МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РФ
БАШКИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ С ВЦ УФИЦ РАН
АКАДЕМИЯ НАУК РЕСПУБЛИКИ БАШКОРТОСТАН

КОМПЛЕКСНЫЙ АНАЛИЗ И ТЕОРИЯ АППРОКСИМАЦИЙ

Сборник тезисов Международной конференции (Уфа, 29 – 31 мая 2019 г.)

**Уфа
РИЦ БашГУ
2019**

УДК 51
ББК 22.1
К63

Сборник издан при финансовой поддержке
Академии наук Республики Башкортостан

К63 **Комплексный анализ и теория аппроксимаций:** сборник тезисов Международной конференции (г. Уфа, 29 – 31 мая 2019 г.) / отв. ред. З.Ю. Фазуллин. – Уфа: РИЦ БашГУ, 2019. – 52 с.
ISBN 978-5-7477-4891-0

Представленные в сборнике тезисы посвящены исследованиям по теории функций комплексного переменного и вопросам аппроксимации функций на множествах комплексной плоскости.

Тезисы докладов воспроизводятся с представленных авторами оригиналов.

УДК 51
ББК 22.1

ISBN 978-5-7477-4891-0

BASHKIR STATE UNIVERSITY
INSTITUTE OF MATHEMATICS
WITH COMPUTING CENTRE OF UFRC OF RAS
ACADEMY OF SCIENCES
OF THE REPUBLIC OF BASHKORTOSTAN

«COMPLEX ANALYSIS AND APPROXIMATION THEORY»

Book of abstracts
of the International Conference
May 29 - 31, 2019

UFA – 2019

UDC 51
BBK 22.1

The Conference is sponsored
by Academy of Sciences of the Republic of Bashkortostan

International Mathematical Conference «Complex Analysis and Approximation Theory». Book of Abstracts.
Ufa, Russia: RITS BashSU, 2019. – 52 p.
ISBN 978-5-7477-4891-0

The abstracts presented in the collection are devoted to research in the theory of functions of complex variable and questions of the approximation of functions on sets of the complex plane.

Abstracts are reproduced from the originals submitted by the authors.

UDC 51
BBK 22.1

ISBN 978-5-7477-4891-0

Содержание

Эквивалентность норм аналитических функций на внешности выпуклой области

Абузярова Н. Ф., Исаев К. П., Юлмухаметов Р. С.
Институт математики с ВЦ УНЦ РАН, Башкирский государственный университет, г.Уфа, Россия

Пусть D — ограниченная односвязная жорданова область на комплексной плоскости, и $G = \mathbb{C} \setminus \overline{D}$. Через $d(\zeta)$, $\zeta \in G$, обозначим расстояние от точки ζ до границы D :

$$d(\zeta) = \text{dist }(\zeta, \partial D) = \inf_{z \in \partial D} |\zeta - z|, \quad \zeta \in G.$$

Пусть $H_0(G)$ — пространство функций, аналитических в G и исчезающих в бесконечности. Для $\alpha > -\frac{1}{2}$ через $B_2^\alpha(G)$ обозначим пространство, состоящее из функций $\gamma \in H_0(G)$, для которых конечна норма

$$\|\gamma\|_\alpha = \left(\int\limits_G |\gamma(\zeta)|^2 d^{2\alpha}(\zeta)\, dv(\zeta) \right)^{\frac{1}{2}},$$

где $dv(\zeta)$ — элемент площади. Для $\alpha = -\frac{1}{2}$ пространство $B_2^\alpha(G)$ будем отождествлять с пространством Смирнова. Считая без потери общности, что $0 \in D$, пространство Смирнова $E_2(G)$ можно определить как пополнение пространства:

$$\left\{ p(\zeta) \text{ – полином}: \ p(0) = 0, \quad \int\limits_{\partial G} \left| p\left(\frac{1}{\zeta}\right) \right|^2 ds(\zeta) < \infty \right\},$$

где $ds(\zeta)$ — элемент длины дуги границы. Введем натуральное число n и через $B_2^{(n,\alpha)}(G)$ обозначим пространство функций $\gamma \in H_0(G)$, для которых $\gamma^{(n)} \in B_2^\alpha(G)$. В пространстве $B_2^{(n,\alpha)}(G)$ рассматривается норма $\|\gamma\|_{n,\alpha} = \|\gamma^{(n)}\|_\alpha$.

Основным результатом данной работы является следующая теорема.

Теорема. *Пусть D — ограниченная выпуклая область, содержащая точку 0. Если $\alpha > -\frac{1}{2}$, то существуют постоянная $C(\alpha) > 0$, не зависящая от области D и такая, что*

$$\sqrt{\frac{(\alpha+1)(2\alpha+1)}{2}} \|\gamma\|_{n,\alpha} \le \|\gamma\|_{n+1,\alpha+1} \le C(\alpha) \|\gamma\|_{n,\alpha}.$$

Для $\alpha = -\frac{1}{2}$ существуют постоянная $C(n) > 0$, зависящая от области D и такая, что

$$\frac{1}{2} \|\gamma\|_{n,-\frac{1}{2}} \le \|\gamma\|_{n+1,\frac{1}{2}} \le C(n) \|\gamma\|_{n,-\frac{1}{2}}.$$

Тем самым, пространства $B_2^{(n+1,\alpha+1)}(G)$ *и* $B_2^{(n,\alpha)}(G)$ *совпадают и нормы в них эквивалентны.*

В частных случаях теорема доказана в работах [1], [2].

Работа первого автора поддержана РНФ (проект 18-11-00002), работа второго и третьего авторов поддержана РФФИ (проект 18-01-00095 А).

[1] Луценко В.И., Юлмухаметов Р.С. "Теорема Пэли-Винера в пространствах Смирнова", Тр. МИАН, 200 (1991). С. 245–254.

[2] Напалков В.В.(мл.), Юлмухаметов Р.С. "О преобразовании Коши функционалов на пространстве Бергмана", Математический сборник, 185:7 (1994). С. 77–86.

On the surjectivity of convolution operators on weighted spaces of functions holomorphic in bounded convex domains

Andreeva T.M.

Southern federal university

Let G be a domain in $\mathbb{C}$ and $H(G)$ the space of all holomorphic functions in G. For a continuous function (a weight) $v : G \to \mathbb{R}$ define the Banach space $H_v(G) := \left\{ f \in H(G) : ||f||_v := \sup\limits_{z\in G} |f(z)|e^{-v(z)} < \infty \right\}$. For an increasing sequence of weights $V = (v_n)$ define the inductive limit $\mathcal{V}H(G) := \mathrm{ind}H_{v_n}(G)$.

Let μ be an analytic functional on $\mathbb{C}$ carried by a convex compact set K. With some restrictions on weight sequence which are equal to those used by V.V. Napalkov [1] we study the continuity and surjectivity problem of the convolution operator $\mu * f(z) : f \mapsto \mu_w f(z+w)$ that maps $\mathcal{V}H(G+K)$ into (onto) $\mathcal{V}H(G)$. We establish the surjectivity criteria for convolution operator in terms of its Laplace (Fourier-Borel) transform $\hat{\mu}(\zeta) := \mu_z e^{\langle z \cdot \rangle}$ via the appropriate description of functional weighted spaces that are conjugated to $\mathcal{V}H(G+K)$ and $\mathcal{V}H(G)$.

The main results are the following:

1) We obtain a criterion of continuity for the convolution operator $\mu* : \mathcal{V}H(G+K) \to \mathcal{V}H(G)$;

2) We establish a functional criterion of surjectivity for convolution operator in terms of the closure of an image of the multiplication operator $f \mapsto \hat{\mu} f$ that is conjugate to $\mu*$;

3) For the case $v_n(z) = n|z|^\alpha, \alpha > 0$ we find out the criterion of surjectivity for convolution operator in terms of regular growth of $\hat{\mu}$ (the lower estimate on $|\hat{\mu}|$ outside some exceptional sets).

Similar research was presented in [2] for the spaces of functions that are holomorphic in convex domains and have a polynomial growth near the boundary (the weight sequence $v_n(z) = n\ln(1+|z|)$).

The research was supported by the Presidential Program for Support of Young Candidates of Sciences under grant MC-1056.2018.1 (Agreement № 075-02-2018-433).

[1] Napalkov V. V. Spaces of analytic functions of prescribed growth near the boundary //Math. USSR-Izv., 30:2 (1988), 263–281.

[2] Abanin A. V., Ishimura R., Khoi L. H. Convolution operators in $A^{-\infty}$ for convex domains //Arkiv för matematik. - 2012. - T. 50. - № 1. - P. 1–22.

Levelling algorithm for the approximation by sums of two compositions

Asgarova A.Kh.

Institute of Mathematics and Mechanics of NAS of Azerbaijan, Baku, Azerbaijan

Let Q be a compact subset of the space $\mathbb{R}^d$. Fix two continuous maps $s : Q \to \mathbb{R}$, $p : Q \to \mathbb{R}$ and consider the following algebras of functions

$$D_1 = f(s(x)) : f \in C(\mathbb{R}),$$
$$D_2 = g(p(x)) : g \in C(\mathbb{R}),$$

and the sum

$$D = D_1 + D_2.$$

Not that the space D, in particular cases, turn into sums of univariate functions, sums of two ridge functions, sums of two radial functions, etc.

We are going to deal with the problem of approximating of a continuous functions $h : Q \to \mathbb{R}$ using functions from the space D. By the $s(Q)$ and $p(Q)$ we will denote the images of Q under the mappings s and p respectively. Define the following operators

$$F : C(Q) \to D_1, \quad Fh(a) = \frac{1}{2}\left(\max_{\substack{x\in Q\\ s(x)=a}} h(x) + \min_{\substack{x\in Q\\ s(x)=a}} h(x)\right), \text{ for all } a \in s(Q),$$

$$G : C(Q) \to D_2, \quad Gh(b) = \frac{1}{2}\left(\max_{\substack{x\in Q\\ p(x)=b}} h(x) + \min_{\substack{x\in Q\\ p(x)=b}} h(x)\right), \text{for all } b \in p(Q).$$

In the sequel, we need that the above max and min functions be continuous.

Consider the iteration

$$h_1(x) = h(x),\ h_{2n} = h_{2n-1} - Fh_{2n-1},\ h_{2n+1} = h_{2n} - Gh_{2n},\ n = 1, 2, ...,$$

Our main result is the following theorem.

Theorem 1. *Assume that max and min functions are continuous and D is closed in C(Q). Then $\|h_n\|$ converges to the error of approximation $E(h)$.*

On sums of ridge functions with two fixed directions

Asgarova A.Kh., Babayev A.M-B., Maharov I.K.

Institute of Mathematics and Mechanics of NAS of Azerbaijan, Baku, Azerbaijan

In modern approximation theory, ridge functions play an essential role. A *ridge function* is a multivariate function of the form

$$G(\mathbf{x}) = g\left(\mathbf{a} \cdot \mathbf{x}\right) = g\left(a_1 x_1 + \ldots + a_d x_d\right),$$

where $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ and $\mathbf{a} = (a_1, ..., a_d)$ is a fixed vector (direction) in $\mathbb{R}^d \setminus \{\mathbf{0}\}$.

Consider the following set of functions

$$\mathcal{R} = \mathcal{R}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \left\{g_1(\mathbf{a} \cdot \mathbf{x}) + g_2(\mathbf{b} \cdot \mathbf{x}) :\ g_i \in C(\mathbb{R}),\ i = 1, 2\right\}.$$

That is, we fix directions $\mathbf{a}$ and $\mathbf{b}$ and consider linear combinations of ridge functions with these directions.

Let $f\left(\mathbf{x}\right)$ be a given continuous function on some compact subset Q of $\mathbb{R}^d$. We want to obtain a formula for computation of the approximation error

$$E\left(f\right) = E(f, \mathcal{R}) \overset{def}{=} \inf_{g \in \mathcal{R}(\mathbf{a}, \mathbf{b})} \|f - g\|.$$

We associate a closed path $p = (\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, ..., \mathbf{p}_{2n})$ with the functional

$$G_p(f) = \frac{1}{2n} \sum_{k=1}^{2n} (-1)^{k+1} f(\mathbf{p}_k).$$

Theorem 1. *Let $Q \subset \mathbb{R}^d$ be a convex compact set and $f \in C(Q)$. Assume there exists an extremal element $g_0 \in \mathcal{R}\left(\mathbf{a}, \mathbf{b}\right)$ for any function in $C(Q)$.*

Then the approximation error can be computed by the formula

$$E\left(f\right) = \sup_{p \subset Q} \left|G_p(f)\right|,$$

where the sup is taken over all closed paths.

On the periodic separable cubic stochastic operator

Baratov B.S.

Karshi State University, Karshi city, Uzbekistan

The purpose of this paper is to investigate a class of separable cubic stochastic operators. Each separable cubic stochastic operator (SCSO) depends on two quadratic matrices A and B which have some relations. In this paper we proved that for each skew symmetric matrix A the corresponding SCSO is a linear operator. As a result, if the population status is the situtìon, the next generation status will be as follows. A lot of sums are done with theory of border and dynamical systems.We call following

$$S^{n-1} = \{x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in R^n : x_i \geq 0, \sum_{i=1}^{n} x_i = 1\}, \tag{1}$$

S^{n-1} set $n-1$ measure.

We consider the form of operator:

$$W : \begin{cases} x' = y(x+y)^2 \\ y' = x(x+y)^2 \end{cases} \tag{2}$$

It is right here, that is to say that, let is use $x + y = 1$,it will be line (2). The reason for this, A and C are the same.

This operator $W(x, y) = (y, x)$ that is, the coordinate of the optional pa'nt is replaced by a linear operator. Its dynamics are clear, each point has a period of 2, that is once the coordinates are replaced by a new one and will switch back to the next swap.The dynamics of (2) separable cubic stochastic operators are as follows: $x + y = 1$, $y = 1 - x$ and reduce the number of nominees.

We define the operator's fixed points.

$$W(x) = x, Fix(W) = \{x \in S^1 : W(x) = x\}$$

[1] U. A. Rozikov and S. Nazir, Separable Quadratic Stochastic Operators, Lobschevskii J. Math. 3, pp 215 (2010).

[2] U. A. Rozikov and A. Zada on a cllas of Separable Quadratic Stochastic Operators, Lobschevskii J. Math. 3, pp 32 (2011).

