МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РФ
УФИМСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ЦЕНТР РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК
БАШКИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
БАШКИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. М. АКМУЛЛЫ
НАУЧНО-ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЦЕНТР КАЗАНСКОГО ФЕДЕРАЛЬНОГО УНИВЕРСИТЕТА
ЧЕЛЯБИНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
АКАДЕМИЯ НАУК РЕСПУБЛИКИ БАШКОРТОСТАН

КОМПЛЕКСНЫЙ АНАЛИЗ, МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА И НЕЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Сборник тезисов
Международной научной конференции
(оз. Банное, 10 – 14 марта 2020 г.)

УФА
РИЦ БашГУ
2020

УДК 51
ББК 22.1
К63

К63 **Комплексный анализ, математическая физика и нелинейные уравнения:** сборник тезисов Международной научной конференции (оз. Банное, 10 – 14 марта 2020 г.) / отв. ред. Р.Н. Гарифуллин. – Уфа: РИЦ БашГУ, 2020. – 76 с.
ISBN 978-5-7477-5068-5

Представленные в сборнике тезисы посвящены различным областям фундаментальной и прикладной математики. В большей части работ исследуются различные постановки нелинейных задач. Также рассматриваются задачи теории аппроксимаций, обратные задачи, уравнения с дробными производными.

Тезисы докладов воспроизводятся с представленных авторами оригиналов.

УДК 51
ББК 22.1

ISBN 978-5-7477-5068-5

MINISTRY OF SCIENCE AND HIGHER EDUCATION OF THE RUSSIAN FEDERATION

UFA FEDERAL RESEARCH CENTRE OF RUSSIAN ACADEMY OF SCIENCES

BASHKIR STATE UNIVERSITY

BASHKIR STATE PEDAGOGICAL UNIVERSITY NAMED AFTER M. AKMULLA

REGIONAL SCIENTIFIC AND EDUCATIONAL MATHEMATICAL CENTER OF KAZAN FEDERAL UNIVERSITY

CHELYABINSK STATE UNIVERSITY

ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF BASHKORTOSTAN

COMPLEX ANALYSIS, MATHEMATICAL PHYSICS AND NONLINEAR EQUATIONS

Book of abstracts
of the International conference
Bannoe Lake, Russia
March 10 - 14, 2020

UFA - 2020

UDC 51
BBK 22.1

Complex Analysis, Mathematical Physics and Nonlinear Equations: Book of Abstracts of the International Conference. – Ufa, Russia: RIC BashSU, 2020. – 76 p.
978-5-7477-5068-5

Presented in the collection abstracts are devoted to various areas of fundamental and applied mathematics. In most of the works, different formulations of nonlinear problems are investigated. Also problems of approximation theory, inverse problems and equations with fractional derivatives are considered.

Abstracts are reproduced from the originals submitted by the authors.

UDC 51
BBK 22.1

ISBN 978-5-7477-5068-5

Содержание

Transformation operators for the Schrodinger equation with a linearly increasing potential

Abbasova Kh.E.
Azerbaijan State University of Economics, Baku, Azerbaijan

In many aspects of the theory of inverse problems of spectral analysis, an important role is played by so-called transformation operators (see [1], [2] and the references therein).

We consider the Schrodinger equation

$$-y'' + |x|\, y + q(x)\, y = \lambda y, \ -\infty < x < \infty, \quad \lambda \in C. \tag{1}$$

where the real potential $q(x)$ satisfies the conditions $q(x) \in C(-\infty, +\infty)$, $\int_{-\infty}^{\infty} |xq(x)|\, dx < \infty$.

In the present paper, using transformation operators, we obtain representations of solutions of the equation (1) with conditions at infinity.

Let $Ai(z)$ and $Bi(z)$ are functions Airy first and second kind respectively (see [2]) and

$$\psi_{\pm}(x,\lambda) = \left\{ \begin{array}{c} Ai(\pm x - \lambda), \pm x \geq 0, \\ -\pi \left(Ai(-\lambda)\, Bi(-\lambda)\right)' Ai(\mp x - \lambda) - \\ -2\pi Ai(-\lambda)\, Ai'(-\lambda)\, Bi(\mp x - \lambda), \pm x < 0. \end{array} \right.$$

Theorem. *For any λ from the complex plane the equation (1) has solutions $f_{\pm}(x,\lambda)$ which can be represented in the form*

$$f_{\pm}(x,\lambda) = \psi_{\pm}(x,\lambda) \pm \int_x^{\pm\infty} K_{\pm}(x,t)\ \psi_{\pm}(t,\lambda)\, dt,$$

where kernels $K_{\pm}(x,t)$ are continuous function and satisfy relations

$$K_{\pm}(x,t) = O\left(\sigma_{\pm}\left(\frac{x+t}{2}\right)\right), x+t \to \pm\infty,$$

$$\sigma_{\pm}(x) = \pm \int_x^{\pm\infty} |\mp t + |t| + q(t)|\, dt,$$

$$K_{\pm}(x,x) = \pm \frac{1}{2} \int_x^{\pm\infty} [|t| \mp t + q\ (t)]\ dt.$$

[1] Levitan B. M. Inverse Sturm–Liouville problems. M.: Nauka, 1984.

[2] Yishen Li. One special inverse problem of the second-order differential equation for the whole real axis. Chinese Ann. Math.,1981, **2** (2),pp. 147–155.

Оценки длины фазовой траектории классической частицы в потенциале Пёшля-Теллера

Алексеева Е.С., Рассадин А.Э.

Лаборатория бесконечномерного анализа и математической физики механико-математического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова, г.Москва, Россия

В данной работе на основе результатов статьи [1] доказана

Теорема. Пусть $L(h)$ — длина фазовой траектории, соответствующая уровню энергии $h > 0$ гамильтоновой системы:

$$H(x,p) = \frac{p^2}{2} + \tan^2 x, \tag{1}$$

тогда для $L(h)$ справедливы следующие оценки снизу и сверху:

$$2^{\frac{7}{4}}\,\pi\,\sqrt{\sqrt{1+h}-1} \le L(h) \le \pi\,\frac{\sqrt{4\,(\sqrt{1+h}-1)+h\,(3\,h+4)}}{\sqrt[4]{1+h}}\,. \tag{2}$$

Подчеркнём, что входящая в неравенства (2) величина $L(h)$ выражается гиперэллиптическим интегралом:

$$L(h) = 4\,\sqrt{h\,(1+h)}\int_0^1 \sqrt{\frac{1+h+(1-2\,h)\,z^2+h\,z^4}{(1-z^2)\,(1+h-h\,z^2)^3}}\,dz\,.$$

Полученный результат может быть использован как в теории классических систем вида (1) (см. [2] и ссылки там), так и при анализе задач квантовой механики и статистической физики [3].

