Уфимский математический журнал. Том 1. № 1 (2009). С. 3-15.

УДК 517.982.3 + 517.550.4

О СУЩЕСТВОВАНИИ БАЗИСА В ВЕСОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ

Н.Т. АХТЯМОВ, И.Х. МУСИН

Аннотация. Изучается проблема базиса в весовом пространстве целых функций.

Ключевые слова: целые функции, преобразование Лапласа функционалов, выпуклые функции.

1. Введение

Всюду далее для $u = (u_1, \dots, u_n) \in \mathbb{C}^n, v = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{C}^n$ полагаем $< u, v >= u_1 v_1 + \dots + u_n v_n$, $\|u\|$ – еклидова норма в $\mathbb{C}^n$. Через $H(\mathbb{C}^n)$ обозначаем совокупность целых функций в $\mathbb{C}^n$.

С выпуклой в $\mathbb{C}^n$ функцией φ, удовлетворяющей условию

$$\lim_{z \to \infty} \frac{\varphi(z)}{\|z\|} = +\infty,$$

ассоциируем пространство

$$E(\varphi) = \{f \in H(\mathbb{C}^n) : \|f\|_\varphi = \sup_{z \in \mathbb{C}^n} \frac{|f(z)|}{e^{\varphi(z)}} < \infty\}\ .$$

С нормой $\|\cdot\|_\varphi$ пространство $E(\varphi)$ – банахово.

Пусть $\varPhi = \{\varphi_m\}_{m=1}^\infty$ – произвольное множество выпуклых в $\mathbb{C}^n$ функций φ_m таких, что $\forall m \in \mathbb{N}$:

1) $\lim\limits_{z \to \infty} \dfrac{\varphi_m(z)}{\|z\|} = +\infty$;

2) $\lim\limits_{z \to \infty} (\varphi_m(z) - \varphi_{m+1}(z)) = +\infty$.

Очевидно, $E(\varphi_{m+1}) \subset E(\varphi_m)$. Положим $E(\varPhi) = \bigcap\limits_{m=1}^{\infty} E(\varphi_m)$. С обычными операциями сложения и умножения на комплексные числа $E(\varPhi)$ становится линейным пространством. Наделим $E(\varPhi)$ топологией проективного предела пространств $E(\varphi_m)$. Таким образом, базис окрестностей нуля в $E(\varPhi)$ образуют множества

$$U_{m,\delta} = \{f \in E(\varPhi) : \|f\|_{\varphi_m} < \delta\}, \quad m \in \mathbb{N}, \quad \delta > 0.$$

Очевидно, $E(\varPhi)$ – пространство Фреше.

Важным этапом при изучении ряда вопросов анализа [1] – [3] является описание сопряженных пространств в терминах преобразования Лапласа (Фурье-Лапласа, Коши) функционалов. Для пространств типа $E(\varPhi)$ (в нетривиальных ситуациях) задача описания сопряженного в терминах преобразования Лапласа функционалов изучалась в работах

Ahtyamov N.T., Musin I.Kh. On existence of a basis in a weighted space of entire functions.

Работа второго автора выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты №08-01-00779, 08-01-97023), программы государственной поддержки ведущих научных школ Российской Федерации (грант Президента Российской Федерации НШ 3081.2008.1).

Поступила 5 марта 2009 г.

В.С. Ткаченко [4], С.В. Попёнова [5], Ф. Хаслингера [6]. Пространства, рассматривавшиеся в [4] – [6], относятся к классу локализуемых аналитически равномерных пространств в смысле Эренпрайса-Паламодова-Хансена [7]. Отметим, что для некоторых пространств целых функций, не входящих в данный класс, указанная задача рассматривалась в [8].

В данной работе продолжается изучение пространства $E(\varPhi)$ целых функций в $\mathbb{C}^n$ при тех же предположениях на систему $\varPhi$ весовых функций, что и в [8]. А именно, пусть числа μ и ρ таковы, что $1 < \mu \leqslant \rho$. Пусть $\varPhi = \{\varphi_m\}_{m=1}^{\infty}$ – совокупность выпуклых функций в $\mathbb{C}^n$, удовлетворяющих условиям:

i_1) $\exists A > 0\ \exists B > 0\ \forall m \in \mathbb{N}\ \exists C_m > 0\ \exists D_m > 0$:

$$C_m\|z\|^{\mu} - D_m \leqslant \varphi_m(z) \leqslant A||z||^{\rho} + B\ ,\ z \in \mathbb{C}^n;$$

i_2) $\exists a > 0\ \forall m \in \mathbb{N}\ \exists b_m > 0$:

$$\varphi_m(z) - \varphi_{m+1}(z) \geq a\ln(1 + \|z\|) - b_m,\ z \in \mathbb{C}^n.$$

Определение 1. *Преобразование φ_m^* Юнга-Фенхеля функции φ_m определим по формуле*

$$\varphi_m^*(\lambda) = \sup_{z\in\mathbb{C}^n}(Re < \lambda, z > -\varphi_m(z)),\ \lambda \in \mathbb{C}^n.$$

Функция φ_m^* принимает конечные значения и является выпуклой в $\mathbb{C}^n$. Известно, что $(\varphi_m^*)^* = \varphi_m$ [9].

Отметим, что для любого $\lambda \in \mathbb{C}^n$ функция $f_\lambda(z) = e^{<\lambda,z>}$ принадлежит $E(\varPhi)$. Действительно, $\forall m \in \mathbb{N}$

$$\|f_\lambda\|_{\varphi_m} = \sup_{z\in\mathbb{C}^n}\frac{|e^{<\lambda,z>}|}{e^{\varphi_m(z)}} = e^{\varphi_m^*(\lambda)} < \infty.$$

Пусть $\varPhi^* = \{\varphi_m^*\}_{m=1}^{\infty}$. Поскольку $\varphi_m^*(z) \leq \varphi_{m+1}^*(z) + b_m$ всюду в $\mathbb{C}^n$, то для любого $m \in \mathbb{N}$ пространство $E(\varphi_m^*)$ непрерывно вложено в $E(\varphi_{m+1}^*)$. Пусть $P(\varPhi^*) = \bigcup\limits_{m=1}^{\infty} E(\varphi_m^*)$. С обычными операциями сложения и умножения на комплексные числа $P(\varPhi^*)$ становится линейным пространством. Наделим $P(\varPhi^*)$ топологией индуктивного предела нормированных пространств $E(\varphi_m^*)$.

В силу условий на $\varPhi$ пространство $E(\varPhi)$ является пространством (M^*), а пространство $P(\varPhi^*)$ – пространством (LN^*)(см. определения в [10], [8]).

Через $E'(\varPhi)$ обозначим пространство линейных непрерывных функционалов на $E(\varPhi)$, через $E^*(\varPhi)$ – сильное сопряженное пространство к пространству $E(\varPhi)$.