[3] Baratov B.S. On the separable cubic stochastic operators UFA 2019 , pp.19 (2019)

On the Noetherness of the Riemann problem in weighted Smirnov classes with general weight

Bilalov B.T.
Institute of Mathematics and Mechanics of NAS of Azerbaijan, Baku, Azerbaijan

Weighted Smirnov classes in bounded and unbounded domains are defined in this work. Homogeneous and nonhomogeneous Riemann problems with a measurable coefficient whose argument is a piecewise continuous function are considered in these classes. In case of homogeneous problem, a sufficient condition on general weight function is found which is satisfied by Muckenhoupt class weights, and the general solution of this problem is constructed. In case of nonhomogeneous problem, a Muckenhoupt type condition is imposed on the weight function and the orthogonality condition is found for the solvability of nonhomogeneous problem in weighted Smirnov classes, and the formula for the index of the problem is derived. Some special cases with power type weight function are also considered, and conditions on degeneration order are found.

[1] B.T. Bilalov, Basis properties of some exponential, sine and cosine systems. Sibirski matem. Jurnal, **45(2)** (2004), 264-273 (in Russian).

[2] B.T. Bilalov, Basis properties of power systems in L_p. Sibirski matem. Jurnal. **47(1)** (2006), 1-12 (in Russian).

[3] B.T. Bilalov, On solution of the Kostyuchenko problem. Siberian Mathematical Journal. **53:3** (2012), 509-526.

[4] T.I. Najafov, N.P. Nasibova, On the Noetherness of the Riemann problem in a generalized weighted Hardy classes. Azerbaijan Journal of Mathematics. **5(2)** (2015), 109-139.

[5] B.T. Bilalov, T.B. Gasymov, A.A. Guliyeva, On solvability of Riemann boundary value problem in Morrey-Hardy classes. Turk. J. of Math. **40(50)** (2016), 1085-1101.

[6] Z. Meshveliani, The Riemann–Hilbert problem in weighted Smirnov classes of analytic functions. Proc. Razmadze Math. Inst. **137** (2005), 65-86.

[7] S.R. Sadigova, A.E. Guliyeva, On the Solvability of RiemannвЂ“Hilbert Problem in the Weighted Smirnov Classes. Analysis Mathematica, **44(4)** (2018), 587вЂ“603.

Формула для регуляризованного следа оператора Штурма-Лиувилля с логарифмическим потениалом

Валиуллина Л.Г.

Башкирский государственный университет, г.Уфа, Россия

В работе [1] было получено асимптотическое уравнение для спектра L, потенциал которого может расти сколь угодно медленно. Это уравнение позволяет вычислить первые несколько (с точностью до суммируемого остатка) членов асимптотического ряда для собственных значений в случае $q = \underbrace{\log \ldots \log}_{m} x,\ m \in \mathbb{N},\ a = \mathrm{const} > \begin{cases} e^{m-2}, & m \geq 2, \\ 0, & m = 1. \end{cases}$

В частности, когда $q = \log(x+a), \quad \lambda_k = s_k + O\left(k^{-1}(\log k)^{-3/2}\right),$

$$s_k \quad = \quad \log(2\sqrt{\pi}k) - k^{-1}\left(\frac{a}{\pi}\sqrt{\log k} + k_0 - 1/4 + \frac{c_0}{\sqrt{\log k}}\right),$$

где $c_0 = \dfrac{a}{2\pi}\left(1 + \log(2\sqrt{\pi}/a)\right)$. Параметр k_0 - это некоторое натуральное число (дефект регуляризации), обеспечивающее сходимость ряда

$$\sum_{k=2}^{\infty} (\lambda_k - s_k)\,. \tag{1}$$

В данной работе найдено значение k_0 и вычислена сумма ряда (1), которая называется регуляризованным следом оператора L_a с потенциалом $q = \log(x+a)$.

Теорема *Справедлива следующая формула*

$$\begin{aligned} \sigma \quad &= \quad \frac{1}{4}\left(\log\left(2\sqrt{\pi}\right) + \gamma - 1 + \log a\right) - \frac{a}{\pi}\int_1^{\infty}\{x\}\left((\log x)^{1/2}x^{-1}\right)' dx \\ &- \quad \frac{a}{2\pi}\left(1 + \log\frac{2\sqrt{\pi}}{a}\right)\int_1^{\infty}\{x\}\left((\log x)^{-1/2}x^{-1}\right)' dx. \end{aligned} \tag{2}$$

[1] Л. Г. Валиуллина, Х. К. Ишкин, *Об условиях локализации спектра несамосопряженного оператора Штурма-Лиувилля с медленно растущим потениалом*, Диф. ур. Спектр. теория, Итоги науки и техники. Совр. матем. и ее прилож. Темат. обзор, **141**, ВИНИТИ, М., (2017), 48–60.

Свойства спектра одного пучка дифференциальных операторов

Гайдамак О.Г., Силова Е.В., Сагитова А.Р.
Башкирский государственный университет, г.Уфа, Россия

Для прикладных задач большой интерес представляют задачи, в которых спектральный параметр λ входит полиномиальным образом. Такие задачи называются операторными пучками. В работе рассмотрен квадратичный операторный пучек

$$L(\lambda) = A + \lambda B - \lambda^2 I. \tag{1}$$

где A - самосопряженный дифференциальный оператор, порожденный в $H = L_2(-\infty, +\infty)$ дифференциальным выражением $Ay = y^{(8)} + q(x)\,y$ с положительной функцией $q(x)$, B – самосопряженный оператор, порожденный в H выражением $By = i[p(x)\,y' + (p(x)\,y)']$, где $p(x)$ - непрерывно дифференцируемая положительная функция.

Пусть функции $p(x)$ и $q(x)$ удовлетворяют следующим условиям:

$$q(x) \to +\infty \quad \text{при} \quad |x| \to +\infty, \tag{2}$$

$$p(x) \le Cq^{\frac{3}{8}-\varepsilon_1}(x), \quad \text{где} \quad \varepsilon_1 > 0, \tag{3}$$

$$\begin{array}{l} |p(x) - p(y)| \le Cp(x)\,|x-y|, \\ |q(x) - q(y)| \le Cq^{\frac{9}{8}-\varepsilon_2}|x-y|, \end{array} \quad \text{при} \quad |x-y|\,r(y) \le 1\,, \tag{4}$$

где $r(y) = q^{\frac{1}{8}-\varepsilon_3}(y)$,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{q^{\frac{1}{4}}(x)} < \infty\,. \tag{5}$$

При выполнении этих условий спектр пучка $L(\lambda)$ дискретен, состоит из двух серий вещественных собственных значений, уходящих в $+\infty$ и $-\infty$.

Пусть $N(\lambda)$- функция распределения собственных значений пучка $L(\lambda)$.

Обозначим через $\psi(\lambda)$ функцию

$$\psi(\lambda) = \frac{1}{\pi}\int_{q(x)<\lambda^2} (\lambda^2 - q(x))^{\frac{1}{8}} dx, \quad \psi(-\lambda) = -\psi(\lambda), \ \lambda > 0.$$

Показано, что что при $\lambda \to \pm\infty$

$$N(\lambda) \sim \psi(\lambda).$$

Критическая ширина полуполос, где сумма ряда Дирихле имеет один и тот же порядок по Ритту

Гайсин А.М., Гайсина Г.А.

Институт математики с ВЦ УФИЦ РАН, Башкирский государственный университет, г.Уфа, Россия

Пусть $\Lambda = \{\lambda_n\}$ $(0 < \lambda_n \uparrow \infty)$, $\overline{\lim}_{n\to\infty} \frac{n}{\lambda_n} < \infty$, $D_0(\Lambda)$ – класс всех аналитических функций, представимых рядами Дирихле

$$F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{\lambda_n s} \quad (s = \sigma + it),$$

сходящимися лишь в полуплоскости $\Pi_0 = \{s = \sigma + it\colon\ \sigma < 0\}$.

Величина

$$\rho_s = \overline{\lim_{\sigma\to 0-}} \frac{\ln^+ \ln M_s(\sigma)}{\sigma^{-1}}, \quad M_s(\sigma) = \max_{|t-t_0|\le a} |F(\sigma + it)| \quad (\sigma < 0),$$

называется порядком (по Ритту) функции F в полуполосе $S(a, t_0) = \{s = \sigma + it\colon\ |t - t_0| \le a,\ \sigma < 0\}$.

Пусть K – класс функций $h\colon\ \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+,\ h(0) = 0,\ h(t) \uparrow \infty,\ h(t)t^{-1} \downarrow 0$ при $t \to \infty$,

$$R = \{h \in K\colon\ h(x) \ln \frac{x}{h(x)} = \mathrm{o}\left(\frac{x}{\ln x}\right),\ x \to \infty\}.$$

R-плотностью последовательности Λ называется

$$G(R) = \inf_{h\in R} \overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{\mu_\Lambda(\omega(t))}{h(t)}, \quad \omega(t) = [t,\, t + h(t)),$$

где $\mu_\Lambda(\omega(t))$ – число точек λ_n, попавших в полуинтервал $\omega(t)$. Через $D(R)$ обозначим точную нижнюю грань тех чисел b $(0 < b < \infty)$, таких, что: существует $\Gamma = \{\mu_n\}$ $(0 < \mu_n \uparrow \infty)$, $\Lambda \subset \Gamma$, причем $|M(t) - bt| \le h(t)$ $(t > 0)$ для некоторой функции $h \in R$, где $M(t) = \sum_{\mu_n \le t} 1$.

Как известно, $D(R) = G(R)$ [1].

Пусть $S_i = S(a_i, t_i) = \{s = \sigma + it\colon\ |t - t_i| \le a_i,\ \sigma < 0\}$ $(i = 1, 2)$ – полуполосы. В [2] доказано, что если последовательность Λ имеет конечную R-плотность $G(R)$, а каждая из полуполос S_1 и S_2 имеет ширину больше $2\pi G(R)$, то $\rho_1 = \rho_2$, какова бы ни была функция $F \in D_0(\Lambda)$. Здесь ρ_1 и ρ_2 – порядки функции F в S_1 и S_2 соответственно.

Возникает вопрос: когда это утверждение верно для полуполос, имеющих ширину, в точности равную $2\pi G(R)$?

Теорема. Пусть $|\Lambda(t) - bt| \le h(t) < \infty$, $\Lambda(t) = \sum_{\lambda_n \le t} 1$, причем

$$\lim_{a\to\infty} \ln a \int\limits_a^\infty \frac{N_h(x)}{x^2} dx = 0,$$

где $N_h(r) \equiv 0$ при $0 \le r \le \lambda_1$, $N_h(r) = \int_{\lambda_1}^r \frac{h(t)}{t} dt$ при $r \ge \lambda_1$. Если полуполосы S_1 и S_2 имеют ширину не меньше $2\pi b$, то для любой функции $F \in D_0(\Lambda)$ порядки ρ_1 и ρ_2 в S_1 и S_2 равны.

В данной теореме $G(R) = b$. Если одна из полуполос имеет ширину меньше, чем $2\pi b$, то теорема не верна (более подробно см. в [3]).

Обсуждаются аналогичные вопросы и для обычных порядков функции $F \in D_0(\Lambda)$ в полуполосах.

[1] Гайсин А.М., Сергеева Д.И. Оценка ряда Дирихле в полуполосе в случае нерегулярного распределение показателей II // Сиб. матем. журн. 2008. Т. 49. № 2. С. 280–298.

[2] Гайсин А.М., Аиткужина Н.Н. Порядок ряда Дирихле в полуполосе // Алгебра и анализ. 2018. Т. 30. № 4. С. 27–46.

[3] Гайсин А.М., Гайсина Г.А. Порядок ряда Дирихле с правильным распределением показателей в полуполосах // Уфимский матем. журн. 2018. Т. 10. № 4. С. 51–63.

Интерполяция и проблема неполноты системы экспонент на дугах

Гайсин Р.А.

Институт математики с ВЦ УФИЦ РАН, г.Уфа, Россия

Пусть $\Lambda = \{\lambda_n\}$ $(0 < \lambda_n \uparrow \infty)$, W — класс положительных, непрерывных и неограниченно возрастающих на $\mathbb{R}_+$ функций из класса сходимости, а Ω — подкласс W, состоящий из вогнутых функций. Как известно, при условии

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n} < \infty \tag{1}$$

система экспонент $e_\Lambda = \{e^{\lambda_n z}\}$ не полна на любом отрезке, более того, она не полна и в $C(\gamma)$, где γ — аналитическая дуга. Вопрос о справедливости этого утверждения для любой спрямляемой кривой до сих пор остается открытым (см. в [1], [2]). Если же γ — дуга ограниченного наклона с постоянной Липшица q_γ, то при выполнении более сильного чем (1) условия $n(t) \leq \omega(t)$, ω — некоторая функция из Ω ($n(t)$ — считающая функция последовательности Λ), неполнота системы e_Λ разными способами доказана: Я. Кореваром и М. Диксоном при $q_\gamma < 1$ (1979); А.М. Гайсиным при $q_\gamma < \infty$ (1991). Если же дополнительно функция

$$h_-(\delta) = \int\limits_0^\infty |L(re^{i\delta})|^{-1} e^{-\delta r} dr, \qquad L(\lambda) = \prod_{n=1}^\infty \left(1 - \frac{\lambda^2}{\lambda_n^2}\right),$$

удовлетворяет билогарифмическому условию Левинсона, то система e_Λ не полна на любой спрямляемой кривой (см. в [1]). Последний результат имеет место в предположении, равносильном для $\lambda_n \in \mathbb{N}$ интерполяционности в смысле Павлова-Коревара-Диксона, т.е. в классе мажорант из Ω (см. в [1]).

Верна

Теорема. *Если последовательность Λ является интерполяционной в классе мажорант из W, то*

$$\inf_{c_k} \left\| e^{\beta z} - \sum_k c_k e^{\lambda_k z} \right\|_\gamma = \varepsilon_\beta(\gamma, \Lambda) > 0,$$

где $\|f\|_\gamma = \max\limits_{z\in\gamma} |f(z)|$, $0 < \beta \neq \lambda_n$ $(n \geq 1)$, $\sum\limits_k c_k e^{\lambda_k z}$ — квазиполином, γ — любая спрямляемая кривая.

Актуальной является следующая задача: что можно сказать о поведении величины $\varepsilon_\beta(\gamma, \Lambda)$ при $|\gamma| \to 0$ ($|\gamma|$ — длина γ).

