ISSN 2074-1863 Уфимский математический журнал. Том 3. № 2 (2011). С. 10-19.

УДК 517.946

ОБ УРАВНЕНИИ КАМАССА-ХОЛМА С САМОСОГЛАСОВАННЫМ ИСТОЧНИКОМ

И.И. БАЛТАЕВА, Г.У. УРАЗБОЕВ

Аннотация. Работа посвящена решению уравнения Камасса-Холма с самосогласованным источником специального типа методом обратной задачи рассеяния. Основной результат заключается в определении эволюции данных рассеяния для спектральной задачи, связанной с уравнением Камасса-Холма с самосогласованным источником специального типа. В отличие от классического уравнения Камасса-Холма, в рассматриваемой задаче собственные значения спектральной задачи являются движущимися. Полученные результаты полностью описывают эволюцию данных рассеяния, что позволяет применить метод обратной задачи рассеяния для ее решения.

Ключевые слова: уравнения Камасса-Холма, обратная задача рассеяния, данные рассеяния, Пара Лакса, собственное значение, собственная функция.

1. Введение

В данной работе рассматривается система уравнений

$$\begin{cases} u_t - u_{xxt} + 2\omega u_x + 3uu_x - 2u_x u_{xx} - uu_{xxx} = \\ \quad = \sum\limits_{k=1}^{N} (m_x g_k f_k + 2(m+\omega)(g_k f_k)'_x), \\ g_{kxx} = \left(\frac{1}{4} + \lambda_k (m+\omega)\right) g_k, \\ f_{kxx} = \left(\frac{1}{4} + \lambda_k (m+\omega)\right) f_k, \quad k = 1, 2, ..., N, \ x \in R, \end{cases} \tag{1}$$

где $u = u(x,t)$, $m = u - u_{xx}$, $\omega = const \in R$.

Пусть функция $u = u(x,t)$ обладает достаточной гладкостю и достаточно быстро стремится к своим переделам при $x \longrightarrow \pm\infty$,т.ч.

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} (1+|x|) \left(|u(x,t)| + \sum_{k=1}^{3} \left| \frac{\partial^k u(x,t)}{\partial x^k} \right| \right) dx < \infty. \tag{2}$$

В рассматриваемой задаче $g_k = g_k(x,t)$ является собственной функцией уравнения $y_{xx} = (\frac{1}{4} + \lambda(m+\omega))y$, соответствующей собственному значению λ_k, а $f_k = f_k(x,t)$ — линейно независимое с g_k решение уравнения $f_{kxx} = (\frac{1}{4} + \lambda_k(m+\omega))f_k$, причем

$$W\{g_k, f_k\} \equiv g_k f'_{kx} - g'_{kx} f_k = \omega_k(t), \quad k = 1, 2, ..., N. \tag{3}$$

где $\omega_k(t)$ — изначально заданные функции t.

В данной работе получены представления для решений $u(x,t)$, $g_k(x,t)$, $f_k(x,t)$, $k = 1, ..., N$ задачи (1) в рамках метода обратной задачи для уравнения $y_{xx} = (\frac{1}{4} + \lambda(m+\omega)y)$.

I.I. Baltaeva, G.U. Urazboev, About the Camassa-Holm equation with self-consistent source.

Поступила 28 декабря 2010 г.

Отметим, что уравнение Камасса-Холма без источника методом обратной задачи рассеяния наиболее полно решено в работе [1]. В работах [2-3] показано, что уравнение Кортевега-де-Фриза (КдФ) с самосогласованным источником может быть решено с помощью метода обратной задачи рассеяния для оператора Штурма-Лиувилля, а в работе [4] решено уравнение sin-Гордон с самосогласованным источником, соответствующим движущимся собственным значениям оператора Дирака.