Определение 2. *Преобразованием Лапласа функционала $S \in E'(\Phi)$ называется функция*

$$\hat{S}(\lambda) = (S, e^{<\lambda,z>}),\quad \lambda \in \mathbb{C}^n.$$

Пространство $E^*(\varPhi)$ допускает следующее описание [8].

Теорема А. *Отображение $L : S \in E^*(\varPhi) \to \hat{S}$ устанавливает топологический изоморфизм пространств $E^*(\varPhi)$ и $P(\varPhi^*)$.*

В данной заметке изучаются свойства пространства $E(\varPhi)$. Показано (Теорема 2), что $E(\varPhi)$ – ядерное пространство [11]. В частности, $E(\varPhi)$ – счётно-гильбертово пространство. В работе построена эквивалентная исходной счётно-гильбертова топология (Теорема 1). Также в работе дано применение теоремы А к задаче о существовании базиса в весовом пространстве целых функций типа $E(\varPhi)$ в одном специальном случае. Отметим, что по вопросу существования и построения базисов в счётно-гильбертовых пространствах [11] имеется много работ (см., напр., [12], [13]). Интерес к данной проблематике усилился после появления примеров ядерных пространств Фреше [12], [14], не имеющих базиса (см., напр.,

[15]). В весовых пространствах целых функций типа $E(\Phi)$ данная проблема рассматривалась Ф. Хаслингером [6] для случая весовых функций $\varphi_m(z) = r_m p(z)$, где $r_m \to r_0 > 0$ при $m \to \infty$, p – выпуклая функция в $\mathbb{C}^n$, удовлетворяющая условию

$$\lim_{z\to\infty} \frac{p(z)}{\|z\|} = +\infty.$$

В четвёртом разделе работы показано (Теорема 3), что базис в $E(\Phi)$ существует в ситуации, когда система Φ состоит из выпуклых в $\mathbb{C}^n$ функций φ_m, имеющих при $\|z\| \geq R$ (где $R > 0$ – некоторое число) вид:

$$\varphi_m(z) = \varphi(z) + \frac{h(\|z\|)}{m},$$

где φ – выпуклая функция в $\mathbb{C}^n$, удовлетворяющая условию: существуют положительные числа $A_\varphi, B_\varphi, C_\varphi, D_\varphi$ такие, что

$$C_\varphi \|z\|^\mu - D_\varphi \leqslant \varphi(z) \leqslant A_\varphi ||z||^\rho + B_\varphi \ , \ z \in \mathbb{C}^n,$$

а h – непрерывная неубывающая положительная функция на $[0; +\infty)$ такая, что:

a) $\displaystyle\lim_{r\to+\infty} \frac{h(r)}{\ln(1+r)} = +\infty;$

b) $\forall b > 1 \ \ h(br^{\frac{\rho-1}{\mu-1}}) = O(h(r)), \quad r \to +\infty.$

c) $h(\|z\|) = O(\varphi(z)), \ z \to \infty.$

В ходе решения задачи используются (как и в [6]) методы Митягина-Хенкина [16] и Д. Фогта [17], а также теорема А.

2. Вспомогательные утверждения

Лемма 1. *Пусть $\nu > 1$, а функция $\varphi : \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}$ такова, что для некоторых чисел $C_\varphi > 0, D_\varphi > 0$*

$$\varphi(z) \geq C_\varphi ||z||^\nu - D_\varphi, \ z \in \mathbb{C}^n.$$

Тогда найдется постоянная $M_\varphi > 0$ такая, что

$$|\varphi^*(z) - \varphi^*(\zeta)| \leq M_\varphi$$

для всех $z, \zeta \in \mathbb{C}^n$, удовлетворяющих условию

$$\|z - \zeta\| \leqslant \frac{1}{(1 + \|\zeta\|)^{\frac{1}{\nu-1}}}.$$

Доказательство. Для произвольного $z \in \mathbb{C}^n$ рассмотрим функцию

$$u_z(\zeta) = Re < z, \zeta > -\varphi(\zeta), \ \zeta \in \mathbb{C}^n.$$

Пусть точная верхняя грань в $\mathbb{C}^n$ функции u_z достигается в точке $\zeta_0(z)$. Тогда найдется число $K_\varphi > 0$, не зависящее от z, такое, что

$$\|\zeta_0(z)\| \leqslant K_\varphi \cdot (1 + \|z\|^{\frac{1}{\nu-1}}).$$

Покажем это. Пользуясь условием леммы, имеем

$$u_z(\zeta) \leq \|z\| \cdot \|\zeta\| - C_\varphi \|\zeta\|^\nu + D_\varphi.$$

Так как $\varphi^*(z) = \sup\limits_{\zeta\in\mathbb{C}^n} u_z(\zeta) \geq -\varphi(0)$, то $\sup\limits_{\zeta\in\mathbb{C}^n} u_z(\zeta)$ достигается на множестве

$$G_z = \{\zeta \in \mathbb{C}^n : \|\zeta\| \cdot \|z\| \geq C_\varphi \|\zeta\|^\nu - D_\varphi - \varphi(0)\}.$$

Положим $L_\varphi = D_\varphi + \varphi(0)$. Из условия на φ следует, что $L_\varphi \geq 0$. Пусть для $\lambda \geq 0 \ \ T_\lambda$ – множество решений неравенства

$$\lambda x \geq C_\varphi x^\nu - L_\varphi,$$

принадлежащих $\mathbb{R}_+$. Это множество – отрезок вида $[0, x_\lambda]$, где $x_\lambda < \infty$. Оценим x_λ сверху. Имеем $\lambda x_\lambda = C_\varphi x_\lambda^\nu - L_\varphi$. Предположим, что $x_\lambda \geq 1$. Тогда

$$\lambda = C_\varphi x_\lambda^{\nu-1} - \frac{L_\varphi}{x_\lambda} \geq C_\varphi x_\lambda^{\nu-1} - L_\varphi.$$

Отсюда $x_\lambda \leqslant \left(\frac{\lambda+L_\varphi}{C_\varphi}\right)^{\frac{1}{\nu-1}}$. Принимая во внимание случай $x_\lambda < 1$, получаем

$$x_\lambda \leqslant \left(\frac{\lambda + L_\varphi}{C_\varphi}\right)^{\frac{1}{\nu-1}} + 1.$$

Отсюда, если $0 \leq \lambda \leq 1$, то $x_\lambda \leqslant \left(\frac{1+L_\varphi}{C_\varphi}\right)^{\frac{1}{\nu-1}} + 1$, а если $\lambda > 1$, то $x_\lambda \leqslant \lambda^{\frac{1}{\nu-1}} \left(\frac{1+L_\varphi}{C_\varphi}\right)^{\frac{1}{\nu-1}} + 1$.

