Уфимский математический журнал. Том 1. № 1 (2009). С. 16-37.

УДК 517.5

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ РЯДАМИ ЭКСПОНЕНТ В ВЕСОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ НА ВЕЩЕСТВЕННОЙ ОСИ

К.П. ИСАЕВ, А.А. ПУТИНЦЕВА, Р.С. ЮЛМУХАМЕТОВ

Аннотация. Рассматривается задача о представлении рядами экспонент функций в весовых гильбертовых пространствах на интервале вещественной оси.

Ключевые слова: Ряды экспонент, гильбертовы пространства, преобразование Фурье-Лапласа, целые функции.

1. Введение

В настоящей работе изучаются вопросы разложения в ряды Дирихле функций из весовых гильбертовых пространств на интервале вещественной оси. Введем эти пространства.

Пусть h — выпуклая функция на интервале $I \subset \mathbb{R}$. Следуя [1] для выпуклых функций будем допускать значение $+\infty$ и продолжим функцию h на всю ось, полагая ее равной $+\infty$ вне интервала I. Через $L_2(h)$ обозначим пространство локально интегрируемых функций f на I, для которых конечна норма

$$||f||_{L_2(h)} = \sqrt{\int_I |f(t)|^2 e^{-2h(t)} dt}.$$

Пространство $L_2(h)$ — гильбертово со скалярным произведением

$$(f, g) = \int_I f(t)\overline{g}(t) e^{-2h(t)} dt.$$

Если взять $h(t) \equiv 1$, $t \in (-\pi; \pi)$, то пространство $L_2(h)$ совпадает с классическим L_2-пространством. В работах [9], [10] Б.Я. Левин разработал метод, основанный на теории целых функций, для изучения разложений по системам экспонент в L_2 - пространствах на отрезке. В дальнейшем в [11] этот подход был распространен на случай рядов из экспонент на пространстве Смирнова $E_2(D)$ на выпуклом многоугольнике D. Среди прочего в этой работе каждому выпуклому многоугольнику сопоставлен специальный класс целых функций, который назван классом целых функций типа синуса, и доказано, что если показатели являются нулями целой функции типа синуса, то соответствующая система экспонент образует безусловный базис в пространстве Смирнова. В дальнейшем Ю.И. Любарский обобщил понятие целой функции типа синуса на выпуклые области (не обязательно многоугольные). Однако, оказалось, что системы экспонент по нулям целых функций типа синуса в немногоугольных случаях уже не образуют безусловные базисы в пространстве Смирнова. В диссертационных работах В.И. Луценко [12], К.П. Исаева [13] показано, что существование безусловных базисов в пространствах Смирнова и Бергмана — явление исключительное. Так, если на границе области есть точка, в которой граница имеет отличную от нуля кривизну, то безусловных базисов из экспонент в пространстве

Isaev K.P., Putintseva A.A., Yulmukhametov R.S. The representation by exponential series in weighted spaces on real axis.

Работа поддержана РФФИ (грант 09-01-00263).
Поступила 15 марта 2009 г.

Бергмана не существует. В диссертации Р.А. Башмакова [7] доказано, что безусловных базисов из экспонент не существует и в пространствах $L_2(h)$ при очень слабых ограничениях на весовую функцию. Там же введено понятие целой функции типа синуса для выпуклых функций на вещественной оси. В данной статье мы покажем, что системы экспонент по нулям соответствующей целой типа синуса будут полными и минимальными в пространстве $L_2(h)$ и будет обоснована сходимость рядов по этой системе в некоторой "ослабленной норме". При этом используется классический прием перехода к двойственным задачам теории целых функций: вопросы единственности и интерполяции в весовых гильбертовых пространствах целых функций.

Система экспонент $\left\{e^{\lambda t}\right\}, \quad \lambda \in \mathbb{C}$ полна в пространстве $L_2(h)$, поэтому если S — линейный непрерывный функционал на пространстве $L_2(h)$ и $\widehat{S}(\lambda) = S\left(e^{\lambda t}\right)$ – его преобразование Лапласа, то функционал S однозначно определяется функцией $\widehat{S}(\lambda)$. По данной выпуклой функции h определим сопряженную к ней по Юнгу:

$$\widetilde{h}(x) = \sup_t (xt - h(t))$$

и функцию

$$K(x) = \int_I e^{2xt-2h(t)}dt.$$

Очевидно, что для $\lambda = x + iy$

$$K(x) = ||e^{\lambda t}||^2_{L_2(h)}.$$

Для выпуклой функции u введем величину $\rho(u, y)$ по формуле

$$\rho(u, y) = \sup\{t > 0 : \int_{y-t}^{y+t} |u'_+(\tau) - u'_+(y)|d\tau \le 1\},$$

здесь u'_+ обозначает правую производную.

В работах [2], [3] доказана теорема.

Теорема A. *Пусть h — выпуклая функция на интервале $I \subseteq \mathbb{R}$ и S — линейный непрерывный функционал на пространстве $L_2(h)$. Если*

$$J = \{x : \ \widetilde{h}(x) < \infty\},$$

то преобразование Фурье-Лапласа $\widehat{S}$ голоморфно в полосе $J + i\mathbb{R}$ и верны оценки

$$|\widehat{S}(x + iy)| \le C_S e^{\widetilde{h}(x)}, \quad x \in J, \ y \in \mathbb{R},$$

$$(\pi e)^{-2}||S||^2_{L_2^*(h)} \le \int_{\mathbb{R}} \int_J |\widehat{S}(x + iy)|^2 e^{-2\widetilde{h}(x)} \rho(\widetilde{h}, x) d\widetilde{h}'_+(x)dy \le (\pi e)^2||S||^2_{L_2^*(h)}.$$

Наоборот, если функция F голоморфна в полосе $J + i\mathbb{R}$ и удовлетворяет соотношениям

$$|F(x + iy)| \le Ce^{\widetilde{h}(x)}, \quad x \in J, \ y \in \mathbb{R},$$

$$\int_{\mathbb{R}} \int_J |F(x + iy)|^2 e^{-2\widetilde{h}(x)} \rho(\widetilde{h}, x) d\widetilde{h}'_+(x)dy < \infty,$$

то F является преобразованием Фурье-Лапласа некоторого функционала на $L_2(h)$.

Замечание. Если интервал J ограничен, например, справа, то мера $e^{-2\widetilde{h}(x)}\rho(\widetilde{h}, x)d\widetilde{h}'_+(x)$ может иметь массу в правом конце. Это происходит тогда, когда функция $h(t)$ линейна в некотором интервале $(a; +\infty)$. В этом случае меру нужно определять предельным переходом, полагая

$$h_n(t) = \begin{cases} h(t), & t \le n, \\ +\infty, & t > n. \end{cases}$$

Так, если $h(t) = |t|$, $t \in \mathbb{R}$, то $J = (-1;1)$ и

$$\widetilde{h}(x) = \begin{cases} 0, & |x| \le 1, \\ +\infty, & |x| > 1. \end{cases}$$

Применяя указанный выше предельный переход, получим, что преобразования Фурье-Лапласа составляют пространство функций, аналитических и ограниченных в полосе $z = x + iy : \ |x| < 1$, причем, интегрируемых с квадратом по граничным прямым $\mathrm{I}m\ z = \pm 1$.

Приведем еще теорему из работы [5] в одномерном случае.

Теорема B. *Пусть μ — неотрицательная борелевская мера на некотором интервале из $\mathbb{R}$ и*

$$J = Int \ \ conv\ supp\ \mu$$

— внутренность выпуклой оболочки носителя меры μ. Если функция

$$u(t) = \frac{1}{2}\ln \int_J e^{2xt} d\mu(x)$$

конечна на непустом интервале $I \subset \mathbb{R}$, то преобразование Фурье-Лапласа функционала S на пространстве $L_2(u)$ голоморфно в полосе $J + i\mathbb{R}$ и удовлетворяет соотношениям

$$|\widehat{S}(x+iy)| \le Ce^{\widetilde{u}(x)}, \quad x \in J, \ y \in \mathbb{R},$$

$$\int_{\mathbb{R}}\int_J |\widehat{S}(x+iy)|^2 d\mu(x)dy = ||S||^2_{L_2^*(u)}.$$

Обратно, если функция F голоморфна в полосе $J + i\mathbb{R}$ и удовлетворяет условиям

$$|F(x+iy)| \le Ce^{\widetilde{u}(x)}, \quad x \in J, \ y \in \mathbb{R}, \qquad \int_{\mathbb{R}}\int_J |F(x+iy)|^2 d\mu(x)dy < \infty,$$

то $F = \widehat{S}$ для некоторого линейного непрерывного функционала S на пространстве $L_2(u)$.

В данной работе мы намерены по данной выпуклой на интервале $I \subset \mathbb{R}$ функции h построить систему экспонент $\exp(\lambda_k t)$, где $\lambda_k, \ k = 1, 2, ...$ — множество нулей специальной целой функции L, и доказать следующие свойства этой системы:

1. Система экспонент $\exp(\lambda_k t)$ полна и минимальна в пространстве $L_2(h)$.
2. Обосновать некоторый метод суммирования рядов по системе $\exp(\lambda_k t)$.

2. Предварительные сведения

Пусть $h(t)$ — выпуклая функция на интервале $I = (a; b) \subset \mathbb{R}$,

$$\widetilde{h}(x) = \sup_{t \in I}(xt - h(t)),$$

а функция $\rho(\widetilde{h}, x)$ определена как верхняя грань таких p, для которых выполняется условие

$$\int_{x-p}^{x+p} |\widetilde{h}'_+(y) - \widetilde{h}'_+(x)| dy \le 1.$$

Положим

$$J = \{x : \ \widetilde{h}(x) < \infty\}.$$

Заметим, что если I – ограниченный интервал, то $J = \mathbb{R}$. Через $E_2(\widetilde{h})$ будем обозначать пространство функций F, аналитических в полосе $J + i\mathbb{R}$ и удовлетворяющих условиям

$$|F(x+iy)| \le C_F e^{\widetilde{h}(x)},$$

$$\int_J \int_{\mathbb{R}} |F(x+iy)|^2 e^{-2\widetilde{h}(x)} \rho(\widetilde{h}, x) dy dh'_+(x) < \infty. \qquad (1)$$

По теореме А пространство $E_2(\widetilde{h})$ состоит из преобразований Фурье-Лапласа функционалов на пространстве $L_2(h)$.

