функциями оператора и имеют вид:

при $\lambda = \mu_k^2 > 0, k \in \mathbb{N}$

$$G_k^+(x) = \begin{cases} \cos(\mu_k(x+1))/\cos\mu_k, & x < 0, \\ \operatorname{ch}(\mu_k(1-x))/\operatorname{ch}\mu_k, & x > 0, \end{cases} \tag{10}$$

при $\lambda = 0$

$$G_0(x) = \begin{cases} 1/2, & x < 0, \\ 1/2, & x > 0, \end{cases} \tag{11}$$

при $\lambda = -\mu_k^2 < 0, k \in \mathbb{N}$

$$G_k^-(x) = \begin{cases} \operatorname{ch}(\mu_k(x+1))/\operatorname{ch}\mu_k, & x < 0, \\ \cos(\mu_k(1-x))/\cos\mu_k, & x > 0. \end{cases} \tag{12}$$

С учетом (8) для собственных значений данного оператора получаем трансцендентные уравнения

$$\operatorname{tg}\mu_k = -\operatorname{th}\mu_k, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots . \tag{13}$$

Рис. 1. Расположение корней уравнения (13)

Оператор L_x является симметрическим и компактным. Согласно теореме Гильберта-Шмидта [16] система собственных функций является полной и ортогональной в $L_2((-1;0)\cup(0;1))$.

Функцию $\theta(t)$ найдем из уравнения

$$\theta'(t)=\lambda\theta(t).$$

При $\lambda=\mu_k^2>0, k\in\mathbb{N}$

$$\overline{\theta}_k(t)=\overline{g}_k\cdot e^{-\mu_k^2(T-t)};$$

при $\lambda=0$

$$\theta_0(t)=g_0;$$

при $\lambda=-\mu_k^2<0, k\in\mathbb{N}$

$$\theta_k(t)=g_k\cdot e^{-\mu_k^2 t}.$$

Таким образом, решение задачи (1)–(5) ищется в виде ряда

$$v(x,t)=CG_0(x)+\sum_{k=1}^{\infty}A_ke^{-\mu_k^2t}G_k^-(x)+\sum_{k=1}^{\infty}B_ke^{-\mu_k^2(T-t)}G_k^+(x) \tag{14}$$

с неизвестными коэффициентами A_k, B_k, C.

Для нахождения коэффициентов A_k, B_k воспользуемся условиями (3) и (4)

$$f(x)=\operatorname{sgn}x\cdot v(x,0)-\varphi''(x)=$$

$$=\operatorname{sgn}x\cdot\left[CG_0(x)+\sum_{k=1}^{\infty}A_kG_k^-(x)+\sum_{k=1}^{\infty}B_ke^{-\mu_k^2T}G_k^+(x)\right]-\varphi''(x), \tag{15}$$

$$f(x)=\operatorname{sgn}x\cdot v(x,T)-\psi''(x)=$$

$$=\operatorname{sgn}x\cdot\left[CG_0(x)+\sum_{k=1}^{\infty}A_ke^{-\mu_k^2T}G_k^-(x)+\sum_{k=1}^{\infty}B_kG_k^+(x)\right]-\psi''(x). \tag{16}$$

Из последних двух равенств имеем

$$\sum_{k=1}^{\infty}\bigl(A_kG_k^-(x)-B_kG_k^+(x)\bigr)(1-e^{-\mu_k^2T})=\operatorname{sgn}x\cdot(\varphi''(x)-\psi''(x)). \tag{17}$$

Скалярно домножим левую и правую части равенства (17) на $G_k^-(x)$ для нахождения коэффициента A_k, на $G_k^+(x)$ для нахождения коэффициента B_k. С учетом ортогональности системы собственных функций получим следующие формулы

$$A_k=\frac{\varphi_k^{-(2)}-\psi_k^{-(2)}}{1-e^{-\mu_k^2T}}, \tag{18}$$

$$B_k=\frac{\varphi_k^{+(2)}-\psi_k^{+(2)}}{e^{-\mu_k^2T}-1}, \tag{19}$$

где

$$\varphi_k^{-(2)}=\frac{(\operatorname{sgn}x\cdot\varphi''(x),G_k^-(x))}{\|G_k^-(x)\|^2},\qquad \psi_k^{-(2)}=\frac{(\operatorname{sgn}x\cdot\psi''(x),G_k^-(x))}{\|G_k^-(x)\|^2},$$

$$\varphi_k^{+(2)}=\frac{(\operatorname{sgn}x\cdot\varphi''(x),G_k^+(x))}{\|G_k^+(x)\|^2},\qquad \psi_k^{+(2)}=\frac{(\operatorname{sgn}x\cdot\psi''(x),G_k^+(x))}{\|G_k^+(x)\|^2},$$

$\|G\|^2=\int\limits_{-1}^{1}G^2(x)dx-$ квадрат нормы, а $(\cdot,\cdot)$ — скалярное произведение в $L_2((-1;0)\cup(0;1))$.