Положим $K_\varphi = \left(\frac{1+L_\varphi}{C_\varphi}\right)^{\frac{1}{\nu-1}} + 1$. Тогда

$$x_\lambda \leqslant K_\varphi(1 + \lambda^{\frac{1}{\nu-1}}).$$

Правую часть последнего неравенства обозначим через d_λ. Итак, $T_\lambda \subseteq [0; d_\lambda]$. Поскольку $\zeta \in G_z \Leftrightarrow ||\zeta|| \in T_{||z||}$, то $\forall \zeta \in G_z$ имеем

$$||\zeta|| \leqslant K_\varphi \cdot ||z||^{\frac{1}{\nu-1}} + K_\varphi.$$

В частности,

$$||\zeta_0(z)|| \leqslant K_\varphi ||z||^{\frac{1}{\nu-1}} + K_\varphi.$$

Далее для $z, \xi \in \mathbb{C}^n$ таких, что $||\xi - z|| \leqslant (1 + ||\xi||)^{\frac{1}{1-\nu}}$

$$\begin{aligned}
\varphi^*(\xi) - \varphi^*(z) = \sup_{\zeta\in\mathbb{C}^n}(Re < \zeta, \xi > -\varphi(\zeta)) - \sup_{\zeta\in\mathbb{C}^n}(Re < \zeta, z > -\varphi(\zeta)) \leq \\
\leq Re < \xi, \zeta_0(\xi) > -\varphi(\zeta_0(\xi)) - Re < z, \zeta_0(\xi) > +\varphi(\zeta_0(\xi)) = \\
= Re < \xi - z, \zeta_0(\xi) > \leq ||\xi - z|| \cdot ||\zeta_0(\xi)|| \leqslant \\
\leq (1 + ||\xi||)^{\frac{1}{1-\nu}} K_\varphi (1 + ||\xi||^{\frac{1}{\nu-1}}) \leqslant \\
\leqslant \frac{2K_\varphi(1 + ||\xi||)^{\frac{1}{\nu-1}}}{(1 + ||\xi||)^{\frac{1}{\nu-1}}} = 2K_\varphi.
\end{aligned}$$

Аналогично,

$$\begin{aligned}
\varphi^*(z) - \varphi^*(\xi) \leqslant Re < z - \xi, \zeta_0(z) > \leqslant ||z - \xi|| ||\zeta_0(z)|| \leqslant \\
\leqslant \frac{K_\varphi(1 + ||z||^{\frac{1}{\nu-1}})}{(1 + ||\xi||)^{\frac{1}{\nu-1}}} \leqslant \frac{K_\varphi(1 + (1 + ||\xi||)^{\frac{1}{\nu-1}})}{(1 + ||\xi||)^{\frac{1}{\nu-1}}} \leqslant \\
\leqslant \frac{2K_\varphi(1 + ||\xi||)^{\frac{1}{\nu-1}}}{(1 + ||\xi||)^{\frac{1}{\nu-1}}} = 2K_\varphi.
\end{aligned}$$

Осталось положить $M_\varphi = 2K_\varphi$.

Лемма 1 доказана.

Следствие 1. *Пусть φ – выпуклая функция в $\mathbb{C}^n$ такая, что:*

1) $\lim\limits_{z\to\infty} \dfrac{\varphi(z)}{||z||} = +\infty$;

2) существует число $\eta > 1$ такое, что

$$\overline{\lim_{z\to\infty}} \frac{\varphi(z)}{||z||^\eta} < \infty.$$

Тогда существует постоянная $C_\varphi > 0$ такая, что

$$|\varphi(z) - \varphi(\xi)| \leqslant C_\varphi,$$

если $||z-\xi|| \leqslant (1+||\xi||)^{1-\eta}$.

Доказательство. В силу условия 2) на $\varphi(z)$ имеем при некоторых $C>0,\ D>0$

$$\varphi^*(z) \geq C||z||^{\frac{\eta}{\eta-1}} - D.$$

Таким образом, функция φ^* удовлетворяет условиям леммы 1. Поэтому найдется число $C_\varphi > 0$ такое, что для всех $z, \xi \in \mathbb{C}^n$ с условием

$$||z-\xi|| \leqslant (1+||\xi||)^{1-\eta}$$

будем иметь $|(\varphi^*)^*(z) - (\varphi^*)^*(\xi)| \leqslant C_\varphi$. Так как $(\varphi^*)^* = \varphi$, то следствие 1 доказано.

Лемма 2. *Пусть числа* μ *и* ρ *таковы, что* $1<\mu\leqslant\rho$. *Пусть* $\Phi = \{\varphi_m\}_{m=1}^\infty$ *– совокупность выпуклых функций в* $\mathbb{C}^n$, *удовлетворяющих условиям* i_1), i_2). *Пусть для любого* $z\in\mathbb{C}^n$ *и любого* $m\in\mathbb{N}$ $\xi_m(z)$ *– точка, в которой достигается точная верхняя грань на* $\mathbb{C}^n$ *функции* $v_{z,m}(\xi) = Re < z,\xi > -\varphi_m(\xi)$.

Тогда существует число $\gamma>0$ *такое, что для любого* $m\in\mathbb{N}$ *найдется число* $d_m>0$ *такое, что для всех* $z\in\mathbb{C}^n$

$$||\xi_m(z)|| > \gamma||z||^{\frac{1}{\rho-1}} - d_m.$$

Доказательство. Докажем от противного. Предположим, что для каждого $k\in\mathbb{N}$ найдутся числа $m_k\in\mathbb{N}$ и $z_k\in\mathbb{C}^n$ такие, что

$$||\xi_{m_k}(z_k)|| \leqslant \frac{1}{k}||z_k||^{\frac{1}{\rho-1}} - k.$$

Таким образом, $z_k\to\infty$ при $k\to\infty$. При этом $\forall k\in\mathbb{N}$

$$\varphi^*_{m_k}(z_k) = Re < z_k, \xi_{m_k}(z_k) > -\varphi_{m_k}(\xi_{m_k}(z_k)) \leqslant$$

$$\leqslant ||z_k||\cdot||\xi_{m_k}(z_k)|| - \varphi_{m_k}(\xi_{m_k}(z_k)) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{k}||z_k||^{\frac{\rho}{\rho-1}} - C_{m_k}||\xi_{m_k}(z_k)||^\mu + D_{m_k} \leqslant \frac{1}{k}||z_k||^{\frac{\rho}{\rho-1}} + D_{m_k},$$

что противоречит тому, что при любом $m\in\mathbb{N}$

$$\varphi^*_m(z) \geq \left(1-\frac{1}{\rho}\right)\left(\frac{1}{A\rho}\right)^{\frac{1}{\rho-1}} ||z||^{\frac{\rho}{\rho-1}} - B,\ z\in\mathbb{C}^n.$$

Итак, допущение было неверно. Значит, утверждение леммы верно.

3. Топологические свойства пространства $E(\Phi)$

Пусть числа μ и ρ таковы, что $1<\mu\leqslant\rho$, $\Phi = \{\varphi_m\}_{m=1}^\infty$ – совокупность выпуклых функций в $\mathbb{C}^n$, удовлетворяющих условиям i_1), i_2).