Теорема 1. *Пусть $F \in E_2(\widetilde{h})$. Тогда функция*

$$I_F(x) = \int_{\mathbb{R}} |F(x+iy)|^2 dy, \quad x \in J$$

конечна на интервале J и логарифмически выпукла. При этом интегралы в правой части сходятся равномерно по $x \in [c;d]$ для любого отрезка $[c;d] \subset J$ и в любом таком отрезке равномерно по x

$$\lim_{|y| \longrightarrow \infty} F(x+iy) = 0.$$

Кроме того, если I — ограниченный интервал, то

1.

$$\lim_{x \longrightarrow \pm\infty} I_F(x) e^{-2\widetilde{h}(x)} = 0,$$

причем при некоторой константе D_1

$$\sup_x I_F(x) e^{-2\widetilde{h}(x)} \le D_1 ||F||^2_{E_2(\widetilde{h})}.$$

2.

$$\lim_{|x+iy| \longrightarrow \infty} |F(x+iy)| e^{-2\widetilde{h}(x)} = 0$$

и при этом найдется константа D_2 такая, что

$$\sup_{x,y} |F(x+iy)| e^{-2\widetilde{h}(x)} \le D_2 ||F||^2_{E_2(\widetilde{h})}.$$

Доказательство теоремы 1.

По теореме А функция F является преобразованием Фурье-Лапласа функционала на $L_2(h)$. В силу самосопряженности гильбертовых пространств функционалы на $L_2(h)$ имеют вид скалярного произведения на элемент этого же пространства. Таким образом, найдется функция $f \in L_2(h)$ так, что

$$F(\lambda) = \int_I e^{\lambda t} \overline{f(t)} e^{-2h(t)} dt.$$

Для любого $x \in J$ имеем

$$F(x+iy) = \int_I e^{iyt} \left(\overline{f(t)} e^{xt-2h(t)} \right) dt.$$

Функция $\overline{f(t)} \exp(xt - 2h(t))$ при фиксированном x принадлежит $L_2(I)$. В самом деле,

$$\int_I |f(t)|^2 e^{2xt-4h(t)} dt \le e^{2\sup_I (xt-h(t))} \int_I |f(t)|^2 e^{-2h(t)} dt = e^{2\widetilde{h}(x)} ||f||^2.$$

При фиксированном $x \in J$ функция $F(x+iy)$ является преобразованием Фурье функции $\overline{f(t)} \exp(xt - 2h(t))$ и по формуле Планшереля имеем

$$\int_{\mathbb{R}} |F(x+iy)|^2 dy = 2\pi \int_I |f(t)|^2 e^{2xt-4h(t)} dt \le 2\pi e^{2\widetilde{h}(x)} ||f||^2, \tag{2}$$

в частности, по теореме А

$$I_F(x) e^{-\widetilde{h}(x)} \le 2\pi (\pi e)^2 ||F||^2_{E_2(\widetilde{h})}. \tag{3}$$

Итак, мы доказали, что интеграл $I_F(x)$ конечен для всех $x \in J$. Убедиться в том, что этот интеграл является логарифмически выпуклой функцией на J, можно на основании равенства в соотношении (2). В самом деле, для любого $a \in \mathbb{R}$ функция

$$I_F(x)e^{ax} = 2\pi \int_I e^{x(2t+a)}|f(t)|^2 e^{-4h(t)}dt$$

будет выпуклой, но это свойство является необходимым и достаточным для логарифмической выпуклости функции I_F.

Теперь покажем, что эти интегралы сходятся равномерно в отрезках $[c;d] \subset J$. Пусть расстояние от отрезка $[c;d]$ до границы интервала J больше числа $\delta > 0$. По неравенству в (2) получим

$$\int_{c-\delta}^{d+\delta} \int_{-\infty}^{+\infty} |F(x+iy)|^2 dydx \le 2\pi(d-c+2\delta) \max_{x\in[c-\delta;d+\delta]} e^{2\widetilde{h}(x)}||f||^2.$$

По принципу максимума для выпуклых функций имеем

$$\int_{c-\delta}^{d+\delta} \int_{-\infty}^{+\infty} |F(x+iy)|^2 dydx \le 2\pi(d-c+2\delta) e^{2\max(\widetilde{h}(c-\delta),\widetilde{h}(d+\delta))}||f||^2 < \infty.$$

Итак, двойной интеграл сходится, значит для любого $\varepsilon > 0$ найдется $M > 0$ так, что

$$\int_{c-\delta}^{d+\delta} \int_{|y|>M} |F(x+iy)|^2 dydx \le \varepsilon. \tag{4}$$

Пусть $x \in [c;d]$, по свойству субгармоничности имеем

$$|F(x+iy)|^2 \le \frac{1}{\pi\delta^2} \int_{|\zeta|<\delta} |F(\zeta+x+iy)|^2 d\lambda(\zeta) \le$$

$$\le \frac{1}{\pi\delta^2} \int_{-\delta}^{\delta} \int_{-\delta}^{\delta} |F(t+is+x+iy)|^2 dtds, \tag{5}$$

где $d\lambda(\zeta)$ — плоская мера Лебега и $\zeta = t + is$. Проинтегрируем это неравенство по множеству $|y| > M + \delta$:

$$\int_{|y|>M+\delta} |F(x+iy)|^2 dy \le \frac{1}{\pi\delta^2} \int_{|y|>M+\delta} \int_{-\delta}^{\delta} \int_{-\delta}^{\delta} |F(t+is+x+iy)|^2 dtdsdy \le$$

$$\le \frac{2}{\pi\delta} \int_{-\delta}^{\delta} \int_{|y|>M} |F(t+x+iy)|^2 dtdy \le \frac{2}{\pi\delta} \int_{c-\delta}^{d+\delta} \int_{|y|>M} |F(t+iy)|^2 dydt.$$

Учитывая соотношение (4), получим

$$\int_{|y|>M+\delta} |F(x+iy)|^2 dy \le \frac{2\varepsilon}{\pi\delta}.$$

Равномерная сходимость интегралов доказана. Из соотношений (4), (5) следует, что если $x \in [c;d]$, $|y| > M + \delta$, то

$$|F(x+iy)|^2 \le \frac{1}{\pi\delta^2} \int_{-\delta}^{\delta} \int_{-\delta}^{\delta} |F(t+is+x+iy)|^2 dtds \le$$

$$\le \frac{1}{\pi\delta^2} \int_{c-\delta}^{d+\delta} \int_{|y|>M} |F(t+is)|^2 dsdt \le \frac{\varepsilon}{\pi\delta^2}.$$

Таким образом, равномерно на отрезках $[c;d] \subset J$

$$\lim_{|y|\longrightarrow\infty} |F(x+iy)| = 0.$$

Для доказательства утверждений пп. 1 – 2, докажем одну вспомогательную лемму о функциях, сопряженных по Юнгу к функциям на ограниченных интервалах.

Лемма 1. *Пусть h — выпуклая функция на ограниченном интервале $I = (a; b)$ и $\widetilde{h}$ — функция, сопряженная по Юнгу. Тогда*

1. Имеют место равенства

1a.

$$\lim_{x\longrightarrow -\infty} \frac{\widetilde{h}(x)}{x} = a, \quad \lim_{x\longrightarrow +\infty} \frac{\widetilde{h}(x)}{x} = b.$$

1b.

$$\lim_{x\longrightarrow -\infty} \widetilde{h}'_+(x) = a, \quad \lim_{x\longrightarrow \infty} \widetilde{h}'_+(x) = b.$$

1c.

$$\lim_{|x|\longrightarrow \infty} \rho(\widetilde{h}, x) = \infty.$$

2. Для $x \in \mathbb{R}$ через $[a_x; b_x]$ обозначим отрезок, такой, что для всех $t \in [a_x; b_x]$ выполняется равенство $\widetilde{h}(x) + h(t) - xt = 0$. Имеют место равенства

$$\lim_{x\longrightarrow -\infty} b_x = a, \quad \lim_{x\longrightarrow +\infty} a_x = b.$$

3. Для произвольного положительного p положим

$$U(x, p) = \{t \in I : \ \widetilde{h}(x) + h(t) - xt \le p\}.$$

Очевидно, $U(x, p)$ — промежуток в интервале I. Через $|U(x, p)|$ обозначим длину этого промежутка. Тогда

$$\lim_{x\longrightarrow \pm\infty} |U(x, p)| = 0.$$

Доказательство леммы 1.

1. По определению сопряженной по Юнгу для любого $\varepsilon > 0$, $a + \varepsilon < b$,

$$\widetilde{h}(x) \ge x(a + \varepsilon) - h(a + \varepsilon),$$

поэтому

$$\overline{\lim}_{x\longrightarrow -\infty} \frac{\widetilde{h}(x)}{x} \le (a + \varepsilon) + \overline{\lim}_{x\longrightarrow -\infty} \frac{-h(a + \varepsilon)}{x} = a + \varepsilon.$$

Значит,

$$\overline{\lim}_{x\longrightarrow -\infty} \frac{\widetilde{h}(x)}{x} \le a.$$

С другой стороны, если $x < 0$, $m = \min_t h(t)$, то $\widetilde{h}(x) \le (xa - m)$, поэтому

$$\underline{\lim}_{x\longrightarrow -\infty} \frac{\widetilde{h}(x)}{x} \ge a,$$

и из последних двух оценок получаем

$$\lim_{x\longrightarrow -\infty} \frac{\widetilde{h}(x)}{x} = a.$$

Предел в $+\infty$ доказывается аналогично.

Поскольку производные выпуклой функции возрастают, то при $x > 0$

$$\widetilde{h}(x) - \widetilde{h}(0) = \int_0^x \widetilde{h}'_+(y)dy \le \widetilde{h}'_+(x)x.$$

Отсюда

$$\underline{\lim}_{x\longrightarrow +\infty} \widetilde{h}'_+(x) \ge \lim_{x\longrightarrow +\infty} \frac{\widetilde{h}(x) - \widetilde{h}(0)}{x} = b.$$

Аналогично

$$\widetilde{h}(2x)-\widetilde{h}(x)=\int_x^{2x}\widetilde{h}'_+(y)dy\ge\widetilde{h}'_+(x)x.$$

и

$$\overline{\lim}_{x\longrightarrow+\infty}\widetilde{h}'_+(x)\le\lim_{x\longrightarrow+\infty}\frac{\widetilde{h}(2x)-\widetilde{h}(x)}{x}=b.$$

Таким образом, $\lim_{x\longrightarrow+\infty}\widetilde{h}'_+(x)=b$. Предел в $-\infty$ доказывается аналогично.