[1] А.М. Гайсин. Усиленная неполнота системы экспонент и проблема Макинтайра // Матем. сб. 1991. Т. 182. № 7. С. 931–945.

[2] А.М. Гайсин, Р.А. Гайсин. Неполные системы экспонент на дугах и неквазианалитические классы Карлемана. II // Алгебра и анализ. 2015. Т. 27. № 1. С. 49–73.

On the Completeness of the Classical System of Cosines in Weighted Morrey Spaces With a Power Weight

Guliyeva F.A.

Institute of Mathematics and Mechanics of NAS of Azerbaijan, Baku, Azerbaijan

In this work the problem of the completeness of the classical system of cosines is considered in a weighted Morrey spaces with a power weight.

These spaces, generally speaking, are not separable. Therefore, classical trigonometric systems are not complete in these spaces. A sufficient condition on the weight function is found, under which the cosine system is complete in this subspace.

The following theorem on the completeness of system of cosines in weighted Morrey spaces is proved.

Theorem 1. *The system* $\{\cos nt\}_{n\in \mathrm{N}_0}$ *($\mathbb{N}_0$ is the set of nonnegative integers) is complete in* $M_{\nu}^{p,\lambda}(0,\pi)$, $0<\lambda<1$, $1<p<+\infty$, *if conditions*

$$\alpha_0; \alpha_r \in \left(-\frac{1-\lambda}{p}, -\frac{1-\lambda}{p}+1\right),$$

$$\alpha_k \in \left[-\frac{1-\lambda}{p}, -\frac{1-\lambda}{p}+1\right), k=\overline{1, r-1},$$

are satisfied. Here the weight function $\nu(\cdot)$ *is defined as*

$$\nu(t)=\prod_{k=0}^{r}|t-t_k|^{\alpha_k}, \quad t\in[-\pi,\pi],$$

and $t_0=0, t_r=\pi$, *and* t_k *are arbitrary finite points in the interval* $(0,\pi)$ *for all* $k=1,2,...,r-1$, *and* $\alpha_k \in \mathrm{R}$ *for all* $k=0,1,...,r$.

Асимптотические разложения определителя Фредгольма для семейства 2×2-операторных матриц

Дилмуродов Э.Б.

Бухарский государственный университет, г. Бухара, Узбекистан

Пусть $\mathbb{T}^3 :\equiv (-\pi;\pi]^3$ – трехмерный тор, $\mathcal{H}_0 := \mathbb{C}$ – одномерное комплексное пространство и $\mathcal{H}_1 := L_2(\mathbb{T}^3)$ гильбертова пространство квадратично- интегрируемых (комплексно-значных) функций, определенных на $\mathbb{T}^3$. Положим $\mathcal{H} := \mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1$.

Рассмотрим семейства 2×2-операторных матриц $\mathcal{A}_\mu(k)$ действующих в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ как

$$\mathcal{A}_\mu(k) := \begin{pmatrix} A_{00}(k) & \mu A_{01} \\ \mu A_{01}^* & A_{11}(k) \end{pmatrix},$$

где матричные элементы определяются по формулам

$$A_{00}(k)f_0 = w_0(k)f_0, \quad A_{01}f_1 = \int_{\mathbb{T}^3} f_1(t)dt, \quad (A_{11}(k)f_1)(p) = w_1(k,p)f_1(p).$$

Здесь $f_i \in H_i$, $i = 0, 1$; $\mu > 0$, а функции $w_0(\cdot)$ и $w_1(\cdot)$ имеют вид

$$w_0(k) := \sum_{i=1}^{3}(3 - \cos\, k_i),\ w_1(k,p) := \sum_{i=1}^{3}(3 - \cos p_i - \cos(1/2(k_i + p_i)) - \cos k_i),$$

Пусть $m(k) := \min\limits_{p \in \mathbb{T}^3} w_1(k,p)$ и $M(k) := \max\limits_{p \in \mathbb{T}^3} w_1(k,p)$. Определим регулярную в $\mathbb{C} \setminus [m(k); M(k)]$ функцию

$$\Delta_\mu(k\,; z) := w_0(k) - z - \mu^2 \int_{\mathbb{T}^3} \frac{dt}{w_1(k,t) - z}, \quad k \in \mathbb{T}^3,$$

Положим

$$\overline{0} := (0,0,0), \quad \overline{\pi} := (\pi,\pi,\pi), \quad \mu_0 := \sqrt{6}\left(\int_{\mathbb{T}^3} \frac{dt}{w_1(0,t)}\right)^{-1/2}.$$

Теорема. Верны следующие разложения

$$\Delta_{\mu_0}(k\,; z) = \frac{32\pi^2\mu_0^2}{5\sqrt{5}}\sqrt{\frac{6}{5}|k|^2 - 2z} + O(|k|^2) + O(|z|),\ |k| \to 0,\ z \nearrow 0;$$

$$\Delta_{\mu_0}(k\,; z) = -\frac{32\pi^2\mu_0^2}{5\sqrt{5}}\sqrt{\frac{6}{5}|k - \overline{\pi}|^2 + 2(18 - z)}$$
$$+ O(|k - \overline{\pi}|^2) + O(|z - 18|), \quad |k - \overline{\pi}| \to 0, \quad z \searrow 18.$$

Аналитическое продолжение решений линейных уравнений с частными производными и теорема единственности для сигма-функции

Домрин А.В.

Московский Государственный университет им. М.В.Ломоносова, г. Москва, Россия

В докладе будет показано, что сигма-функции Вейерштрасса ($g = 1$) и Клейна ($g = 2$) являются единственными (с точностью до умножения на комплексную константу) решениями соответствующих систем $2g$ линейных дифференциальных уравнений типа теплопроводности на функцию от $3g$ переменных, голоморфными хотя бы в одной точке, где обращаются в нуль все модулярные переменные (т.е. набор $2g$ комплексных чисел, параметризующих рассматриваемые эллиптические или гиперэллиптические кривые). Важную роль в доказательстве играет тот факт, что все локальные голоморфные решения указанных систем допускают аналитическое продолжение до целых функций от оставшихся

g переменных (называемых угловыми). В случае $g = 1$ дается полное описание всех возможных оболочек голоморфности ростков локальных голоморфных решений.

Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ 17-01-00592 и 19-01-00474.

On the integral formula for the matrix factorization of the Helmholtz equation in $m-$dimensional bounded domain

Juraev D.A.
Karshi State University, Karshi city, Uzbekistan

The construction of the Carleman matrix for elliptic systems was carried out by Sh. Yarmukhamedov (1977), N.N. Tarkhanov [1], A.A. Shlapunov (2011), I.E. Niyozov (2014), D.A. Juraev (see for instance [2, 3]) and others.

Let $\mathbb{R}^m$ be a $m-$dimensional real Euclidean space,

$$x = (x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m, \ \ y = (y_1, \dots, y_m) \in \mathbb{R}^m.$$

We consider in the domain G a system of differential equations

$$D\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)U(x) = 0, \tag{1}$$

where $D\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$ is the matrix of differential operators is of the first order.

We denote by $A(G)$ the class of vector functions in the domain G, of continuous on $\overline{G} = G \bigcup \partial G$ and satisfying system (1).

If $U(y) \in A(G)$, then the following Cauchy type integral formula is true

$$U(x) = \int\limits_{\partial G} M(y, x)U(y)ds_y, \ \ x \in G_\rho,$$

Where

$$M(y, x) = \left(E\left(\varphi_m(\lambda r)u^0\right)D^*\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)\right)D(t^T).$$

Here $t = (t_1, \dots, t_m)$ is the unit outward normal, carried out at the point y, the surface ∂G, $\varphi_m(\lambda r)$ is the fundamental solution of the Helmholtz equation in the space $\mathbb{R}^m$.

[1] Tarkhanov N.N. The Cauchy problem for solutions of elliptic equations. Akad. Verl., Berlin, V. 7, 1995.

[2] Juraev D.A. On the Cauchy problem for matrix factorizations of the Helmholtz equation in an unbounded domain in $\mathbb{R}^2$. Sib. Electron. Mat. Izv., 15, pp. 1865-1877, 2018.

[3] Juraev D.A. On a regularized solution of the Cauchy problem for matrix factorizations of the Helmholtz equation. Advanced Mathematical Models & Applications Vol.4, No.1, 2019, pp.86-96, 2019.

On Hilbert spaces of entire functions with unconditional bases of reproducing kernels

Isaev K. P., Yulmukhametov R. S.

Institute of Mathematics with Computing Centre, Ufa Federal Research Center, RAS, Ufa, Russia

Let $\mathcal{H}$ be a Hilbert space of entire functions. Let us assume that the evaluation functionals $\delta_z : F \longrightarrow F(z)$ are continuous for every $z \in \mathbb{C}$, and the space $\mathcal{H}$ has the division property:

$$F \in \mathcal{H},\ F(w) = 0 \Rightarrow \frac{F(z)}{z-w} \in \mathcal{H}.$$

Due to the fact that Hilbert spaces are self-dual, the point functional δ_z is generated by some element $K(\cdot, z)$. The function $K(\lambda, z)$ is called the reproducing kernel at λ. A basis $\{h_k,\ k \in \mathbb{N}\}$ in a Hilbert space $\mathcal{H}$ is said to be unconditional if there exist numbers $C, c > 0$ such that for any element $x \in \mathcal{H}$

$$x = \sum_k x_k h_k \Rightarrow c \sum_k |x_k|^2 \|h_k\|^2 \le C \sum_k |x_k|^2 \|h_k\|^2.$$

The problem of existence of unconditional bases of reproducing kernels in the space

$$\mathcal{F}_\varphi = \left\{ F \in Hol(\mathbb{C}) :\ \|F\|^2 := \int_{\mathbb{C}} |F(z)|^2 e^{-2\varphi(z)} dm(z) < \infty \right\}$$

is studied in [1]—[4].

If the space $\mathcal{H}$ possess the division property and the system $K(\lambda, \lambda_k)$ is unconditional basis in this space, then the biorthogonal system to it is

$$l_k(\lambda) = \frac{L(\lambda)}{L'(\lambda_k)(\lambda - \lambda_k)},\ \lambda \in \mathbb{C}, \tag{1}$$

where $L(\lambda)$ is a so called generating function with simple zeros at $\lambda_k,\ \ k \in \mathbb{N}$, such that $L \notin \mathcal{H}$ and $\frac{L(\lambda)}{\lambda - \lambda_k} \in \mathcal{H}$ for every $k \in \mathbb{N}$. In most of the above papers unconditional bases are constructed by constructing an entire functions L with simple zeros λ_k and with properties ensuring the basis property of the system l_k. We "turn over" the described method. By the entire function L under certain conditions on the distribution of zeros $\lambda_k,\ k \in \mathbb{N}$, we define the Hilbert space $\mathcal{H} = \mathcal{H}_L$ such that the system $K(\lambda, \lambda_k)$ turns out to be an unconditional basis in it.

In what follows we denote by $D(z,t)$ the open disk with center z of radius t. Let $L(\lambda)$ be an entire function with simple zeros at $\{\lambda_k,\ k \in \mathbb{N}\}$. We assume that

$$\sup_{k\in\mathbb{N}} \sum_{j\neq k} \frac{1}{|\lambda_j - \lambda_k|} := M < \infty.$$

Let's take a smooth nonnegative function $\alpha(z)$ with finite support on $D(0,1)$ such that

$$\int_{\mathbb{C}} \alpha(z)dm(z) = 1,$$

dm being planar Lebesgue measure. For convenience, we also assume that $0 < \alpha(z) \leq 1$, $z \in D(0,1)$, and $\alpha(z) \equiv 1$, $z \in D\left(0, \frac{1}{2}\right)$. For $\delta > 0$ let denote

$$\alpha_\delta(z) = \frac{1}{\delta^2}\alpha\left(\frac{z}{\delta}\right),\ z \in \mathbb{C},$$

and let φ be a smooth regularization of the function $\ln|L(\lambda)|$:

$$\varphi(\lambda) = \int_{\mathbb{C}} \ln|L(z)|\alpha_\delta(\lambda - z)dm(z),\ \lambda \in \mathbb{C}.$$

Theorem. *Let's consider the space $\mathcal{H} = \mathcal{H}_L$ of entire functions satisfying the conditions*

$$|F(\lambda)| = o\left(e^{\varphi(\lambda)}\right),\ |\lambda| \longrightarrow \infty,$$

$$\int_{\mathbb{C}} |F(\lambda)|^2 e^{-2\varphi(\lambda)}\Delta\varphi(\lambda)dm(\lambda) := \|F\|^2 < \infty.$$

Then $\mathcal{H}$ is a Hilbert space and the system of functions (1) is an unconditional basis in the space $\mathcal{H}$.

This work was supported by by RFBR (project no. 18-01-00095 A).

[1] A. Borichev and Yu. Lyubarskii, "Riesz bases of reproducing kernels in Fock type spaces" , J. Inst. Math. Jussieu **9** (3), 449–461 (2010).

[2] A. Baranov, A. Dumont, A. Hartmann, K. Kellay, "Sampling, interpolation and Riesz Bases in small Fock spaces" , J. Math. Pures Appl. **103** (6), 1358–1389 (2015).

[3] A. Baranov, Yu. Belov, and A. Borichev, "Fock type spaces with Riesz bases of reproducing kernels and de Branges spaces" , Studia Math. **236** (2), 127–142 (2017).

[4] K. P. Isaev, R. S. Yulmukhametov, "On unconditional bases of reproducing kernels in Fock-type spaces" , Funct. Anal. Appl. **51** (4), 283–292 (2017).

Полнота и минимальность системы корневых функций оператора Штурма–Лиувилля на кривой с ограниченным наклоном

Ишкин Х.К.

Башкирский государственный университет, г.Уфа, Россия

Пусть Γ – кривая с параметризацией $z = x + i\gamma(x),\ x \in [0, 1]$, где функция h удовлетворяет условию Липшица $|\gamma(x_2) - \gamma(x_1)| \leq M|x_2 - x_1|$ при всех $x_1 \neq x_2,\ M$ – постоянная. Такую кривую называют кривой ограниченного наклона.

Пусть $q \in L^1(\Gamma)$. Оператором Штурма–Лиувилля на кривой Γ называется оператор L с областью определения $D\,(L) = \{y \in L^2(\Gamma) :\ y' \in AC\,(\Gamma)\,, -y'' + qy \in L^2(\Gamma),\ y(0) = y(1) = 0\}$, действующий в пространстве $L^2\,(\Gamma)$ по правилу $Ly = -y'' + qy$.