Обозначим через λ_n меру Лебега в $\mathbb{C}^n$. Для произвольных $z\in\mathbb{C}^n$ и числа $r>0$ пусть $B_r(z) = \{\xi\in\mathbb{C}^n : ||\xi - z|| < r\}$ – шар радиуса r в $\mathbb{C}^n$ с центром в точке $z\in\mathbb{C}^n$, $v_n(r) = v_n(1)r^{2n}$ – обьём шара $B_r(z)$.

3.1. Счётно-гильбертовость пространства $E(\Phi)$.

Теорема 1. *Топология в* $E(\Phi)$ *может быть определена эквивалентным способом с помощью семейства норм*

$$||f||_m = \left(\int_{\mathbb{C}^n} |f(z)|^2 e^{-2\varphi_m(z)}\, d\lambda_n(z)\right)^{\frac{1}{2}},\ m\in\mathbb{N}.$$

Доказательство. Покажем, что топология τ_2 в $E(\Phi)$, заданная с помощью семейства норм $||\cdot||_m$ ($m \in \mathbb{N}$) не слабее топологии τ_1 в $E(\Phi)$, заданной с помощью семейства норм $||\cdot||_{\varphi_m}$ ($m \in \mathbb{N}$). Возьмём произвольное натуральное число m. Заметим, что для любого $s \in \mathbb{N}$ при некотором $b_{m,s} > 0$ всюду в $\mathbb{C}^n$

$$\varphi_m(z) - \varphi_{m+s}(z) \geq sa\ln(1+||z||) - b_{m,s}. \tag{1}$$

Пусть f – произвольная функция из $E(\Phi)$. В силу плюрисубгармоничности $|f(z)|$ в $\mathbb{C}^n$ имеем при любом $r > 0$

$$|f(z)| \leqslant \frac{1}{v_n(r)} \int_{B_r(z)} |f(\xi)| \, d\lambda_n(\xi). \tag{2}$$

Положим в (2) $r = (1+||z||)^{1-\rho}$ и для произвольного $s \in \mathbb{N}$ продолжим это неравенство, пользуясь по ходу неравенством Коши-Буняковского и следствием из леммы 1:

$$|f(z)| \leqslant \frac{1}{v_n(r)} \int_{B_r(z)} |f(\xi)| e^{-\varphi_{m+s}(\xi)} e^{\varphi_{m+s}(\xi)} \, d\lambda_n(\xi) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{v_n(r)} \left(\int_{B_r(z)} |f(\xi)|^2 e^{-2\varphi_{m+s}(\xi)} \, d\lambda_n(\xi) \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\int_{B_r(z)} e^{2\varphi_{m+s}(\xi)} \, d\lambda_n(\xi) \right)^{\frac{1}{2}} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{v_n(r)} \left(\int_{\mathbb{C}^n} |f(\xi)|^2 e^{-2\varphi_{m+s}(\xi)} \, d\lambda_n(\xi) \right)^{\frac{1}{2}} \cdot e^{\varphi_{m+s}(z) + c_{\varphi_{m+s}}} \sqrt{v_n(r)} =$$

$$= (v_n(r))^{-\frac{1}{2}} ||f||_{m+s} \cdot e^{\varphi_{m+s}(z) + c_{\varphi_{m+s}}} =$$

$$= (v_n(1))^{-\frac{1}{2}} e^{c_{\varphi_{m+s}}} (1+||z||)^{n(\rho-1)} e^{\varphi_{m+s}(z)} ||f||_{m+s}.$$

Отсюда $\forall z \in \mathbb{C}^n$

$$|f(z)| e^{-\varphi_{m+s}(z) - n(\rho-1)\ln(1+||z||)} \leqslant (v_n(1))^{-\frac{1}{2}} e^{c_{\varphi_{m+s}}} ||f||_{m+s}.$$

Пусть теперь $s = [\frac{n(\rho-1)}{a}] + 1$. Пользуясь неравенством (1), получим

$$|f(z)| e^{-\varphi_m(z)} \leqslant e^{c_{\varphi_{m+s}} + b_{m,s}} \cdot (v_n(1))^{-\frac{1}{2}} \cdot ||f||_{m+s}, \ z \in \mathbb{C}^n.$$

Отсюда

$$\sup_{z \in \mathbb{C}^n} |f(z)| e^{-\varphi_m(z)} \leqslant e^{c_{\varphi_{m+s}} + b_{m,s}} \cdot (v_n(1))^{-\frac{1}{2}} \cdot ||f||_{m+s},$$

то есть,

$$\|f\|_{\varphi_m} \leqslant e^{c_{\varphi_{m+s}} + b_{m,s}} \cdot (v_n(1))^{-\frac{1}{2}} \cdot ||f||_{m+s}.$$

Итак, доказано, что топология τ_2 в $E(\Phi)$ не слабее топологии τ_1 в $E(\Phi)$.

Покажем теперь, что топология τ_1 не слабее топологии τ_2. А именно, докажем, что для любого $m \in \mathbb{N}$ найдутся числа $d_m > 0, k \in \mathbb{N}$ такие, что для каждого $f \in E(\Phi)$

$$||f||_m \leqslant d_m \|f\|_{\varphi_k}. \tag{3}$$

Пусть $s = [\frac{n+1}{a}] + 1$. Для любого $f \in E(\Phi)$

$$||f||_m^2 = \int_{\mathbb{C}^n} |f(z)|^2 e^{-2\varphi_m(z)} \, d\lambda_n(z) =$$

$$= \int_{\mathbb{C}^n} |f(z)|^2 e^{-2\varphi_{m+s}(z)} e^{2(\varphi_{m+s}(z) - \varphi_m(z))} \, d\lambda_n(z) \leqslant$$

$$\leqslant \|f\|_{\varphi_{m+s}}^2 \int_{\mathbb{C}^n} e^{-2(n+1)\ln(1+||z||) + 2b_{m,s}} \, d\lambda_n(z) =$$

$$= \|f\|_{\varphi_{m+s}}^2 e^{2b_{m,s}} \cdot \int_{\mathbb{C}^n} \frac{d\lambda_n(z)}{(1+||z||)^{2(n+1)}}.$$

Отсюда, полагая $d_m = e^{b_{m,s}} \left(\int_{\mathbb{C}^n} \frac{d\lambda_n(z)}{(1+||z||)^{2(n+1)}} \right)^{\frac{1}{2}}$, $k = m + s$, получим неравенство (3). Таким образом, топологии τ_1 и τ_2 в $E(\Phi)$ совпадают.

Теорема 1 доказана.

3.2. Ядерность пространства $E(\Phi)$.

