ISSN 2074-1863 Уфимский математический журнал. Том 3. № 2 (2011). С. 28-33.

УДК 517.927.25

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ СВОЙСТВА БАЗИСНОСТИ ОДНОГО ТИПА ЗАДАЧ НА СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ ПРИ НЕЛОКАЛЬНОМ ВОЗМУЩЕНИИ КРАЕВОГО УСЛОВИЯ

Н.С. ИМАНБАЕВ, М.А. САДЫБЕКОВ

Аннотация. Рассматривается спектральная задача для оператора кратного дифференцирования при интегральном возмущении краевых условий одного типа, являющихся регулярными, но не усиленно регулярными. Невозмущенная задача обладает асимптотически простым спектром, а система ее нормированных собственных функций образует базис Рисса. В работе построен характеристический определитель спектральной задачи при интегральном возмущении краевых условий. Возмущенная задача может иметь любое конечное число кратных собственных значений. Поэтому ее корневые подпространства состоят из собственных и (может быть) присоединенных функций. Показано, что свойство базисности Рисса системы собственных и присоединенных функций задачи является устойчивым относительно интегрального возмущения краевого условия.

Ключевые слова: Базис Рисса, регулярные краевые условия, собственные значения, корневые функции, спектральная задача, интегральное возмущение краевого условия, характеристический определитель

1. Постановка задачи

Хорошо известно, что система собственных функций оператора, заданного формально самосопряженным дифференциальным выражением, с произвольными самосопряженными краевыми условиями, обеспечивающими дискретный спектр, образует ортонормированный базис пространства L_2. Во многих работах исследовался вопрос о сохранении свойств базисности при некотором (слабом в определенном смысле) возмущении исходного оператора. Например, для случая самосопряженного исходного оператора аналогичный вопрос исследовался в [1 - 3], а для несамосопряженного — в [4 - 6].

В настоящей работе рассматривается близкая к исследованиям [3, 5] спектральная задача:

$$l(u) \equiv -u''(x) = \lambda u(x),\ 0 < x < 1, \tag{1}$$

$$U_1(u) \equiv u'(0) - u'(1) + \alpha u(0) = 0, \tag{2}$$

$$U_2(u) \equiv u(0) - u(1) = \int_0^1 \overline{p(x)} u(x)dx,\ p(x) \in L_2(0,1). \tag{3}$$

Здесь $\alpha \neq 0$ — произвольное комплексное число. В [3] исследованы вопросы устойчивости базисных свойств периодической задачи (случай $\alpha = 0$) для уравнения (1), при интегральном возмущении краевого условия. Доказано, что множество P функций $p(x)$, при которых задача обладает свойством базисности собственных функций — плотно в $L_1(0,1)$, множество $L_1(0,1)\backslash P$ также плотно в $L_1(0,1)$.

N.S. Imanbaev, M.A. Sadybekov, About the stability of basis property of one type of problems on the eigenvalues with nonlocal perturbation of boundary conditions.

Поступила 25 марта 2011 г.

Вопрос о базисности корневых функций оператора с более общими интегральными краевыми условиями положительно решен в [5], где доказана базисность Рисса со скобками при условии регулярности по Биркгофу [7, с. 66–67] краевых условий невозмущенной задачи; а при дополнительном предположении усиленной регулярности — базисность Рисса. В нашем случае невозмущенные (при $p(x) \equiv 0$) краевые условия (2), (3) являются регулярными, но не усиленно регулярными краевыми условиями. Поэтому в этом случае для исследования базисности Рисса не применимы результаты [5], а требуется дополнительное исследование.

Из [5] следует, что система собственных и присоединенных функций задачи (1)–(3) полна и минимальна в $L_2(0,1)$. В настоящей работе мы построим характеристический определитель спектральной задачи (1)–(3). На основании полученной формулы докажем устойчивость свойств базисности Рисса системы собственных и присоединенных функций задачи при интегральном возмущении краевого условия.