[1] Алексеева Е.С., Рассадин А.Э. Длина фазовой траектории и коэффициенты нелинейных искажений наблюдаемых для классической частицы в потенциале Калоджеро // Математическое и компьютерное моделирование естественно-научных и социальных проблем: материалы XIII Международной научно-технической конференция молодых специалистов, аспирантов и студентов (Россия, г. Пенза, 3-6 июня 2019 г.) / под ред. д. ф.-м. н., проф. И.В. Бойкова. - Пенза: Изд-во ПГУ, 2019. - 304 с. С. 3-9.

[2] Калякин Л.А. О частоте нелинейного осциллятора // Итоги науки и техн. Сер. Соврем. мат. и ее прил. Темат. обз., 2019. Т. 163, с. 15–24.

[3] Орлов Ю.Н., Сакбаев В.Ж., Смолянов О.Г. Скорость сходимости фейнмановских аппроксимаций полугрупп, порождаемых гамильтонианом осциллятора // ТМФ. 2012, Т. 172, N 1, с. 122–137.

Существование и единственность решения задачи типа Коши для невырожденного полулинейного уравнения

Авилович А.С., Федоров В.Е.
Челябинский государственный университет, г.Челябинск, Россия

Пусть $m-1<\alpha\le m\in\mathbb{N}$, D_t^α — дробная производная Римана — Лиувилля, $\mathcal{Z}$ — банахово пространство, через $\mathcal{L}(\mathcal{Z})$ обозначим банахово пространство линейных ограниченных операторов на $\mathcal{Z}$, Z — открытое множество в $\mathbb{R}\times\mathcal{Z}^{m-1}$, $A\in\mathcal{C}l(\mathcal{Z})$, т.е. линейный замкнутый плотно определенный в банаховом пространстве $\mathcal{Z}$ оператор, $B:Z\to\mathcal{Z}$, $z_k\in\mathcal{Z}$, $k=0,1,\dots,m-1$, $t_0\in\mathbb{R}$. Через D_A будем обозначать область определения оператора $A\in\mathcal{C}l(\mathcal{Z})$, снабженную его нормой графика $\|\cdot\|_{D_A}=\|\cdot\|_{\mathcal{Z}}+\|A\cdot\|_{\mathcal{Z}}$. В силу замкнутости оператора A множество D_A с нормой графика является банаховым пространством. Введем обозначения $\overline{x}:=(x_0,x_1,\dots,x_{m-1})\in\mathcal{Z}^m$.

Пусть $a>a_0\ge 0$, $\theta_0\in(\pi/2,\pi)$.

По определению [1] $A\in\mathcal{A}_\alpha(\theta_0,a_0)$, если

(i) для любого $\lambda\in S_{\theta_0,a_0}:=\{\mu\in\mathbb{C}:|\arg(\mu-a_0)|<\theta_0,\ \mu\ne a_0\}$ выполняется включение $\lambda^\alpha\in\rho(A)$;

(ii) для любых $\theta\in(\pi/2,\theta_0)$, $a>a_0$ найдется такое $K=K(\theta,a)>0$, что при всех $\lambda\in S_{\theta,a}$ $\|R_{\lambda^\alpha}(A)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})}\le\frac{K(\theta,a)}{|\lambda^{\alpha-1}(\lambda-a)|}$.

Рассмотрим задачу типа Коши для полулинейного уравнения

$$D_t^{\alpha-m+k}z(t_0)=z_k,\quad k=0,1,\dots,m-1,\tag{1}$$

$$D_t^\alpha z(t)=Az(t)+B(t,D_t^{\alpha-m}z(t),D_t^{\alpha-m+1}z(t),\dots,D_t^{\alpha-2}z(t)).\tag{2}$$

Теорема.

Пусть $\alpha>0$, $A\in\mathcal{A}_\alpha(\theta_0,a_0)$, $z_k\in D_A$, $k=0,1,\dots,m-1$, Z – открытое множество в $\mathbb{R}\times\mathcal{Z}^{m-1}$, $(t_0,z_0,z_1,\dots,z_{m-2})\in Z$, отображение $B\in C(Z;\mathcal{Z})$ является гельдеровым по t и локально липшицевым по $\bar{x}$. Тогда существует такое $t_1>t_0$, что задача (1), (2) имеет единственное решение на отрезке $[t_0,t_1]$.

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 19-31-90008

[1] Федоров В.Е., Романова Е.А., Дебуш А. Аналитические в секторе разрешающие семейства операторов вырожденных эволюционных уравнений дробного порядка // Сиб. журн. чистой и приклад. математики. 2016. Т. 16, № 2. С. 93–107.

The Cauchy problem for the Langmuir lattice with initial condition of step type

Aleskerov R.I.
Ganja State University, Ganja, Azerbaijan

It is known that the method of the inverse scattering problem allows a detailed study of the Cauchy problem for some nonlinear evolution equations (see [1], [2] and the literature therein).

For a sequence of positive functions$c_n = c_n\left(t\right), \, c_n \in C^{(1)}\left[0,\infty\right)$ we consider the Langmuir lattice

$$\dot{c}_n = c_n\left(c_{n-1} - c_{n+1}\right), \quad \cdot = \frac{d}{dt}, \, n \in Z. \tag{1}$$

For (1) we pose the following Cauchy problem with the initial condition

$$c_n\left(0\right) = c_n^0, \;\; n \in Z, \tag{2}$$

satisfying requirement

$$\sum_{n=-\infty}^{-1} |n| \, \left\{ \left|c_n^0 - 1\right| \right\} + \sum_{n=1}^{\infty} |n| \, \left\{ \left|c_n^0 - A\right| \right\} < \infty, \tag{3}$$

where$A > 0$. We will seek a solution $c_n = c_n\left(t\right)$ to problem (1) and (2), such that

$$\left\| \sum_{n=-\infty}^{-1} \left(1+|n|\right) \left|c_n\left(t\right) - 1\right| + \sum_{n=0}^{\infty} \left(1+|n|\right) \left|c_n\left(t\right) - A\right| \right\|_{C[0,T]} < \infty \tag{4}$$

for all $T > 0$.

In this paper the unique solvability of problem (1)-(2) in the class of functions (4) is proved.

Theorem. *The problem (1)-(2) has a unique solution in class of functions (4), if that condition (3) is satisfied.*

[1] Manakov S. V. Complete integrability and stochastization of discrete dynamical systems. Zh. Eksp. Teor. Fiz. 1974. **67:2**. pp.543–555.

[2] Vereshchagin V. L. Asymptotic expansion of the solution to the Cauchy problem for the Volterra chain with a step-like initial condition**.** Th. and Math. Phys. 1997. **111:3**. pp. 658-666 .

Математика: от практических нужд до теории и приложений в инженерно-технологической сфере.