2. Задача рассеяния

Рассмотрим уравнение

$$\psi_{xx} = \left(\frac{1}{4} + \lambda(m+\omega)\right)\psi, \tag{4}$$

где $m = u - u_{xx}, \lambda(k) = -\frac{1}{\omega}(k^2 + \frac{1}{4})$, с функцией $u(x)$, удовлетворяющим условию

$$\int_{-\infty}^{\infty} ((1+|x|)(|u(x)| + |u_{xx}(x)|)dx < \infty. \tag{5}$$

В этом параграфе будут приведены необходимые для дальнейшего изложения сведения, касающиеся прямой и обратной задачи рассеяния для задачи (4-5). При условии (5) уравнение (4) обладает решениями Йоста со следующими асимптотиками:

$$\begin{aligned} \psi_1(x,k) &= e^{-ikx} + o(1), \quad x \longrightarrow +\infty, \\ \psi_2(x,k) &= e^{ikx} + o(1), \quad x \longrightarrow +\infty, \end{aligned} \tag{6}$$

$$\begin{aligned} \varphi_1(x,k) &= e^{-ikx} + o(1), \quad x \longrightarrow -\infty, \\ \varphi_2(x,k) &= e^{ikx} + o(1), \quad x \longrightarrow -\infty. \end{aligned} \tag{7}$$

При действительных k, пары $\{\varphi_1, \varphi_2\}$ и $\{\psi_1, \psi_2\}$ являются парами линейно независимых решений для уравнения (4), поэтому

$$\varphi_1(x,k) = a(k)\psi_1(x,k) + b(k)\psi_2(x,k). \tag{8}$$

Легко заметить,что

$$a(k) = -\frac{1}{2ik}W\{\psi_2(x,k), \varphi_1(x,k)\}.$$

Функция $a(k)$ допускает аналитическое продолжение в верхнюю полуплоскость и имеет там конечное число нулей $k = ik_n, k_n > 0$, причём

$$\lambda_n = -\frac{1}{\omega}\left(-k_n^2 + \frac{1}{4}\right), \quad n = 1, 2, ..., N,$$

является собственным значением уравнения (4), так что

$$\varphi_1(x, ik_n) = b_n\psi_2(x, ik_n), \quad n = 1, 2, ..., N. \tag{9}$$

Кроме того, для коэффицента $a(k)$ имеет место следующее разложение в полуплоскости $Imk > 0$:

$$lna(k) = -i\alpha k + \sum_{n=1}^{N} \ln\frac{k - ik_n}{k + ik_n} - \frac{1}{2i\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln(1 - |R(k')|^2)}{k' - k}dk',$$

где

$$\alpha = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\sqrt{1 + \frac{m(x)}{\omega}} - 1\right)dx, \quad R(k) = \frac{b(k)}{a(k}.$$

Набор $\{R(k),\ k\in R,\ k_n,\ b_n,\ n=1,2,...,N\}$ называется данными рассеяния для уравнения (4). Обратная задача рассеяния состоит в восстанавлении по данным рассеяния функции $m(x)$, следовательно $u(x)$, уравнения (4).

Обратная задача востанавление функции $u(x)$ по данным рассеяния, решается посредством следующих уравнений [1]:

$$\overline{\psi_1}(x,k)=\left(\frac{\xi(x)}{\xi'(x)}\right)^{\frac{1}{2}}+\int\limits_{-\infty}^{\infty}R(k')\overline{\psi_2}(x,k')[\xi(x)]^{2ik'}\frac{dk'}{k'-k}+\sum_{n=1}^{N}\frac{b_n[\xi(x)]^{-2k_n}\overline{\psi_1}(x,-ik_n)}{\dot a(ik_n)(k-ik_n)},$$

$p=1,2,...,N,$

$$\overline{\psi_1}(x,-ik_p)=\left(\frac{\xi(x)}{\xi'(x)}\right)^{\frac{1}{2}}+\int\limits_{-\infty}^{\infty}R(k')\overline{\psi_2}(x,k')[\xi(x)]^{2ik'}\frac{dk'}{k'+ik_p}+i\sum_{n=1}^{N}\frac{b_n[\xi(x)]^{-2k_n}\overline{\psi_1}(x,-ik_n)}{\dot a(ik_n)(k_p+k_n)},$$

$$e^{-\frac{x}{2}}[\xi(x)]^{\frac{1}{2}}=\left(\frac{\xi(x)}{\xi'(x)}\right)^{\frac{1}{2}}+\int\limits_{-\infty}^{\infty}R(k')\overline{\psi_2}(x,k')[\xi(x)]^{2ik'}\frac{dk'}{k'+i/2}+i\sum_{n=1}^{N}\frac{b_n[\xi(x)]^{-2k_n}\overline{\psi_1}(x,-ik_n)}{\dot a(ik_n)(k_n+1/2)},$$