Для нахождения коэффициента C вернемся к функции $u(x,t)$:

$$u(x,t) = \int\limits_T^t v(x,\tau)d\tau + \psi_1(x) = \psi_1(x) + CG_0(x)(t-T) +$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\left[A_k e^{-\mu_k^2 t}G_k^-(x) + B_k G_k^+(x)\right]\frac{e^{-\mu_k^2(T-t)}-1}{\mu_k^2}, \qquad (x;t)\in\Omega_-; \tag{20}$$

$$u(x,t) = \int\limits_0^t v(x,\tau)d\tau + \varphi_2(x) = \varphi_2(x) + CG_0(x)t +$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\left[A_k G_k^-(x) + B_k e^{-\mu_k^2(T-t)}G_k^+(x)\right]\frac{1-e^{-\mu_k^2 t}}{\mu_k^2}, \qquad (x;t)\in\Omega_+. \tag{21}$$

В равенстве (20) положим $t = 0$, а в равенстве (21) положим $t = T$. В итоге для произвольного $x \in (-1;0)\cup(0;1)$ получим

$$CG_0(x)T + \sum_{k=1}^{\infty}\left[A_k G_k^-(x) + B_k G_k^+(x)\right]\frac{1-e^{-\mu_k^2 T}}{\mu_k^2} = \psi(x) - \varphi(x). \tag{22}$$

Скалярно домножим равенство (22) на $G_0(x)$, тогда с учетом $\|G_0(x)\|^2 = 1$

$$C = \frac{(\psi(x)-\varphi(x), G_0(x))}{T}. \tag{23}$$

4. Теорема существования и единственности решения задачи

Теорема 1. *Если функции* $\varphi(x), \psi(x) \in C^4([-1;0)\cup(0;1])$, $\varphi'(-1) = \varphi'(1) = \psi'(-1) = \psi'(1) = 0$, $\varphi_- = \varphi_+$, $\psi_- = \psi_+$, $\varphi'_- = -\varphi'_+$, $\psi'_- = -\psi'_+$, $\varphi'''(-1) = \psi'''(-1)$, $\varphi'''(1) = \psi'''(1)$, $\varphi''_- + \varphi''_+ - \psi''_- - \psi''_+ = 0$ *и* $\varphi'''_- - \varphi'''_+ - \psi'''_- + \psi'''_+ = 0$, *то существует единственное классическое решение* $u(x,t) \in C^{2,1}_{x,t}(\Omega_-\cup\Omega_+)$, $f(x) \in C([-1;0)\cup(0;1])$ *задачи (1)–(5) и оно определяется рядами (15), (20), (21), где коэффициенты* A_k, B_k, C *определяются соответственно формулами (18), (19) и (23).*

Доказательство.

1. Единственность решения.

Предположим, $\{u_1(x,t),\ f_1(x)\}$ и $\{u_2(x,t),\ f_2(x)\}$ два различных решения рассматриваемой задачи. Пусть

$$\bar u(x,t) = u_2(x,t) - u_1(x,t), \qquad \bar f(x) = f_2(x) - f_1(x).$$

Тогда функции $\bar u(x,t), \bar f(x)$ удовлетворяют уравнению

$$\frac{\partial \bar u}{\partial t}(x,t) - \operatorname{sgn} x \cdot \frac{\partial^2 \bar u}{\partial x^2}(x,t) = \operatorname{sgn} x \cdot \bar f(x) \tag{1}$$

и однородным начально-граничным условиям

$$\frac{\partial \bar u}{\partial x}(-1,t) = \frac{\partial \bar u}{\partial x}(1,t) = 0, \qquad 0 \le t \le T, \tag{2}$$

$$\bar u(x,0) = \bar u(x,T) = 0, \qquad -1 \le x \le 1. \tag{3}$$

На линии $x = 0$

$$\begin{cases} \bar u_+ = \bar u_-, \\ \bar u'_+ = -\bar u'_-. \end{cases} \tag{4}$$