Арсланбекова С.А.[1], Белоус Т.И.[2], Дик Е.Н.[1]
[1]ФГБОУ ВО БГАУ, [2]ФГБОУ ВО УГАТУ, Россия

С древних времен многие художники, изобретатели, ремесленники, торговцы и т.д., сами того не осознавая, занимались математикой – были математиками поневоле. Развитие всех форм деятельности человеческого обще-ства происходит под воздействием единых мотивов экономического развития. Это влияние сказывается в области математики, во множественности источников ее возникновения. Процесс этот явным образом подчинялся нематематическим определяющим мотивам, непосредственным образом служил целям, вызываемым нуждами экономики и государственного устройства общества. Математика возникла из практических нужд людей.

В настоящее время она представляет собой единое целое, хотя ее условно делят на фундаментальную и прикладную математику. На самом деле правильнее говорить о математике и ее приложениях.

В качестве использования математического аппарата для технологической деятельности, мы рассматриваем пример построения математической модели на предприятии пищевой промышленности.

Согласно теории дифференциальных уравнений, были проведены расчеты температуры остывания хлеба с течением времени, в результате которых была получена оптимальная температура свежей хлебной продукции с учетом транспортной активности доставки.

Дифференциальное уравнение $\frac{dT}{dt} = k(T - T_s)$ описывает скорость охлаждения хлеба, T — температура хлеба, T_s — температура окружающей среды, $T_s = 25^oC$. Его решение имеет вид: $T - 25 = Ce^{kt}$. Из предположений, что температура вынутого из печи хлеба в течение 20 минут падает от 100^oC до 60^oC, получили уравнение охлаждения хлеба $T = 75\left(\frac{7}{15}\right)^{\frac{t}{20}} + 25$. Рассчитали температуру хлеба через 50 минут доставки до потребителя: $T = 75\left(\frac{7}{15}\right)^{\frac{t}{20}} + 25 = 36,25^oC \approx 36^oC$.

Итак, через 50 минут хлеб охлаждается до температуры около 36^oC, и поступает к потребителю. Очевидно, что если уйдет больше времени на доставку продукта, то это ведет к потере его свойств и вкусовых качеств.

В настоящей работе предложена автоматизация процесса математических расчетов в прикладном пакете MathCAD.

Интегрирование одного дискретного аналога уравнения Кортевега-де Фриза

Асадова Л.К.
Институт Математики и Механики НАНА, Баку, Азербайджан

Рассматривается следующая бесконечная система нелинейных эволюционных уравнений

$$\begin{array}{l} \dot{c}_n = c_n \left(\alpha \left(c_{n+1} - c_{n-1}\right) - \beta \left(\left(c_{n+1} - c_{n-1}\right) \sum_{k=0}^{2} c_{n+k}\right)\right) , \\ c_n = c_n\left(t\right), \, n \geq 0, \; c_{-1} = 0, \, t \in \left(0, \infty\right], \; \cdot = \frac{d}{dt}, \end{array} \qquad (1)$$

где α, β - действительные числа. Эта система впервые исследовалась в работе [1], где было установлено, что в континуальном пределе она переходит в уравнение Кортевега – де Фриза (КдФ) при $\alpha \neq 12\beta$, а при $\alpha = 12\beta$ - во второе уравнение в иерархии высших КдФ. При $\alpha = 1$, $\beta = 0$ система (1) представляет собой хорошо известную модель Вольтерра, которая методом обратной спектральной задачи исследовалась в работах многих авторов (см. [2]-[4]).

В настоящей работе доказано существование так называемого быстроубывающего решения системы уравнений (1). Методом обратной спектральной задачи указывается алгоритм нахождения решения системы уравнений (1).

[1] Богоявленский О.И. Некоторые конструкции интегрируемых динамических систем. Изв. АН СССР. сер. матем.. 1987. т.51. №4. с.737-767.

[2] Осипов А.С. Дискретный аналог уравнения Кортевега-де Фриза: интегрирование методом обратной задачи. Матем. заметки. 1994. т.56.№6. с.141-144.

[3] Teschl G. Jacobi operators and completely integrable nonlinear lattices. Math. Surv. and Monographs, 72. Amer. Math. Soc. Providence, RI, 2000.

[4] Ханмамедов Аг.Х. Начально-краевая задача для цепочки Вольтерра на полуоси с нулевым краевым условием. Докл . РАН. 2008. Т. 423. № 2. С. 170-172.

Новые механизмы стабилизации молекулярных отрицательных ионов

Асфандиаров Н.Л., Галеев Р.В., Муфтахов М.В., Нафикова Е.П., Пшеничнюк С.А., Рахмеев Р.Г.
Институт физики молекул и кристаллов УФИЦ РАН

Рассмотрены примеры драматических изменений геометрии молекулярных отрицательных ионов, приводящие к стабилизации энергии и масс-спектрометрическому наблюдению долгоживущих анионов. По-видимому, впервые подобный эффект был обнаружен на примере молекулы тетрахлорэтилена [1]. Позднее был найден ряд сходных случаев [2-7].

Нами был исследован ряд галогнпроизводных бифенила, нафталина и антрацена. Для фтор-замещенных производных подобное явление не обнаружено, но для бром-замещенных молекул потенциалы с двумя минимумами вполне типичны, см. рис. 1.

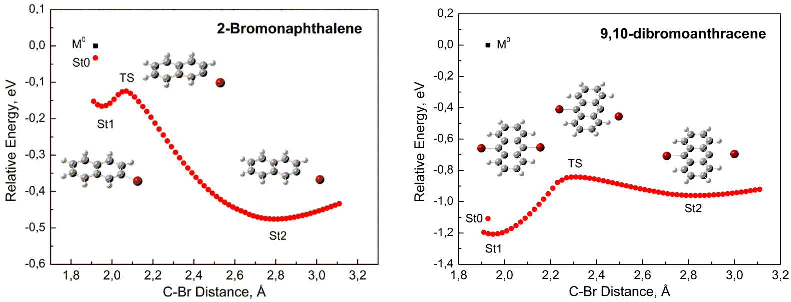

Рис. 1. Потенциальные кривые зависимости энергии анионов 2-бромонафталина и 9,10-дибромоантрацена как функция длины связи C-Br.

Очевидно, можно считать, что обнаружен новый механизм стабилизации молекулярных анионов, способный существенно увеличить их стабильность относительно распада по каналам автоотщепления электрона и распада на фрагменты.

Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ, грант № 19-13-00021.

[1] J. K. Olthoff, J.A. Tossel, J.H. Moore, J. Chem. Phys. **105**, 5627 (1985).

[2] S.A. Pshenichnyuk, A. Modelli, Phys. Chem. Chem. Phys. **15**, 9125 (2013).

[3] S.A. Pshenichnyuk, A. Modelli et al, J. Phys. Chem. B **120**, 12098 (2016)

[4] R. Schurmann, K. Tanzer et al, J. Phys. Chem B **8**, 5730 (2012).

[5] T. Sommerfeld, M.C. Davis, J. Chem. Phys. **149**, 084305 (2018).