Оператор L плотно определен, замкнут и имеет бесконечный дискретный спектр [1]. Если функция γ выпукла (вверх или вниз), можно указать сектор $S = \{\lambda :\ \ \beta_1 < \arg\lambda < \beta_2\}$ $(-\pi < \beta_1 < 0 < \beta_2 < \pi)$, вне которого спектр L конечен. При этом вдоль любого луча $\arg\lambda = \beta,\ \beta_2 \leq \beta \leq 2\pi + \beta_1$, справедлива оценка $\|(L - \lambda)^{-1}\| = O(\lambda^{-1})$ [2]. Такие лучи называют лучом наилучшего убывания резольвенты. Однако ничего определенного о распределении спектра и об асимптотике собственных и присоединенных (корневых) функций $\{f_n\}$ оператора L утверждать нельзя. Тем не менее, утверждения о секторе, свободном от спектра и лучах наилучшего убывания допускают обобщения на случай, когда Γ – кривая ограниченного наклона. Более того, несмотря на отсутствие каких-либо асимптотических оценок для корневых функций оператора L, удается установить полноту и минимальность $\{f_n\}$ в $L^2(\gamma)$.

[1] Ишкин Х. К. *О необходимых условиях локализации спектра задачи Штурма–Лиувилля на кривой*// Матем. заметки. Т. 78. № 1. 2005. С. 72–84.

[2] Ишкин Х. К. *Критерий локализации спектра оператора Штурма–Лиувилля на кривой*// Алгебра и анализ. Т. 28. № 1. 2016. С. 52–88.

Неравенство Рисса-Фейера для комплекснозначных гармонических функций

Каюмов И.Р.
Казанский федеральный университет, г.Казань, Россия

Цель настоящего доклада – описание результатов о неравенстве типа Рисса-Фейера для комплекснозначных гармонических функций, опубликованных в нашей работе [1].

Пусть $\mathcal{H}$ – класс всех комплекснозначных гармонических функций $f = u + iv$, где u и v вещественнозначные гармонические в круге $\mathbb{D} = \{|z| < 1\}$ функции. Для $0 < p < \infty$, введем пространство $\mathbf{h}^p$, состоящее из функций $f \in \mathcal{H}$, которые удовлетворяют условию

$$||f||_p := \sup_{0<r<1} \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^p d\theta \right)^{1/p} < \infty.$$

Теорема. Пусть $f \in \mathbf{h}^p$, где $p \in (1, 2]$. Тогда

$$\int_{-1}^{1} |f(x)|^p dx \le \frac{1}{2} \sec^p \left(\frac{\pi}{2p} \right) \int_0^{2\pi} |f(e^{i\theta})|^p d\theta,$$

причем оценка является неулучшаемой для всех $p \in (1, 2]$.

[1] Ilgiz R. Kayumov, Saminathan Ponnusamy, Anbareeswaran Sairam Kaliraj. Riesz – Fejér Inequalities for Harmonic Functions. Potential analysis (2018). https://link.springer.com/article/10.1007/s11118-018-9732-4

Обобщенные ядра Бергмана на симплектических многообразиях ограниченной геометрии

Кордюков Ю.А.
Институт математики с ВЦ УФИЦ РАН, г.Уфа, Россия

Доклад посвящен обобщенным ядрам Бергмана, ассоциированным с ренормализованными лапласианами Бохнера на тензорных степенях $L^{\otimes p}$ равномерно положительного линейного расслоения L на симплектическом многообразии ограниченной геометрии. Доказано, что обобщенные ядра Бергмана экспоненциально убывают вне диагонали при $p \to \infty$. В некоторой окрестности диагонали они допускают асимптотическое описание при $p \to \infty$ в терминах некоторых модельных ядер Бергмана в комплексном линейном пространстве $\mathbb{C}^n$. Установлена связь между обобщенными ядрами Бергмана на компактном симплектическом многообразии и на произвольном накрытии Галуа.

Доклад основан на совместной работе с Ш. Ма и Дж. Маринеску [1].

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда, грант № 17-11-01004.

[1] Yu. A. Kordyukov, X. Ma and G. Marinescu, Generalized Bergman kernels on symplectic manifolds of bounded geometry, Comm. Partial Differential Equations (to appear), preprint arXiv:1806.06401.

Об отсутствии особых точек на интервале заданной длины, лежащем на границе области сходимости ряда экспоненциальных мономов

Кривошеева О.А.
БашГУ, г.Уфа, Россия

Пусть $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}_{k=1}^{\infty}$ — последовательность различных комплексных чисел λ_k и их кратностей n_k. Считаем, что $|\lambda_k|$ не убывает и $|\lambda_k| \to \infty$, $k \to \infty$. Рассмотрим ряд экспоненциальных мономов

$$g(z) = \sum_{k=1,n=0}^{\infty,n_k-1} a_{k,n} z^n e^{\lambda_k z} \qquad (1)$$

В работах [1], [2] исследовались ряды (1), последовательности показателей Λ которых являются, так называемыми, почти вещественными последовательностями. Получены условия на Λ, при которых сумма каждого ряда (1) имеет особую точку на отрезке фиксированной длины, лежащем на границе области сходимости этого ряда. В данной работе рассматриваются последовательности Λ общего вида. Приводятся условия на Λ, при которых существует ряд (1) сумма которого не имеет особых точек на интервале заданной длины, лежащем на границе области сходимости этого ряда.

Пусть D — выпуклая область и $L(\varphi, D)$ — пересечение границы области D и ее опорной прямой в направлении φ, т.е.

$$L(\varphi, D) = \partial D \cap \{z : \mathrm{Re}(ze^{-i\varphi}) = H_D(\varphi)\}.$$

Символом $\Phi(D)$ обозначим множество направлений φ, для которых $L(\varphi, D)$ не является точкой. Пусть Ξ — подмножество единичной окружности $S(0,1)$. Область D называется Ξ-выпуклой, если верно равенство

$$D = \{z : \mathrm{Re}(ze^{-i\varphi}) < H_D(\varphi), e^{-i\varphi} \in \Xi\}.$$

Положим $J(D) = \{e^{-i\varphi} : H_D(\varphi) = +\infty\}$. Если D — неограниченная область, то $J(D)$ является дугой раствора не меньше чем π. Нетрудно заметить, что

$$D = \{z : \mathrm{Re}(ze^{-i\varphi}) < H_D(\varphi), e^{-i\varphi} \in \Xi \setminus J(D)\},$$

если D — Ξ-выпуклая область. Множество всех последовательностей $a = \{a_{k,n}\}$ коэффициентов ряда (1), при которых он сходится равномерно на компактах в области D, и его область сходимости совпадает с D, обозначим $\mathfrak{A}(\Lambda, D)$.

Положим

$$m(\Lambda) = \overline{\lim_{k\to\infty}} \frac{n_k}{|\lambda_k|}, \quad \underline{n}_0(\Lambda) = \varliminf_{\delta\to 0} \varliminf_{r\to\infty} \frac{n(r,\Lambda) - n((1-\delta)r,\Lambda)}{\delta r}.$$

Пусть $\Lambda(\varphi_1, \varphi_2)$ — множество всех пар λ_k, n_k таких, что λ_k лежит в угле $\Gamma(\varphi_1,\varphi_2) = \{z = te^{i\varphi} : \varphi \in (\varphi_1,\varphi_2), t > 0\}$.

Theorem *Пусть $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}$, $m(\Lambda) = 0$, D — $\Xi(\Lambda)$-выпуклая область, $-\varphi \in \Phi(D)$, и $[z_1, z_2] \subset L(-\varphi, D)$. Предположим, что*

$$\lim_{\alpha\to 0} S_{\Lambda(\varphi-\alpha,\varphi+\alpha)} = 0, \quad 2\pi \lim_{\alpha\to 0} \underline{n}_0(\Lambda(\varphi-\alpha,\varphi+\alpha)) \geq |z_2 - z_1|.$$

Тогда существует $a \in \mathfrak{A}(\Lambda, D)$ такое, что сумма ряда (1) не имеет особых точек на интервале (z_1, z_2).

Величина S_Λ, используемая в теореме, была введена А.С. Кривошеевым в работе [3].

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ (проект № 18-31-00029).

[1] Кривошеева О.А., Кривошеев А.С. Особые точки суммы ряда Дирихле на прямой сходимости. Функц. анализ и его прил. 2015. Т.49, №2. С. 54–69.

[2] Krivosheeva O.A., Krivosheev A.S. Singular points for the sum of a series of exponential monomials. Пробл. анал. Issues Anal. 2018. V. 7(25), № 2. P. 72-87.

[3] Кривошеев А.С. Фундаментальный принцип для инвариантных подпространств в выпуклых областях. Известия РАН. Серия математическая. 2004. Т.68. №2. С. 71-136.

Об измеримости положительных последовательностей

Кужаев А. Ф.

Башкирский государственный университет, г.Уфа, Россия

Рассмотрим неубывающую неограниченную последовательность положительных чисел $\Lambda = \{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$. Эту последовательность называют измеримой, если существует предел

$$n(\Lambda) = \lim_{t\to+\infty} \frac{n(\lambda, t)}{t},$$

где $n(\lambda, t)$ обозначает количество членов последовательности Λ, не превышающих числа t (так называемая считающая функция). При этом величина $n(\Lambda)$ называется плотностью последовательности Λ.

Будем говорить, что последовательность Λ логарифмически измерима, если для любого $\delta \in (0; 1)$ существует предел

$$L(\Lambda, \delta) = \lim_{t\to+\infty} -\frac{1}{\ln(1-\delta)} \sum_{t(1-\delta)<\lambda_n\leqslant t} \frac{1}{\lambda_n}.$$

При обобщении результатов работы [1] можно получить следующее утверждение.

Теорема. Пусть $\Lambda = \{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ — неубывающая неограниченная последовательность, $\lambda_n > 0, n \geqslant 1$. Следующие утверждения эквивалентны:
1) последовательность Λ измерима;
2) последовательность Λ логарифмически измерима;
3) величина $L(\Lambda, \delta)$ не зависит от $\delta \in (0; 1)$;

[1] Кривошеев А. С., Кужаев А. Ф. Об одной теореме Леонтьева-Левина. // Уфимский математический журнал – 2017. – Т. 9. – № 3. – С. 89–101.

О наилучшем приближении периодических функций в L_2

Лангаршоев М.Р.

МБОУ ЦО №44 им. маршала Г.К.Жукова, г.Тула, Россия

Пусть L_2 – пространство измеримых и суммируемых с квадратом 2π-периодических функций f с нормой $\|f\| := \left(\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx\right)^{1/2} < \infty$.

Для любого $m,n\in\mathbb{N}$, $r,s\in\mathbb{Z}_+$, $p\in(0,+\infty)$ и $t>0$ рассмотрим следующую аппроксимационную характеристику:

$$\mathcal{K}_{m,n,r,s,p}(U_m,t)=\sup\left\{\frac{n^r E_n(f)}{(t^s U_m^p(f^{(r)},t))^{1/p}}\,:\,f\in L_2^{(r)},\,f^{(r)}\neq\mathrm{const}\right\},$$

где U_m – характеристика гладкости функции $f\in L_2^{(r)}$, $U_m\equiv\omega_m$ или $U_m\equiv\Omega_m$.

Теорема 1. *Для произвольной $m,n\in\mathbb{N}$, $r,s\in\mathbb{Z}_+$, $0<p\le 2$, $0<t\le\pi/n$ справедливы равенства*

$$\mathcal{K}_{m,n,r,s,p}(\omega_m,t)=2^{-m/2}t^{-s/p}(1-\cos nt)^{-m/2},$$

$$\mathcal{K}_{m,n,r,s,p}(\Omega_m,t)=2^{-m/2}t^{-s/p}(1-\sin nt/(nt))^{-m/2}.$$

Через $b_n(m,L_2)$, $d^n(m,L_2)$, $d_n(m,L_2)$, $\delta_n(m,L_2)$ и $\Pi_n(m,L_2)$ обозначим соответственно бернштейновский, гельфандовский, колмогоровский, линейный и проекционный n-поперечников множество $m\in L_2$ (см. [1]).

Непрерывную возрастающую на полусегменте $[0,\infty)$ функцию $\Phi(t)$ такую, что $\Phi(0)=0$, будем называть мажорантой.

Введём обозначения: $W_p^r(\omega_m,\Phi)=\{f\in L_2^{(r)}\,:\,t^s\omega_m^p(f^{(r)},t)\le\Phi^p(t)\}$,

$$(1-\cos nt)_*^m=\Big\{(1-\cos nt)^m,\text{ если }\ nt<\pi;\ 2^m,\text{ если }\ nt\ge\pi\Big\}.$$

Теорема 2. *Пусть для произвольной $m,n,r\in\mathbb{N}$, $s\in\mathbb{Z}_+$, $s/r<p\le 2$, $0<t\le\pi/n$ мажоранта Φ удовлетворяет условию*

$$2^{m/2}\pi^{s/p}\Phi(t)\ge(nt)^{s/p}(1-\cos nt)_*^{m/2}\Phi(\pi/n).$$

Тогда имеют место равенства

$$\lambda_{2n}\left(W_p^r(\omega_m,\Phi),L_2\right)=\lambda_{2n-1}\left(W_p^r(\omega_m,\Phi),L_2\right)=\frac{n^{s/p-r}}{2^{m/2}\pi^{s/p}}\Phi(\pi/n),$$

где $\lambda_{2n}(\cdot)$ – любой из вышеперечисленных n – поперечников.

[1] Тихомиров В.М. Некоторые вопросы теории приближений. М.: МГУ, 1976.

Гиперцикличность операторов Теплица

Лишанский А.А.
Санкт-Петербургский государственный университет,
г.Санкт-Петербург, Россия

Мы изучаем гиперцикличность операторов Теплица в пространстве Харди $H^2(\mathbb{D})$ с символами вида $\Phi(z) = R(\frac{1}{z}) + \varphi(z)$, где R — рациональная функция. В 2016 году А.Д. Барановым и А.А. Лишанским [1] были найдены необходимые, а также достаточные условия гиперцикличности операторов Теплица в пространстве Харди с полиномиальной антианалитической частью. Сейчас этот результат дополнен несколькими достаточными условиями для операторов с рациональной антианалитической частью с использованием результатов Б.М. Соломяка [2].