Введем обозначения

$$\bar{u}_k^+(t) = \int\limits_{-1}^{1} \bar{u}(x,t)G_k^+(x)dx, \tag{5}$$

$$\bar{f}_k^+ = \int\limits_{-1}^{1} \operatorname{sgn} x\, \bar{f}(x)G_k^+(x)dx. \tag{6}$$

Дифференцируя $\bar{u}(x,t)$ в (5) под знаком интеграла один раз и учитывая уравнение (1), получим

$$\frac{d}{dt}\bar{u}_k^+ = \int\limits_{-1}^{1} \operatorname{sgn} x\, \bar{u}_{xx} G_k^+(x)dx + \bar{f}_k^+.$$

Интегрируя два раза по частям интеграл в последнем равенстве с учетом условий сопряжения (4) и характеристических уравнений (13), получим уравнение, которому должны удовлетворять $\bar{u}_k^+(t)$

$$\frac{d}{dt}\bar{u}_k^+ = \mu_k^2 \bar{u}_k^+ + \bar{f}_k^+. \tag{7}$$

Из условий (3) получим, что $\bar{u}_k^+(t)$ должна удовлетворять условиям

$$\bar{u}_k^+(0) = \bar{u}_k^+(T) = 0. \tag{8}$$

Решение уравнения (7) имеет вид

$$\bar{u}_k^+ = C_1 \cdot e^{\mu_k^2 \cdot t} - \frac{\bar{f}_k^+}{\mu_k^2}, \qquad C_1 = const.$$

В силу условий (8) получим

$$\begin{cases} C_1 - \bar{f}_k^+/\mu_k^2 = 0, \\ C_1 \cdot e^{\mu_k^2 T} - \bar{f}_k^+/\mu_k^2 = 0. \end{cases}$$

Вычтем из первого уравнения системы второе

$$C_1(1 - e^{\mu_k^2 T}) = 0.$$

Так как $\mu_k \neq 0\ \ \forall\ k = 1, 2, \ldots$, то $C_1 = 0$. Следовательно,

$$\bar{f}_k^+ = 0.$$

Тогда получим

$$\bar{u}_k^+ = 0, \qquad k = 1, 2, \ldots .$$

Аналогично

$$\bar{u}_k^- = 0, \qquad k = 1, 2, \ldots .$$

Так как система собственных функций оператора L_x полна в $L_2((-1;0) \cup (0;1))$, то $\bar{u}(x,t) \equiv 0, \quad \bar{f}(x) \equiv 0$ в области Ω. Таким образом, единственность решения задачи доказана.

2. Существование решения.

Для коэффициентов A_k из (18) получаем

$$|A_k| \leq C_2\Big(|\varphi_k^{-(2)}| + |\psi_k^{-(2)}|\Big), \tag{9}$$

где

$$C_2 = \frac{1}{1 - e^{-\mu_1^2 T}}.$$

Поскольку функции $\varphi''(x)$ и $\psi''(x)$ непрерывны на сегменте $[-1;0)\cup(0;1]$, то, как известно из теории рядов Фурье, в силу неравенства Бесселя следующие ряды в $L_2((-1;0)\cup(0;1))$ сходятся

$$\sum_{k=1}^{\infty}(\varphi_k^{-(2)})^2 \le K\|\varphi''(x)\|^2, \tag{10}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}(\psi_k^{-(2)})^2 \le K\|\psi''(x)\|^2, \tag{11}$$

где

$$K = \max_{k\in\mathbb{N}}\left\{\ \|G_k^-(x)\|^2\right\}.$$

Положительные корни уравнения (13) асимптотически стремятся к значениям $\mu_k \sim -\pi/4+\pi k$, причем значения разностей $(-\pi/4+\pi k-\mu_k)$ отрицательны и монотонно стремятся к 0. Поэтому $|-\pi/4+\pi k-\mu_k| < |-\pi/4+\pi-\mu_1| = d$. Расчеты показывают, что $d < 8,83\cdot 10^{-3}$. Поэтому $-\pi/4+\pi k < \mu_k < -\pi/6+\pi k$, следовательно

$$\sqrt{2}/2 < \cos\mu_k < \sqrt{3}/2. \tag{12}$$

Кроме того, так как $\operatorname{ch}^2\mu_k > \operatorname{ch}^2\mu_1\ \forall k>1$, то

$$0 < \frac{1}{\operatorname{ch}^2\mu_k} < \frac{1}{\operatorname{ch}^2\mu_1} \approx 0,0347.$$

$$\|G_k^+(x)\|^2 = \|G_k^-(x)\|^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\cos^2\mu_k}+\frac{1}{\operatorname{ch}^2\mu_k}\right).$$