[6] N.L. Asfandiarov, M.V. Muftakhov et al, J. Chem. Phys. **147**, 234302 (2017).

[7] N.L. Asfandiarov, S.A. Pshenichnyuk et al, J. Chem. Phys. **150**, 114304 (2019).

О нулях модифицированной функции Бесселя второго рода

Багирова С.М.[1], **Ханмамедов А.Х.**[2]

[1] Азербайджанский Государственный Аграрный Университет, Гянджа, Азербайджан

[2] Бакинский Государственный Университет, Баку, Азербайджан

Вопрос о нулях функций Бесселя детально изучен, когда они рассматриваются как функции от своих аргументов, т.е. при фиксированном индексе (см. [1] и имеющиеся там ссылки). Иначе обстоит дело для функций Бесселя, рассматриваемых как функции от индекса при фиксированном аргументе. В этом направлении отметим работу [2], в которой показано, что для положительных z нули ν_k функции Бесселя первого рода $J_\nu(z)$ вещественны, просты и асимптотически близки к отрицательным целым числам.

Рассмотрим модифицированное уравнение Бесселя

$$z^2u'' + zu' - \left(z^2 + \nu^2\right)u = 0 \tag{1}$$

и его решение $K_\nu(z)$, которое называется [1] модифицированной функцией Бесселя второго рода.

Теорема. При каждом фиксированном $z > 0$ функция $K_\nu(z)$ имеет счетное число простых чисто мнимых нулей $\pm i\nu_n$, $\nu_n > 0$, $n = 1, 2, \ldots$. Имеет место асимптотическая формула

$$\nu_n \sim \frac{\pi n}{\ln n},\ n \to +\infty.$$

[1] Керимов М. К. Исследования о нулях специальных функции Бесселя и методах их вычисления. IV. Неравенства, оценки, разложения и др. для нулей функций Бесселя. Ж. вычисл. матем. и матем. физ.2018.Т.58. №1.С. 3–41.

[2] Coulomb M. J. Sur les zéros des fonctions de Bessel considerees comme fonctions de 1 ordre. Bull. Sci. Math. 1936.V.60.P.297-302.

Properties of kinks and breathers in discrete Klein-Gordon equation free of the Peierls-Nabarro potential

Bebikhov Yu. V.[1], Dmitriev S.V.[2]

[1]Mirny Polytechnic Institute (branch) of North-Eastern Federal University, 678170 Mirny, Russia

[2]Institute of Molecule and Crystal Physics, UFRC, RAS, 450075 Ufa, Russia

The two major effects observed in collisions of the *continuum* ϕ^4 kinks are (i) the existence of critical collision velocity above which the kinks always emerge from the collision and (ii) the existence of the escape windows for multi-bounce collisions with the velocity below the critical one, associated with the energy exchange between the kink's internal and translational modes. The potential merger (for sufficiently low collision speeds) of the kink and antikink produces a bion with oscillation frequency ω_{B}, which constantly radiates energy, since its higher harmonics are always within the phonon spectrum. Similar effects have been observed in the discrete ϕ^4 kink-antikink collisions for relatively weak discreteness. Here we analyze kink-antikink collisions in the regime of strong discreteness considering an exceptional discretization of the ϕ^4 field equation where the static Peierls–Nabarro potential is precisely zero and the not-too-fast kinks can propagate practically radiating no energy [1, 2]. Several new effects are observed in this case, originating from the fact that the phonon band width is small for strongly discrete lattices and for even higher discreteness an inversion of the phonon spectrum takes place with the short waves becoming low-frequency waves. When the phonon band is narrow, not a bion but a discrete breather with frequency ω_{DB} and all higher harmonics outside the phonon band is formed. When the phonon spectrum is inverted, the kink and antikink become mutually repulsive solitary waves with oscillatory tails, and their collision is possible only for velocities above a threshold value sufficient to overcome their repulsion.

The work was supported by the Russian Foundation for Basic Research, grant No. 19-02-00971.

[1] S.V. Dmitriev, P.G. Kevrekidis, N. Yoshikawa, Discrete Klein–Gordon models with static kinks free of the Peierls–Nabarro potential, J. Phys. A: Math. Gen. **38**, 7617 (2005).

[2] I. Roy, S.V. Dmitriev, P.G. Kevrekidis, A. Saxena, Comparative study of different discretizations of the ϕ^4 model, Phys. Rev. E **76**, 026601 (2007).

Признаки локальных бифуркаций в окрестностях точек равновесий гамильтоновых систем

Белова А.С.

Башкирский государственный университет, г.Уфа, Россия

Рассматривается гамильтонова система [1]

$$\frac{dx}{dt} = J\,[A_0 + S(t,\varepsilon)]\,x + Ja(x\,,t\,,\varepsilon)\,, \quad x \in R^{2N}\,, \tag{1}$$

зависящая от скалярного или векторного параметра ε. Здесь J – кососимметрическая блочная матрица размерности $2N\times 2N$, A_0 и $S(t,\varepsilon)$ – симметрические блочные матрицы размерности $2N \times 2N$, при этом $S(t,\varepsilon)$ – T-периодическая по t и удовлетворяет условию: $S(t,0) \equiv 0$. Нелинейность $a(x\,,t\,,\varepsilon) = [f'_{x_1}(x\,,t\,,\varepsilon)\,,\ \ldots\,,\ f'_{x_{2N}}(x\,,t\,,\varepsilon)]^T$, $f(x\,,t\,,\varepsilon)$ – скалярная вещественная, T-периодическая по t функция; $a(x\,,t\,,\varepsilon) = O(\|x\|^2)$ при $\|x\| \to 0$. Система (1) имеет точку равновесия $x = 0$ при всех значениях параметра ε.

Пусть матрица JA_0 имеет собственное значение 0 кратности 2 или пару простых комплексно-сопряженных собственных значений $\pm\omega_0 i$, тогда значение $\varepsilon = 0$ является точкой бифуркации в окрестности $x = 0$ системы (1).

В качестве основного приложения рассматривается задача об основных сценариях локальных бифуркаций системы (1). В докладе предлагаются новые формулы вычисления мультипликаторов линейной системы

$$\frac{dx}{dt} = J\,[A_0 + S(t,\varepsilon)]\,x\,, \quad x \in R^{2N}\,.$$

Эти формулы получаются с использованием методов теории возмущения [2] и развитием некоторых результатов, полученных в [3].

[1] Маркеев А.П. Линейные гамильтоновы системы и некоторые задачи об устойчивости движения спутника относительно центра масс. - М.-Ижевск: Ин-т компьютерных исслед., 2009. - 394 с.

[2] Като Т. Теория возмущений линейных операторов. М.: Мир. 1975. 740 с.

[3] Юмагулов М. Г., Ибрагимова Л. С., Белова А. С. Методы исследования устойчивости линейных периодических систем, зависящих от малого параметра, Дифференциальные уравнения, Итоги науки и техн. Сер. Соврем. мат. и ее прил. Темат. обз., 163, ВИНИТИ РАН, М., 2019, 113–126.