Теорема. Пусть R — рациональная функция вида $P(z) + \sum\limits_{l=1}^{r} \frac{\alpha_l}{(z-\eta_l)^{k_l}}$, где P — полином, $\eta_l \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{D}$ — полюса функции R с учетом кратности, $\varphi \in H^\infty$ и $\Phi(z) = R(\frac{1}{z}) + \varphi(z)$.

Предположим, что $\varphi \in A(\overline{\mathbb{D}}) = H^\infty(\mathbb{D}) \cap C(\overline{\mathbb{D}})$, $\mathbb{D} \cap (\mathbb{C} \setminus \Phi(\mathbb{D})) \neq \emptyset$ и $\widehat{\mathbb{D}} \cap (\mathbb{C} \setminus \Phi(\mathbb{D})) \neq \emptyset$.

Допустим, что выполняется одно из трех условий:

1. Функция Φ ровно $M+N$-листна на $\overline{\mathbb{D}} \setminus \{0, 1/\eta_1, \ldots, 1/\eta_r\}$, где N — степень многочлена $P(z)$, а $M = \sum_l k_l$.

2. Пусть $h = \frac{1}{\Phi - \lambda}$ для некоторого $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \overline{\Phi(\mathbb{D})}$. Предположим, что $h \in A(\overline{\mathbb{D}})$, множество $h(\mathbb{D})$ является конечным объединением C^2-гладких жордановых дуг и функция $t \mapsto \arg h(e^{it})$ строго возрастает на $[0, 2\pi]$.

3. Пусть $h = \frac{1}{\Phi - \lambda}$ — аналитическая функция в $\overline{\mathbb{D}}$, и кривая $\Gamma = h(\mathbb{T})$ разбивает плоскость на конечное число компонент. Пусть $\Omega^{(k)}$ — объединение компонент, в которых число прообразов h равно k (с учетом кратности). Пусть для каждой компоненты $G \subset \Omega^{(k)}, k \geq 1$, существует цепочка компонент $G_k = G, G_{k-1}, \ldots, G_1$, таких, что $G_i \subset \Omega^{(i)}$, области G_i и G_{i-1} имеют общую дугу, и G_1 имеет общую дугу с неограниченной компонентой множества Ω_0.

Тогда оператор T_Φ гиперциклический на H^2.

[1] A. Baranov, A. Lishanskii, Hypercyclic Toeplitz operators, *Results in Mathematics*, **70:3** (2016), 337–347.

[2] Соломяк Б.М. Циклические семейства функций для аналитических операторов Теплица. Зап. научн. сем. ЛОМИ, 1987, том 157, с. 88–102.

Субгармонические функции вполне регулярного (γ,ε)-роста

Малютин К.Г., Кабанко М.В.
Курский государственный университет, г. Курск, Россия

Пусть $\gamma(r)$ – функция роста, $\varepsilon(r) > 0$ – невозрастающая функция, удовлетворяющая условию $\varepsilon(r(1+\varepsilon(r))) \geqslant (\varepsilon(r))^{\eta}$, при некотором $\eta > 1$ для всех больших r. В работе рассматриваются классы $\delta\mathcal{S}(\gamma,\varepsilon)$ дельта-субгармонических функций v в $\mathbb{C}$ (т.е. характеристика Неванлинны $T(r,v)$ которых оценивается неравенством $T(r,v) \leqslant \frac{a}{(\varepsilon(r))^{\alpha}}\gamma(r+\beta\varepsilon(r)r)$, при некоторых положительных постоянных a, α, β), введенных, в случае мероморфных функций, Б. Хабуллиным [1], развитие которых получило в начале века в работах львовских математиков. Введено определение класса $\delta\mathcal{S}^{o}(\gamma,\varepsilon)$ дельта-субгармонических функций вполне регулярного (γ,ε)-роста и их индикатора в смысле А. Кондратюка[2]. В терминах коэффициентов Фурье функции $v \in \delta\mathcal{S}(\gamma,\varepsilon)$

$$c_k(r,v) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} v(re^{i\theta})e^{-ik\theta}\,d\theta, \quad k \in \mathbb{Z}$$

получен критерий принадлежности функции классу $\delta\mathcal{S}^{o}(\gamma,\varepsilon)$.

Теорема. Пусть функция роста $\gamma(r)$ и $\varepsilon(r)$ удовлетворяют условию

$$\frac{\gamma(2r+2r\varepsilon(2r))}{\varepsilon(2r)} \leqslant C\frac{\gamma(r+\varepsilon(r)r)}{\varepsilon(r)}, \quad r > 0\,,$$

при некотором $C > 0$, не зависящем от r, тогда следующие два условия эквивалентны:

1) $v \in \delta\mathcal{S}^{o}(\gamma,\varepsilon)$;

2) $v \in \delta\mathcal{S}(\gamma,\varepsilon)$ и для каждого $k \in \mathbb{Z}$ при некоторой постоянной $\alpha > 0$ существует предел

$$\lim_{r\to\infty}\frac{\varepsilon(r)^{\alpha}c_k(r,v)}{\gamma(r+r\varepsilon(r))}\,.$$

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 18-01-00236.

[1] Б. Н. Хабибуллин. Рост целых функций с заданными нулями и представления мероморфных функций. // Матем. Заметки. 2003. Т. 73. Вып. 1. С. 120–134.

[2] А.А. Кондратюк. Метод рядов Фурье для целых и мероморфных функций вполне регулярного роста. // Матем. сб. 1978. Т. 106. № 3. С. 386–408.

Лемма Римана-Лебега и асимптотическое поведение некоторых интегралов

Малютин К.Г., Малютина Т.И., Шевцова Т.В.
Курский государственный университет, Юго-Западный государственный университет, г. Курск, Россия

Мы доказываем аналог леммы Римана–Лебега [1, гл. 2, с. 49] для тригонометрических интегралов.

Лемма. Пусть $f(t) \in L_1([a,b])$, $0 \leqslant a < b < +\infty$, и пусть $\varphi(r)$ — возрастающая, дважды дифференцируемая функция на полуоси $[0,+\infty)$ такая, что

$$\lim_{r\to+\infty} \varphi(r) = \infty\,, \qquad \lim_{r\to+\infty} \frac{r^2\varphi''(r)\ln r}{(r\varphi'(r)\ln r + \varphi(r))^2} = 0\,.$$

Тогда

$$\lim_{r\to+\infty} \int\limits_a^b f(t)\exp[i\varphi(rt)\ln(rt)]\,dt = 0\,.$$

Применение этой леммы позволяет получить асимптотические формулы для интегралов с абсолютно непрерывной функцией.

Теорема. Пусть $f(t)$ — абсолютно непрерывная функция на сегменте $[a,b]$, $0 < a < b < \infty$, $\rho \in \mathbb{R}$, и пусть функция $\varphi(r)$ удовлетворяет условию леммы. Тогда при $r \to +\infty$

$$\int\limits_a^b f(t)\,d(t^\rho\cos[\varphi(rt)\ln(rt)]) =$$
$$= b^\rho f(b)\cos[\varphi(br)\ln(br)] - a^\rho f(a)\cos[\varphi(ar)\ln(ar)] + o(1),$$
$$\int\limits_a^b f(t)\,d(t^\rho\sin[\varphi(rt)\ln(rt)]) =$$
$$= b^\rho f(b)\sin[\varphi(br)\ln(br)] - a^\rho f(a)\sin[\varphi(ar)\ln(ar)] + o(1)\,.$$

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 18-01-00236.

[1] Эдвардс Р. Ряды Фурье в современном изложении. Т.1. М.: Мир, 1985.

Об альтернативных теореме Миттаг-Леффлера способах разложения мероморфных функций на простейшие дроби

Марусеев И.А., Рассадин А.Э.

Лаборатория бесконечномерного анализа и математической физики механико-математического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова, г.Москва, Россия

В классических руководствах по комплексному анализу разложение

$$\frac{\cos z}{\sin z} = \frac{1}{z} + \sum_{n \neq 0} \left(\frac{1}{z - \pi\, n} + \frac{1}{\pi\, n} \right) \tag{1}$$

функции $\cot z$ на простейшие дроби получается с помощью теоремы Миттаг-Леффлера [1], а разложение функции $\operatorname{cosec}^2 z$

$$\frac{1}{\sin^2 z} = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \frac{1}{(z - \pi\, n)^2} \tag{2}$$

затем находится почленным дифференцированием равенства (1).

В данной работе разложение (2) выводится, исходя из тождества

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\, \varphi(x-n)\, dx = \delta_{n\,0}\,, \qquad n \in Z\,,$$

для масштабирующей функции вейвлетов Хаара $\varphi(x) = \theta(x)\,\theta(1-x)$ [2], где $\theta(x)$ — функция Хевисайда.

Для получения формулы (1) к известному разложению функции $\sin z\, t$ в ряд Фурье для нецелого z [3]

$$\frac{\pi}{2}\, \frac{\sin z\, t}{\sin \pi\, z} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n\, \frac{n}{z^2 - n^2}\, \sin n\, t\,, \qquad t \in (-\pi, \pi)\,,$$

применяется равенство Парсеваля [3].

В представленном докладе приведены и другие примеры применения предложенного метода.

[1] Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1987.

[2] Добеши И. Десять лекций по вейвлетам. М.; Ижевск: РХД. 2001.

[3] Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т.3. М.: ФИЗМАТГИЗ. 1963.

Об уравнениях свертки на выпуклых множествах

Мелихов С.Н.

Южный федеральный университет, г. Ростов-на-Дону, Россия; Южный математический институт – филиал ВНЦ РАН, г. Владикавказ, Россия

Пусть Q – собственное выпуклое подмножество $\mathbb{C}$ с непустыми внутренностью и границей, обладающее счетным базисом окрестностей из выпуклых областей; $A(Q)$ – пространство ростков всех функций, аналитических на Q, с топологией счетного индуктивного предела пространств Фреше функций, аналитических в базисных окрестностях. Зафиксируем выпуклый компакт K в $\mathbb{C}$ и линейный непрерывный функционал μ на пространстве $A(K)$ ростков всех функций, аналитических на K. В докладе идет речь об условиях, при которых сюръективный оператор свертки $T_\mu : A(Q+K) \to A(Q)$, $f \mapsto \mu_t(f(t+z))$, имеет линейный непрерывный правый обратный (далее ЛНПО). Упомянутая задача была решена для пространства целых функций (независимо друг от друга) К.Д. Швердтфегером и Б.А. Тейлором в 1982 г., а для выпуклых областей Q — З. Моммом в 1994 г. Автором совместно с З. Моммом в 2000 г. был исследован случай выпуклого локально замкнутого множества Q, в определенном смысле двойственный к рассмотренному в данной ситуации.

Доказан абстрактный критерий наличия ЛНПО к сюръективному оператору $T_\mu : A(Q+K) \to A(Q)$, сформулированный в терминах существования специальных семейств субгармонических функций с равномерными оценками сверху и локальными оценками снизу. Важную роль играет необходимое условие сюръективности T_μ, полученное в привычных терминах медленного убывания (полной регулярности роста) символа $\widehat{\mu}$ оператора T_μ в направлениях ограниченности и негармоничности опорной функции множества Q. Для ограниченного Q итоговый аналитический критерий существования ЛНПО к фиксированному сюръективному оператору $T_\mu : A(Q+K) \to A(Q)$ выражен посредством граничного поведения выпуклых конформных отображений, связанных с внутренностью и замыканием Q, в направлениях сгущения нулей $\widehat{\mu}$. Для неограниченного Q доказаны достаточные условия наличия ЛНПО к сюръективному оператору свертки $T_\mu : A(Q+K) \to A(Q)$ (см. [1]).

[1] Melikhov S.N., Khanina L.V. Analytic solutions of convolution equations on convex sets with a mixed structure. I, II // arxiv.org/pdf/1809.04473.pdf, arxiv.org/pdf/1810.02625.pdf

Интерполяция с помощью рядов экспонент с бесконечным числом узлов и близкие задачи

Мерзляков С.Г., Попенов С.В.
Институт математики с ВЦ УФИЦ РАН, Уфа, Россия

Найдены достаточные условия разрешимости проблемы кратной интерполяции с бесконечного множества узлов $\mathcal{M}$ с помощью сумм абсолютно сходящихся целых рядов экспонент с показателями из неограниченного множества Λ.

Рассмотрен новый класс специальных множеств узлов интерполяции, включающий в себя изучаемые ранее. Класс определяется в терминах расположения предельных направлений $\mathcal{M}$ и локализации узлов по отношению к предельным направлениям показателей Λ.

Для показателей с заданным предельным множеством получены критерии разрешимости в этом классе множеств узлов. Необходимость условий доказана в большой общности: для произвольных множеств узлов и для интерполяции функциями u, представляющимися как преобразование Лапласа мер Радона $d\nu$ на Λ: $u(z) = \int_\Lambda e^{\lambda z}\, d\nu(\lambda)$. Это дает решение глобальной задачи Коши для операторов свертки с данными на $\mathcal{M}$ в виде рядов экспонент $\sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{\lambda_n z}$. $\Lambda = \{\lambda_n\}$ есть подмножество нулей характеристической функции оператора и имеет нулевую плотность. Последовательность $|\lambda_n|$ можно выбирать разреженной сколь угодно сильно. В результате мы усиливаем часть результатов В. В. Напалкова и учеников, см. например, [1]–[3], а также часть наших результатов по теме.

Получена характеризация достаточных множеств Λ для подпространства квазиполиномов с показателями из $\mathcal{M}$ и связь с сюръективностью некоторых операторов композиции свертки с умножением.

[1] Напалков В.В., Попенов С.В. Голоморфная задача Коши для оператора свертки в аналитически равномерных пространствах и разложения Фишера. Докл. РАН. 381. 2. 2001. С. 164–166.

[2] Напалков В.В., Нуятов А.А. Многоточечная задача Валле Пуссена для операторов свертки. Матем. сб. 203:2. 2012. С. 77–86.

[3] Напалков В.В., Нуятов А.А. Многоточечная задача Валле Пуссена для операторов свертки с узлами, заданными в угле. ТМФ, 180:2 (2014), С. 264–271.

О компактности некоторых линейных операторов в пространстве типа Фока

Мусин И.Х.