2. Невозмущенная задача

В этом пункте $p(x) \equiv 0$. Как следует из [8], при любых $\alpha \neq 0$ невозмущенная задача

$$l(u) = \lambda u,\ U_1(u) = 0,\ U_2(u) = 0 \tag{4}$$

обладает асимптотически простым спектром, а система ее нормированных собственных функций образует базис Рисса в $L_2(0,1)$. Непосредственным вычислением нетрудно убедиться в том, что спектральная задача (4) имеет две серии собственных значений

$$\lambda_{1k}^0 = (2\pi k)^2, k = 1, 2, ...;\ \lambda_{2k}^0 = (2\omega k)^2, k = 0, 1, 2, ...,$$

которым соответствуют почти нормированные собственные функции

$$u_{1k}^0(x) = \sqrt{2}\sin 2\pi kx,\ u_{2k}^0(x) = \sqrt{2}\cos(2\omega_k x) - \frac{\sqrt{2\alpha}}{4\omega k}\sin(2\omega_k x). \tag{5}$$

Здесь $\omega_k = \pi k + \varepsilon_k$ — корни уравнения $tg\omega = -\alpha/4\omega$. Одним из важных свойств этой задачи является асимптотическая отделенность собственных значений. Как следует из [9], имеет место равномерная по k оценка

$$\frac{C_1}{k} < \left|\sqrt{\lambda_{1k}^0} - \sqrt{\lambda_{2k}^0}\right| < \frac{C_2}{k}. \tag{6}$$

Система, биортогональная системе (5), определяется собственными функциями сопряженной к (4) задачи:

$$l^*(v) = \overline{\lambda}v,\ v'(0) - v'(1) + \overline{\alpha}v(0) = 0,\ v(0) - v(1) = 0,$$

которые имеют вид

$$v_{1k}^0(x) = \sqrt{2}\sin 2\pi kx,\ v_{2k}^0(x) = \beta_k\left\{\sqrt{2}\cos(2\overline{\omega_k}x) - \frac{\sqrt{2\overline{\alpha}}}{4\overline{\omega_k}}\sin(2\overline{\omega_k}x)\right\}. \tag{7}$$

Коэффициент β_k определяется из соотношения биортогональности $(u_{2k}^0, v_{2k}^0) = 1$ и имеет асимптотику $\beta_k = 1 + O(k^{-1})$. Системы (5) и (7) образуют базис Рисса в $L_2(0,1)$ и взаимно биортогональны.

3. Характеристический определитель задачи (1)–(3)

Удовлетворяя общее решение $u(x,\lambda)=C_1\cos\sqrt{\lambda}x+C_2\sin\sqrt{\lambda}x$ уравнения (1) условиям (2), (3), получаем линейную систему относительно коэффициентов C_k:

$$\begin{cases} C_1\left[\alpha+\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}\right]+C_2\left[\sqrt{\lambda}-\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}\right]=0, \\ C_1\left[1-\cos\sqrt{\lambda}-\int_0^1\overline{p(x)}\cos\sqrt{\lambda}xdx\right]+C_2\left[-\sin\sqrt{\lambda}-\int_0^1\overline{p(x)}\sin\sqrt{\lambda}xdx\right]=0. \end{cases} \tag{8}$$

Ее определитель и будет характеристическим определителем задачи (1)–(3):

$$\Delta_1(\lambda)=\begin{vmatrix} \alpha+\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda} & 1-\cos\sqrt{\lambda}-\int_0^1\overline{p(x)}\cos\sqrt{\lambda}xdx \\ \sqrt{\lambda}(1-\cos\sqrt{\lambda}) & -\sin\sqrt{\lambda}-\int_0^1\overline{p(x)}\sin\sqrt{\lambda}xdx \end{vmatrix}. \tag{9}$$

Легко видеть, что характеристический определитель невозмущенной задачи (1)–(3) получается отсюда при $p(x)\equiv 0$. Обозначим его через $\Delta_0(\lambda)=-2\sqrt{\lambda}(1-\cos\sqrt{\lambda})-\alpha\sin\sqrt{\lambda}$.

Функцию $p(x)$ представим в виде ряда Фурье по базису Рисса (7):

$$p(x)=\sum_{k=1}^{\infty}a_{1k}v_{1k}^0(x)+\sum_{k=0}^{\infty}a_{2k}v_{2k}^0(x). \tag{10}$$

Используя (10), найдем более удобное представление определителя $\Delta_1(\lambda)$. Для этого сначала вычислим входящие в (9) интегралы. Несложные вычисления показывают, что

$$(\lambda-\lambda_{jk}^0)\int_0^1\overline{v_{jk}^0(x)}\cos\sqrt{\lambda}xdx=\overline{v_{jk}^0(0)}\left[\alpha\cos\sqrt{\lambda}+\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}\right]+\overline{v_{jk}^{0\,\prime}(0)}[\cos\sqrt{\lambda}-1],$$