Из неравенств, полученных выше, вытекает оценка

$$K < 2.$$

Из (9) – (11) следует ограниченность $|A_k|$. Аналогично, коэффициенты B_k также ограничены.

Оценим модули общих членов из рядов (20) и (21).

В области Ω_+

$$|CG_0(x)t| \le \frac{1}{2}|C|T,$$

$$\left|\left[A_kG_k^-(x)+B_ke^{-\mu_k^2(T-t)}G_k^+(x)\right]\frac{1-e^{-\mu_k^2t}}{\mu_k^2}\right| \le \frac{|A_k|}{\mu_k^2}\cdot\frac{1}{\cos\mu_k}+\frac{|B_k|}{\mu_k^2}.$$

В области Ω_-

$$|CG_0(x)t| \le \frac{1}{2}|C|T,$$

$$\left|\left[A_ke^{-\mu_k^2t}G_k^-(x)+B_kG_k^+(x)\right]\frac{e^{-\mu_k^2(T-t)}-1}{\mu_k^2}\right| \le \frac{|A_k|}{\mu_k^2}+\frac{|B_k|}{\mu_k^2}\cdot\frac{1}{\cos\mu_k}.$$

Принимая во внимание (12) и $\mu_k^2 > \pi^2k^2$, получаем, что ряды (20), (21) мажорируются сходящимся рядом

$$\frac{2}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{|A_k|+|B_k|}{k^2}.$$

Поэтому ряд в силу признака Вейерштрасса сходится абсолютно и равномерно в замкнутой области $\overline{\Omega}$. Следовательно, функция $u(x,t)$ непрерывна в области $\overline{\Omega}$ как сумма равномерно сходящегося ряда и непрерывной функции.

Аналогичными оценками показана возможность почленного дифференцирования рядов (20), (21) по переменной x дважды и по переменной t один раз. Для этого доказана абсолютная и равномерная сходимость в $\overline{\Omega}$ рядов, полученных формальным дифференцированием.

Подставляя соответствующие ряды в уравнение (1) в областях Ω_- и Ω_+, убеждаемся в том, что функция $u(x,t)$, определяемая рядами (20), (21) соответственно, является его решением.

Проверим условия финального переопределения.

Рассмотрим область Ω_+.

$$u(x,T) = CG_0T + \sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{A_k}{\mu_k^2}(1-e^{-\mu_k^2T})G_k^- + \frac{B_k}{\mu_k^2}e^{-\mu_k^2T}(e^{\mu_k^2T}-1)G_k^+\right] + \varphi_2(x) =$$

$$= CG_0T + \sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{\varphi_k^{-(2)}-\psi_k^{-(2)}}{\mu_k^2}G_k^- + \frac{\varphi_k^{+(2)}-\psi_k^{+(2)}}{\mu_k^2}G_k^+\right] + \varphi_2(x). \qquad (13)$$

Интегрируя два раза по частям интегралы для $\varphi_k^{-(2)}$, $\psi_k^{-(2)}$, $\varphi_k^{+(2)}$ и $\psi_k^{+(2)}$, имеем $\varphi_k^{-(2)} = -\mu_k^2\varphi_k^-$, $\psi_k^{-(2)} = -\mu_k^2\psi_k^-$, $\varphi_k^{+(2)} = \mu_k^2\varphi_k^+$ и $\psi_k^{+(2)} = \mu_k^2\psi_k^+$, где

$$\varphi_k^- = \frac{(\varphi(x),\ G_k^-(x))}{\|G_k^-(x)\|^2}, \qquad \psi_k^- = \frac{(\psi(x),\ G_k^-(x))}{\|G_k^-(x)\|^2},$$

$$\varphi_k^+ = \frac{(\varphi(x),\ G_k^+(x))}{\|G_k^+(x)\|^2}, \qquad \psi_k^+ = \frac{(\psi(x),\ G_k^+(x))}{\|G_k^+(x)\|^2}.$$

Подставляя найденные соотношения между коэффициентами в (13), получим равенство $u(x,T) = \psi_2(x)$.