Допустим, что найдется константа A и последовательность $x_k\longrightarrow-\infty$ такие, что $\rho(\widetilde{h},x_k)\le A$. По свойству 1b. найдется $M<0$ такое, что при $x,y<M$

$$|\widetilde{h}'_+(x)-\widetilde{h}'_+(y)|\le\frac{1}{4A}.$$

Тогда для $x_k<M-A$ имеем

$$1=\int_{x_k-\rho(\widetilde{h},x_k)}^{x_k+\rho(\widetilde{h},x_k)}|\widetilde{h}'_+(x_k)-\widetilde{h}'_+(y)|dy\le\frac{1}{4A}2\rho(\widetilde{h},x_k)\le\frac{1}{2}.$$

Получили противоречие. Аналогично рассматривается случай $x\longrightarrow+\infty$. Значит, $\lim_{|x|\longrightarrow\infty}\rho(\widetilde{h},x)=\infty$.

2. По определению отрезка $[a_x;b_x]$

$$\widetilde{h}(x)+h(b_x)-xb_x=0,$$

Если $m=\min_{t\in I}h(t)$, то

$$\widetilde{h}(x)+m-xb_x\le0,$$

поделим обе части на $x<0$, перейдем к пределу при $x\longrightarrow-\infty$ и воспользуемся п. 1 леммы:

$$-\lim_{x\longrightarrow-\infty}b_x\ge-a$$

или

$$\lim_{x\longrightarrow-\infty}b_x\le a$$

Противоположное неравенство очевидно. Следовательно, $\lim_{x\longrightarrow-\infty}b_x=a$. Аналогично получим $\lim_{x\longrightarrow+\infty}a_x=b$.

3. Третье утверждение леммы докажем от противного. Допустим, что для некоторого $p>0$ найдется последовательность $x_k\longrightarrow-\infty$, $k\longrightarrow\infty$, такая, что $|U(x_k,p)|\ge\delta$ с некоторым $\delta>0$. Возьмем натуральное число N с условием

$$\frac{b-a}{N}<\delta$$

и набор точек интервала I

$$t_1=a+\frac{b-a}{N},\ t_2=a+2\frac{b-a}{N},\ ...,\ t_{N-1}=a+(N-1)\frac{b-a}{N}.$$

Очевидно, что каждый промежуток $U(x_k,p)$ содержит хотя бы одну из выбранных точек. По принципу Дирихле какая-то из точек попадет в бесконечную последовательность промежутков. Пусть точка t_m попадает в промежутки $U(x_{k_j},p)$, $j=1,2,...$ Это значит, что

$$\widetilde{h}(x_{k_j})+h(t_m)-x_{k_j}t_m\le p,\quad j=1,2,...$$

Поделим обе части неравенства на $x_{k_j}<0$ и перейдем к пределу по $j\longrightarrow\infty$, получим противоречие $a-t_m\ge0$. Предел в $+\infty$ доказывается аналогично.

Лемма 1 доказана.

Продолжим доказательство теоремы 1. Для произвольного положительного p по соотношению (2) имеем

$$\frac{1}{2\pi}I_F(x)e^{-2\widetilde{h}(x)} = \int_{U(x,p)} |f(t)|^2 e^{2xt-4h(t)-2\widetilde{h}(x)}dt + \int_{I\setminus U(x,p)} |f(t)|^2 e^{2xt-4h(t)-2\widetilde{h}(x)}dt.$$

Отсюда по определению промежутков $U(x,p)$ получим

$$\frac{1}{2\pi}I_F(x)e^{-2\widetilde{h}(x)} \le \int_{U(x,p)} |f(t)|^2 e^{-2h(t)}dt + e^{-2p}\int_{I\setminus U(x,p)} |f(t)|^2 e^{-2h(t)}dt.$$

Пусть $c(x)$ — правый конец промежутка $U(x,p)$. Имеем

$$\frac{1}{2\pi}I_F(x)e^{-2\widetilde{h}(x)} \le \int_a^{c(x)} |f(t)|^2 e^{-2h(t)}dt + e^{-2p}||f||^2_{L_2(h)}.$$

Отрезок $[a_x; b_x]$, определенный в п. 2 леммы 1, лежит в промежутке $U(x,p)$, поэтому

$$\lim_{x\longrightarrow-\infty} c(x) \le \lim_{x\longrightarrow-\infty} (b_x + |U(x,p)|) = a,$$

значит,

$$\lim_{x\longrightarrow-\infty} c(x) = a,$$

и

$$\lim_{x\longrightarrow-\infty} \frac{1}{2\pi}I_F(x)e^{-2\widetilde{h}(x)} \le e^{-2p}||f||^2_{L_2(h)}.$$

Остается заметить, что p — произвольное положительное число, поэтому

$$\lim_{x\longrightarrow-\infty} I_F(x)e^{-2\widetilde{h}(x)} = 0.$$

Оценка в п. 1 теоремы доказана в соотношении (3). Докажем п. 2 теоремы.

По соотношению (5), полагая $\delta = 1$, имеем

$$|F(x+iy)|^2 \le \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} |F(x+iy+t+is)|^2 dtds \le \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} I_F(x+t)dt.$$

Как мы знаем, функция $I_F(x)$ выпуклая, поэтому

$$|F(x+iy)|^2 \le \frac{2}{\pi}\max(I_F(x+1), I_F(x-1)).$$

Когда интервал I ограниченный, сопряженная функция $\widetilde{h}$ по п. 2 леммы 1 будет удовлетворять условию Лифшица $|\widetilde{h}(x) - \widetilde{h}(y)| \le (b-a)|x-y|$, значит

$$|F(x+iy)|^2 e^{-2\widetilde{h}(x)} \le \frac{2e^{2(b-a)}}{\pi}\max(I_F(x+1)e^{-2\widetilde{h}(x+1)}, I_F(x-1)e^{-2\widetilde{h}(x-1)}). \tag{6}$$

Правая часть по доказанному пункту 1 данной теоремы стремится к нулю, когда $|x| \longrightarrow \infty$, поэтому равномерно по $y \in \mathbb{R}$

$$|F(x+iy)|^2 e^{-2\widetilde{h}(x)} \longrightarrow 0, \quad x \longrightarrow \infty.$$

Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$, найдем M такое, что при $|x| > M$ и при всех y выполнялось

$$|F(x+iy)|^2 e^{-2\widetilde{h}(x)} \le \varepsilon.$$

По доказанному равномерно на отрезке $[-M; M]$ при $|y| \longrightarrow \infty$ имеем

$$|F(x+iy)| \longrightarrow 0.$$

Из соотношения (6) и из оценки в п. 1 следует, что

$$\sup_{x,y} |F(x+iy)|^2 e^{-2\widetilde{h}(x)} \le \frac{2e^{2(b-a)}}{\pi}\sup_x I_F(x)e^{-2\widetilde{h}(x)} \le \frac{2D_1 e^{2(b-a)}}{\pi}||F||^2_{E_2(\widetilde{h})}.$$

Теорема 1 доказана.

Мы намерены изучать свойства системы экспонент по нулям специальной целой функции, сконструированной в работе [6]. В этой работе доказана следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть u — выпуклая функция на $\mathbb{R}$ и последовательность b_n определена по формуле (b_0 — произвольно выбранная точка из $\mathbb{R}$)*

$$b_1 = b_0 + \rho(u, b_0), \quad b_{-1} = b_0 - \rho(u, b_0),$$

$$b_{n+1} = b_n + 2\rho\left(u, \frac{b_n + b_{n+1}}{2}\right),\ n \in \mathbb{N},$$

$$b_{-(n+1)} = b_{-n} + 2\rho\left(u, \frac{b_{-n} + b_{-(n+1)}}{2}\right),\ n \in \mathbb{N}.$$

Предположим, что найдется такая положительная функция $\alpha(x)$, $x \in \mathbb{R}$, и положительная константа c, что выполнены следующие условия

1. Для любого $x \in \mathbb{R}$ для всех $y_1, y_2 \in [x - \alpha(x); x + \alpha(x)]$ имеет место соотношение

$$\frac{\rho(u, y_1)}{\rho(u, y_2)} \geq c.$$

2. Если положим $b^*_n = \frac{b_n + b_{n+1}}{2}$, $b^*_{-n} = \frac{b_{-n} + b_{-(n+1)}}{2}$, $n \in \mathbb{N}$, то ряд

$$\sum_{n \neq 0} e^{-\frac{\alpha(b_n)}{\rho(u, b^*_n)}} = \Sigma < \infty$$

сходится.

Пусть $d_n = \frac{l_n(b_{n+1}) - l_{n-1}(b_{n+1})}{b_{n+1} - b_n}$, где l_n-прямая, соединяющая точки $u(b_n)$ и $u(b_{n+1})$. Тогда существует целая функция f, которая имеет простые нули вида $z_{nk} = b_n + \frac{2\pi i}{d_n} k$, $n, k \in \mathbb{Z}$, и для любого $\sigma > 0$ вне кругов $B(z_{nk}, \sigma\rho(u, b_n))$ удовлетворяет оценке

$$|\ln|f(z)| - u(z)| \leq A(\varepsilon)\left(\Sigma + \frac{4}{1 - e^{2c}}\right).$$

Кроме того, при $\sigma < \min(\frac{\pi}{4}, c)$ круги $B(z_{nk}, \sigma\rho(u, b_n))$, $n, k \in \mathbb{Z}$, попарно не персекаются.

Условия на функцию u имеют технический характер. В той же работе [6] приводятся условия, которые легче проверить.

Теорема 3. *Пусть u — дважды непрерывно дифференцируемая выпуклая функция на $\mathbb{R}$, неограниченная в бесконечности.*

Предположим, что найдется такая положительная функция $\beta(x)$, $x \in \mathbb{R}$, и положительная константа c, что выполнены следующие условия:

1. Функция $\beta(x)$ непрерывна, положительна, имеет единственную точку минимума, причем $\beta(x) \geq 1$, и для любого $x \in \mathbb{R}$ для всех

$$y_1, y_2 \in \left[x - \frac{\beta(x)}{\sqrt{u''(x)}}; x + \frac{\beta(x)}{\sqrt{u''(x)}}\right]$$

имеет место соотношение

$$\sqrt{\frac{u''(y_1)}{u''(y_2)}} \geq c.$$

2. Интеграл

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{c^3\beta(x)}{16}} \sqrt{u''(x)}\, dx$$

сходится.