$$(\lambda-\lambda_{jk}^0)\int_0^1\overline{v_{jk}^0(x)}\sin\sqrt{\lambda}xdx=\overline{v_{jk}^0(0)}\left[\sqrt{\lambda}+\alpha\sin\sqrt{\lambda}-\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}\right]+\overline{v_{jk}^{0\,\prime}(0)}[\sin\sqrt{\lambda}],$$

$$j=1,2.$$

Поэтому с учетом (7) получаем

$$\int_0^1\overline{p(x)}\cos\sqrt{\lambda}xdx=A(\lambda)\left[\cos\sqrt{\lambda}-1\right]+B(\lambda)\left[\alpha+\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}\right],$$

$$\int_0^1\overline{p(x)}\sin\sqrt{\lambda}xdx=A(\lambda)\left[\sin\sqrt{\lambda}\right]+B(\lambda)\sqrt{\lambda}\left[1-\cos\sqrt{\lambda}\right],$$

где обозначено

$$A(\lambda)=2\sqrt{2}\pi\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k\overline{a_{1k}}}{\lambda-\lambda_{1k}^0},\ B(\lambda)=\sqrt{2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\overline{a_{2k}\beta_k}}{\lambda-\lambda_{2k}^0}.$$

Используя полученное, стандартными преобразованиями определитель (9) приводится к виду:

$$\Delta_1(\lambda)=\Delta_0(\lambda)[1+A(\lambda)]\equiv\Delta_0(\lambda)[1+2\sqrt{2}\pi\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k\overline{a_{1k}}}{\lambda-\lambda_{1k}^0}]. \tag{11}$$

Сформулируем полученный результат в виде леммы.

Лемма 1. *Характеристический определитель задачи (1)–(3) с возмущенными краевыми условиями представим в виде (11), где $\Delta_0(\lambda)$ — характеристический определитель невозмущенной задачи, а a_{1k} — коэффициенты разложения (10) функции $p(x)$ в биортогональный ряд по базису Рисса (7).*

В представлении (11) функция $A(\lambda)$ имеет полюса в точках $\lambda=\lambda_{1k}^0$ первого порядка. Однако в этих же точках функция $\Delta_0(\lambda)$ имеет нули первого порядка. Поэтому функция $\Delta_1(\lambda)$, представленная по формуле (11), является целой аналитической функцией переменной λ.

4. Собственные значения задачи (1)–(3)

Из анализа формулы (11) легко видеть, что $\Delta_1(\lambda^0_{2k}) = 0$ для всех $k \geq 0$. То есть все собственные значения второй серии λ^0_{2k} невозмущенной задачи являются собственными значениями возмущенной задачи (1)–(3): $\lambda^1_{2k} = \lambda^0_{2k}$. Также легко видеть, что собственные значения первой серии λ^0_{1j} невозмущенной задачи являются собственными значениями возмущенной задачи (1)-(3), если для этого номера j соответствующий коэффициент Фурье в разложении (10) равен нулю: $a_{1j} = 0$.

Случай простого вида характеристического определителя (11) — когда $p(x)$ представляется в виде (10) с конечной первой суммой. То есть, когда существует такой номер N, что $a_{1k} = 0$ для всех $k > N$. В этом случае формула (11) принимает вид

$$\Delta_1(\lambda) = \Delta_0(\lambda)\left(1 + 2\sqrt{2}\pi \sum_{k=0}^{N} \frac{k\overline{a_{1k}}}{\lambda - \lambda^0_{1k}}\right).$$

Из этого частного случая формулы (11) легко обосновать следующую

Лемма 2. *Для любых наперед заданных чисел — комплексного $\widehat{\lambda}$ и натурального $\widehat{m}$ всегда существует такая функция $p(x)$, что $\widehat{\lambda}$ будет являться собственным значением задачи (1)–(3) кратности $\widehat{m}$.*

В силу этой леммы возмущенная задача может иметь любое конечное число кратных собственных значений. Поэтому ее корневые подпространства состоят из собственных и (может быть) присоединенных функций.