Институт математики с ВЦ УФИЦ РАН, г. Уфа, Россия

Пусть $H(\mathbb{C}^n)$ – пространство целых функций в $\mathbb{C}^n$, $d\mu_n$ – мера Лебега в $\mathbb{C}^n$, $abs\, u = (|u_1|, \ldots, |u_n|)$ для $u = (u_1, \ldots, u_n) \in \mathbb{R}^n$ $(\mathbb{C}^n)$.

Пусть φ – полунепрерывная снизу функция в $\mathbb{R}^n$, удовлетворяющая условиям:

i_1). $\varphi(x) = \varphi(abs\, x),\ x \in \mathbb{R}^n$;

i_2). $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\varphi(x)}{\ln(1+\|x\|)} = +\infty$;

i_3). сужение φ на $[0,\infty)^n$ не убывает по каждой переменной.

Через L^2_φ обозначим пространство измеримых функций $f : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ таких, что

$$\|f\|^2_\varphi = \int_{\mathbb{C}^n} |f(z)|^2 e^{-2\varphi(abs\, z)}\, d\mu_n(z) < \infty.$$

Со скалярным произведением

$$(f,g)_\varphi = \int_{\mathbb{C}^n} f(z)\overline{g(z)} e^{-2\varphi(abs\, z)}\, d\mu_n(z),\ f, g \in L^2_\varphi,$$

L^2_φ – гильбертово пространство.

Пусть $F^2_\varphi = L^2_\varphi \cap H(\mathbb{C}^n)$. F^2_φ – замкнутое подпространство пространства L^2_φ. Пространство F^2_φ рассматривалось в [1].

Пусть $g \in L^\infty(\mathbb{C}^n)$, оператор $M_g : F^2_\varphi \to L^2_\varphi$ действует по правилу: $M_g(f)(z) = g(z)f(z),\ z \in \mathbb{C}^n$.

Пусть $P_\varphi : L^2_\varphi \to F^2_\varphi$ – оператор ортогонального проектирования.

Определим линейные операторы $T_g : F^2_\varphi \to F^2_\varphi$ и $H_g : F^2_\varphi \to (F^2_\varphi)^\perp$ по правилу: $T_g = P_\varphi M_g$, $H_g = (I - P_\varphi)M_g$.

Теорема. Пусть $g \in L^\infty(\mathbb{C}^n)$ и $\lim\limits_{z\to\infty} g(z) = 0$. Тогда оператор M_g – компактный.

Следствие. Пусть $g \in L^\infty(\mathbb{C}^n)$ и $\lim\limits_{z\to\infty} g(z) = 0$. Тогда операторы T_g и H_g – компактные.

[1] И.Х. Мусин, О некоторых линейных операторах на пространстве фоковского типа, Уфимск. матем. журн., 10:4 (2018), 85-91

Об условиях совпадения гильбертовых пространств с воспроизводящим ядром, связанных специальным преобразованием

Напалков В.В., Напалков В.В.(мл.)
Институт математики с ВЦ УФИЦ РАН, г.Уфа, Россия

Рассматриваются два сепарабельных гильбертовых пространства H_1 и H_2 с воспроизводящим ядром, состоящие из комплекснозначных функций, заданных на некоторых множествах точек $\Omega_1 \in \mathbb{C}^n$, $\Omega_2 \subset \mathbb{C}^m$ соответственно, $n, m \geq 1$. Нормы в пространствах H_1 и H_2 имеют интегральный вид:

$$\|f\|_{H_1}^2 = \int_{\Omega_1} |f(t)|^2 \, d\mu_1(t), \quad \forall f \in H_1,$$
$$\|q\|_{H_2}^2 = \int_{\Omega_2} |q(z)|^2 \, d\mu_2(z), \quad \forall q \in H_2,$$

где μ_1, μ_2 – некоторые счетно-аддитивные меры, заданные на Ω_1, Ω_2 соответственно. Предполагается также, что Ω_1 и Ω_2 счетно-конечны, т.е. могут быть представлены в виде счетного объединения подмножеств конечной меры. Пусть $\{E(\cdot, z)\}_{z \in \Omega_2}$ – некоторая полная система функций в пространстве H_1. Обозначим

$$\widetilde{f}(z) \stackrel{def}{=} (E(\cdot, z), f)_{H_1}, \forall z \in \Omega_2, \quad \widetilde{H}_1 = \{\widetilde{f}, \, f \in H_1\},$$
$$(\widetilde{f}_1, \widetilde{f}_2)_{\widetilde{H}_1} \stackrel{def}{=} (f_2, f_1)_{H_1}, \, \|\widetilde{f}_1\|_{\widetilde{H}_1} = \|f_1\|_{H_1}, \quad \forall \widetilde{f}_1, \widetilde{f}_2 \in \widetilde{H}_1.$$

Мы изучаем вопрос, когда гильбертовы пространства $\widetilde{H}_1$ и H_2 совпадают, т.е. пространства состоят из одних и тех же функций и нормы этих пространств равны? Получен критерий. Доказано, например, для того, чтобы пространство $\widetilde{H}_1$ совпадало с пространством H_2, необходимо и достаточно существование линейного непрерывного взаимно-однозначного унитарного оператора $\mathcal{A}$, действующего из пространства $\overline{H}_1$ на пространство H_2, который для любого $\xi \in \Omega_1$ переводит функцию $K_{\overline{H}_1}(\cdot, \xi)$ в функцию $E(\xi, \cdot)$. Здесь $\overline{H}_1$ пространство состоящее из функций комплексно - сопряженных к функциям из H_1, $K_{\overline{H}_1}(t, \xi)$, $t, \xi \in \Omega_1$ – воспроизводящее ядро пространства $\overline{H}_1$. Получены и другие эквивалентные утверждения. Также получены необходимые и достаточные условия, при выполнении которых, пространства $\widetilde{H}_1$ и H_2 эквивалентны, т.е. пространства состоят из одних и тех же функций, и нормы пространств $\widetilde{H}_1$ и H_2 эквивалентны. Эти утверждения будут приведены в докладе.

Экстремальные задачи для емкости плоского конденсатора с двумя прямолинейными пластинами

Насыров С.Р.

Казанский (Приволжский) федеральный университет, г.Казань, Россия

В докладе исследуется поведение емкости конденсатора на плоскости, пластинами которого являются прямолинейные отрезки, расположенные на прямых, угол между которыми фиксирован. С использованием метода однопараметрических семейств эллиптических функций, развитого в [1], выведена система обыкновенных дифференциальных уравнений, которой удовлетворяют емкость и акцессорные параметры, от которых зависит потенциальная функция конденсатора.

В качестве приложений полученных результатов изучена задача о монотонности емкости в случае, когда фиксированы один отрезок, длина другого и прямая, на которой этот второй отрезок располагается. Найдена формула для вариации емкости конденсатора, связанная с характеристиками конформных отображений области на круговое кольцо.

Кроме того, разработан приближенный метод, позволяющий находить емкости, модули и конформные отображения двусвязных областей указанного вида на круговые кольца. Он основан на решении задачи Коши для выведенной системы дифференциальных уравнений и возможности решения для областей. симметричных относительно некоторой прямой.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ и Правительства Республики Татарстан в рамках научного проекта No 18-41-160003.

[1] Насыров С.Р. Униформизация однопараметрических семейств комплексных торов. Известия вузов. Математика 2017, No 8. С. 42–52.

Нули семейств полиномов, ассоциированных с уравнениями Пенлеве

Новокшенов В.Ю.

Институт математики с ВЦ УФИЦ РАН, г.Уфа, Россия

Оценка величины области, содержащей нули заданного полинома, является классической задачей анализа. Мы находим асимптотическое распределение нулей обобщенных полиномов Эрмита $H_{m,n}(z)$ при $m, n \to \infty$, $z = O(\sqrt{m+n})$. Эти полиномы, представляющие собой вронскианы от классических полиномов Эрмита, возникают во многих задачах математической физики и теории случайных матриц. Вычисление асимптотики основано на применении задачи Римана к уравнению Пенлеве IV, решениями которого являются функции $u(z) = -2z + \partial_z \ln H_{m,n+1}(z)/H_{m+1,n}(z)$. В указанном скейлинговом пределе эта задача Римана имеет асимптотическое решение в элементарных функциях. В результате получаются формулы типа Планшереля-Ротаха для асимптотики классических полиномов Эрмита. [1].

[1] Novokshenov V., Generalized Hermite polynomials and monodromy-free Schrödinger operators, SIGMA, Vol.14, (2018) p.106, 13 pages, https://doi.org/10.3842/SIGMA.2018.106

Об одном свойстве устойчивых экстремалей функционала потенциальной энергии

Полубоярова Н.М.

Волгоградский государственный университет, г. Волгоград, Россия

Пусть M – n-мерное связное ориентируемое многообразие класса C^2. Рассмотрим ориентируемую гиперповерхность $\mathcal{M} = (M, u)$, полученную C^2-погружением $u : M \to \mathbb{R}^{n+1}$. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$ некоторая область, такая что $\mathcal{M} \subset \partial\Omega$; $\Phi,\ \Psi : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ — C^2-гладкие функции. Если ξ поле единичных нормалей к поверхности $\mathcal{M}$, то для любой C^2-гладкой поверхности $\mathcal{M}$ определен функционал потенциальной энергии

$$W(\mathcal{M}) = \int\limits_{\mathcal{M}} \Phi(\xi)\, d\mathcal{M} + \int\limits_{\Omega} \Psi(x)\, dx. \tag{1}$$

Экстремальная поверхность $\mathcal{M}$ *устойчива*, если вторая вариация функционала (1) знакоопределена при всех бесконечно малых деформациях поверхности $\mathcal{M}$, иначе – *неустойчива*. Обозначим положительно определенную матрицу $G = \{G_{ij}\}_{i,j=1}^{n+1}$, $G_{ij} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi_i \partial \xi_j} + \delta_{ij}(\Phi - \langle D\Phi, \xi \rangle)$, где $D\Phi = (\partial\Phi/\partial\xi_1, \partial\Phi/\partial\xi_2, \ldots, \partial\Phi/\partial\xi_{n+1})$; $\lambda(\xi)$ и $\Lambda(\xi)$ – минимальное и максимальное по модулю собственные значения матрицы G, значения которой считаются в точке ξ.

Теорема. Устойчивая замкнутая (без края) погруженная экстремальная для функционала (1) поверхность $\mathcal{M}$, вдоль которой $\left\langle \overline{\nabla}\Psi,\, \xi \right\rangle \leq 0$, является стандартной евклидовой сферой, если

$$\int\limits_{\mathcal{M}} \Lambda(\xi)\, d\mathcal{M} \int\limits_{\mathcal{M}} \lambda(\xi)\, d\mathcal{M} = \left(\int\limits_{\mathcal{M}} d\mathcal{M} \right)^2 .$$

Данная теорема является аналогом известной теоремы А.Д. Александрова и обобщает вариационное свойство сферы. Метод доказательства основан на анализе выражений 1 и 2 вариаций функционала, полученных в [2]. Сходный результат получил В.А. Клячин в [1]. Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ №19-47-340015 р_а.

[1] Клячин В. А. О некоторых свойствах устойчивых и неустойчивых поверхностей предписанной средней кривизны // Изв. РАН. Сер. матем. – 2006. – Т. 70. – № 4. – С. 77–90.

[2] Полубоярова Н. М. О неустойчивости экстремалей функционала потенциальной энергии // Уфимск. матем. журн., 10:3 (2018), 79–88; Ufa Math. J., 10:3 (2018), 77–85

О конечности дискретного спектра решетчатой модели спин-бозон с не более чем двумя фотонами

Расулов Т.Х.

Бухарский государственный университет, г. Бухара, Узбекистан

Пусть $\mathbb{T}^3$ – трехмерный тор, $\mathbb{C}$ – одномерное косплексное пространство, $L_2(\mathbb{T}^3)$ – гильбертово пространство квадратично-интегрируемых функций, определенных на $\mathbb{T}^3$, а $L_2^{\mathrm{sym}}((\mathbb{T}^3)^2)$ – гильбертово пространство симметричных функций двух переменных, определенных на $(\mathbb{T}^3)$. Положим $\mathcal{H} := \mathbb{C}^2 \otimes (\mathbb{C} \oplus L_2(\mathbb{T}^3) \oplus L_2^{\mathrm{sym}}((\mathbb{T}^3)^2))$. Тогда $\mathcal{H}$ состоит из вектор-функций

$$F = \{f_0^{(\mathrm{s})}, f_1^{(\mathrm{s})}(k_1), f_2^{(\mathrm{s})}(k_1, k_2); \mathrm{s} = \pm\}.$$

Будем рассматривать оператор $\mathcal{A}$ действующий в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ как тридиагональная 3×3-операторная матрица

$$\mathcal{A} := \begin{pmatrix} \mathcal{A}_{00} & \mathcal{A}_{01} & 0 \\ \mathcal{A}_{01}^* & \mathcal{A}_{11} & \mathcal{A}_{12} \\ 0 & \mathcal{A}_{12}^* & \mathcal{A}_{22} \end{pmatrix},$$

с матричными элементами

$$\mathcal{A}_{00} f_0^{(\mathrm{s})} = \mathrm{s}\varepsilon f_0^{(\mathrm{s})},\ \mathcal{A}_{01} f_1^{(\mathrm{s})} = \alpha \int_{\mathbb{T}^3} v(t) f_1^{(-\mathrm{s})}(t) dt,$$

$$(\mathcal{A}_{11} f_1^{(\mathrm{s})})(p) = (\mathrm{s}\varepsilon + w(p)) f_1^{(\mathrm{s})}(p),\ (\mathcal{A}_{12} f_2^{(\mathrm{s})})(p) = \alpha \int_{\mathbb{T}^3} v(t) f_2^{(-\mathrm{s})}(p, t) dt,$$

$$(\mathcal{A}_{22} f_2^{(\mathrm{s})})(p, q) = (\mathrm{s}\varepsilon + w(p) + w(q)) f_2^{(\mathrm{s})}(p, q),\ \{f_0^{(\mathrm{s})}, f_1^{(\mathrm{s})}, f_2^{(\mathrm{s})}, \mathrm{s} = \pm\} \in \mathcal{H}.$$

Здесь $\alpha > 0$ – параметр взаимодействия, $\varepsilon > 0$; $w(k)$ – энергия фотона с импульсом k, $v(\cdot)$ и $w(\cdot)$ – вещественно-значные аналитические функции на $\mathbb{T}^3$ и $\min\limits_{k\in\mathbb{T}^3} w(k) = 0$. Тогда [1] имеет место неравенство

$$\min \sigma_{\text{ess}}(\mathcal{A}) < -\varepsilon.$$

Основным результатом настоящей работы является следующая

Теорема. При любом значение параметра взаимодествия $\alpha > 0$ оператор $\mathcal{A}$ имеет конечное число собственных значений, лежащих левее своего существенного спектра.