Пусть E и F – нормированные пространства с нормами $\| \cdot \|_E$ и $\| \cdot \|_F$, соответственно. Через $\|S\|_{E'}$ обозначим норму функционала $S \in E'$

$$||S||_{E'} = \sup_{||x||_E \leqslant 1} |(S, x)|.$$

Определение 3. *Линейное непрерывное отображение $T : E \to F$ называется ядерным, если существуют функционалы $a_n \in E'$ и элементы $y_n \in F$ $(n = 1, 2, \dots)$ такие, что*

$$Tx = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) y_n, \ x \in E,$$

и

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|a_n\|_{E'} \cdot \|y_n\|_F < \infty.$$

Пусть U – абсолютно выпуклая окрестность нуля в локально выпуклом пространстве E. Пусть $E(U) = \{x \in E : \exists \lambda > 0 \ x \in \lambda U\}$. Норму в $E(U)$ зададим с помощью функционала Минковского окрестности U.

Определение 4. *Локально выпуклое пространство E называется ядерным, если в нем имеется фундаментальная система окрестностей нуля $\mathcal{U}$ такая, что для каждой окрестности нуля $U \in \mathcal{U}$ существует окрестность нуля $V \in \mathcal{U}$ такая, что $V \subset \lambda U$ при некотором $\lambda > 0$ и каноническое отображение пространства $E(V)$ на $E(U)$ ядерно.*

Приведём критерий ядерности пространства. В его формулировке для локально выпуклого пространства E через $|| \cdot ||_U$ обозначена калибровочная функция (функционал Минковского) окрестности U, через V^0 – поляра множества $V \subset E$, через $(\cdot, \cdot)$ – двойственность между E и E' (пространством, сопряжённым к E). Известно (см., напр., [14], п. 4.1.5), что локально выпуклое пространство E – ядерное тогда и только тогда, когда для любой абсолютно выпуклой окрестности нуля U существует окрестность нуля V и конечная положительная мера Радона на слабо компактном множестве V^0 такие, что

$$||x||_U \leqslant \int_{V^0} |(y, x)| d\mu(y), \ \forall x \in E.$$

Теорема 2. *Пространство $E(\Phi)$ – ядерное.*

Доказательство. Пусть U – абсолютно выпуклая окрестность нуля в $E(\Phi)$. Найдутся числа $m \in \mathbb{N}, \varepsilon > 0$ такие, что $U_{m,\varepsilon} \subset U$. Если p_U – калибровочная функция окрестности U, то

$$p_U(f) \leq \frac{1}{\varepsilon} \|f\|_{\varphi_m}, \ f \in E(\Phi). \tag{4}$$

Пусть $f \in E(\Phi)$. В силу плюрисубгармоничности $|f(z)|$ в $\mathbb{C}^n$ имеем при любом $r > 0$

$$|f(z)| \leq v_n^{-1}(r) \int_{B_r(z)} |f(\xi)| \ d\lambda_n(\xi).$$

Полагая здесь $r = (1 + ||z||)^{1-\rho}$, имеем

$$|f(z)| \leqslant \frac{1}{v_n(r)} \int_{B_r(z)} |f(\xi)| e^{-\varphi_m(\xi) + \varphi_m(\xi)} \ d\lambda_n(\xi) \leqslant$$

$$\leqslant v_n^{-1}(1)(1+||z||)^{2n(\rho-1)} \int_{B_r(z)} |f(\xi)| e^{-\varphi_m(\xi)} e^{\varphi_m(z)+c_{\varphi_m}} \, d\lambda_n(\xi) \leqslant$$

$$\leqslant v_n^{-1}(1) e^{\varphi_m(z)+c_{\varphi_m}} \int_{\mathbb{C}^n} |f(\xi)| e^{-\varphi_m(\xi)+2n(\rho-1)\ln(2+||\xi||)} \, d\lambda_n(\xi) \leqslant$$

$$\leqslant 2^{2n(\rho-1)} \frac{e^{c_{\varphi_m}}}{v_n(1)} \int_{\mathbb{C}^n} |f(\xi)| e^{-\varphi_m(\xi)+2n(\rho-1)\ln(1+||\xi||)} \, d\lambda_n(\xi).$$

Воспользуемся неравенством (1). Положим

$$s = \left[\frac{2n(\rho-1)}{a}\right] + 1, \ K_m = 2^{2n(\rho-1)} e^{c_{\varphi_m}+b_{m,s}} v_n^{-1}(1).$$

Тогда

$$|f(z)| \leqslant K_m e^{\varphi_m(z)} \int_{\mathbb{C}^n} |f(\xi)| e^{-\varphi_{m+s}(\xi)} \, d\lambda_n(\xi).$$

Следовательно, $\forall f \in E(\varPhi)$

$$\|f\|_{\varphi_m} \leqslant K_m \int_{\mathbb{C}^n} |f(\xi)| e^{-\varphi_{m+s}(\xi)} \, d\lambda_n(\xi). \tag{5}$$

Положим $k = [\frac{2n+1}{a}] + 1$. Принимая во внимание (1), найдём число $b_{m,s,k} > 0$ такое, что $\forall z \in \mathbb{C}^n$

$$\varphi_{m+s}(z) - \varphi_{m+s+k}(z) > (2n+1)\ln(1+||z||) - b_{m,s,k}.$$

Положим $V = U_{m+s+k,1}$. Введем метрику на V^0 по формуле

$$d(F_1, F_2) = \sup_{f \in V} |(F_1 - F_2, f)|, \quad F_1, F_2 \in V^0.$$

Определим функционал ν на пространстве $C(V^0)$ непрерывных функций на V^0, рассматриваемом с нормой

$$||g||_{C(V^0)} = \max_{F \in V^0} |g(F)|,$$

по правилу

$$(\nu, g) = K_m \int_{\mathbb{C}^n} g(\delta(\xi) e^{-\varphi_{m+s+k}(\xi)}) \cdot e^{\varphi_{m+s+k}(\xi)-\varphi_{m+s}(\xi)} \, d\lambda_n(\xi),$$

где $g \in C(V^0)$, $\delta(\xi)$ – дельта-функция с носителем в точке ξ. Так как

$$|(\delta(\xi) e^{-\varphi_{m+s+k}(\xi)}, f)| = |f(\xi) e^{-\varphi_{m+s+k}(\xi)}| \leqslant 1, \ f \in V,$$

то $\delta(\xi) e^{-\varphi_{m+s+k}(\xi)} \in V^0$. Далее, $\forall g \in C(V^0)$

$$|(\nu, g)| \leqslant K_m \int_{\mathbb{C}^n} |g(\delta(\xi) e^{-\varphi_{m+s+k}(\xi)})| \cdot e^{\varphi_{m+s+k}(\xi)-\varphi_{m+s}(\xi)} \, d\lambda_n(\xi) \leqslant$$

$$\leqslant K_m \max_{F \in V^0} |g(F)| \int_{\mathbb{C}^n} e^{\varphi_{m+s+k}(\xi)-\varphi_{m+s}(\xi)} \, d\lambda_n(\xi) \leqslant$$

$$\leqslant ||g||_{C(V^0)} K_m e^{b_{m,s,k}} \int_{\mathbb{C}^n} \frac{d\lambda_n(\xi)}{(1+||\xi||)^{2n+1}}.$$

Таким образом, функционал ν корректно определен, линеен и непрерывен. Очевидно, ν – положительный функционал.