Найдем асимптотику собственных значений первой серии в общем случае. Стандартными рассуждениями, связанными с применением теоремы Руше, находим, что для достаточно больших номеров j нули первой серии характеристического определителя (11) имеют вид $\sqrt{\lambda^1_{1j}} = 2\pi j + \delta_j$, $|\delta_j| < 1$. Уточним асимптотику δ_j. Легко видеть, что

$$1 + 2\sqrt{2}\frac{\pi j}{4\pi j + \delta_j}\frac{\overline{a_{1j}}}{\delta_j} + \sqrt{2}\sum_{k=0,k\neq j}^{\infty} \frac{2\pi k}{[2\pi k + 2\pi j + \delta_j]}\frac{\overline{a_{1k}}}{[2\pi j - 2\pi k + \delta_j]} = 0,$$

откуда вытекает асимптотика

$$\left|\delta_j\right| = \left(\sqrt{2}\right)^{-1}\left|a_{1j}\right| \cdot \left|1 + o(1)\right|. \tag{12}$$

Так как коэффициенты Фурье по базису Рисса принадлежат пространству последовательностей l_2, то отсюда следует, что числовая последовательность $\{\delta_j\} \in l_2$. Это и дает искомую асимптотику собственных значений первой серии. Таким образом, доказана

Лемма 3. *Собственные значения задачи (1)–(3) образуют две серии: $\lambda^1_{1k} = (2\pi k + \delta_k)^2$, $\lambda^1_{2k} = \lambda^0_{2k}$, где λ^0_{2k} — собственные значения второй серии невозмущенной задачи, а $\{\delta_k\} \in l_2$. Причем $\delta_j = 0$ при $a_{1j} = 0$. Значения коэффициентов a_{2k} не влияют на собственные значения задачи (1)–(3).*

Для более гладких функций $p(x)$ асимптотика первой серии собственных значений может быть уточнена.

Лемма 4. *Если $p(x) \in W^1_2(0,1)$, то собственные значения первой серии задачи (1)–(3) имеют асимптотику $\lambda^1_{1k} = (2\pi k + \delta_k)^2$, где $\{k\delta_k\} \in l_2$. Собственные значения задачи (1)–(3) асимптотически простые и отделенные.*

Доказательство. Непосредственным вычислением легко убедиться в том, что система функций

$$v^0_{1k}{}'(x)(2\pi k)^{-1} = \sqrt{2}\cos 2\pi kx,\ k = 1, 2, ...;$$

$$v^0_{2k}{}'(x)(2\overline{\omega}_k)^{-1} = \beta_k\left\{-\sqrt{2}\sin(2\overline{\omega}_k x) - \frac{\sqrt{2}\overline{\alpha}}{4\overline{\omega}_k}\cos(2\overline{\omega}_k x)\right\},\ k = 0, 1, 2, ...$$

является квадратично близкой к тригонометрической системе $\left\{1, \sqrt{2}\cos 2\pi kx, -\sqrt{2}\sin(2\pi kx)\right\}$ и, следовательно, образует базис Рисса в $L_2(0,1)$. Поэтому для $p(x) \in W_2^1(0,1)$ имеем $\{ka_{1k}\} \in l_2$. Из асимптотики (12) получаем первую часть леммы. Вторая часть леммы получается отсюда сравнением с асимптотикой (6) собственных значений невозмущенной задачи. Лемма доказана.

5. Собственные функции задачи (1)–(3)

Всюду в дальнейшем будем предполагать, что $p(x) \in W_2^1(0,1)$. Используя обозначения п.3, систему (8) можем переписать в виде

$$\left\{ \begin{array}{l} C_1\left[\alpha + \sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}\right] + C_2\sqrt{\lambda}\left[1-\cos\sqrt{\lambda}\right] = 0, \\ \left\{C_1\sqrt{\lambda}\left[1-\cos\sqrt{\lambda}\right] + C_2\left[-\sin\sqrt{\lambda}\right]\right\}[1+A(\lambda)] = 0. \end{array} \right. \tag{13}$$

При $\lambda = \lambda_{2k}^1 = \lambda_{2k}^0$ получаем $C_2 = -\frac{\alpha}{4\omega_k}C_1$. Поэтому собственные функции второй серии возмущенной и невозмущенной задач (1) - (3) совпадают: $u_{2k}^1(x) = u_{2k}^0(x)$.

При $\lambda = \lambda_{1k}^1$ имеем $1 + A(\lambda_{1k}^1) = 0$. Поэтому второе уравнение в системе (13) обращается в тождество. В силу леммы 4 имеем

$$\lim_{k\to\infty}\left[\alpha + \sqrt{\lambda_{1k}^1}\sin\sqrt{\lambda_{1k}^1}\right] = \lim_{k\to\infty}[\alpha + (2\pi k + \delta_k)\sin\delta_k] = \alpha \neq 0.$$