где

$$\xi(x)=\exp\{x+\int\limits_{\infty}^{x}\left(\sqrt{\frac{m(y)+\omega}{\omega}}-1\right)dy\},$$

$$\overline{\psi_1}(x,k)\equiv\psi_1(x,k)[\xi(x)]^{ik},$$

$$\overline{\varphi_1}(x,k)\equiv\varphi_1(x,k)\exp\{ik(x+\int\limits_{-\infty}^{x}\left(\sqrt{\frac{m(y)+\omega}{\omega}}-1\right)dy)\},$$

$$\frac{\overline{\varphi_1}(x,k)}{e^{i\alpha k}a(k)}=\overline{\psi_1}(x,k)+R(k)\overline{\psi_2}(x,k)[\xi(x)]^{2ik}.$$

Отметим, что функции h_n, определяемые с помощью равенств

$$h_n(x)=\frac{\frac{d}{dk}(\varphi_1-b_n\psi_2)|_{k=ik_n}}{\dot a(ik_n)},\quad n=1,2,...,N, \tag{10}$$

где $\varphi_{1n}=\varphi_1(x,ik_n),\psi_{2n}=\psi_2(x,ik_n),n=1,2,...,N,$ являются решениям уравнений $h_{nxx}=(\frac{1}{4}+\lambda_n(m+\omega))h_n$, причем для них справедливы асимптотики

$$\begin{aligned} &h_n\sim -b_ne^{-k_nx}\text{ при } x\longrightarrow-\infty,\\ &h_n\sim e^{-k_nx}\text{ при } x\longrightarrow+\infty. \end{aligned} \tag{11}$$

Согласно (9), (6), (11) выполняются равенства

$$W\{\varphi_{1n},h_n\}\equiv\varphi_{1n}h_n'-\varphi_{1n}'h_n=2k_nb_n,\quad n=1,2,...,N. \tag{12}$$

В дальнейшем нам понадобится следующая лемма

Лемма 1.Если функции f и g являются решениями уравнений

$$f_{xx}=\left(\frac{1}{4}+\lambda_1(m+\omega)\right)f,$$

$$g_{xx}=\left(\frac{1}{4}+\lambda_2(m+\omega)\right)g,$$

то для них справедливо следующее равенство

$$(m+\omega)fg=\frac{1}{\lambda_1-\lambda_2}\frac{d}{dx}W\{g,f\}.$$

Справедливость этой леммы доказывается непосредственной проверкой.

Лемма 2. Справедливо следующее равенство

$$\dot{a}(ik_n) = \frac{1}{i\omega}\int\limits_{-\infty}^{\infty}(m+\omega)\varphi_{1n}\psi_{2n}dx, \tag{13}$$

где $\dot{a}(ik_n) = \frac{da(k)}{dk}|_{k=ik_n}$, $n = 1, 2, ..., N$.

Доказательство. Дифференцируя по k уравнения

$$\varphi_{1xx}(x,k) = \left(\frac{1}{4} + \lambda(k)(m(x)+\omega)\right)\varphi_1(x,k),$$

$$\psi_{2xx}(x,k) = \left(\frac{1}{4} + \lambda(k)(m(x)+\omega)\right)\psi_2(x,k),$$

получим

$$\dot{\varphi}_{1xx}(x,k) = \left(\frac{1}{4} + \lambda(k)(m(x)+\omega)\right)\dot{\varphi}_1(x,k) + \dot{\lambda}(k)(m(x)+\omega)\varphi_1(x,k),$$

$$\dot{\psi}_{2xx}(x,k) = \left(\frac{1}{4} + \lambda(k)(m(x)+\omega)\right)\dot{\psi}_2(x,k) + \dot{\lambda}(k)(m(x)+\omega)\psi_2(x,k).$$

Из этих равенств легко заключить, что

$$\dot{\psi}_2\varphi_{1xx} - \dot{\psi}_{2xx}\varphi_1 = -\dot{\lambda}(k)(m(x)+\omega)\varphi_1\psi_2,$$

$$\psi_2\dot{\varphi}_{1xx} - \psi_{2xx}\dot{\varphi}_1 = \dot{\lambda}(k)(m(x)+\omega)\varphi_1\psi_2.$$