Тогда существует целая функция f, которая имеет простые нули, расположенные на некоторой системе вертикальных прямых $Re\ z = b_n$, $n \in \mathbb{Z}$, причем на каждой из прямых нули распределены равномерно, и для любого $\sigma > 0$ вне кругов $B\left(z_n, \frac{\sigma}{\sqrt{u''(Re\ z_n)}}\right)$ удовлетворяет оценке

$$|\ln|f(z)| - u(z)| \leq A(\sigma).$$

Кроме того, при $\sigma < min(\frac{\pi}{4}, \frac{c^4}{256})$ круги $B\left(z_n, \frac{\sigma}{\sqrt{u''(Re\ z_n)}}\right)$ попарно не пересекаются.

В дальнейшем для данной выпуклой функции u на $\mathbb{R}$ через $\mathcal{S}(u)$ будем обозначать класс целых функций f, обладающих следующими свойствами:

1. Если λ_n — нули функции f, то для некоторого $\sigma > 0$, круги $B_n(\sigma) = B(\lambda_n, \sigma\rho(u, \mathrm{Re}\ \lambda_n))$ попарно непересекаются;

2. Вне объединения кругов $B_n(\sigma)$ выполняется соотношение

$$|\ln|f(\lambda)| - u(\mathrm{Re}\ \lambda)| \leq A(\sigma),$$

где $A(\sigma)$ — некоторая константа.

Множество нулей аналитической функции f обозначим через Λ_f. Для данного множества комплексных чисел $\Lambda = \{\lambda_k,\ k = 1, 2, ...\}$ через $\exp \Lambda$ обозначим систему экспонент $\{\exp(\lambda_k t),\ k = 1, 2, ...\}$.

3. Полнота и минимальность системы $\exp \Lambda_L$

В этом параграфе будет доказано, что если функция $L \in \mathcal{S}(\widetilde{h})$, то система экспонент $\exp \Lambda_L$ полна и минимальна в пространстве $L_2(h)$.

Предварительно выясним некоторые свойства функций класса $\mathcal{S}(u)$. Если функция $a(x)$ определена для вещественных x, то для комплесных чисел z будем считать, что $a(z) = a(\mathrm{Re}\ z)$.

Лемма 2. *Если $L \in \mathcal{S}(u)$, то*

1. Для всех $z \in \mathbb{C}$ выполняется оценка

$$|L(z)| \leq C_L e^{u(z)}.$$

2. Если z_n — нули функции L и круги $B_n(\sigma) = B(z_n, \sigma\rho(u, z_n))$ попарно не пересекаются, то в каждом круге $B_n(\sigma)$ выполняется оценка снизу

$$\left|\frac{L(z)}{z - z_n}\right| \geq \frac{C(\sigma)}{\rho(u, z_n)} e^{u(z)},$$

где константа $C(\sigma)$ не зависит от n.

3. Если z_n — нули функции L, то для любого n и при всех z выполняются соотношения

$$\left|\frac{L(z)}{z - z_n}\right| \leq \frac{C_1(\sigma)}{\rho(u, z_n) + |z - z_n|} e^{u(z)}.$$

где константа $C_1(\sigma)$ не зависит от n.

Доказательство леммы 2.

Сначала докажем, что для любого y найдется линейная функция $l(x)$, такая, что

$$|u(x) - l(x)| \leq 1, \quad \text{когда} \quad |x - y| \leq \rho(u, y).$$

В самом деле, пусть $l_1(x)$ — линейная функция, совпадающая с u в точках $y \pm \rho(u, y)$. Тогда по свойству выпуклости функции u в интервале $(y - \rho(u, y); y + \rho(u, y))$ имеем $u(x) \leq l_1(x)$, а определение величины $\rho(u, y)$ означает, что $u(y) = l_1(y) - 1$. Пусть $l_2(x)$ — касательная прямая к графику u в точке y. Тогда $l_2(x) \leq l_1(x)$ в данном интервале и $l_2(y) = l_1(y) - 1$.

Поэтому в рассматриваемом интервале $0 \le l_1(x) - l_2(x) \le 2$. Очевидно, что линейная функция

$$l(x) = \frac{l_1(x) + l_2(x)}{2}$$

будет обладать требуемыми свойствами.

1. Пусть z_n — нули функции L и круги $B_n = B(z_n, \sigma\rho(u, z_n))$ попарно не пересекаются. Оценка первого пункта леммы вне кругов B_n выполняется по определению функций класса $\mathcal{S}(u)$. По доказанному выше для каждого из этих кругов найдется гармоническая функция $H_n(z)$ такая, что

$$|u(z) - H_n(z)| \le 1,\ z \in B_n.$$

(Для $y = \mathrm{Re}\ z_n$ найдется линейная функция l с нужными свойствами, остается положить $H_n(z) = l(z)$). Тогда на границе круга B_n имеем

$$|\ln|L(z)| - H_n(z)| \le |\ln|L(z)| - u(z)| + |u(z) - H_n(z)| \le A(\sigma) + 1.$$

Пусть функция $g_n(z)$ голоморфна в круге B_n и $\mathrm{Re}\ g_n(z) = H_n(z)$, тогда на ∂B_n

$$\left|L(z)e^{-g_n(z)}\right| \le e^{A(\sigma)+1},$$

и по принципу максимума эта оценка продолжается вовнутрь круга:

$$|L(z)| \le e^{A(\sigma)+1}\left|e^{g_n(z)}\right| = e^{A(\sigma)+1}e^{H_n(z)} \le e^{A(\sigma)+2}e^{u(z)}.$$

Утверждение пункта 1 доказано.

2. Функция $e^{g_n(z)}\frac{z-z_n}{L(z)}$ голоморфна в круге B_n и на границе этого круга удовлетворяет оценке

$$\left|e^{g_n(z)}\frac{z - z_n}{L(z)}\right| \le e^{A(\sigma)}e^{H_n(z)-u(z)}\sigma\rho(u, z_n) \le e^{A(\sigma)+1}\sigma\rho(u, z_n),$$

которая по принципу максимума продолжается вовнутрь круга:

$$\frac{1}{|L(z)|} \le \frac{e^{A(\sigma)+1}\sigma\rho(u, z_n)}{|z - z_n|}e^{-H_n(z)}$$

или

$$|L(z)| \ge \frac{|z - z_n|e^{-A(\sigma)-1}}{\sigma\rho(u, z_n)}e^{H_n(z)} \ge \frac{e^{-A(\sigma)-2}}{\sigma\rho(u, z_n)}|z - z_n|e^{u(z)}.$$

3. По определению функции класса $\mathcal{S}(u)$ на границе $\partial B_n(\sigma)$ выполняется оценка

$$\left|\frac{L(z)}{z - z_n}\right| \le e^{A(\sigma)}\frac{1}{\rho(u, z_n)}e^{u(z)} \le e^{A(\sigma)+1}\frac{1}{\rho(u, z_n)}e^{H_n(z)},$$

которая по принципу максимума продолжается вовнутрь круга:

$$\left|\frac{L(z)}{z - z_n}\right| \le \frac{C(\sigma)}{\rho(u, z_n)}e^{u(z)},\ z \in B_n(\sigma).$$

Для всех точек вне круга $B_n(\sigma)$ по первому пункту доказываемой леммы имеем оценку

$$\left|\frac{L(z)}{z - z_n}\right| \le \frac{C_1(\sigma)}{|z - z_n|}e^{u(z)},\ z \notin B_n(\sigma).$$

Лемма 2 доказана.

Теорема 4. *Пусть $h(t)$ — выпуклая функция на ограниченном интервале $I = (a; b) \subset \mathbb{R}$, функция L лежит в классе $\mathcal{S}(\widetilde{h})$. Тогда система экспонент $\exp\Lambda_L$ полна и минимальна в пространстве $L_2(h)$.*

Доказательство теоремы 4.

1. Полнота. Предположим, что система $\exp\Lambda_L$ не полна в $L_2(h)$. Тогда по теореме Банаха найдется ненулевой функционал S на $L_2(h)$, аннулирующий данную систему. Преобразование Лапласа этого функционала по теореме A будет принадлежать пространству $E_2(\widetilde{h})$ и будет обращаться в нуль на множестве Λ_L. Это значит, что целая функция $\widehat{S}(\lambda)$ делится на целую функцию L. Пусть $\widehat{S}(\lambda) = g(\lambda)L(\lambda)$. Пространство $E_2(\widetilde{h})$ определяется соотношениями (1). Из первого неравенства в этом соотношении и из свойств функций класса $\mathcal{S}(\widetilde{h})$ получаем, что вне некоторой системы попарно непересекающихся кругов выполняется оценка

$$|g(\lambda)| \le C\frac{|\widehat{S}(\lambda)|}{|L(\lambda)|} \le \mathrm{Const}.$$

По принципу максимума эта оценка продолжается вовнутрь кругов, следовательно, целая функция g ограничена, поэтому постоянна. Функция $\widehat{S} \in E_2(\widetilde{h})$ и по теореме 1 $\widehat{S}(x+iy)$ стремится к 0 при $|y| \longrightarrow \infty$. Функция $L(\lambda) \in \mathcal{S}(\widetilde{h})$ и по определению вне некоторой попарно непересекающейся системы кругов ограничена снизу величиной $A(\sigma)\exp\widetilde{h}(\mathrm{Re}\,\lambda)$. Таким образом, на вертикальной прямой $x+iy,\ y\in\mathbb{R}$, найдется последовательность λ_k такая, что $g(\lambda_k) \longrightarrow 0$. Это значит, что $g(\lambda)\equiv 0$ и $\widehat{S}(\lambda)\equiv 0$. Получили противоречие.