По $f \in E(\varPhi)$ определим функцию g_f на V^0 по правилу

$$g_f(F) = (F, f), \ F \in V^0.$$

Отметим, что $g_f \in C(V^0)$. В случае $f \equiv 0$ это очевидно. Пусть f – ненулевой элемент пространства $E(\varPhi)$ и пусть $F_0 \in V^0$. Для $F \in V^0$ имеем

$$|g_f(F) - g_f(F_0)| = |(F - F_0, f)| = |(F - F_0, \frac{f}{\|f\|_{\varphi_{m+s+k}}} \cdot \|f\|_{\varphi_{m+s+k}})| \leqslant$$

$$\leqslant \|f\|_{\varphi_{m+s+k}} \cdot \sup_{g\in V} |(F-F_0,g)| = d(F,F_0)\cdot \|f\|_{\varphi_{m+s+k}}.$$

Отсюда следует непрерывность g_f в точке F_0. В силу произвольности $F_0 \in V^0$ функция g_f непрерывна на V^0. Значит, и $|g_f| \in C(V^0)$.

Далее

$$(\nu, |g_f|) = K_m \int_{\mathbb{C}^n} |g(\delta(\xi)e^{-\varphi_{m+s+\nu}(\xi)})| e^{\varphi_{m+s+k}(\xi)-\varphi_{m+s}(\xi)}\, d\lambda_n(\xi) =$$

$$= K_m \int |(\delta(\xi)e^{-\varphi_{m+s+k}(\xi)}, f)| e^{\varphi_{m+s+\nu}(\xi)-\varphi_{m+s}(\xi)}\, d\lambda_n(\xi) =$$

$$= K_m \int |f(\xi)|\cdot e^{-\varphi_{m+s}(\xi)}\, d\lambda_n(\xi).$$

Зададим функционал $\mu \in C'(V^0)$ по правилу: $(\mu, g) = \dfrac{(\nu, g)}{\varepsilon}$, $g \in C(V^0)$. Пользуясь последней оценкой и неравенствами (4), (5), получаем

$$p_U(f) \le (\mu, |g_f|),\ f \in E(\Phi).$$

Тем самым ядерность пространства $E(\Phi)$ доказана.

4. О существовании базиса в $E(\Phi)$ в специальном случае весовых функций

Определение 5. *Пусть X – сепарабельное локально выпуклое пространство над полем комплексных чисел. Система элементов $\{x_k,\ k=1,2,\ldots\}$ называется базисом в X, если для всякого элемента $x \in X$ существует разложение*

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} c_k x_k,$$

где ряд сходится по топологии пространства X, а числа $c_k \in \mathbb{C}$ $(k=1,2,\ldots)$ однозначно определяются элементом x. При этом базис $\{x_k,\ k=1,2,\ldots\}$ называется абсолютным, если для любой непрерывной полунормы p на X существует непрерывная полунорма q на X такая, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} |c_k| p(x_k) \le q(\sum_{k=1}^{\infty} c_k x_k)$$

для всех $\sum_{k=1}^{\infty} c_k x_k \in X$.

По теореме Б.С. Митягина и А.С. Дынина (см., напр., [12], теорема 8) в ядерном пространстве Фреше всякий базис является абсолютным.

Известно [17] (см. также [6]) что, если X – ядерное пространство Фреше с топологией, определяемой системой норм $(|||\cdot|||)_{m\in\mathbb{Z}_+}$, то X имеет базис при выполнении следующих двух условий:

($\underline{DN}$) : $\forall m \in \mathbb{Z}_+\ \exists \lambda \in (0,1)\ \ \exists l \in \mathbb{Z}_+\ \ \exists c_m > 0\ \forall x \in X$

$$|||x|||_m \leqslant c_m |||x|||_0^{\lambda} \cdot |||x|||_l^{1-\lambda};$$

($\tilde{\Omega}$): существует ограниченное множество $B \subseteq X$ такое, что $\forall m \in \mathbb{Z}_+$ и $\forall \mu \in (0,1)$ существуют числа $l \in \mathbb{Z}_+$ и $c'_{m,\mu} > 0$ такие, что

$$||L||'_l \leqslant c'_{m,\mu} ||L||'^{\mu}_m \ \cdot\ ||L||'^{1-\mu}_B,$$

где

$$||L||'_m = \sup\{|L(x)| : |||x|||_m \leqslant 1\},\ ||L||'_B = \sup\{|L(x)| : x \in B\},\ L \in X'.$$

Отметим, что если числа μ и ρ таковы, что $1 < \mu \leqslant \rho$, $\Phi = \{\varphi_m\}_{m=1}^{\infty}$ – совокупность выпуклых функций в $\mathbb{C}^n$, удовлетворяющих условиям i_1), i_2), то пространство Фреше

$E(\Phi)$ – сепарабельное. Это следует из того, что полиномы плотны в $E(\Phi)$ [8]. Кроме того, по теореме 2 пространство $E(\Phi)$ – ядерное.

Рассмотрим проблему базиса в $E(\Phi)$ для случая, когда система Φ состоит из выпуклых в $\mathbb{C}^n$ функций φ_m таких, что при $\|z\| \ge R$ (где $R \ge 0$ – некоторое число) функции φ_m имеют вид:

$$\varphi_m(z) = \varphi(z) + \frac{h(\|z\|)}{m},$$

где φ – выпуклая функция в $\mathbb{C}^n$, удовлетворяющая условию: существуют положительные числа $A_\varphi, B_\varphi, C_\varphi, D_\varphi$ такие, что

$$C_\varphi \|z\|^\mu - D_\varphi \leqslant \varphi(z) \leqslant A_\varphi ||z||^\rho + B_\varphi \ , \ z \in \mathbb{C}^n,$$

$h \in C[0, +\infty)$ – неубывающая положительная функция такая, что:

a) $\lim\limits_{r \to +\infty} \dfrac{h(r)}{\ln(1+r)} = +\infty$;

b) $\forall b > 1 \ \ h(br^{\frac{\rho-1}{\mu-1}}) = O(h(r)), \quad r \to +\infty$;

c) $h(\|z\|) = O(\varphi(z)), \ z \to \infty$.

Отметим, что в случае $1 < \mu < \rho$ условие $b)$ можно поменять на условие: $h(t^2) = O(h(t)), \quad t \to +\infty$.