Из этих равенств следует следующее равенство:

$$W\{\dot{\psi}_{2n},\varphi_{1n}\} + W\{\psi_{2n},\dot{\varphi}_{1n}\} = -\frac{2ik_n}{\omega}\int\limits_{-\infty}^{\infty}(m+\omega)\varphi_{1n}\psi_{2n}dx.$$

С другой стороны, дифференцируя по k равенство

$$a(k) = -\frac{1}{2ik}W\{\psi_2(x,k),\varphi_1(x,k)\},$$

и подставляя в место $k = ik_n$, имеем

$$2k_n\dot{a}(ik_n) = W\{\dot{\psi}_{2n},\varphi_{1n}\} + W\{\psi_{2n},\dot{\varphi}_{1n}\}.$$

Следовательно,

$$\dot{a}(ik_n) = \frac{1}{i\omega}\int\limits_{-\infty}^{\infty}(m+\omega)\varphi_{1n}\psi_{2n}dx.$$

Лемма 2 доказана.

3. Эволюция данных рассеяния

Пусть функция $u(x,t)$ в уравнения (4) является решением уравнения

$$u_t - u_{xxt} + 2\omega u_x + 3uu_x - 2u_x u_{xx} - uu_{xxx} = G, \tag{14}$$

где функция $G = G(x,t)$ обладает достаточной гладкостью и $G(x,t) = o(1)$ при $x \to \pm\infty, t \geq 0$.

Лемма 3.Если функция $u(x,t)$ является решением уравнения (14) в классе функций (2), то данные рассеяния задачи (4) с функцией $u(x,t)$ зависят от t следующим образом :

$$\frac{dR}{dt} = -\frac{4ik\omega}{4k^2+1}R - \frac{4k^2+1}{8ik\omega a^2(k)}\int\limits_{-\infty}^{\infty} G\varphi_1^2 dx, \ \ (Imk = 0),$$

$$\frac{db_n}{dt} = \frac{4\omega k_n}{1-4k_n^2}b_n + \frac{1-4k_n^2}{8\omega k_n}\int\limits_{-\infty}^{\infty} G\varphi_{1n}h_n dx,$$

$$\frac{dk_n}{dt} = i\frac{4k_n^2-1}{8\omega k_n b_n \dot{a}(ik_n)}\int\limits_{-\infty}^{\infty} G\varphi_{1n}^2 dx.$$

Доказательство. При действетельных k будем искать пару Лакса для уравнения (14) в виде :

$$\varphi_{1xx} = (1 + \lambda(m+\omega))\varphi_1, \tag{15}$$

$$\varphi_{1t} = (\frac{1}{2\lambda} - u)\varphi_{1x} + \frac{u_x}{2}\varphi_1 + \gamma\varphi_1 + F(x,k,t), \tag{16}$$

где $m(x) = u - u_{xx}$,а $\varphi_1(x,k,t)$ решения Йоста уравнения $\varphi_{1xx} = (\frac{1}{4} + \lambda(m+\omega))\varphi_1$ с асимптотикой (7). Используя равенство $\varphi_{1xxt} = \varphi_{1txx}$, на основании равенств (14), (15) и (16) получим

$$F_{xx} - \left(\frac{1}{4} + \lambda(m+\omega)\right)F = \lambda G\varphi_1. \tag{17}$$

Будем искать решение этого уравнения в виде

$$F(x,k,t) = A(x)\varphi_1(x,k,t) + B(x)\varphi_2(x,k,t),$$

тогда для определения $A(x)$ и $B(x)$ получим систему уравнений

$$\begin{cases} A_x\varphi_1 + B_x\varphi_2 = 0, \\ A_x\varphi_{1x} + B_x\varphi_{2x} = \lambda G\varphi_1. \end{cases} \tag{18}$$