2. Минимальность. Пусть z_n — нули функции L. Минимальность будет доказана, если мы покажем, что при любом $n\in\mathbb{N}$

$$\frac{L(\lambda)}{\lambda - z_n} \in E_2(\widetilde{h}).$$

По пункту 3 леммы 2 нужно доказать, что

$$\int \frac{\rho(\widetilde{h},x)}{(\rho(\widetilde{h},z_n)+|z-z_n|)^2}dyd\widetilde{h}'(x) < \infty.$$

Непосредственно оценим интеграл по dy:

$$\int \frac{dy}{(\rho(\widetilde{h},z_n)+|z-z_n|)^2} \le \int \frac{dy}{\rho^2(\widetilde{h},z_n)+|z-z_n|^2} =$$

$$= \frac{\pi}{\sqrt{\rho^2(\widetilde{h},x_n)+|x-x_n|^2}}.$$

В работе [2] показано, что функция $\rho(\widetilde{h},x)$ удовлетворяет условию Лифщица

$$|\rho(\widetilde{h},x) - \rho(\widetilde{h},y)| \le |x-y|,$$

поэтому

$$\rho(\widetilde{h},x) \le |x| + \rho(\widetilde{h},0).$$

Отсюда с учетом п. 1a. леммы 1 получаем оценку

$$\int \frac{\rho(\widetilde{h},x)}{(\rho(\widetilde{h},z_n)+|z-z_n|)^2}dyd\widetilde{h}'(x) < C(n)\int d\widetilde{h}'(x) = C(n)(b-a) < \infty.$$

Теорема 4 доказана.

4. Суммирование рядов по системе $\exp \Lambda_L$

Итак, пусть h — выпуклая функция на ограниченном интервале $I \subset \mathbb{R}$ и $\Lambda_L = \{\lambda_k,\ k = 1, 2, ...,\ \}$ — множество нулей некоторой целой функции L класса $\mathcal{S}(\widetilde{h})$. Мы показали, что система $\exp \Lambda_L$ полна и минимальна в пространстве $L_2(h)$. Как известно, в этом случае существует биортогональная система функционалов, которую обозначим через $\{S_k,\ k = 1, 2, ..\}$. Каждой функции $f \in L_2(h)$ можем сопоставить ряд

$$f(t) \sim \sum_{k=1}^{\infty} S_k(f) e^{\lambda_k t}. \tag{7}$$

Положим

$$L_k(\lambda) = \frac{L(\lambda)}{L'(\lambda_k)(\lambda - \lambda_k)}.$$

Нетрудно убедиться в том, что

$$\widehat{S}_k(\lambda) = L_k(\lambda).$$

Тем самым, двойственное к (7) интерполяционное представление имеет вид

$$F(\lambda) \sim \sum_{k=1}^{\infty} F(\lambda_k) L_k(\lambda),$$

где целая функция F из пространства $E_2(\widetilde{h})$. В общем случае эти ряды не суммируются в нормах пространств $L_2(h)$ и $E_2(\widetilde{h})$ соответственно. Однако, эти ряды сходятся в нормах поменьше, чем исходные. Сначала рассмотрим интерполяционный ряд.

Теорема 5. *Пусть $h(t)$ — выпуклая функция на ограниченном интервале $I = (a; b) \subset \mathbb{R}$, функция L принадлежит классу $\mathcal{S}(\widetilde{h})$ и обладает дополнительным свойством: для некоторого $\sigma > 0$ найдется возрастающая последовательность абсцисс $X_m \longrightarrow \pm\infty$, $m \longrightarrow \pm\infty$, такая, что вертикали $\lambda = X_m + iy$ лежат вне системы кругов $B_k(\sigma) = B(\lambda_k, \sigma\rho(\widetilde{h}, \lambda_k))$. Зафиксируем целое число n, перенумеруем нули функции L в полосе $X_n < Re\lambda < X_{n+1}$ в порядке возрастания модулей мнимых частей и обозначим полученную последовательность через z_j, $j = 1, 2, ...$ Тогда ряд*

$$F_n(\lambda) \stackrel{def}{=} \sum_{j=1}^{\infty} F(z_j) L_j(\lambda)$$

сходится равномерно на компактах на плоскости.

Если функция $\beta(x)$, $x \in \mathbb{R}$, $0 \le \beta(x) \le 1$ такова, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} \beta(x)\rho(\widetilde{h}, x)\, d\widetilde{h}'(x) < \infty,$$

то ряд сходится в пространстве $E_2(\widetilde{h})$ в "ослабленной"норме

$$||F||_1 = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} |F(x+iy)|^2 e^{-2\widetilde{h}(x)} \beta(x)\rho(\widetilde{h}, x)\, d\widetilde{h}'(x)},$$

причем для некоторой константы K

$$||F_n - \sum_{j=1}^{m} F(z_j) L_j||_1 \le K ||F||_{E_2(\widetilde{h})}.$$

Доказательство теоремы 5. Зафиксируем положительное число σ такое, что круги $B_j(6\sigma)$ с центрами в нулях функции L не пересекаются и вне объединения этих кругов можно провести вертикали $\lambda = X_m + iy$, $m \in \mathbb{Z}$, причем $X_m \longrightarrow \pm\infty$, когда $m \longrightarrow \pm\infty$. Зафиксируем целое число n, натуральное число k и положим $z_j = x_j + iy_j$,

$$Y_k^+ = \max\{y_j,\ j \le k,\ X_n < x_j < X_{n+1}\},$$

$$Y_k^- = \min\{y_j,\ j \le k,\ X_n < x_j < X_{n+1}\}.$$

Построим две ломаных $\Gamma_k^\pm$. Возьмем отрезок $\{\lambda = x + iY_k^+,\ X_n \le x \le X_{n+1}\}$. Если этот отрезок пересекается с кругом $B_j(6\sigma)$ и $y_j > Y_k$, то часть отрезка, оказавшуюся внутри круга, заменим на ломаную из двух звеньев, содиняющую две точки пересечения данного отрезка с окружностью $\partial B_j(6\sigma)$ и точку пересечения этой окружности с вертикальным лучом $\{x_j + iy,\ y < y_j\}$. Если же $y_j \le Y_k$, то часть отрезка, оказавшуюся внутри круга, заменим на ломаную, содиняющую две точки пересечения данного отрезка с окружностью $\partial B_j(6\sigma)$ и точку пересечения этой окружности с вертикальным лучом $\{x_j + iy,\ y > y_j\}$. Полученную ломаную обозначим через Γ_k^+. Аналогично построим ломаную Γ_k^-. Через Γ_k обозначим замкнутый контур, образованный ломаными $\Gamma_k^\pm$ и вертикальными отрезками $\{\lambda = X_n + iy,\ Y_k^- \le y \le Y_k^+\}$, $\{\lambda = X_{n+1} + iy,\ Y_k^- \le y \le Y_k^+\}$. Отметим следующие свойства:

– каждая вертикаль $x_0 + iy$, $y \in \mathbb{R}$, пересекает каждую из ломаных $\Gamma_k^\pm$ не более одного раза;

– длины контуров $\Gamma_k^\pm$ не превосходят $\sqrt{2}|X_n - X_{n+1}|$;

– контур Γ_k не пересекается с объединением кругов $B_j(4\sigma)$;

– если G_k — область, ограниченная контуром Γ_k, то нули z_j, $j = 1, 2, ..., k$, функции L лежат в этой области, остальные нули лежат вне замыкания этой области.

По теореме о вычетах имеем

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{\Gamma_k} \frac{F(\zeta)}{L(\zeta)(\lambda-\zeta)}d\zeta = \sum_{j=1}^{k} \frac{F(z_j)}{L'(z_j)(\lambda - z_j)} - \frac{F(\lambda)}{L(\lambda)}\chi_k(\lambda), \tag{8}$$

где $\chi_k(\lambda) = 1$ при $\lambda \in G_k$ и $\chi_k(\lambda) = 0$ при $\lambda \notin G_k$. Положим

$$F_{n,k}(\lambda) = \sum_{j=1}^{k} \frac{F(z_j)L(\lambda)}{L'(z_j)(\lambda - z_j)} = \sum_{j=1}^{k} F(z_j)L_j(\lambda).$$

Возьмем произвольный компакт $K \subset \mathbb{C}$ и натуральные числа k, s, $s > k$, так, чтобы компакт помещался в полосе $\{z = x+iy:\ |y| < R\}$, не содержащей ломаных $\Gamma_k^\pm$, $\Gamma_s^\pm$. Через $\gamma_{k,s}^\pm$ обозначим контуры, образованные соответственно отрезком $\Delta_{n,k,s}^\pm$ на вертикали $\mathrm{R}e\ z = X_n$ между точками $X_n + iY_k^\pm$ и $X_n + iY_s^\pm$, отрезком $\Delta_{n+1,k,s}^\pm$ на вертикали $\mathrm{R}e\ z = X_{n+1}$ между точками $X_{n+1} + iY_k^\pm$ и $X_{n+1} + iY_s^\pm$, ломаными $\Gamma_k^\pm$, $\Gamma_s^\pm$. Через $G_{k,s}$ обозначим объединение двух областей, ограниченных контурами $\gamma_{k,s}^\pm$. На контурах $\gamma_{k,s}^\pm$ задается направление против часовой стрелки, соответственно, на их частях $\Gamma_k^\pm$, $\Gamma_s^\pm$, $\Delta_{n,k,s}^\pm$, $\Delta_{n+1,k,s}^\pm$ имеются направления. По соотношению (8) для $\lambda \in K$ имеем

$$F_{n,s}(\lambda) - F_{n,k}(\lambda) = \frac{L(\lambda)}{2i\pi}\left(\int_{\gamma_{k,s}^+} + \int_{\gamma_{k,s}^-}\right)\frac{F(\zeta)}{L(\zeta)(\lambda-\zeta)}d\zeta. \tag{9}$$

Кривые $\gamma_{k,s}^\pm$ лежат вне объединения кругов $B_j(6\sigma)$, значит по свойству функций класса $\mathcal{S}(\widetilde{h})$

$$\min_{\zeta\in\gamma_{k,s}^\pm} |L(\zeta)| \ge \min_{\zeta\in\gamma_{k,s}^\pm} e^{A(6\sigma)+\widetilde{h}(\mathrm{Re}\ \zeta)} = \min_{x\in[X_n;X_{n+1}]} e^{A(6\sigma)+\widetilde{h}(x)} \stackrel{def}{=} c_n.$$