В данных предположениях о системе Φ имеет место

Теорема 3. *В пространстве $E(\Phi)$ существует базис.*

Доказательство. Для семейства Φ функций φ_m условие $(\underline{DN})$ выполнено. Действительно, пусть $f \in E(\Phi)$. Пусть m – произвольное натуральное число. Для любых $\lambda \in (0,1)$ и $l \in \mathbb{N}$

$$\frac{|f(z)|}{e^{\varphi_m(z)}} = \frac{|f(z)|^\lambda}{e^{\lambda \varphi_1(z)}} \cdot \frac{|f(z)|^{1-\lambda}}{e^{(1-\lambda)\varphi_l(z)}} \cdot \frac{e^{\lambda \varphi_1(z) + (1-\lambda)\varphi_l(z)}}{e^{\varphi_m(z)}}.$$

Отсюда $\forall f \in E(\Phi)$

$$\|f\|_{\varphi_m} \leqslant \|f\|_{\varphi_1}^\lambda \cdot \|f\|_{\varphi_l}^{1-\lambda} \cdot \exp(\sup_{z \in \mathbb{C}^n} (\lambda \varphi_1(z) + (1-\lambda)\varphi_l(z) - \varphi_m(z))).$$

Так как

$$\sup_{\|z\| \ge R} (\lambda \varphi_1(z) + (1-\lambda)\varphi_l(z) - \varphi_m(z)) = \sup_{\|z\| \ge R} \left(\left(\lambda + \frac{1-\lambda}{l} - \frac{1}{m} \right) h(z) \right),$$

то можно выбрать $\lambda \in (0,1)$ и $l \in \mathbb{N}$ так, что правая часть равенства будет конечна. Пользуясь непрерывностью функций $\varphi_1, \varphi_m, \varphi_l$ в $\mathbb{C}^n$, окончательно получаем

$$\sup_{z \in \mathbb{C}^n} (\lambda \varphi_1(z) + (1-\lambda)\varphi_l(z) - \varphi_m(z)) < \infty.$$

Итак, найдутся числа $\lambda \in (0,1), \ l \in \mathbb{N}, \ c_m > 0$ такие, что

$$\|f\|_{\varphi_m} \leqslant c_m \|f\|_{\varphi_1}^\lambda \cdot \|f\|_{\varphi_l}^{1-\lambda}, \quad f \in E(\Phi).$$

Проверим выполнение условия $(\tilde{\Omega})$. Для $g \in H(\mathbb{C}^n)$ положим

$$\|g\|_\varphi = \sup_{z \in \mathbb{C}^n} \frac{|f(z)|}{e^{\varphi(z)}}, \ ||g||_\infty = \sup_{z \in \mathbb{C}^n} \frac{|g(z)|}{e^{\varphi^*(z)}}.$$

Для $F \in E^*(\Phi)$ пусть

$$||F||'_m = \sup_{\|f\|_{\varphi_m} \leqslant 1} |(F,f)|, \ ||F||'_\infty = \sup_{\|f\|_\varphi \le 1} |(F,f)|.$$

Положим $B = \{f \in H(\mathbb{C}^n) : \|f\|_\varphi \le 1\}$. Очевидно, B – ограниченное множество в $E(\Phi)$. Кроме того, $||L||'_B = ||L||'_\infty, \ L \in E'(\Phi)$.

Заметим, что $\forall k \in \mathbb{N} \;\; \exists l \in \mathbb{N} \;\; \exists c_k > 0$:

$$||F||'_l \leqslant c_k ||\hat{F}||_k, \quad F \in E^*(\Phi). \tag{6}$$

Действительно, пусть $k \in \mathbb{N}$. Рассмотрим множество

$$W = \{g \in P(\Phi^*) : ||g||_k \leqslant 1\}.$$

Оно ограничено в $P(\Phi^*)$. Пусть $W' = \{F \in E^*(\Phi) : \hat{F} \in W\}$. В силу изоморфизма между $E^*(\Phi)$ и $P(\Phi^*)$ множество W' ограничено в $E^*(\Phi)$. Тогда найдутся числа $l \in \mathbb{N}$ и $c_k > 0$ такие, что

$$||F||'_l \leqslant c_k, \; \forall F \in W'. \tag{7}$$

В противном случае, для дюбого $j \in \mathbb{N}$ найдется функционал $F_j \in W'$ такой, что $||F_j||'_j > j$. Следовательно, найдутся функции $f_j \in E(\Phi)$ такие, что $\|f_j\|_{\varphi_j} \leqslant 1$ и $|(F_j, f_j)| > j$. Пусть

$$\psi_j(z) = \frac{f_j(z)}{\sqrt{j} \cdot \|f_j\|_{\varphi_j}}, \quad j \in \mathbb{N}.$$

Поскольку для $f \in E(\Phi)$ при любом $m \in \mathbb{N}$ $\|f\|_{\varphi_m} \leqslant \|f\|_{\varphi_{m+1}}$, то $||\psi_j||_{\varphi_m} \to 0$ при $j \to \infty$. Итак, $\psi_j \to 0$ в $E(\Phi)$. Таким образом, множество $\mathcal{B} = \{\psi_1, \psi_2, ...\}$ ограничено в $E(\Phi)$. Так как W' – ограниченное множество в $E^*(\Phi)$, то найдется число $\lambda > 0$, такое, что $W' \subset \lambda \mathcal{B}^0$, где $\mathcal{B}^0$– поляра множества $\mathcal{B}$ в $E'(\Phi)$. Таким образом, для любого $F \in W'$ и для любого $\psi \in \mathcal{B} \quad |(F, \psi)| \leqslant \lambda$. Между тем, для $\psi_j \in \mathcal{B}$ и $F_j \in W'$ $(F_j, \psi_j) \to \infty$ при $j \to \infty$, так как

$$|(F_j, \psi_j)| = \frac{|(F_j, f_j)|}{\sqrt{j}\|f_j\|_{\varphi_j}} \geq \sqrt{j}.$$

Получено противоречие. Значит, неравенство (7) справедливо. А из него немедленно получаем неравенство (6). Принимая ещё во внимание, что $\forall F \in E'(\Phi)$

$$||\hat{F}||_m \leqslant ||F||'_m, \quad ||\hat{F}||_\infty \leqslant ||F||'_\infty,$$

выводим, что для доказательства условия $(\tilde{\Omega})$ достаточно показать, что $\forall m \in \mathbb{N}$ и $\forall \mu \in (0,1)$ существуют числа $l' \in \mathbb{N}$ и $c^*_m > 0$ такие, что $\forall F \in E'(\Phi)$

$$||\hat{F}_{l'}|| \leqslant c^*_m ||\hat{F}||^\mu_m \cdot ||\hat{F}||^{1-\mu}_\infty.$$

Это будет так, если докажем, что $\forall m \in \mathbb{N}$ и $\forall \mu \in (0,1)$ найдутся числа $l' \in \mathbb{N}$ и $A_{\mu,m} > 0$ такие, что

$$\mu\varphi^*_m(z) + (1-\mu)\varphi^*(z) \leqslant \varphi^*_{l'}(z) + A_{\mu,m}$$

или эквивалентно

$$\mu(\varphi^*(z) - \varphi^*_m(z)) \geq \varphi^*(z) - \varphi^*_{l'}(z) - A\mu, m. \tag{8}$$