Используя асимптотику функции $\varphi_1(x,k,t)$ и (2), перейдем в равенстве (16) к переделу при $x \longrightarrow -\infty$. В результате передельного перехода получим

$$F(x,t) \longrightarrow 0 \text{ при } \quad x \longrightarrow -\infty.$$

Следовательно, решение системы уравнений (18)имеет вид:

$$A(x) = -\frac{\lambda}{2ik}\int\limits_{-\infty}^{x} G\varphi_1\varphi_2 dx + (\frac{ik}{2\lambda} - \gamma),$$

$$B(x) = \frac{\lambda}{2ik}\int\limits_{-\infty}^{x} G\varphi_1^2 dx.$$

Следовательно, в этом случае, второе уравнение пары Лакса имеет вид

$$\varphi_{1t}=(\frac{1}{2\lambda}-u)\varphi_{1x}+\frac{u_x}{2}\varphi_1+\gamma\varphi_1+\left(-\frac{\lambda}{2ik}\int\limits_{-\infty}^{x}G\varphi_1\varphi_2dx+(\frac{ik}{2\lambda}-\gamma)\right)\varphi_1+\frac{\lambda}{2ik}\int\limits_{-\infty}^{x}G\varphi_1^2dx\varphi_2, \quad (19)$$

Переходя в равенстве (19) к переделу $x\longrightarrow\infty$ в силу (2), (6), (8) и подставляя в место $\gamma=\frac{ik}{2\lambda}$, получим

$$a_t=-\frac{\lambda}{2ik}\int\limits_{-\infty}^{\infty}G\varphi_1\varphi_2dxa(k,t)+\frac{\lambda}{2ik}\int\limits_{-\infty}^{\infty}G\varphi_1^2dx\bar{b}(k,t), \quad (20)$$

$$b_t=\frac{ik}{\lambda}b(k,t)-\frac{\lambda}{2ik}\int\limits_{-\infty}^{\infty}G\varphi_1\varphi_2dxb(k,t)+\frac{\lambda}{2ik}\int\limits_{-\infty}^{\infty}G\varphi_1^2dx\overline{a}(k,t). \quad (21)$$

Умножая (21) на a и вычитая из него равенство (20), умноженное на b , используя определение функции $R(k)$ и подставляя в место $\lambda=-\frac{1}{\omega}(k^2+\frac{1}{4})$, получим

$$\frac{dR}{dt}=-\frac{4ik\omega}{4k^2+1}R-\frac{4k^2+1}{8ik\omega a^2(k)}\int\limits_{-\infty}^{\infty}G\varphi_1^2dx.$$

В общем случае собственные значение уравнения $y_{xx}=(\frac{1}{4}+\lambda(m+\omega))y$ зависят от времени, поэтому, дифференцируя равенства

$$\varphi_1(x,ik_n,t)=b_n(t)\psi_2(x,ik_n,t),\ \ n=1,...,N, \quad (22)$$

по t получим

$$\frac{\partial\varphi_{1n}}{\partial t}+\frac{\partial\varphi_1}{\partial k}|_{k=ik_n}\frac{d(ik_n)}{dt}=\frac{db_n}{dt}\psi_{2n}+b_n\left(\frac{\partial\psi_{2n}}{\partial t}+\frac{\partial\psi_2}{\partial k}|_{k=ik_n}\frac{d(ik_n)}{dt}\right),$$

т.е. согласно обозначению (10)

$$\frac{\partial\varphi_{1n}}{\partial t}=\frac{b_n}{dt}\psi_{2n}-\dot{a}(ik_n)h_n\frac{d(ik_n)}{dt}+b_n\frac{\partial\psi_{2n}}{\partial t}. \quad (23)$$

Анологично непрерывному спектру в случае дискретного спектра будем искать пару Лакса в виде:

$$\varphi_{1nxx}=(1+\lambda_n(m+\omega))\varphi_{1n}, \quad (24)$$

$$\varphi_{1nt}=(\frac{1}{2\lambda}-u)\varphi_{1nx}+\frac{u_x}{2}\varphi_{1n}+\gamma\varphi_{1n}+F_n. \quad (25)$$

Тогда для определения $F_n(x,t)$ получим уравнение

$$F_{nxx}-(\frac{1}{4}+\lambda_n(m+\omega))F_n=\lambda G\varphi_{1n}. \quad (26)$$