Обозначим
$$\max_{\lambda\in K}|L(\lambda)| = C_L(K).$$
Из оценки (9) вытекает, что если $\lambda\in K$, то
$$|F_{n,s}(\lambda)-F_{n,k}(\lambda)| = \frac{C_L(K)}{2\pi c_n}\left(\int_{\gamma^+_{k,s}}\frac{|F(\zeta)|}{|\lambda-\zeta|}|d\zeta| + \int_{\gamma^-_{k,s}}\frac{|F(\zeta)|}{|\lambda-\zeta|}|d\zeta|\right).$$
По теореме 1
$$\max_{\zeta\in\Gamma^{\pm}_k}|F(\zeta)|\longrightarrow 0, \text{ когда } k\longrightarrow\infty,$$
а длины ломаных $\Gamma^{\pm}_k$ ограничены величиной $\sqrt{2}|X_n-X_{n+1}|$, следовательно, при $k,s\longrightarrow\infty$
$$\max_{\lambda\in K}|F_{n,s}(\lambda)-F_{n,k}(\lambda)|\le$$
$$\le\frac{C_L(K)}{2\pi c_n}\left(o(1)+\max_{\lambda\in K}\left(\int_{\Delta_{n,k,s}}+\int_{\Delta_{n+1,k,s}}\right)\frac{|F(\zeta)|}{|\lambda-\zeta|}\right)d\ \mathrm{Im}\ \zeta,$$
где $\Delta_{j,k,s}$ — это объединение отрезков $\Delta^{\pm}_{j,k,s}$. Через $\chi_{j,k,s}(\zeta)$ обозначим функцию, равную 1 на множестве $\Delta_{j,k,s}$ и 0 в остальных точках. Тогда
$$\max_{\lambda\in K}|F_{n,s}(\lambda)-F_{n,k}(\lambda)|\le$$
$$\le\frac{C_L(K)}{2\pi c_n}\left(o(1)+\max_{\lambda\in K}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{|F(X_n+iy)||\chi_{n,k,s}(X_n+iy)|}{|\lambda-(X_n+iy)|}dy+\right.$$
$$\left.+\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{|F(X_{n+1}+iy)||\chi_{n+1,k,s}(X_{n+1}+iy)|}{|\lambda-(X_{n+1}+iy)|}dy\right).$$
К обоим интегралам в правой части применим неравенство Гельдера. Например, для первого интеграла получим
$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{|F(X_n+iy)||\chi_{n,k,s}(X_n+iy)|}{|\lambda-(X_n+iy)|}dy\le\sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty}|F(X_n+iy)|^2\chi_{n,k,s}(X_n+iy)dy}\times$$
$$\times\sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\chi_{n,k,s}(X_n+iy)}{|\lambda-(X_n+iy)|^2}dy}.$$
Очевидно, что при $k,s\longrightarrow\infty$
$$\max_{\lambda\in K}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\chi_{n,k,s}(X_n+iy)}{|\lambda-(X_n+iy)|^2}dy\longrightarrow 0$$
и по теореме 1
$$\int_{-\infty}^{+\infty}|F(X_n+iy)|^2\chi_{n,k,k}(X_n+iy)dy\longrightarrow 0.$$
Из последних двух соотношений следует, что когда $k,s\longrightarrow\infty$
$$\max_{\lambda\in K}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{|F(X_n+iy)||\chi_{n,k,s}(X_n+iy)|}{|\lambda-(X_n+iy)|}dy\longrightarrow 0.$$
Точно так же получаем оценки для второго интеграла. Тем самым, мы доказали, что для любого компакта K при $k,s\longrightarrow\infty$
$$\max_{\lambda\in K}|F_{n,s}(\lambda)-F_{n,k}(\lambda)|\longrightarrow 0.$$
Последовательность $F_{n,k}$ фундаментальна, и по теореме Коши эта последовательность сходится равномерно на компактах.

Докажем сходимость последовательности $F_{n,k}$ в "ослабленной"норме в пространстве $E_2(\widetilde{h})$. Возьмем произвольное $x \in \mathbb{R}$ и оценим интеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |F_{n,s}(x+iy) - F_{n,k}(x+iy)|^2 dy.$$

Для сокращения записи введем обозначение: для функции f, определенной на плоскости, положим

$$||f||(x) \stackrel{def}{=} \sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x+iy)|^2 dy}.$$

Если

$$g_j^{\pm}(\lambda) = \int_{\Gamma_j^{\pm}} \frac{F(\zeta)}{L(\zeta)(\lambda-\zeta)} d\zeta, \ j = k, s,$$

$$v_{j,k,s}(\lambda) = \int_{\Delta_{j,k,s}^{+} \bigcup \Delta_{j,k,s}^{-}} \frac{F(\zeta)}{L(\zeta)(\lambda-\zeta)} d\zeta, \ j = n, n+1,$$

то представление (9) запишется в виде

$$|F_{n,s}(\lambda) - F_{n,k}(\lambda)| =$$

$$= \frac{L(\lambda)}{2i\pi} \left(v_{n,k,s}(\lambda) + v_{n+1,k,s}(\lambda) + g_k^{+}(\lambda) + g_k^{-}(\lambda) + g_s^{+}(\lambda) + g_s^{-}(\lambda) \right). \tag{10}$$

1. Оценим функцию $||v_{n,k,s}||(x)$. По нашему выбору вертикальная прямая с абсциссой X_n не пересекается с кругами $B_j(6\sigma)$ с центрами в нулях функции $L \in \mathcal{S}(\widetilde{h})$ и, по определению класса $\mathcal{S}(\widetilde{h})$, на этой прямой выполняется оценка снизу

$$|L(\zeta)| \geq A(6\sigma) e^{\widetilde{h}(\mathrm{Re}\ \zeta)} = A(6\sigma) e^{\widetilde{h}(X_n)}.$$

Функция $F \in E_2(\widetilde{h})$ и по теореме 1

$$e^{-2\widetilde{h}(x)} \int_{-\infty}^{+\infty} |F(x+iy)|^2 dy = I_F(x) e^{-2\widetilde{h}(x)} \longrightarrow 0, \ |x| \longrightarrow \infty,$$

причем

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |F(x+iy)|^2 dy \leq 2\pi(\pi e)^2 e^{2\widetilde{h}(x)} ||F||^2_{E_2(\widetilde{h})}.$$

Из этих оценок следует, что

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{F(X_n+iy)}{L(X_n+iy)} \right|^2 dy \leq 2\pi(\pi e)^2 e^{-A(6\sigma)} ||F||^2_{E_2(\widetilde{h})} < \infty. \tag{11}$$

Введем обозначение

$$\varphi(y) = \frac{F(X_n+iy)}{L(X_n+iy)},$$

тогда $\varphi \in L_2(-\infty; \infty)$ и

$$v_{n,k,s}(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\chi_{n,s,k}(y)\varphi(y)}{(\lambda - X_n) - iy} dy,$$

где $\chi_{n,s,k}(y)$ — характеристическая функция объединения интервалов $\Delta_{n,k,s}^{+} \bigcup \Delta_{n,k,s}^{-}$. По теореме М. Рисс (см. [8], стр. 157) и ее следствиям функция $v_{n,k,s}(\lambda)$ принадлежит пространствам $H^2(\mathrm{Re}\ \lambda > X_n)$, $H^2(\mathrm{Re}\ \lambda < X_n)$, причем

$$||v_{n,k,s}||^2(x) \leq \int_{-\infty}^{\infty} \chi_{n,s,k}(y) |\varphi(y)|^2 dy = \int_{-\infty}^{\infty} \chi_{n,s,k}(y) \left| \frac{F(X_n+iy)}{L(X_n+iy)} \right|^2 dy.$$

Из сходимости интегралов (11) следует, что при фиксированном n и $k,s \longrightarrow \infty$ равномерно по $x \in \mathbb{R}$

$$||v_{n,k,s}||(x) \longrightarrow 0,$$

причем

$$||v_{n,k,s}||(x) \le C_1||F||^2_{E_2(\widetilde{h})},$$

где C_1 — некоторая абсолютная постоянная.

2. Оценим $||g_j^{\pm}||(x)$. Для определенности возьмем функцию $g_k^+(\lambda)$. Горизонтальная ломаная Γ_k^+ не пересекается с кругами $B_j(4\sigma)$.

Для множества E и числа $\delta > 0$ через $E(\delta)$ обозначим δ-раздутие множества E, то есть

$$E(\delta) = \bigcup_{z\in E} B(z,\delta).$$

Для фиксированного x через i_x обозначим отрезок на вертикальной прямой с абсциссой x, состоящий из точек $\lambda = x + iy$ таких, что

$$\min_{\zeta\in\Gamma_k^+} |\lambda - \zeta| \le \sigma.$$

Ломаная Γ_k^+ состоит из отрезков на прямых, наклоненных к оси абсцисс под углом $0°, \pm 45°$, поэтому длина отрезка i_x не больше $\sqrt{2}\sigma$.

2a. Оценим интеграл по $y \in \mathbb{R}\setminus i_x$. По неравенству Гельдера $(\lambda = x + iy)$

$$\int_{\mathbb{R}\setminus\beta_x}\left|\int_{\Gamma_k^+}\frac{F(\zeta)d\zeta}{L(\zeta)(\lambda-\zeta)}\right|^2 dy \le \int_{\mathbb{R}\setminus\beta_x}\left(\int_{\Gamma_k^+}\left|\frac{F(\zeta)}{L(\zeta)}\right|^2|d\zeta|\int_{\Gamma_k^+}\frac{1}{|\lambda-\zeta|^2}|d\zeta|\right)dy.$$

Пусть $x + iy_x$ — середина отрезка i_x Тогда для $\zeta \in \Gamma_k^+$ имеем

$$2|\lambda-\zeta| \ge \sigma + |\lambda-\zeta| \ge \sigma + |y - y_x|,$$

поэтому

$$\int_{\Gamma_k^+}\frac{1}{|\lambda-\zeta|^2}|d\zeta| \le \frac{4|\Gamma_k^+|}{\sigma^2+|y-y_x|^2}.$$

По тереме 1 при $k,s \longrightarrow \infty$

$$\int_{\Gamma_k^+}\left|\frac{F(\zeta)}{L(\zeta)}\right|^2|d\zeta| \le |\Gamma_k^+| \max_{X_n\le \mathrm{Re}\ \zeta\le X_{n+1}} |F(x+iy)|^2 e^{-2\widetilde{h}(x)} = o(1).$$

Таким образом,

$$\int_{\mathbb{R}\setminus i_x}\left|\int_{\Gamma_k^+}\frac{F(\zeta)d\zeta}{L(\zeta)(\lambda-\zeta)}\right|^2 dy \le o(1)\int_{\mathbb{R}\setminus i_x}\frac{1}{\sigma^2+|y-y_x|^2}dy = o(1).$$

и найдется константа C_2 такая, что

$$\int_{\Gamma_k^+}\left|\frac{F(\zeta)}{L(\zeta)}\right|^2|d\zeta| \le C_2||F(x+iy)||^2_{E_2(\widetilde{h})}.$$

Перейдем к оценке интеграла по i_x. Раздутие $i_x(\sigma)$ попадает в 2σ-раздутие ломаной Γ_k^+ и поэтому не пересекается с кругами $B_j(2\sigma)$. Поскольку длина отрезка i_x не превосходит $\sqrt{2}\sigma$, то длина границы множества $i_x(\sigma)$ не превосходит $2(\sqrt{2}+\pi)\sigma$.