[1] Расулов Т.Х. О ветвях существенного спектра решетчатой модели спин-бозона с не более чем двумя фотонами. Теоретическая и математическая физика. 2016. Том. 186, №. 2, стр. 293–310.

Условия существования виртуальных уровней модели Фридрихса с двумерным возмущением

Расулов Т.Х., Бахронов Б.И.
Бухарский государственный университет, г. Бухара, Узбекистан

Пусть $\mathbb{T}^3 :\equiv (-\pi;\pi]^3$ – трехмерный тор и $L_2(\mathbb{T}^3)$ гильбертова пространство квадратично- интегрируемых (комплексно-значных) функций, определенных на $\mathbb{T}^3$.

Рассмотрим модель Фридрихса H, действующий в гильбертовом пространстве $L_2(\mathbb{T}^3)$ по формуле $H := H_0 - V_1 + V_2$, где операторы H_0 и V_α, $\alpha = 1,2$ определяются по формулам:

$$(H_0 f)(p) = u(p)f(p), \quad (V_\alpha f)(p) = \mu_\alpha v_\alpha(p) \int_{\mathbb{T}^3} v_\alpha(t)f(t)dt, \quad \alpha = 1,2.$$

Здесь $u(\cdot)$ и $v_\alpha(\cdot)$, $\alpha = 1,2$ -вещественнозначные, непрерывные функции на $\mathbb{T}^3$. Причем, функция $u(\cdot)$ имеет единственный невырожденный минимум в точке $p_1 \in \mathbb{T}^3$ и единственный невырожденный максимум в точке $p_2 \in \mathbb{T}^3$, а функция $v_\alpha(\cdot)$ имеет непрерывные частные производные до третьего порядка в окрестности точки $p_\alpha \in \mathbb{T}^3$. Предположим также, что $\text{mes}(\text{supp}\{v_1(\cdot)\} \cap \text{supp}\{v_2(\cdot)\}) = 0$.

Положим $E_1 := \min\limits_{p\in\mathbb{T}^3} u(p)$, $E_2 := \max\limits_{p\in\mathbb{T}^3} u(p)$ и

$$\mu_\alpha^0 := (-1)^{\alpha+1} \left(\int_{\mathbb{T}^3} \frac{v_\alpha^2(t)dt}{u(t) - E_\alpha} \right)^{-1}, \quad \alpha = 1,2.$$

Пусть $C(\mathbb{T}^3)$ – банахово пространство непрерывных функций, определенных на $\mathbb{T}^3$.

Определение 1. *Пусть $\alpha = 1, 2$. Говорят, что оператор H имеет виртуальный уровень в точке $z = E_\alpha$ (резонанс с энергией E_α), если число 1 является собственным значением оператора*

$$(G_\alpha \psi_\alpha)(p) = \int_{\mathbb{T}^3} \frac{\mu_1 v_1(p) v_1(t) - \mu_2 v_2(p) v_2(t)}{u(t) - E_\alpha} \psi_\alpha(t) dt, \quad \psi \in C(\mathbb{T}^3)$$

и по крайней мере одна (с точностью до константы) соответствующая собственная функция ψ_α удовлетворяет условию $\psi_\alpha(p_\alpha) \neq 0$.

Основным результатом настоящей работы является следующая

Теорема. *Пусть $\alpha = 1, 2$.*

А) *Число $z = E_\alpha$ является собственным значением оператора H тогда и только тогда, когда $\mu = \mu_\alpha^0$ и $v_\alpha(p_\alpha) = 0$.*

Б) *Оператор H имеет виртуальный уровень в точке $z = E_\alpha$ тогда и только тогда, когда $\mu = \mu_\alpha^0$ и $v_\alpha(p_\alpha) \neq 0$.*

Наличие собственных значений обобщенной модели Фридрихса в нецелочисленной решетке

Расулов Т.Х., Неъматова Ш.Б.

Бухарский государственный университет, г. Бухара, Узбекистан

Для каждого фиксированного $h > 0$ через $\mathbb{T}_h^{\mathrm{d}}$ обозначим d-мерный куб $(-\pi/h; \pi/h]^{\mathrm{d}}$ - с соответствующим отождествлением противоположных граней. Пусть $L_2(\mathbb{T}_h^{\mathrm{d}})$ - гильбертово пространство квадратично-интегрируемых (комплекснозначных) функций, определенных на $\mathbb{T}_h^{\mathrm{d}}$. Обозначим через $\mathcal{H}$ прямую сумму пространств $\mathcal{H}_0 := \mathbb{C}$ и $\mathcal{H}_1 := L_2(\mathbb{T}_h^{\mathrm{d}})$, т.е. $\mathcal{H} := \mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1$.

Рассмотрим обобщенную модель Фридрихса $\mathcal{A}$, действующую в $\mathcal{H}$ по правилу

$$\mathcal{A} := \begin{pmatrix} A_{00} & A_{01} \\ A_{01}^* & A_{11} \end{pmatrix},$$

с матричными элементами $A_{ij} : \mathcal{H}_j \to \mathcal{H}_i$, $i \leq j$, $i, j = 0, 1$:

$$A_{00} f_0 = -\varepsilon f_0, A_{01} f_1 = \alpha \int_{\mathbb{T}_h^{\mathrm{d}}} v(t) f_1(t) dt, (A_{11} f_1)(x) = (-\varepsilon + w(x)) f_1(x).$$

Здесь ε–положительное число, $\alpha > 0$–параметр взаимодействия, $v(\cdot)$ и $w(\cdot)$ вещественно-значные непрерывные функции на $\mathbb{T}_h^{\mathrm{d}}$, причем имеет место равенство $\min\limits_{x \in \mathbb{T}_h^{\mathrm{d}}} w(x) = 0$. Очевидно, что при этих предположениях оператор $\mathcal{A}$ ограничен и самосопряжён в $\mathcal{H}$.

Пусть $M_h := \max\limits_{x\in\mathbb{T}^{\mathrm{d}}_h} w(x)$. С целью исследования собственных значений оператора $\mathcal{A}$ предположим, что

$$\int_{\mathbb{T}^{\mathrm{d}}_h} \frac{v^2(t)dt}{M_h - w(t)} < \infty$$

и положим

$$\alpha_0(h) := \sqrt{M_h}\left(\int_{\mathbb{T}^{\mathrm{d}}_h} \frac{v^2(t)dt}{M_h - w(t)}\right)^{-1/2}.$$

Основным результатом настоящей работы является следующая

Теорема. *При всех значениях $\alpha > 0$ и $h > 0$ оператор $\mathcal{A}$ имеет не менее одного и не более двух собственных значений. Более того, если $\alpha \in (0;\alpha_0(h)]$, то оператор $\mathcal{A}$ имеет единственное простое (изолированное) собственное значение и оно лежит левее $-\varepsilon$, а при $\alpha \in (\alpha_0(h);+\infty)$ оператор $\mathcal{A}$ имеет два собственных значений, лежащих левее $-\varepsilon$ и правее $M_h - \varepsilon$, соответственно.*

О свойствах обобщенного оператора Данкла

Рахимова А.И.[1], **Напалков В.В.**[1,2]
[1]БашГУ, г. Уфа, Россия,
[2]Институт математики с ВЦ УФИЦ РАН, г. Уфа, Россия

Обобщенный оператор Данкла Λ играет важную роль в математической физике. Его изучению посвящены множество работ, в том числе статьи [1, 2].

Оператор Λ, действующий на целую функцию $f(z) \in H(\mathbb{C})$, определяется в следующем виде:

$$\Lambda f(z) = \frac{d}{dz}f(z) + \frac{c}{z}\sum_{j=0}^{m-1}\alpha_j f(\alpha_j z),\ c > 0, \alpha_j = e^{\frac{2\pi i j}{m}},\ j = (0; m-1).$$

Действие оператора Λ^k на данную функцию можно записать через формулу $\Lambda^k f(z) = \sum\limits_{n=k}^{\infty} a_n p(n)p(n-1)...p(n-k+1)z^{n-k},\ k \in \mathbb{N}$, где коэффициенты $p(k)$ имеют вид $p(k) = k + c\sum\limits_{j=0}^{m-1} e^{\frac{2\pi i j(k+1)}{m}}$.

Теорема 1. Обобщенный оператор Данкла n-го порядка Λ^n, где n — конечное натуральное число, отображает пространство целых функций $H(\mathbb{C})$ в то же самое пространство $H(\mathbb{C})$. Образ оператора $\Lambda f(z)$ регулярен в круге аналитичности исходной функции $f(z)$.

Теорема 2. Сопряженный оператор к оператору Λ определяется как оператор умножения на переменную z $\Lambda^* = z\cdot$.

Оператор Λ является оператором Гельфонда-Леонтьева, порожденным функцией $g(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{p(1)p(2)...p(k)}$. Также он может рассматриваться как оператор обобщенного дифференцирования с порождающими коэффициентами $m_n = p(n), n = (0;\infty)$.

[1] Напалков В.В., Напалков В.В. (мл.) Операторы Данкла как операторы свертки // Доклады Академии наук, 2008. — Т. 423. — № 3. — С. 300 – 302.

[2] Карамов И.И., Напалков В.В. Обобщенный оператор Данкла // Уфимский математический журнал, 2014. — Т. 6. — № 1. — С. 59 – 68.

The Basicity of the System of Cosines in the Grand-Sobolev Spaces

Salmanov V.F.[a,b], **Nurieva S.A.**[c]

[a]Azerbaijan State Oil and Industry University, Baku, Azerbaijan; [b]Institute of Mathematics and Mechanics of NAS of Azerbaijan, Baku, Azerbaijan; [c]Azerbaijan Tourism and Management University, Baku, Azerbaijan

Let $1 < p < +\infty$. Space of measurable functions f on $(a,b) \subset R$ such that

$$\|f\|_{p)} = \sup_{0<\varepsilon<p-1} \left(\frac{\varepsilon}{|b-a|} \int_a^b |f(t)|^{p-\varepsilon} dt \right)^{\frac{1}{p-\varepsilon}} < +\infty, \tag{1}$$

is called $L_{p)}(a,b)$ Grang-Lebesgue space [1] . Similarly, the Grand-Sobolev space [2] $W^1_{p)}(a,b) = \{f : f, f' \in L_{p)}(a,b)\}$ is introduced with a norm

$$\|f\|_{W_{p)}} = \|f\|_{p)} + \|f'\|_{p)}. \tag{2}$$

It is known that this is not separable Banach space. Denote by $\tilde{G}W^1_{p)}(a,b)$ the set of all functions from $W^1_{p)}(a,b)$ for which $\|\hat{f}'(\cdot+\delta) - \hat{f}'(\cdot)\| \to 0$, for $\delta \to 0$, where

$$\hat{f}(t) = \begin{cases} f(t), t \in (a,b), \\ \\ 0, t \notin (a,b) \end{cases}$$

It is clear that $\tilde{G}W^1_{p)}(a,b)$ is a manifold in $W^1_{p)}(a,b)$. Let $GW^1_{p)}(a,b)$ be a closure of $\tilde{G}W^1_{p)}(a,b)$ with respect to the norm (2).

Theorem. *The system* $t \cup \{cos\, nt\}_{n\geq 0}$ *forms a basis for the space* $GW^1_{p)}(0,\pi)$.

[1] T. Iwaniec, C. Sbordone, On the integrability of the Jacobian under minimal hypotheses, Arch. Rational Mech. Anal., **119** (1992), 129-143.

[2] L. Donofrio, C.Sbordone, R. Schiattarella, Grand Sobolev spaces and their application in geometric function theory and PDEs. J. Fixed Point Theory Appl., **13** (2013), 309-340.

О квази-строго невольтеровской стохастической операторе

Хамраев А.Ю., Абсаматов З.А.

Каршинский государственный университет, Каршинский инженерно-экономический институт, г. Карши, Узбекистан

Результаты настоящей работы показывают, что динамика квази-строго невольтеровских операторов намного богаче, чем динамика строго невольтеровских операторов [1]. Следовательно, каждый квази-строго невольтеровский квадратичный оператор является интересным примером в теории многомерных нелинейных динамических систем с разнообразным поведением траекторий. Во первых дается определение квази-строго невольтеровского оператора и описывается вид произвольного квази-строго невольтеровского оператора на двумерном симплексе S^2 . Во вторых изучены неподвижные, периодические и предельные точки квази-строго невольтеровского оператора на S^2. Доказано, что существуют две неподвижные и континуальное множество 2-периодических точек. Все 2-периодические точки являются притягивающими. Одна из неподвижных точек является отталкивающей.

Пусть $V : S^{n-1} \to S^{n-1}$ квадратичный стохастический оператор (К.С.О), определенный на симплексе

$$S^{n-1} = \left\{ x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in R^n : x_i \geq 0, i = 1, 2, ...n, \sum_{i=1}^{n} x_i = 1 \right\},$$

т.е. $(Vx)_k = x'_k = \sum\limits_{i,j=1}^{n} P_{ij,k} x_i x_j, k = 1, 2, ..., n$, где $P_{ij,k} \geq 0$, $P_{ij,k} = P_{ji,k}$ и

$$\sum_{k=1}^{n} P_{ij,k} = 1, \forall i, j, k \in \{1, 2, ..., n\}.$$

К.С.О. называется строго невольтеровским, если

$$P_{ij,k} = 0, \quad \text{для всех } k \in \{i, j\}.$$

[1] У.У. Жамилов, У.А.Розиков О динамика строго невольтеровских квадратичных стохастических операторов на двумерном симплексе. Математический сборник, 2009, 200(9), 81-94.