Будем искать решение (26) в виде

$$F_n(x,t)=A_n(x,t)\varphi_{1n}+B_n(x)h_n.$$

Для нахождения $A_n(x,t)$ и $B_n(x,t)$, точно также и в случае непрерывного спектра, получим систему уравнений решая которую получим

$$A_n(x,t)=-\left(\frac{\lambda_n}{2k_nb_n}\int\limits_{-\infty}^{x}G\varphi_{1n}h_ndx+(\frac{k_n}{2\lambda_n}+\gamma)\right),$$

$$B_n(x) = \frac{\lambda_n}{2k_n b_n} \int\limits_{-\infty}^{x} G\varphi_{1n}^2 dx.$$

Таким образом, на основании (23), второе уравнение пары Лакса в этом случае имеет вид:

$$\varphi_{1nt} = (\tfrac{1}{2\lambda_n} - u)\varphi_{1nx} + \tfrac{u_x}{2}\varphi_{1n} + \gamma\varphi_{1n} - \left(\tfrac{\lambda_n}{2k_n b_n} \int\limits_{-\infty}^{x} G\varphi_{1n}h_n dx + (\tfrac{k_n}{2\lambda_n} + \gamma)\right)\varphi_{1n} + \tfrac{\lambda_n}{2k_n b_n} \int\limits_{-\infty}^{x} G\varphi_{1n}^2 dx h_n. \tag{27}$$

Переходя в этом равенстве к переделу при $x \longrightarrow \infty$ и используя асимптотики (2), (11), (22) и (7), получим

$$-\frac{k_n}{2\lambda_n} b_n e^{-k_n x} - \left(\frac{\lambda_n}{2k_n b_n} \int\limits_{-\infty}^{\infty} G\varphi_{1n}h_n dx + \frac{k_n}{2\lambda_n}\right) b_n e^{-k_n x} + \frac{\lambda_n}{2k_n b_n} \int\limits_{-\infty}^{\infty} G\varphi_{1n}^2 dx e^{k_n x} =$$

$$= \frac{db_n}{dt} e^{-k_n x} - \dot{a}(ik_n) \frac{d(ik_n)}{dt} e^{k_n x}.$$

Подставляя в место $\lambda_n = -\frac{1}{\omega}(-k_n^2 + \frac{1}{4})$ и сравнивая коэффициенты при экспонентах, получим

$$\frac{db_n}{dt} = \frac{4\omega k_n}{1 - 4k_n^2} b_n + \frac{1 - 4k_n^2}{8\omega k_n} \int\limits_{-\infty}^{\infty} G\varphi_{1n}h_n dx,$$

$$\frac{dk_n}{dt} = i\frac{4k_n^2 - 1}{8\omega k_n b_n \dot{a}(ik_n)} \int\limits_{-\infty}^{\infty} G\varphi_{1n}^2 dx.$$

Лемма 3 доказана.

Так как функция h_n является решением уравнения $h_{nxx} = (\frac{1}{4} + \lambda_n(m + \omega))h_n$, для нее справедливо представление

$$h_n = \frac{\beta_n}{\dot{a}(ik_n)}\varphi_{1n} + \alpha_n f_n, \;\; n = 1, 2, ..., N.$$

Согласно (11) имеем $\alpha_n = \frac{2k_n b_n d_n}{\omega_n}$, где d_n определяется из равенства $g_n = d_n\varphi_{1n}$. Кроме того, из (3) следует, что

$$W\{h_n, f_n\} = \frac{\beta_n\omega_n}{\dot{a}(ik_n)d_n}, \;\; n = 1, 2, ..., N. \tag{28}$$

Применим результат леммы 3 при

$$G = \sum_{k=1}^{N}(m_x g_k f_k + 2(m + \omega)(g_k f_k)'_x).$$

Воспользовавшись леммой 1 при $k \neq n$, получим

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} (2((m + \omega)f_k g_k)'_x - m_x g_k f_k)\varphi_{1n}^2 dx = \int\limits_{-\infty}^{\infty} (((m + \omega)f_k g_k)'_x - m_x g_k f_k)\varphi_{1n}^2 dx +$$

$$+(m + \omega)f_k g_k \varphi_{1n}^2|_{-\infty}^{\infty} - \int\limits_{-\infty}^{\infty} (m + \omega)f_k g_k(\varphi_{1n}^2)'_x dx = \int\limits_{-\infty}^{\infty} (m + \omega)(f'_{kx} g_k \varphi_{1n}^2 + f_k g'_{kx}\varphi_{1n}^2 -$$