Следовательно, для достаточно больших номеров k коэффициент при C_1 в первом уравнении системы отличен от нуля. Для таких номеров k находим $C_1 = -\gamma_k C_2$, где

$$\gamma_k = \sqrt{\lambda_{1k}^1}\left[1-\cos\sqrt{\lambda_{1k}^1}\right] / \left[\alpha + \sqrt{\lambda_{1k}^1}\sin\sqrt{\lambda_{1k}^1}\right]. \tag{14}$$

При этом, в силу асимптотики λ_{1k}^1 из леммы 4, имеем $\{k\gamma_k\} \in l_2$. Таким образом, доказана

Лемма 5. *Если $p(x) \in W_2^1(0,1)$, то для достаточно больших номеров k собственные функции задачи (1)–(3) образуют две серии:*

$$\begin{array}{l} u_{1k}^0(x) = \sqrt{2}\sin 2\pi kx - \gamma_k\sqrt{2}\cos 2\pi kx, \\ u_{2k}^0(x) = \sqrt{2}\cos(2\omega_k x) - \frac{\sqrt{2}\alpha}{4\omega_k}\sin(2\omega_k x), \end{array} \tag{15}$$

где последовательность γ_k определяется (14) и $\{k\gamma_k\} \in l_2$.

6. Основной результат работы

Как следует из леммы 2, задача (1)–(3) может иметь кратные собственные значения, но по лемме 4 их может быть только конечное число. Поэтому корневые подпространства задачи (1)–(3) состоят из собственных и (может быть) конечного числа присоединенных функций.

Основным результатом работы является

Теорема. *Для любой функции $p(x) \in W_2^1(0,1)$ система собственных и присоединенных функций задачи (1)–(3) образует базис Рисса $L_2(0,1)$.*

Доказательство. В силу [5] система собственных и присоединенных функций задачи (1)–(3) образует базис Рисса со скобками. Из принадлежности $\{k\gamma_k\} \in l_2$ легко обосновать, что система собственных функций (15) является квадратично близкой к системе (5) собственных функций невозмущенной задачи, которая образует базис Рисса в $L_2(0,1)$. Следовательно, и система собственных и присоединенных функций задачи (1)–(3) также образует базис Рисса в $L_2(0,1)$. Теорема доказана.

Результаты настоящей работы, в отличие от [3], демонстрируют устойчивость свойств базисности корневых функций при интегральном возмущении краевых условий одного типа задач, являющихся регулярными, но не усиленно регулярными.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Маркус А.С. *О разложении по корневым векторам слабо возмущенного самосопряженного оператора* // Докл. АН СССР. 1962. Т. 142, № 3. С. 538–541.
2. Керимов Н.Б., Мамедов Х.Р. *О базисности Рисса корневых функций некоторых регулярных краевых задач* // Матем. заметки. 1998. Т. 64, Вып. 4. С. 448–563.
3. Макин А.С. *О нелокальном возмущении периодической задачи на собственные значения* // Дифференц. уравнения. 2006. Т. 42, № 4 .С. 560–562.
4. Ильин В.А., Крицков Л.В. *Свойства спектральных разложений, отвечающих несамосопряженным операторам* // Функциональный анализ. Итоги науки и техн. Сер. Соврем. мат. и ее прил. Темат. обз. Т. 96. М.: ВИНИТИ. 2006. С. 5–105.
5. Шкаликов А.А. *О базисности собственных функций обыкновенных дифференциальных операторов с интегральными краевыми условиями* // Вестник МГУ. Математика и механика. 1982, № 6. С. 12–21.
6. Иманбаев Н.С., Садыбеков М.А. *Базисные свойства корневых функций нагруженных дифференциальных операторов второго порядка* // Доклады НАН РК. 2010, № 2. С. 11–13.
7. Наймарк М.А. *Линейные дифференциальные операторы.* М. 1969.
8. P. Lang, J. Locker *Spectral Theory of Two-Point Differential Operators Determined by* $-D^2$ // J. Math. Anal. And Appl. 1990. V. 146. № 1. P. 148–191.
9. Макин А.С. *О спектральных разложениях, отвечающих несамосопряженному оператору Штурма-Лиувилля* // ДАН. 2006. Т. 406, № 1. С. 21–24.

Нурлан Сайрамович Иманбаев,
Международный Казахско-турецкий университет им.Х. Ясави,
ул. А.Байтурсынова, 13,
160018, г. Шымкент, Казахстан
E-mail: `imanbaevnur@mail.ru`

Махмуд Абдысаметович Садыбеков,
Институт математики, информатики и механики МОН РК,
ул. Шевченко, 28,
050010, г. Алматы, Казахстан
E-mail: `makhmud-s@mail.ru`