Обратная задача рассеяния для уравнения Шредингера с дополнительным линейным потенциалом

Ханмамедов А.Х., Махмудова М.Г.
Бакинский государственный университет
Институт Математики и Механики НАН Азербайджана
agil_khanmamedov@yahoo.com

Рассмотрим уравнение Шредингера вида

$$-y'' + (x + q(x))y = \lambda y \ \ -\infty < x < \infty, \tag{1}$$

в которой вещественный потенциал $q(x)$ непрерывно дифференцируем, и удовлетворяет условиям

$$\int_{-\infty}^{0} e^{2|x|^{3/2}} |xq(x)| dx + \int_{0}^{\infty} |xq(x)| dx < \infty. \tag{2}$$

В настоящей работе показано, что при помощи формализма Гельфанда-Левитана изучена обратная задача рассеяния для уравнения (1). Отметим, что ранее эта задача рассматривалась в работах [1-3]. В то же время открытым остался вопрос об основном уравнении для левого конца, отсутствие которого не позволяет сделать вывод о поведении на $-\infty$ восстанавливаемого потенциала (см. [4]). Авторам удалось получить основное интегральное уравнение Гельфанда-Левитана для левого конца. С этой целью построен также оператор преобразования с условием на $-\infty$.

[1] F. Calogero, A. Degasperis, “Inverse spectral problem for the one-dimensional Schrodinger equation with an additional linear potential”, Lettere Al Nuovo Cimento, 23:4(1978), 143–149.

[2] Li. Yishen “One special inverse problem of the second order differential equation on the whole real axis”, Chin. Ann. of Math., 2:2(1981), 147-155.

[3] A. P. Kachalov and Ya. V. Kurylev, “ The method of transformation operators in the inverse scattering problem. The one-dimensional Stark effect”, J. Soviet Mathematics, 57:3(1991), 3111–3122.

[4] A. Its, V.Sukhanov “A Riemann–Hilbert approach to the inverse problem for the Stark operator on the line”, Inverse Problems, 32 (2016), 1-28.

Об одном методе исследования краевой задачи для нелинейных дифференциальных уравнений теории пологих оболочек типа Тимошенко

Харасова Л.С.
Набережночелнинский институт ФГАОУ ВО К(П)ФУ,
г. Набережные Челны, Россия

В работе исследуется разрешимость краевой задачи A для системы пяти нелинейных дифференциальных уравнений с частными производными второго порядка, представляющих собой уравнения равновесия упругих пологих однородных изотропных оболочек с шарнирно опертыми краями в рамках сдвиговой модели С.П. Тимошенко [1], [2].

В основе метода исследования лежат интегральные представления для искомого решения, содержащие произвольные голоморфные функции. Для их нахождения в [1], [2] используются явные представления решений задачи Римана - Гильберта в единичном круге. Поэтому область либо с самого начала предполагается единичным кругом [1], либо конформно отображается на единичный круг [2]. В данной работе голоморфные функции ищутся в виде интегралов типа Коши с действительными плотностями, которые находятся как решения системы одномерных сингулярных уравнений. Построенные таким образом интегральные представления позволяют свести исходную задачу A к одному операторному уравнению $f_3 + G_* f_3 = 0$ с нелинейным ограниченным оператором $G_* f_3$ в $L_p(\Omega), 2 < p < 2/(1-\beta)$, разрешимость которого устанавливается при помощи принципа сжатых отображений.

Основной результат работы приводится в следующей теореме.

Теорема. Пусть выполнены следующие условия: а) Ω - односвязная область с границей $\Gamma \in C^1_{2\beta}$; б) внешние силы $R^i(i = \overline{1,3}), L^k(k = 1,2) \in L_p(\Omega), P^2, N^2 \in C_\beta(\Gamma), 0 < \beta < 1/2$. Тогда для разрешимости задачи A необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие

$$\int_\Gamma P^2(s)ds + \int\int_\Omega R^2 d\alpha^1 d\alpha^2 = 0.$$

В случае его выполнения задача A имеет обобщенное решение в пространстве соболева $W_p^{(2)}(\Omega)$ с точностья до постоянного слагаемого.

[1] Тимергалиев С.Н., Углов А.Н., Харасова Л.С. О разрешимости геометрически нелинейных краевых задач для пологих оболочек типа Тимошенко с шарнирно опертыми краями. Известия вузов. Математика.2015.№ 5.С.49-61.

[2] Timergaliev S.N., Kharasova L.S. On the existence of solutions of one nonlinear boundary-value problem for shallow shells of Timoshenko type with simply supported edges. IOP Conf. Series: Materials Science and Engineering 158(2016) 012092.PP.1-7.

О приближении почти–периодических функций Степанова средними Марцинкевича

Хасанов Ю.Х., Сафарзода Э.

Российско–Таджикский Славянский университет, г.Душанбе, Республика Таджикистан

Величина

$$\sup_{-\infty<x<\infty}\left\{\frac{1}{l}\int_x^{x+l}|f(x)-g(x)|^p dx\right\}^{\frac{1}{p}}<\infty$$

называется S — расстоянием порядка p $(p\geq 1)$, соответствующим длине l. Пространство суммируемых в каждом конечном интервале функций с так определенным расстоянием называется пространством Степанова или S_p —пространством.

Пусть $f(x)\in S_p$ с рядом Фурье вида

$$f(x)\sim\sum_{n=-\infty}^{\infty}A_n exp(i\lambda_n x) \tag{1}$$

показатели Фурье, которых имеют единственную предельную точку в бесконечности, т.е.

$$\lambda_0=0,\ \ \lambda_{-n}=-\lambda_n,\ \ \lim_{n\to\infty}\lambda_n=\infty,\ \ \lambda_n<\lambda_{n+1}\ \ (n=1,2,\ldots);$$

$$A_n=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}f(x)exp(-i\lambda_n x)dx$$

—коэффициенты Фурье функции $f(x)$,

$$S_\sigma(f;x)=\sum_{|\lambda_n|\leq\sigma}A_n exp(i\lambda_n x)$$

—частичная сумма ряда (1).

Пусть $\Phi_\sigma(t)$ — произвольная, вещественная непрерывная четная функция, и такая, что

$$\Phi_\sigma(0) = 1;\;\; \Phi_\sigma(t) = 0 \;\; (|t| \le \sigma);\;\; \psi_\sigma(t) \in L(-\infty, \infty),$$

где

$$\psi_\sigma(u) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_\sigma(t) exp(-iut) dt.$$

Положим

$$U_\sigma(f; \varphi; x) = \sum_{|\lambda_n| \le \sigma} A_n \Phi_\sigma(\lambda_n) exp(i\lambda_n x).$$

Нетрудно проверить, что если $f(x) \in S_p$, то

$$U_\sigma(f; \varphi; x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x+t) \Phi_\sigma(t) dt. \tag{2}$$

Пусть $f(x) \in S_p$ с нормой

$$\|f(x)\|_{S_p} = \sup_{-\infty < x < \infty} \left\{ \frac{1}{l} \int_x^{x+l} |f(x)|^p dx \right\}^{\frac{1}{p}}.$$

Рассмотрим величину

$$R(f; x) = \|U_\sigma(f; \varphi; x) - f(x)\|_{S_p}, \tag{3}$$

в которой величина $U_\sigma(f; \varphi; x)$ определена соотношением (2),

$$\Phi_\sigma(t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \varphi_\sigma(u) K_u(t) du,\;\; K_u(t) = 4\frac{sin(ut)}{t},$$

$\varphi_\sigma(u)$ — некоторая четная функция, абсолютно интегрируемая на интервале $(0, \infty)$ при каждом фиксированном $\sigma > 0$ и такая, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\Phi_\sigma(t)| dt < \infty,\;\; \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_\sigma(t) dt = 1.$$

В работе исследуется вопрос о поведении величины (3) в зависимости от скорости стремления к нулю наилучшего приближения

$$E_\sigma(f)_{S_p} = \|f(x) - T_\sigma(x)\|_{S_p},$$

где

$$T_\sigma(x) = \sum_{|\lambda_n| \le \sigma} A_n exp(i\lambda_n x),$$

когда при $\sigma \to \infty$ в качестве $\varphi_\sigma(u)$ выбраны функции

$$\varphi_\sigma(u) = \begin{cases} 1, & \text{при } |u| < a \ \ (0 < a < \sigma); \\ \frac{\sigma - |u|}{\sigma - a}, & \text{при } a < |u| < \sigma; \\ 0, & \text{при } |u| \geq \sigma. \end{cases} \tag{4}$$

Теорема. *Если $f(x) \in S_p$ и функция $\varphi_\sigma(u) = \varphi_{\sigma,a}(u)$ определена равенством (4), то при любом Λ $(0 < \Lambda < a < \sigma)$ справедлива оценка*

$$R(f; \varphi_{\sigma,a}) \leq C \frac{\sigma + a}{\sigma - a} E_\Lambda(f)_B,$$

где C — константа.

Задача Гильберта с конечным числом точек завихрения логарифмического порядка

Фатыхов А.Х., Шабалин П.Л.

Казанский государственный архитектурно-строительный университет, г.Казань, Россия

Рассмотрена однородная краевая задача Гильберта теории аналитических функций с краевым условием на единичной окружности L, коэффициенты краевого условия непрерывны по Гельдеру всюду, кроме конечного числа точек двустороннего завихрения, в которых аргумент функции коэффициентов краевого условия имеет разрывы второго рода логарифмического порядка. Именно, ищется функция $\Phi(z)$, по краевому условию

$$a(t)\Re\Phi(t) - b(t)\Im\Phi(t) = 0, \ t \in L, \ t \neq t_j, \ j = \overline{1, n},$$

где $\nu(\theta) = \arg[a(t) - ib(t)]$, $t = e^{i\theta}$, и представлена формулой

$$\nu(\theta) = \sum_{j=1}^{n} \nu_j(\theta) + \widetilde{\nu}(\theta), \quad \nu_j(\theta) = \left\{ \begin{array}{ll} \nu_j^+ \ln^{\alpha_j} \dfrac{1}{|\sin((\theta - \theta_j)/2)|}, & 0 \leq \theta < \theta_j, \\ \nu_j^- \ln^{\alpha_j} \dfrac{1}{|\sin((\theta - \theta_j)/2)|}, & \theta_j < \theta \leq 2\pi. \end{array} \right.$$

В классе аналитических и ограниченных в единичном круге функций выписана формула общего решения и получена полная картина разрешимости задачи.

Задачу Гильберта с двусторонним завихрением логарифмического порядка в одной точке решили и исследовали методом Н.И. Мусхелишвили – П.Ю. Алекна и методом Ф.Д. Гахова – А.Г.Алехно [1].

[1] Алехно А.Г. Краевая задача Гильберта с бесконечным индексом логарифмического порядка. Докл. АН БССР. Т. 53, No 2 (2009). С. 5-10.

Асимптотически точные формулы для семейства констант Лебега оператора Лагранжа

Шакиров И.А.

ФГБОУ ВО НГПУ, г. Набережные Челны, Россия

Для констант Лебега λ_n^*, λ_n двух классических интерполяционных полиномов Лагранжа в работах [1], [2] получены асимптотически точные формулы

$$\lambda_n^* = (2/\pi)\ln n + \alpha_0, \quad \lambda_n = (2/\pi)\ln n + \beta_0, \quad n \to +\infty, \tag{1}$$

где $\alpha_0 = (2/\pi)[\gamma + \ln(8/\pi)] = 0.962522...$, $\beta_0 = (2/\pi)[\gamma + \ln(16/\pi)] = 1.4037994...$, γ - известная константа Эйлера. В данной работе аналогичная задача рассматривается для констант Лебега $\lambda_n^{\pm c}(c \geq 0, \lambda_n^0 \equiv \lambda_n^*)$, соответствующих семейству полиномов Лагранжа [3]

$$\Phi_n^c(x,t) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{2n} x(t_k) D_n^{\pm c}(t_k - t) (D_n^{\pm c}(u) \equiv \frac{1}{2}\sin nu(\operatorname{ctg}\frac{u}{2} \mp c), c \geq 0, n \in N),$$

интерполирующих исходную функцию $x = x(t), t \in [0, 2\pi]$ в равномерно распределенных на периоде узлах $t_k = \pi k/n, k = \overline{1, 2n}$.

Заметим, что явно выраженные формулы для констант Лебега $\lambda_n^{\pm c}(c > 0)$ до сих пор не известны. Используя строгую двустороннюю их оценку вида

$$\lambda_n^* + c(1 - \frac{2}{\pi}\operatorname{arcctg} c) - \frac{1}{\pi}\ln(1 + c^2) < \lambda_n^{\pm c} < \lambda_n^* +$$
$$+ c[1 + \frac{1}{2n} - \frac{2}{\pi}\operatorname{arcctg} c] - \frac{1}{\pi}\ln(1 + c^2),$$

здесь доказана следующая теорема.

Теорема. Для констанат Лебега $\lambda_n^{\pm c}(c \geq 0)$ при произвольно выбранном неотрицательном значении параметра c верна асимптотически точная формула

$$\lambda_n^{\pm c} = \frac{2}{\pi}\ln n + \alpha_0 + c(1 - \frac{2}{\pi}\operatorname{arctg} c) - \frac{1}{\pi}\ln(1 + c^2), \quad n \to +\infty. \tag{2}$$

Замечание. При значении параметра $c = 0$ более общая формула (2) полностью согласована с первой асимптотически точной формулой из (1).

[1] Rivlin T.J. The Lebesgue constants for polynomial interpolation. Functional Analysis and its Application. H.C.Garnier et al. eds. Springer-Verlag. 1974. P. 422-437.

[2] Шакиров И.А. О предельном значении остаточного члена константы Лебега, соответствующей тригонометрическому полиному Лагранжа. Известия Сарат. ун-та. Новая серия. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2016. Т. 16, вып. 3, с. 302-310.

[3] Шакиров И.А. О тригонометрическом интерполяционном полиноме Лагранжа, имеющем минимальную норму как оператор из $C_{2\pi}$ в $C_{2\pi}$. Известия вузов. Математика. 2010, вып.10, с. 60-68.

Научное издание

**КОМПЛЕКСНЫЙ АНАЛИЗ
И ТЕОРИЯ АППРОКСИМАЦИЙ**

***Сборник тезисов
Международной конференции
(Уфа, 29 – 31 мая 2019 г.)***

Лицензия на издательскую деятельность
ЛР № 021319 от 05.01.99 г.

Подписано в печать 30.05.2019 г. Формат 60х84/16.
Усл. печ. л. 2,99. Уч.-изд. л. 3,12.
Тираж 70 экз. Изд. № 31. Заказ 121.

*Редакционно-издательский центр
Башкирского государственного университета
450076, РБ, г. Уфа, ул. Заки Валиди, 32.*

*Отпечатано на множительном участке
Башкирского государственного университета
450076, РБ, г. Уфа, ул. Заки Валиди, 32.*