$$-2f_kg_k\varphi_{1n}\varphi'_{1nx})dx=\int\limits_{-\infty}^{\infty}(m+\omega)(g_k\varphi_{1n}(f'_{kx}\varphi_{1n}-\varphi'_{1nx}f_k)+f_k\varphi_{1n}(g'_{kx}\varphi_{1n}-\varphi'_{1nx}g_k))dx=$$

$$=\frac{1}{\lambda_k-\lambda_n}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{d}{dx}W\{\varphi_{1n},g_k\}W\{\varphi_{1n},f_k\}+\frac{d}{dx}W\{\varphi_{1n},f_k\}W\{\varphi_{1n},g_k\}\right)dx=$$

$$=\frac{1}{\lambda_k-\lambda_n}W\{\varphi_{1n},g_k\}W\{\varphi_{1n},f_k\}|_{-\infty}^{\infty}=0.$$

Согласно (3) имеем

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}(2((m+\omega)g_nf_n)'_x-m_xg_nf_n)\varphi_{1n}^2dx=\int\limits_{-\infty}^{\infty}(m+\omega)(g_n\varphi_{1n}(\varphi_{1n}f'_{nx}-f_n\varphi'_{1nx})+$$

$$+f_n\varphi_{1n}(\varphi_{1n}g'_{nx}-g_n\varphi'_{1nx}))dx=\int\limits_{-\infty}^{\infty}(m+\omega)g_n\varphi_{1n}W\{\varphi_{1n},f_n\}dx=$$

$$=\int\limits_{-\infty}^{\infty}(m+\omega)\varphi_{1n}^2W\{g_n,f_n\}dx=\omega_n\int\limits_{-\infty}^{\infty}(m+\omega)\varphi_{1n}^2dx.$$

На основании равенства (13) уравнение для k_n в лемме 3 может быть переписано в виде:

$$\frac{dk_n}{dt}=\frac{1-4k_n^2}{8k_n}\omega_n. \tag{29}$$

Согласно (3) для функций $f_n(x,t)$ справедливы асимптотики

$$f_n\sim\frac{\omega_n}{2c_nk_n}e^{k_nx},\ \text{при},\ x\longrightarrow\infty, \tag{30}$$

$$f_n\sim-\frac{\omega_n}{2d_nk_n}e^{-k_nx},\ \text{при},\ x\longrightarrow-\infty. \tag{31}$$

где c_n определяется из равенства $g_n=c_n\psi_{2n}$. Используя лемму 1 и асимптотики (11), (30), (31) при $k\neq n$ имеем

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}(2((m+\omega)f_kg_k)'_x-m_xg_kf_k)\varphi_{1n}h_ndx=\int\limits_{-\infty}^{\infty}(((m+\omega)f_kg_k)'_x-m_xg_kf_k)\varphi_{1n}h_ndx+$$

$$+(m+\omega)f_kg_k\varphi_{1n}h_n|_{-\infty}^{\infty}-\int\limits_{-\infty}^{\infty}(m+\omega)f_kg_k(\varphi_{1n}h_n)'_xdx=\int\limits_{-\infty}^{\infty}(m+\omega)(f'_{kx}g_k\varphi_{1n}h_n+f_kg'_{kx}\varphi_{1n}h_n-$$

$$-f_kg_k\varphi_{1n}h'_{nx}-f_kg_k\varphi'_{1nx}h_n)dx=\int\limits_{-\infty}^{\infty}(m+\omega)(f_k\varphi_{1n}(g'_{kx}h_n-h'_{nx}g_k)+g_kh_n(f'_{kx}\varphi_{1n}-\varphi'_{1nx}f_k))dx=$$

$$=\frac{1}{\lambda_k-\lambda_n}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{d}{dx}W\{\varphi_{1n},f_k\}W\{h_n,g_k\}+\frac{d}{dx}W\{h_n,g_k\}W\{\varphi_{1n},f_k\}\right)dx=$$

$$=\frac{1}{\lambda_k-\lambda_n}W\{\varphi_{1n},f_k\}W\{h_n,g_k\}|_{-\infty}^{\infty}=0.$$