Функциональные инварианты в задаче об огибающей с точкой возврата

Воронин С.М.

Челябинский государственный университет, г.Челябинск, Россия

Задачей об огибающей называют задачу о (локальной) классификации однопараметрических семейств кривых на плоскости. В работе [1] эта задача переформулирована следующим образом. *Семейство кривых* - это диаграмма вида $(\mathbb{R},0) \overset{g}{\leftarrow} (\mathbb{R}^2,0) \overset{F}{\rightarrow} (\mathbb{R}^2,0)$. Семейства (g,F) и (g_1,F_1) называются *эквивалентными*, если существуют локальные диффеоморфизмы h, H, G, сопрягающие эти семейства:

$$g_1 \circ H = h \circ g, \quad F_1 \circ H = G \circ F$$

В случае, когда F-компонента семейства является локальным диффеоморфизмом, задача о классификации семейств есть просто задача об исследовании особенностей его первой компоненты. Случай, когда отображение F является складкой, исследован в [1].

В настоящей работе рассматривается случай, когда отображение F является сборкой. Показано, что аналитическая классификация таких (типичных) семейств совпадает с формальной. Также построены функциональные инварианты аналитической классификации.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 19-51-5000 ЯФ_а)

[1] Арнольд В.И.. О теории огибающих. УМН, XXXI, вып. 3 (1976), с.249.

Фазовый портрет в окрестности кривой особых точек одной динамической системы

Воронин С.М., Панов А.В., Адарченко В.А.
ЧелГУ, г.Челябинск, Россия

Рассматривается система уравнений двухфазной газовой динамики, предложенная Х.А. Рахматулиным[1]. Из этой системы выделяется инвариантная подмодель стационарных сферически симметричных движений. Подмодель может быть сведена к динамической системе в $\mathbb{R}^3$

$$q_1' = q_1(-\mu(q_1 - q_2)q_1 r + 2a^2 q_2 \tau),$$

$$q_2' = (q_1 - q_2)r(q_1^2 - a^2),$$
$$r' = q_2 \tau r(q_1^2 - a^2),$$

где производная берется по некоторому параметру, q_1, q_2 — скорости фаз, r — расстояние до начала координат, τ, a, μ — время релаксации скоростей фаз, скорость звука в несущей среде, отношение начальных расходов фаз.

Исследованию фазового портрета данной системы в окрестности кривой особых точек и будет посвящен доклад.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 18-31-00226 мол_а)

[1] Рахматулин Х.А. Основы газодинамики взаимопроникающих движений сжимаемых сред. ПММ. 1956. Т. 20. № 2. С. 184–195.

Порядок по Ритту и его обобщения

Гайсин А.М.
Институт математики с ВЦ УФИЦ РАН, г.Уфа, Россия

Пусть $\Lambda = \{\lambda_n\}$, $0 < \lambda_n \uparrow \infty$. Для рядов Дирихле

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{\lambda_n z}, \tag{1}$$

абсолютно сходящихся во всей плоскости, Дж. Риттом (1928) было введено понятие R–порядка, им же была получена формула для вычисления этой величины через коэффициенты ряда (1). При этом предполагалось, что

$$L = \varlimsup_{n\to\infty} \frac{\ln n}{\lambda_n} < \infty.$$

При более слабых ограничениях эта же формула позже была передоказана К. Сугимурой (1929) и С. Танаки (1953).

Для класса $D_0(\Lambda)$ рядов (1), абсолютно сходящихся лишь в полуплоскости $\Pi_0 = \{z = x + iy\colon\ x < 0\}$, в [1] был введен аналог порядка по Ритту

$$\rho_R = \varlimsup_{x\to 0-} \frac{\ln\ln M_f(x)}{|x|^{-1}}, \quad M_f(x) = \sup_{|y|<\infty} |f(x+iy)|, \quad x < 0.$$

Было доказано, что если $L_0 = 0$, то $\rho_R = A_R$, где

$$L_0 = \varlimsup_{n\to\infty} \frac{\ln\lambda_n}{\lambda_n} \ln n, \quad A_R = \varlimsup_{n\to\infty} \frac{\ln\lambda_n}{\lambda_n} \ln^+ |a_n|.$$

В [2] этот результат был полностью перенесен на ряды экспонент (λ_n — комплексные), абсолютно сходящиеся в некоторой ограниченной выпуклой области $D \subset \mathbb{C}$. В этом случае порядок по Ритту в D определяется так:

$$\rho_D = \varlimsup_{z\to\partial D} d(z) \ln^+ \ln |f(z)|, \quad d(z) = \inf_{\xi\in\partial D} |z - \xi|, \quad z \in D.$$

Как выяснилось недавно, условие $L_0 = 0$ для справедливости формулы $\rho_R = A_R$ и необходимо.

Теорема. Для того, чтобы для любой функции $f \in D_0(\Lambda)$ порядок ρ_R был равен A_R, необходимо и достаточно, чтобы $L_0 = 0$.

[1] Гайсин А.М. Оценка роста функции, представленной рядом Дирихле, в полуполосе // Матем. сб. 1982. Т. 117. № 3. С. 412–414.

[2] Гайсин А.М. Поведение суммы ряда экспонент вблизи границы области регулярности // Матем. заметки. 1990. Т. 48. № 3. С. 45–53.

О существенности одного интегрального условия

Гайсин Р.А.

Институт математики с ВЦ УФИЦ РАН, г.Уфа, Россия

Пусть $D \subset \mathbb{C}$ — выпуклая область, $M_n > 0$,

$$H(D, M_n) = \{f \in H(D) : \sup_{z\in D} |f^{(n)}(z)| \le C_f A_f^n M_n\ (n \ge 0)\}$$

— класс Карлемана. Класс $H(D, M_n)$ называется *квазианалитическим в точке* $z_0 \in \partial D$, если из того, что $f \in H(D, M_n)$, $f^{(n)}(z_0) = 0$ $(n \ge 0)$, следует, что $f(z) \equiv 0$.

Критерий квазианалитичности класса $H(\Delta_\alpha, M_n)$ для угла

$$\Delta_\alpha = \{z : |\arg z| \le \frac{\pi}{2}\alpha,\ 0 < \alpha \le 1\}$$

доказан Р.Салинасом и имеет вид:

$$\int_1^\infty \frac{\ln T(r)}{r^{\frac{\alpha+2}{\alpha+1}}} dr = \infty. \tag{1}$$

Здесь $T(r) = \sup\limits_{n\geq 0} \frac{r^n}{M_n}$ — функция следа последовательности $\{M_n\}$. Для выпуклой области D справедлива следующая

Теорема ([1]). *Пусть $z_0 \in \partial D$, через $\beta(z_0, s)$ обозначим величину угла между касательными к границе ∂D, проведенными в точках, удаленных от точки z_0 на длину дуги границы, равной s. Положим*

$$R(z_0, s) = \exp\left[\int_s^\varepsilon \frac{\pi + \beta(z_0, x)}{\beta(z_0, x)} \frac{dx}{x}\right], \; 0 < s \leq \varepsilon.$$

Тогда условие

$$\int_1^\infty \frac{\ln T(r)}{r^2 R^{-1}(z_0, r)} dr = \infty \tag{2}$$

является необходимым и достаточным для квазианалитичности класса $H(D, M_n)$ в точке z_0.