Аналогично в области Ω_- проверяется выполнение равенства $u(x,0) = \varphi_1(x)$.

Значит, найденное решение удовлетворяет всем условиям задачи.

Теорема существования и единственности доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. M. Gevrey *Sur les equations aux derivees partielles du type parabolique* // J. Math. Appl. Ch. 4. 1914. P. 105–137.
2. C.D. Pagani, G. Talenti *On a forward-backward differential equation* // Annali di Matematica pura et Applicata. T. 90, № 4. 1971. P. 1–58.
3. Керефов А.А. *Задача Жевре для одного смешанно-параболического уравнения* // Дифференц. уравнения. Т. 13, № 1. 1977. С. 76–83.
4. Пятков С.Г. *О разрешимости одной краевой задачи для параболического уравнения с меняющимся направлением времени* // Докл. АН СССР. Т. 285, № 6. 1985. С. 1322–1327.
5. Терсенов С.А. *Параболические уравнения с меняющимся направлением времени.* Новосибирск: Наука. 1985. 105 с.
6. Кислов Н.В., Пулькин И.С. *О существовании и единственности слабого решения задачи Жевре с обобщенными условиями склейки* // Вестн.МЭИ. № 6. 2002. С. 88–92.
7. I. Pulkin *Gevrey problem for parabolic equations with changing time direction* // Electronic Journal of Differential Equations. Vol.2006, № 50. 2006. P. 1–9.
8. Бубнов Б.А. *Существование и единственность решения обратных задач для параболических и эллиптических уравнений* // Неклассические уравнения математической физики. Новосибирск: Издательство института математики. 1986. С. 25–29.
9. Аниконов Ю.Е., Белов Ю.Я. *Об однозначной разрешимости одной обратной задачи для параболического уравнения* // Доклады Академии наук СССР. Т. 306, № 6. 1989. С. 1289–1293.
10. Прилепко А.И., Костин А.Б. *Об обратных задачах для параболических уравнений с финальным и интегральным наблюдением* // Математический сборник. Т. 183, № 4. 1992. С. 49–68.

11. Гольдман Н.Л. *Обратная задача с финальным переопределением для квазилинейного параболического уравнения с неизвестной правой частью* // Вычислительные методы и программирование. Т. 4, № 1. 2003. С. 155–166.
12. Калиев И.А., Первушина М.М. *Обратные задачи для уравнения теплопроводности* // Современные проблемы физики и математики: Труды Всероссийской конференции. Гилем. Т. 1. 2004. С. 50–55.
13. Кожанов А.И. *Нелинейные нагруженные уравнения и обратные задачи* // Журнал вычислительной математики и математической физики. Т. 44, № 4. 2004. С. 722–744.
14. Калиев И.А., Первушина М.М. *Задачи определения температуры и плотности источников тепла по начальной и конечной температурам* // Сибирский журнал индустриальной математики. Новосибирск. Издательство Института математики им. С. Л. Соболева СО РАН. Т. XII, № 1(37). 2009. С. 89–97.
15. Яненко Н.Н., Новиков В.А. *Об одной модели жидкости с знакопеременным коэффициентом вязкости* // Численные методы механики сплошной среды. Новосибирск: ВЦ СО АН СССР. Т. 4, № 2. 1973. С. 142–147.
16. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. *Элементы теории функций и функционального анализа.* М.: Наука. 1981. 544 с.

Ибрагим Адиетович Калиев,
Стерлитамакская государственная
педагогическая академия
им.Зайнаб Биишевой,
пр. Ленина, 37,
453103, г. Стерлитамак, Россия
E-mail: kalievia@mail.ru

Марат Фавильевич Мугафаров,
Филиал Уфимского государственного
авиационного технического университета
в г. Ишимбае,
ул. Губкина, 15,
453213, г. Ишимбай, Россия
E-mail: Mugafarov_MF@mail.ru

Оксана Влерьевна Фаттахова,
Стерлитамакская государственная
педагогическая академия
им.Зайнаб Биишевой,
пр. Ленина, 37,
453103, г. Стерлитамак, Россия
E-mail: fataxova@mail.ru