В соответствии с (28)

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}(2((m+\omega)g_nf_n)'_x - m_xg_nf_n)\varphi_{1n}h_ndx = \int\limits_{-\infty}^{\infty}(m+\omega)(g_n\varphi_{1n}(h_nf'_{nx}-f_nh'_{nx})+$$

$$+f_nh_n(\varphi_{1n}g'_{nx}-g_n\varphi'_{1nx}))dx = \int\limits_{-\infty}^{\infty}(m+\omega)g_n\varphi_{1n}W\{h_n,f_n\}dx =$$

$$=\frac{\beta_n\omega_n}{\dot{a}(ik_n)}\int\limits_{-\infty}^{\infty}(m+\omega)\varphi_{1n}^2dx.$$

Из последних двух равенств и формулы (13) заключаем, что

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}G\varphi_{1n}h_ndx = i\omega\beta_nb_n\omega_n,$$

следовательно,

$$\frac{db_n}{dt}=\frac{4\omega k_n}{1-4k_n^2}b_n+i\frac{1-4k_n^2}{8k_n}\beta_nb_n\omega_n,\ n=1,2,...,N. \tag{32}$$

Анологичном образом, используя определение решений Йоста, лемму 1 и асимптотики (11), (30), (31), можно показать, что

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}G\varphi_1^2dx = ab\omega\sum_{n=1}^{N}\frac{\omega_n}{k_n}\left(1-\frac{k_n^2-k^2}{k_n^2+k^2}\right),$$

поэтому

$$\frac{dR}{dt}=-i\left(\frac{4k\omega}{4k^2+1}-\frac{4k^2+1}{8k}\sum_{n=1}^{N}\frac{\omega_n}{k_n}\left(1-\frac{k_n^2-k^2}{k_n^2+k^2}\right)\right)R. \tag{33}$$

Объединим (29),(32) и (33) в следующее утверждение.

Теорема. Если функции $u(x,t), g_k(x,t), f_k(x,t), k=1,2,...,N$ являются решением задачи (1-3), то данные рассеяния для уравнения (4), с функцией $u(x,t)$ меняются по t следующим образом:

$$\frac{dR}{dt}=-i\left(\frac{4k\omega}{4k^2+1}-\frac{4k^2+1}{8k}\sum_{n=1}^{N}\frac{\omega_n}{k_n}\left(1-\frac{k_n^2-k^2}{k_n^2+k^2}\right)\right)R,\quad (Imk=0),$$

$$\frac{dk_n}{dt}=\frac{1-4k_n^2}{8k_n}\omega_n,$$

$$\frac{db_n}{dt}=\frac{4\omega k_n}{1-4k_n^2}b_n+i\frac{1-4k_n^2}{8k_n}\beta_nb_n\omega_n,\ n=1,2,...,N.$$

Полученные равенства полностью определяют эволюцию данных рассеяния, что позволяет применить метод обратной задачи рассеяния для решения задачи $(1-3)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. A. Constantin, V. Gerdjikov and R.I. Ivanov *Inverse Scattering Transform for the Camassa-Holm equation.* Inverse problem (2006)22:2197.
2. Хасанов А.Б., Уразбоев Г.У. *Интегрирование общего уравнения КдФ с правой частью в классе быстроубывающих функций* // Узб. матем. журнал. Ташкент. 2003. № 2. С. 53–59.
3. V.K. Melnikov *Integrable and nonintegrable cases of the Lax equations with a source* // Theoret and Math.Phys. 1994. № 3. P. 733–737.
4. Хасанов А.Б., Уразбоев Г.У. *Обуравнении sin-Гордон с самосогласованным источником* // Мат. труды. 2008. Т. 11, № 1. С. 1–14.

Ирода Исмаиловна Балтаева,
Ургенчский Государственный университет,
ул. Х.Алимджана, 14,
220100, г. Ургенч, Узбекистан
E-mail: iroda-b@mail.ru

Гайрат Уразалиевич Уразбоев,
Ургенчский Государственный университет,
ул. Х.Алимджана, 14,
220100, г. Ургенч, Узбекистан
E-mail: gayrat71@mail.ru