2b. Предположим сначала, что граница $i_x(\sigma)$ пересекает ломаную Γ_k^+ в двух точках ζ_1, ζ_2. Ломаная Γ_k^+ делит множество $i_x(\sigma)$ и его границу на две части — на верхнюю и нижнюю. Рассмотрим ломаную $\widetilde{\Gamma}_k^+$, составленную из двух частей ломаной Γ_k^+, оказавшихся вне множества $i_x(\sigma)$ и одной из двух дуг границы $i_x(\sigma)$, разделенных точками ζ_1, ζ_2. Причем если точка λ лежит в нижней части множества $i_x(\sigma)$, то возьмем верхнюю дугу, если λ лежит в верхней части множества $i_x(\sigma)$, то возьмем нижнюю дугу. Тогда по теореме Коши

$$\int_{\Gamma_k^+} \frac{F(\zeta)d\zeta}{L(\zeta)(\lambda-\zeta)} = \int_{\widetilde{\Gamma}_k^+} \frac{F(\zeta)d\zeta}{L(\zeta)(\lambda-\zeta)}.$$

Так как по построению при $\lambda \in i_x$ и $\zeta \in \widetilde{\Gamma}_k^+$ выполняется $|\lambda-\zeta| \geq \sigma$, то

$$\left|\int_{\widetilde{\Gamma}_k^+} \frac{F(\zeta)d\zeta}{L(\zeta)(\lambda-\zeta)}\right| \leq \frac{|\widetilde{\Gamma}_k^+|}{\sigma} \max_{\zeta\in\widetilde{\Gamma}_k^+} \left|\frac{F(\zeta)}{L(\zeta)}\right|.$$

По теореме 1 получаем, что при $k \longrightarrow \infty$ равномерно по $x \in \mathbb{R}$

$$\int_{i_x} \left|\int_{\Gamma_k^+} \frac{F(\zeta)d\zeta}{L(\zeta)(\lambda-\zeta)}\right|^2 dy = o(1). \tag{12}$$

и найдется констанста C_3 такая, что

$$\int_{\Gamma_k^+} \left|\frac{F(\zeta)}{L(\zeta)}\right|^2 |d\zeta| \leq C_3 ||F(x+iy)||^2_{E_2(\widetilde{h})}.$$

2c. Теперь допустим, что граница множества $i_x(\sigma)$ пересекает ломаную Γ_k^+ в одной точке ζ_1. Это значит, что множество $i_x(\sigma)$ содержит одну из концевых точек ломаной Γ_k^+, например, левый конец $\zeta_0 = X_n + iY_k$. При этом граница множества $i_x(\sigma)$ пересекает вертикаль $\mathrm{R}e\ \zeta = X_n$ в двух точках: w_1 — верхняя и w_2 — нижняя. Через $\widetilde{i}_x(\sigma)$ обозначим пересечение множества $i_x(\sigma)$ с полуплоскостью $\mathrm{R}e\ \zeta > X_n$. Множество $\widetilde{i}_x(\sigma)$ разделено ломаной Γ_k^+ на две части — верхнюю и нижнюю. Определим кривую $\widetilde{\Gamma}_k^+$, составленную из части ломаной Γ_k^+, оказавшейся вне области $i_x(\sigma)$, и из верхней части пересечения границ областей $i_x(\sigma)$ и $\widetilde{i}_x(\sigma)$, если точка λ не попадает в верхнюю часть области $\widetilde{i}_x(\sigma)$, а в противном случае — из нижней части пересечения границ областей $i_x(\sigma)$ и $\widetilde{i}_x(\sigma)$. Через Δ в первом случае обозначим отрезок на вертикали $\zeta = X_n + iy$ между точками ζ_0 и w_1 и отрезок между точками ζ_0 и w_2 во втором случае. Если соответствующим образом задать направления на кривой $\widetilde{\Gamma}_k^+$ и на отрезке Δ, то по теореме Коши

$$\int_{\Gamma_k^+} \frac{F(\zeta)d\zeta}{L(\zeta)(\lambda-\zeta)} = \int_{\widetilde{\Gamma}_k^+} \frac{F(\zeta)d\zeta}{L(\zeta)(\lambda-\zeta)} + \int_{\Delta} \frac{F(\zeta)d\zeta}{L(\zeta)(\lambda-\zeta)}.$$

Первый интеграл в правой части оценивается так же, как в пункте 2b: при $k \longrightarrow \infty$ равномерно по $x \in \mathbb{R}$

$$\int_{i_x} \left|\int_{\widetilde{\Gamma}_k^+} \frac{F(\zeta)d\zeta}{L(\zeta)(\lambda-\zeta)}\right|^2 dy = o(1).$$

Второй интеграл в правой части оценим как, в п. 1, на основе теоремы М. Рисса. Пусть $\chi(y)$ — характеристическая функция отрезка Δ. Тогда функция

$$\varphi(y) = \frac{\chi(y)F(X_n+iy)}{L(X_n+iy)}$$

суммируема с квадратом модуля по $\mathbb{R}$. Поэтому при $k \longrightarrow \infty$ $(\lambda = x+iy)$

$$\int_{i_x} \left|\int_{\Delta} \frac{F(\zeta)d\zeta}{L(\zeta)(\lambda-\zeta)}\right|^2 dy \leq \int_{i_x} \left|\frac{\chi(y)F(X_n+iy)}{L(X_n+iy)}\right|^2 dy = o(1)$$

равномерно по $x \in \mathbb{R}$ и найдется констанста C_4 такая, что

$$\int_{\Gamma_k^+} \left|\frac{F(\zeta)}{L(\zeta)}\right|^2 |d\zeta| \leq C_4 ||F(x+iy)||^2_{E_2(\widetilde{h})}.$$

Из результатов пп.2a – 2c получаем, что при $k, s \longrightarrow \infty$ равномерно по $x \in \mathbb{R}$

$$||v_{n,k,s}||(x) = o(1).$$

Кроме того, найдется константа C_5 такая, что

$$\int_{\Gamma_k^+} \left| \frac{F(\zeta)}{L(\zeta)} \right|^2 |d\zeta| \le C_5 ||F(x+iy)||^2_{E_2(\widetilde{h})}.$$

Подставляя результаты пп. 1 – 2 в (10) получим, что при $k, s \longrightarrow \infty$ равномерно по $x \in \mathbb{R}$ $(\lambda = x + iy)$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |F_{n,s}(\lambda) - F_{n,k}(\lambda)|\, dy \le o(1) \max_y |L(\lambda)| = o(1) e^{2\widetilde{h}(x)},$$

причем для некоторой константы D

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |F_{n,s}(\lambda) - F_{n,k}(\lambda)|\, dy \le D||F(x+iy)||^2_{E_2(\widetilde{h})} \max_y |L(\lambda)| \le D||F(x+iy)||^2_{E_2(\widetilde{h})} e^{2\widetilde{h}(x)}.$$

Следовательно,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |F_{n,s}(\lambda) - F_{n,k}(\lambda)| e^{-2\widetilde{h}(x)} \beta(x)\rho(x)\, dy d\widetilde{h}'(x) =$$

$$= o(1) \int_{-\infty}^{+\infty} \beta(x)\rho(x) d\widetilde{h}'(x) = o(1)$$

и

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |F_{n,s}(\lambda) - F_{n,k}(\lambda)| e^{-2\widetilde{h}(x)} \beta(x)\rho(x)\, dy d\widetilde{h}'(x) \le D' ||F(x+iy)||^2_{E_2(\widetilde{h})}.$$

Тем самым, последовательность $F_{n,k}$ (n фиксировано) фундаментальна в ослабленной норме. Таким образом, когда $k \longrightarrow \infty$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |F_n(\lambda) - F_{n,k}(\lambda)| e^{-2\widetilde{h}(x)} \beta(x)\rho(x)\, dy d\widetilde{h}'(x) \longrightarrow 0,$$

причем

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |F_n(\lambda) - F_{n,k}(\lambda)| e^{-2\widetilde{h}(x)} \beta(x)\rho(x)\, dy d\widetilde{h}'(x) \le D' ||F(x+iy)||^2_{E_2(\widetilde{h})}.$$

Теорема 5 доказана.