Пусть

$$A = \int_0^\varepsilon \frac{a(x)}{x} dx, \quad a(s) = \frac{\pi\alpha - \beta(s)}{\beta(s)}, \quad \pi\alpha = \lim_{s\to 0} \beta(s) \; (\beta(s) = \beta(0, s)).$$

В докладе речь пойдет о связи последнего результата с критерием Р.Салинаса для угла $H(\Delta_\alpha, M_n)$, где Δ_α — угол между односторонними касательными к границе ∂D выпуклой области D в точке $z = 0$, в котором содержится эта область. Имеет место следующее

Утверждение. 1^0. *Если $A < \infty$, то классы $H(D, M_n)$ и $H(\Delta_\alpha, M_n)$ квазианалитичны или нет в точке $z = 0$ одновременно [2];*
2^0. *Если интеграл (1) расходится, а интеграл (2) сходится, то $A = \infty$; из расходимости интеграла (2) сразу вытекает расходимость интеграла (1);*
3^0. *Если $A = \infty$, интеграл (1) расходится, то интеграл (2) может как сходиться, так и расходиться. А именно, для выбранной специальным образом последовательности $\{M_n\}$ существуют выпуклые области D_1 и D_2, для которых интеграл (2) сходится и, соответственно, расходится (такие примеры явно строятся).*

На Межвузовском научно-исследовательском семинаре по математике «Анализ и его приложения» (16 апреля 2019 г., г. Москва, МПГУ) Шерстюковым В.Б. был задан вопрос о точности интегрального условия $A < \infty$. Из п. 3 утверждения видно, что это интегральное условие существенно: если $A = \infty$, то, вообще говоря, квазианалитичность класса $H(D, M_n)$ не равносильна квазианалитичности класса $H(\Delta\alpha, M_n)$.

[1] Юлмухаметов Р.С. Аппроксимация субгармонических функций и применения. Дисс. докт. физ.-мат.наук. Уфа, 1986. – 197 с.

[2] Гайсин Р.А. Квазианалитичность классов Карлемана на континуумах комплексной плоскости. Дисс. канд. физ.-мат. наук. Уфа, 2019. – 114 с.

Теоремы типа Н.В. Говорова – Г. Маклейна: окончательный результат

Гайсина Г.А.

Башкирский государственный университет, г.Уфа, Россия

Пусть последовательность $\Lambda = \{\lambda_k\}$, $0 < \lambda_k \uparrow \infty$, такая, что

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\ln k}{\lambda_k} = 0.$$

Изучается класс $D_0(\Lambda)$ рядов Дирихле

$$F(s) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{-\lambda_k s}, \quad s = \sigma + it, \tag{1}$$

абсолютно сходящихся лишь в полуплоскости $\Pi_0 = \{s = \sigma + it\colon \ \sigma > 0\}$ и имеющих конечный (или бесконечный) порядок

$$\rho_F = \overline{\lim_{\sigma\downarrow 0}} \frac{\ln\ln M_F(\sigma)}{-\ln\sigma}, \quad M_F(\sigma) = \sup_{|t|<\infty} |F(\sigma+it)| \quad (\sigma > 0).$$

Различными авторами приводились некоторые достаточные условия на λ_k (или на a_k), при выполнении которых справедлива формула для вычисления порядка (см. в [1])

$$\frac{\rho_F}{\rho_F + 1} = \overline{\lim_{k\to\infty}} \frac{\ln^+\ln^+|a_k|}{\ln\lambda_k}. \tag{2}$$

В опубликованной недавно работе [2] приводится достаточное условие для того, чтобы была верна формула (2). А именно доказана

Теорема 1. Если

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\ln^+\ln(p_k+1)}{\ln k} = 0,$$

где p_k — число членов последовательности Λ, попавших в полуинтервал $[k,\ k+1)$, то для любой функции $F \in D_0(\Lambda)$

$$\rho_F = \lim_{k\to\infty} \frac{\ln^+\ln^+|a_k|}{\ln\lambda_k} = \begin{cases} \frac{\rho_F}{\rho_F+1}, \ \rho_f < \infty, \\ 1, \ \rho_F = \infty. \end{cases} \tag{3}$$

Легко показать, что условие (3) эквивалентно требованию

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\ln\ln k}{\ln\lambda_k} = 0. \tag{4}$$

На самом деле верна

Теорема 2. Для того, чтобы для порядка ρ_F любой функции $F \in D_0(\Lambda)$ была верна формула (3), необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие (4).

[1] Гайсина Г.А. Об одном обобщении формулы Говорова – Мак-Лейна – Шереметы для вычисления порядка // Вестник Башкирского университета. Т. 21. № 3. 2016. С. 556–559.

[2] Zhendong G., Duochun S. The growth of Dirichlet series // Szechoslovak Mathematical Journal. Vol 62. № 1. 2012. P. 29–38.

К вопросу о представлении целых функций некоторыми общими рядами

Гилемьянов А.И.
УГАТУ, г.Уфа, Россия

Пусть $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ – целая функция порядка ρ^* и типа σ^*, $a_n \neq 0$ и существует

$$\lim_{n\to\infty} n^{\frac{1}{\rho^*}} \sqrt[n]{|a_n|} = (e\sigma^*\rho^*)^{\frac{1}{\rho^*}},$$

$L(\lambda)$ – целая функция типа $\sigma \neq 0$ при уточненном порядке $\rho(r)$, $\lim\limits_{r\to\infty} \rho(r) = \rho > \rho^*, \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n, ...$ – ее нули. Пусть $\rho_1(r)$ и σ_1 – уточненный порядок и тип, сопряженные соответственно с уточненным порядком $\rho(r)$ и типом σ соответственно. Произвольной целой функции $F(z) \in [\rho_1(r), \sigma_1)$ сопоставим обобщенный ряд экспонента с некоторыми коэффициентами A_k :

$$F(z) \sim \sum_{k=1}^{\infty} A_k f(\lambda_k z) \tag{1}$$

В работе рассмотрены вопросы сходимости ряда (1) к функции $F(z)$ в различных топологиях. Получены различные равносильные формы необходимых и достаточных условий сходимости ряда экспонент, обобщающие известные ранее результаты А.Ф.Леонтьева. В частности, в случае обычного порядка получена следующая

Теорема. Для того, чтобы ряд (1) сходился во всей плоскости к функции $F(z) \in [\rho_1, \sigma_1)$ в топологии $E_1[\rho_1, q]$, необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ выполнялось условие:

$$|L(\lambda)| > \rho(\lambda, \lambda_n) \cdot \exp\left[(\beta - \varepsilon)|\lambda|^{\rho}\right], \quad |\lambda| > r_0(\varepsilon),$$

где $\rho(\lambda, \lambda_n = \min |\lambda - \lambda_n|$, а β – тип, сопряженный с q при порядке ρ.