По лемме 2 найдется число $\gamma > 0$ такое, что для любого $m \in \mathbb{N}$ при некотором $d_m > 0$ для всех $z \in \mathbb{C}^n$

$$||\xi_m(z)|| > \gamma ||z||^{\frac{1}{\rho-1}} - d_m.$$

Выберем число $r \geq \max(1, (\frac{2d_m}{\gamma})^{\rho-1})$ так, что $||\xi_m(z)|| \geq R$, если $\|z\| \geq r$. Для любого $m \in \mathbb{N}$ и всех $z \in \mathbb{C}^n$ с $||z|| \geq r$

$$\varphi^*(z) - \varphi^*_m(z) \geq \varphi_m(\xi_m(z)) - \varphi(\xi_m(z)) = \frac{1}{m} h(||\xi_m(z)||) \geq$$

$$\geq \frac{1}{m} h(\gamma ||z||^{\frac{1}{\rho-1}} - d_m) \geq \frac{1}{m} h\left(\frac{\gamma}{2} ||z||^{\frac{1}{\rho-1}}|\right).$$

Пусть $\xi(z)$ – точка, в которой достигается точная верхняя грань функции $v(\xi) = Re < z, \xi > -\varphi(\xi)$. При некотором $K > 0$ (оно найдётся по лемме 1) для любого $l' \in \mathbb{N}$ и любого $z \in \mathbb{C}^n$ с $||z|| \geq r$

$$\varphi^*(z) - \varphi^*_{l'}(z) \leqslant \varphi_{l'}(\xi(z)) - \varphi(\xi(z)) = \frac{h(||\xi(z)||)}{l'} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{h(K + K||z||^{\frac{1}{\mu-1}})}{l'} \leqslant \frac{h(2K||z||^{\frac{1}{\mu-1}})}{l'}.$$

В силу условия b) на функцию h найдутся числа $a_{K,\gamma} > 0$ и $b_{k,\gamma} > 0$ такие, что

$$a_{K,\gamma} h\left(2Kx^{\frac{1}{\mu-1}}\right) \leqslant h\left(\frac{\gamma}{2} x^{\frac{1}{\rho-1}}\right) + b_{K,\gamma}, \quad x \geq 0.$$

Для произвольно взятых $\mu \in (0,1)$ и $m \in \mathbb{N}$ положим $l' = [\frac{m}{a_{K,\gamma} \cdot \mu}] + 1$. Тогда для $z \in \mathbb{C}^n$ таких, что $||z|| \geq r$

$$\mu(\varphi^*(z) - \varphi_m^*(z)) \geq \frac{\mu}{m} h\left(\frac{\gamma}{2}||z||^{\frac{1}{\rho-1}}\right) \geq \frac{\mu}{m}(a_{K,\gamma} h(2K\|z\|^{\frac{1}{\mu-1}}) - b_{K,\gamma}) \geq$$

$$\geq \frac{a_{K,\gamma} \cdot \mu \cdot l'}{m}(\varphi^*(z) - \varphi_{l'}^*(z)) - \frac{\mu b_{K,\gamma}}{m} \geq \varphi^*(z) - \varphi_{l'}^*(z) - \frac{\mu b_{K,\gamma}}{m}.$$

В силу непрерывности функций $\varphi^*, \varphi_m^*, \varphi_{l'}^*$ можно найти постоянную $A_{\mu,m} > 0$ такую, что всюду в $\mathbb{C}^n$

$$\mu(\varphi^*(z) - \varphi_m^*(z)) \geq \varphi^*(z) - \varphi_{l'}^*(z) - A_{\mu,m}.$$

Итак, неравенство (8) получено. Значит, условие $(\tilde{\Omega})$ выполнено.

Теорема 3 доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ehrenpreis L. *Fourier analysis in several complex variables.* New York: Wiley-Interscience publishers, 1970. 506 p.
2. Напалков В.В. *Уравнения свертки в многомерных пространствах.* М.: Наука. 1982. 240 с.
3. Кривошеев А.С., Напалков В.В. *Комплексный анализ и операторы свертки* // УМН. Т. 47. выпуск 6(288). 1992. С. 3-58.
4. Ткаченко В.С. *Об операторах, коммутирующих с обобщенным дифференцированием в пространствах аналитических функционалов с заданным индикатором роста* // Матем. сб. Т. 102. № 3. 1977. С. 435-456.
5. Попёнов С.В. *О весовом пространстве функций, аналитических в неограниченной выпуклой области в* $\mathbb{C}^m$ // Матем. заметки. Т. 40. № 3. 1986. С. 374-384.
6. Haslinger F. *Weighted spaces of entire functions* // Indiana Univ. Math. J. 1986. V. 35. P. 193-208.
7. Hansen S. *Localizable analytically uniform spaces and the fundamental principle* // Transactions of the AMS. V. 264. № 1. 1981. P. 235-250.
8. Ахтямов Н.Т. *О весовом пространстве целых функций в* $\mathbb{C}^n$ // Матем. заметки. Т. 83. вып. 4. 2008. С. 483–492.
9. Рокафеллар Р. *Выпуклый анализ.* М.: Мир. 1973. 472 с.
10. Себаштьян-и-Сильва Ж. *О некоторых классах локально выпуклых пространств, важных в приложениях* // сб. пер. Математика. 1957. Т. 1, № 1. С. 60-77.
11. Гельфанд И.М., Виленкин Н.Я. *Некоторые применения гармонического анализа. Оснащённые гильбертовы пространства.* М.: Государственное издательство физико-математической литературы. 1958. 472 с.
12. Митягин Б.С. *Аппроксимативная размерность и базисы в ядерных пространствах* // УМН. Т. 16. № 4. 1961. С. 63-132.
13. Кондаков В.П. *Замечания о существовании безусловных базисов в весовых счетно-гильбертовых пространствах и их дополняемых подпространствах* // Сиб. матем. журн. Т. 42. № 6. 2001. С. 1300–1313.
14. Пич А. *Ядерные локально выпуклые пространства.* М.: Мир. 1967. 266 с.
15. Зобин Н.М., Митягин Б.С. *Примеры ядерных метрических пространств без базисов* // Функцион. анализ и его прил. Т. 8, № 4. 1974. С. 304-313
16. Митягин Б.С., Хенкин Г.М. *Линейные задачи комплексного анализа* // УМН. 1971. Т. 26. № 4. С. 93-152.

17. Vogt D. *Eine Charakterisierung der Potenzreihenraume von endlichem Typ und ihre Folgerungen* // Manuscripta Math. 1982. V. 37. № 3. V. 269-301.

Наиль Тагирович Ахтямов,
Уфимский филиал Самарского государственного
университета путей сообщения,
ул. К. Маркса, 50,
450077, г. Уфа, Россия
E-mail: nail9119@rambler.ru

Ильдар Хамитович Мусин
Институт математики с ВЦ УНЦ РАН,
ул.Чернышевского, 112,
450077, г. Уфа, Россия
E-mail: musin@matem.anrb.ru