Теорема 6. *В условиях теоремы 5*

$$F(\lambda) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n(\lambda),$$

причем ряд сходится в ослабленной норме в пространстве $E_2(\widetilde{h})$. *Кроме того, для некоторого* D *выполняется соотношение* $(\lambda = x + iy)$

$$||F - \sum_{n=N}^{M} F_n||^2 \le D||F(x+iy)||^2_{E_2(\widetilde{h})}.$$

Доказательство теоремы 6. В силу теоремы 5 представление (8) можем переписать в виде

$$\frac{L(\lambda)}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F(X_{n+1} + iy) dy}{L(X_{n+1} + iy)(\lambda - (X_{n+1} + iy))} - \frac{L(\lambda)}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F(X_n + iy) dy}{L(X_n + iy)(\lambda - (X_n + iy))} =$$

$$= F_n(\lambda) - F(\lambda)\chi_n(\lambda),$$

где χ_n — характеристическая функция полосы $X_n < \mathrm{Re}\,\lambda < X_{n+1}$. Отсюда для произвольных целых чисел $N, M,\ N < M$, следует представление

$$F(\lambda) - \sum_{n=N}^{M} F_n(\lambda) = F(\lambda)(1 - \chi_{N,M+1}(\lambda)) +$$
$$+\frac{L(\lambda)}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{F(X_N+iy)dy}{L(X_N+iy)(\lambda-(X_N+iy))} -$$
$$-\frac{L(\lambda)}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{F(X_{M+1}+iy)dy}{L(X_{M+1}+iy)(\lambda-(X_{M+1}+iy))}.$$

Очевидно, что при $|N|, |M| \longrightarrow \infty$

$$F(\lambda)(1-\chi_{N,M+1}(\lambda)) \longrightarrow 0$$

в норме пространства $E_2(\widetilde{h})$, тем более в ослабленной норме. По теореме М. Рисса (см. [8], стр. 157) и ее следствиям функции

$$\frac{1}{\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{F(X_j+iy)dy}{L(X_j+iy)(\lambda-(X_j+iy))}$$

принадлежат пространству Харди H^2 на полуплоскостях $\mathrm{Re}\,\lambda > X_j$, $\mathrm{Re}\,\lambda < X_j$, причем

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{1}{\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{F(X_j+iy)dy}{L(X_j+iy)(x+it-(X_j+iy))}\right|^2 dt \le \int_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{F(X_j+iy)dy}{L(X_j+iy)}\right|^2 dy.$$

Таким образом,

$$\int_{-\infty}^{\infty}|F(x+iy) - \sum_{n=N}^{M} F_n(x+iy)|^2 dy \le o(1) +$$
$$+e^{2\widetilde{h}(x)}\left(e^{-2\widetilde{h}(X_n)}\int_{-\infty}^{\infty}|F(X_N+iy)|^2 dy + e^{-2\widetilde{h}(X_{M+1})}\int_{-\infty}^{\infty}|F(X_{M+1}+iy)|^2 dy\right).$$

Сумма в скобках в правой части по теореме 1 стремится к нулю, когда $|X_N|, |X_{M+1}| \longrightarrow \infty$. Следовательно, при $|N|, |M| \longrightarrow \infty$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}|F(x+iy) - \sum_{n=N}^{M} F_n(x+iy)|^2 e^{-2\widetilde{h}(x)}\beta(x)\rho(\widetilde{h},x)dyd\widetilde{h}'(x) \longrightarrow 0.$$

А также по теореме 1

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}|F(\lambda) - \sum_{n=N}^{M} F_n(\lambda)|e^{-2\widetilde{h}(x)}\beta(x)\rho(x)\,dyd\widetilde{h}'(x) \le D||F(x+iy)||^2_{E_2(\widetilde{h})}.$$

Теорема 6 доказана.

Теорема 7. *В условиях теоремы 5 положим*

$$h_1(t) = \frac{1}{2}\ln\int_{-\infty}^{+\infty} e^{2xt}\beta(x)\rho(\widetilde{h},x)d\widetilde{h}'_+(x)$$

и пусть S_k — система функционалов на $L_2(h)$, биортогональная к системе экспонент $e^{\lambda_k t}$. Тогда для любой функции $f \in L_2(h_1)$, для любого n, ряды

$$f_n(t) \overset{def}{=} \sum_{j=1}^{\infty} S_j(f)e^{z_j t}, \quad f(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} f_m(t)$$

сходятся в норме пространства $L_2(h)$.

Доказательство теоремы 7. Как отмечалось в начале параграфа, $\widehat{S}_k(\lambda) = L_k(\lambda)$. В пространстве $E_2(\widetilde{h}_1)$ по теоремам A и B две нормы

$$||F||^2 = \int\int |F(x+iy)|^2 e^{-2\widetilde{h}_1(x)} \rho(\widetilde{h}_1, x) d\widetilde{h}_1'(x) dy$$

и

$$||F||_1^2 = \int\int |F(x+iy)|^2 e^{-2\widetilde{h}(x)} \beta(x) \rho(\widetilde{h}_1, x) d\widetilde{h}'(x) dy$$

эквивалентны. Поэтому утверждения теорем 5 и 6 можно сформулировать следующим образом.

Для любой функции $F \in E_2(\widetilde{h})$ ряды

$$F_n(\lambda) = \sum_{j=1}^{\infty} F(z_j) L_j(\lambda), \quad F(\lambda) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n(\lambda)$$

сходятся в норме пространства $E_2(\widetilde{h}_1)$, в частности, $F_n \in E_2(\widetilde{h}_1)$, то есть $F_n = \widehat{\Psi}_n$, где $\Psi_n \in L_2^*(h_1)$. Кроме того, для некоторых констант K, D

$$||F_n - \sum_{j=1}^{m} F(z_j) L_j||_{E_2(\widetilde{h}_1)} \le K||F||_{E_2(\widetilde{h})}, \quad ||F - \sum_{n=N}^{M} F_n||_{E_2(\widetilde{h}_1)} \le D||F||_{E_2(\widetilde{h})},$$

По теореме A преобразование Фурье-Лапласа устанавливает изоморфизм банаховых пространств $L_2^*(h_1)$ и $E_2(\widetilde{h}_1)$, следовательно, если $F = \widehat{\Psi}$, то ряды

$$\Psi_n = \sum_{j=1}^{\infty} \Psi(e^{z_j t}) S_j, \quad \Psi = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Psi_n$$

сходятся в пространстве $L_2^*(h_1)$, причем

$$||\Psi_n - \sum_{j=1}^{m} \Psi(e^{z_j t}) S_j||_{L_2^*(h_1)} \le K||\Psi||_{L_2^*(h)}, \tag{13}$$

$$||\Psi - \sum_{n=N}^{M} \Psi_n||_{E_2^*(\widetilde{h}_1)} \le D||F||_{L_2^*(h)}.$$

При фиксированном n для натуральных k, s рассмотрим операторы $\mathcal{R}_{k,s} : L_2(h_1) \longrightarrow L_2(h)$, определенные следующим образом:

$$\mathcal{R}_{k,s}(f) = \sum_{j=k}^{s} S_j(f) e^{z_j t}.$$

Несложно установить, что сопряженные операторы $\mathcal{R}_{k,s}^* : L_2^*(h) \longrightarrow L_2^*(h_1)$ имеют вид:

$$\mathcal{R}_{k,s}^*(\Psi) = \sum_{j=k}^{s} \Psi(e^{z_j t}) S_j.$$

В терминах операторов соотношение (13) означает, что $||\mathcal{R}_{k,s}^*|| \le 2K$. Тогда $||\mathcal{R}_{k,s}|| = ||\mathcal{R}_{k,s}^*|| \le 2K$. Линейная оболочка $\mathrm{span}(\exp \Lambda_L)$ полна в пространстве $L_2(\widetilde{h}_1)$ и для всех $g \in \mathrm{span}(\exp \Lambda_L)$ при $k, s \longrightarrow \infty$

$$\mathcal{R}_{k,s}(g) \longrightarrow 0.$$

Вместе с равномерной ограниченностью норм операторов это означает, что для всех $f \in L_2(h_1)$ при $k, s \longrightarrow \infty$

$$||\mathcal{R}_{k,s}(f)||_{L_2(h)} \longrightarrow 0.$$

Тем самым, последовательность $\mathcal{R}_{k,s}(f)$ фундаментальна в $L_2(h)$ и, значит, сходится в $L_2(h)$. Второе утверждение теоремы 7 доказывается аналогичными аргументами.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Рокафеллар Р. *Выпуклый анализ* // М.: Мир. 1973. 469 с.
2. Луценко В.И. , Юлмухаметов Р.С. *Обобщение теоремы Пэли-Винера на весовые пространства* // Математ. заметки. Т. 48. Вып. 5. 1990. С. 80-85.
3. Луценко В.И. *Теорема Пэли-Винера на неограниченном интервале* // в сб. "Исследования по теории приближений". Институт математики с ВЦ БНЦ УрО АН СССР. Уфа. 1989. С. 79-85.
4. Юлмухаметов Р.С. *Асимптотика многомерного интеграла Лапласа* // сб. "Исследования по теории приближений". Институт математики с ВЦ БНЦ УрО АН СССР. Уфа. 1989. 151 с.
5. Saitoh S. *Fourier-Laplace transforms and Bergman spaces on the tube domains* // Мат. вестн. 1987. 38. № 4. С. 571-586.
6. Исаев К.П., Путинцева А.А., Юлмухаметов Р.С. *Построение аналитических в полосе функций с заданной асимптотикой* // Труды Института математики с ВЦ УНЦ РАН. 2008. Вып. 1. С. 100-107.
7. Башмаков Р.А. *Системы экспонент в весовых гильбертовых пространствах на* $\mathbb{R}$ // Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико - математических наук. Уфа. 2006.
8. Кусис П. *Введение в теорию пространств* H^p *с приложением доказательства Вольффа теоремы о короне* // М.: Мир. 1984. 364 с.
9. Левин Б.Я. *О базисах показательных функций в* $L_2(-\pi,\pi)$ // Уч. зап. матем. отд. Харьковского ун.-та и Харьковского матем. об.-ва. Сер. 4. 1961. Т. XXVII. С. 39-48.
10. Левин Б.Я. *Интерполяция целыми функциями экспоненциального типа* // Матем. физика и функцион. анализ. Сб. науч. трудов ФТИНТ АН УССР. Вып. 1. Харьков. 1969. С. 136-146.
11. Левин Б.Я., Любарский Ю.И. *Интерполяция целыми функциями специальных классов и связанные с нею разложения в ряды экспонент* // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1975. Т. 39. № 3. С. 657-702.
12. Луценко В.И. *Ряды экспонент в пространствах Смирнова* // Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук. Уфа. 1992.
13. Исаев К.П. *Ряды экспонент в пространствах Бергмана* // Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук. Уфа. 2004.

Константин Петрович Исаев,
Башкирский государственный университет,
ул. З. Валиди, 32,
450074, г. Уфа, Россия
E-mail: orbit81@list.ru

Анастасия Андреевна Путинцева,
Башкирский государственный университет,
ул. З. Валиди, 32,
450074, г. Уфа, Россия
E-mail: PutinBSU@yandex.ru

Ринад Салаватович Юлмухаметов,
Институт математики с ВЦ УНЦ РАН,
ул.Чернышевского, 112,
450077, г. Уфа, Россия
E-mail: yulmukhametov@mail.ru