[1] Леонтьев А.Ф. Ряды экспонент.М.:Наука,1976.

[2] Леонтьев А.Ф., Фролов Ю.Н. Об условиях представимости целых функций некоторыми общими рядами. -Изв.АН СССР. 1978. Т.42, Сер.матем., №4, с.763-772.

Приближенная управляемость некоторых вырожденных эволюционных уравнений дробного порядка

Гордиевских Д.М., Федоров В.Е.

Шадринский государственный педагогический университет, г.Шадринск, Курганская обл., Россия; Челябинский государственный университет, г.Челябинск, Россия

Рассмотрим систему управления, описываемую задачей

$$D_t^{\alpha-m+k}(v+\nu w)(\xi,0)=v_k(\xi),\quad \xi\in\Omega,\quad k=0,\dots,m-1, \tag{1}$$

$$v(\xi,t)=w(\xi,t)=0,\quad (\xi,t)\in\partial\Omega\times(0,T], \tag{2}$$

$$D_t^{\alpha}(v(\xi,t)+\nu w(\xi,t))=\kappa\Delta v(\xi,t)+b_1(t)u_1(\xi,t),\quad (\xi,t)\in\Omega\times(0,T], \tag{3}$$

$$\Delta w(\xi,t)+\beta w(\xi,t)+\gamma v(\xi,t)+b_2(t)u_2(\xi,t)=0,\quad (\xi,t)\in\Omega\times(0,T]. \tag{4}$$

Здесь $m-1<\alpha\leq m\in\mathbb{N}$, D_t^{β} — дробная производная Римана — Лиувилля, $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ — ограниченная область с гладкой границей $\partial\Omega$, $\kappa>0$, $\beta,\gamma,\nu\in\mathbb{R}$, $v=v(\xi,t)$, $w=w(\xi,t)$ — неизвестные функции, $u_1=u_1(\xi,t)$, $u_2=u_2(\xi,t)$ — функции управления, заданы функции $b_1=b_1(t)$, $b_2=b_2(t)$.

Обозначим оператор Лапласа $A:=\Delta:D_A\to L_2(\Omega)$ с областью определения $D_A=H_0^2(\Omega):=\{z\in H^2(\Omega):z(\xi)=0,\xi\in\partial\Omega\}\subset L_2(\Omega)$.

Система (2)–(4) является приближенно управляемой за время $T>0$, если для любых $\varepsilon>0$, $v_0,v_1,\dots,v_{m-1}\in H_0^2(\Omega)$, $\hat{v},\hat{w}\in L_2(\Omega)$ найдутся такие $u_1,u_2\in C([0,T];L_2(\Omega))$, что

$$\|v(\cdot,T)-\hat{v}\|^2_{L_2(\Omega)}+\|w(\cdot,T)-\hat{w}\|^2_{L_2(\Omega)}\leq\varepsilon^2.$$

Используя результаты работы [1], получим следующий результат.

Теорема 1. *Пусть $\kappa>0$, $\beta,\nu,\gamma\in\mathbb{R}$, $\gamma\nu-\beta\notin\sigma(A)$, $b_1,b_2\in C([0,T];\mathbb{R})$. Тогда система (2)–(4) приближенно управляема за время $T>0$, если и только если $b_2(T)\neq0$. Система (2)–(4) приближенно управляема за свободное время, если и только если $b_2\not\equiv0$ на $[0,+\infty)$.*

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант 19-41-450001.

[1] Федоров В.Е., Гордиевских Д.М., Балеану Д., Таш К. Критерий приближенной управляемости одного класса вырожденных распределенных систем с производной Римана — Лиувилля // Мат. заметки СВФУ. 2019. Т. 26, № 2. С. 41–59.

Разрешимость системы квазилинейных уравнений, где f_1, f_2, S_1, S_2 — известные функции

Донцова М.В.
ННГУ им. Н.И. Лобачевского, г. Нижний Новгород, Россия

Рассмотрена задача Коши для системы вида:

$$\begin{cases} \partial_t u\,(t,x) + S_1(u,v)\partial_x u\,(t,x) = f_1(t,x), \\ \partial_t v(t,x) + S_2(u,v)\partial_x v(t,x) = f_2(t,x), \end{cases} \tag{1}$$

где $u(t,x)$, $v(t,x)$ — неизвестные функции, $f_1(t,x)$, $f_2(t,x)$, S_1, S_2 — известные функции, с начальными условиями:

$$u(0,x) = \varphi_1(x),\ \ v(0,x) = \varphi_2(x) \tag{2}$$

в области $\Omega_T = \{(t,x)\,|0 \le t \le T,\, x \in (-\infty,+\infty), T > 0\}$.

В [1] получена система интегральных уравнений:

$$w_1(s,t,x) = \varphi_1(x - \int\limits_0^t S_1(w_1,w_3)d\nu) + \int\limits_0^s f_1(\nu, x - \int\limits_\nu^t S_1(w_1,w_3)d\tau)d\nu, \tag{3}$$

$$w_2(s,t,x) = \varphi_2(x - \int\limits_0^t S_2(w_4,w_2)d\nu) + \int\limits_0^s f_2(\nu, x - \int\limits_\nu^t S_2(w_4,w_2)d\tau)d\nu, \tag{4}$$

$$w_3(s,t,x) = w_2(s,s,x - \int\limits_s^t S_1(w_1,w_3)d\nu), \tag{5}$$

$$w_4(s,t,x) = w_1(s,s,x - \int\limits_s^t S_2(w_4,w_2)d\nu). \tag{6}$$

Обозначим $l = \max\left\{\sup\limits_{Z_K}|\partial_u S_1|, \sup\limits_{Z_K}|\partial_v S_1|, \sup\limits_{Z_K}|\partial_u S_2|, \sup\limits_{Z_K}|\partial_v S_2|\right\}$,

$Z_K = \{(u,v)\,|u,v \in [-K,K]\}$, $C_\varphi = \max\{\sup\limits_R\left|\varphi_i^{(l)}\right|\,|i = 1,2,\ l = \overline{0,2}\}$, $C_f = \left\{\sup\limits_{\Omega_T}|f_i|, \sup\limits_{\Omega_T}|\partial_x f_i|, i = 1,2\right|\}$, где K — положительное число.

Теорема. Пусть $\varphi_1, \varphi_2 \in \bar{C}^2(R)$, $f_1, f_2 \in \bar{C}^{2,2}(\Omega_T)$, $S_1, S_2 \in \bar{C}^{2,2}(Z_K)$, где $T \leqslant \min(\frac{C_\varphi}{4C_f}, \frac{3}{40C_\varphi l})$, $K = 2C_\varphi$ и выполняются условия

1) $\partial_u S_1 > 0$, $\partial_v S_1 > 0$, $\partial_u S_2 > 0$, $\partial_v S_2 > 0$ на Z_K,

2)$\varphi_1'(x) \ge 0$, $\varphi_2'(x) \ge 0$ на R, 3)$\partial_x f_1 \ge 0$, $\partial_x f_2 \ge 0$ на Ω_T.

Тогда для любого $T \leqslant \min(\frac{C_\varphi}{4C_f}, \frac{3}{40C_\varphi l})$ задача Коши (1),(2) имеет единственное решение $u(t,x), v(t,x) \in \bar{C}^{1,2,2}(\Omega_T)$, которое определяется из системы интегральных уравнений (3)–(6).

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 18-31-00125 мол_а.

[1] Донцова М.В. Условия нелокальной разрешимости одной системы двух квазилинейных уравнений первого порядка со свободными членами // Журнал Средневолжского математического общества. № 3. Т. 21. 2019. С. 317–328.

О структуре тау-функций решений солитонных уравнений

Домрин А.В.
Московский государственный университет им. М.В.Ломоносова, г. Москва, Россия

Все локальные голоморфные решения многих солитонных уравнений являются логарифмическими производными первого или второго порядка от некоторых целых функций пространственной переменной. В докладе это свойство иллюстрируется на примере уравнений Бюргерса и Кортевега-де Фриза, ставятся и частично решаются вопросы о возможном порядке роста указанных целых функций и приводятся примеры. Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект 19-01-00474.

Учет неликвидности и транзакционных издержек при дельта-хеджировании опционов

Дышаев М.М., Федоров В.Е.
Челябинский государственный университет, г.Челябинск, Россия

В модель ценообразования опционов RAPM [1], учитывающую влияние транзакционных издержек и ошибки хеджирования, добавлен учет недостаточной ликвидности из модели Р. Фрея [2]:

$$r_R = \frac{k\sigma x\,|u_{xx}|}{\sqrt{2\pi\Delta t}} + \frac{1}{2}R\sigma^4 x^2 u_{xx}^2 \Delta t + \frac{1}{2}\sigma^2\left(\frac{1}{(1-\rho x u_{xx})^2} - 1\right) x u_{xx}, \tag{1}$$

где k — коэффициент транзакционных издержек, R — удельный коэффициент премии за риск, который должен учитывать трейдер из-за редкого хеджирования портфеля, ρ — доля крупных трейдеров, x — цена базового актива (акции), σ — волатильность базового актива, $u(t,x)$ — цена опциона из классической модели Блэка — Шоулза.

Следуя методу из [1], т. е. находя минимум общей функции риска r_R в зависимости от интервала дельта-хеджирования Δt и подставляя его значение в уравнение Блека — Шоулза, получаем:

$$u_t + \frac{1}{2}\sigma^2\left(2 - 3\left(\frac{Rk^2}{2\pi}x\,|u_{xx}|\right)^{\frac{1}{3}} - \frac{1}{(1-\rho x u_{xx})^2}\right) x^2 u_{xx}^2 - r(u - x u_x) = 0. \tag{2}$$

Формула (2) обобщает модель RAPM на случай наличия эффектов обратной связи, возникающих из-за недостаточной ликвидности или операций дельта-хеджирования крупных трейдеров. Метод численного решения начально-краевых задач для уравнения (2) изложен в [3].

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 19-01-00244.

[1] Jandačka M. and Ševčovič D. On the risk-adjusted pricing-methodology-based valuation of vanilla options and explanation of the volatility smile. Journal of Applied Mathematics, 2005, vol. 2005, no. 3, pp. 235–258.

[2] Frey R. Market illiquidity as a source of model risk in dynamic hedging. Model Risk, 2000, p. 125–136.

[3] Dyshaev, M. and Fedorov V. Comparing of some sensitivities (Greeks) for nonlinear models of option pricing with market illiquidity. Mathematical notes of NEFU, 2019, vol. 26, no. 2, pp. 94–108.

Управление нелинейной динамикой магнитных вихрей обобщенного уравнения Ландау-Лифшица с помощью спин-поляризованного тока и магнитного поля

Екомасов Е. Г.[1,2], Звездин К. А.[3], Степанов С.В.[2], Антонов Г.И.[2], Екомасов А.Е[2]

[1]Тюменский государственный университет, г.Тюмень, Россия

[2]Башкирский государственный университет, г.Уфа, Россия

[3]Институт общей физики им. А.М. Прохорова РАН г. Москва, Россия

Большое внимание, в настоящее время, привлекают исследования вихревых решений Обобщенного уравнения Ландау-Лифшица [1]. Наличие в этом уравнении слагаемого, учитывающего взаимодействие намагниченности и спин-поляризованного тока, позволяет исследовать процессы переключения и возбуждения осцилляций намагниченности в магнитных наноструктурах с помощью тока и внешнего магнитного поля. Интересны для рассмотрения, в этом плане, микроволновые спин-трансферные наноосцилляторы (СТНО). Большинство таких структур имеют два магнитных слоя, разделенных немагнитной прослойкой. Одной из наиболее перспективных разновидностей СТНО, является вихревая структура, в которой магнитный вихрь реализуется как основное состояние в ферромагнитных слоях.

Проведено исследование динамики и структуры двух дипольно связанных магнитных вихрей в трехслойном наностолбике разного диаметра, под действием внешнего магнитного поля и спин-поляризованного электрического тока. Показана возможность существования различных режимов движения вихрей, в зависимости от величины поляризованного тока и магнитного поля. Показана возможность управления частотой стационарного движения вихрей с помощью внешнего магнитного поля и тока. С помощью аналитического метода получены зависимости частоты от величины тока и внешнего магнитного поля, качественно совпадающие с численными результатами. Построена зависимость величины магнитного поля, раздельно переключающего полярность вихрей от величины спин-поляризованного тока. Показано, что динамический и квазистатический сценарии переключения полярности вихря имеют место при различных значениях поля/тока. Проведено сравнение динамики двух дипольно связанных магнитных вихрей в трехслойном наностолбике малого, среднего и большого диаметров.

Работа поддержана грантом РФФИ, проект № 19-02-00316/19.

[1] A.E. Ekomasov, S.V.Stepanov, K.A.Zvezdin, E.G.Ekomasov//JMMM, 471, 2019, 513.

Управление с помощью внешнего магнитного поля параметрами магнитного бризера в трёхслойной ферромагнитной структуре

Екомасов Е.Г.[1,2], Назаров В.Н.[3], Гумеров А.М.[2], Харисов А.Т.[2]
[1]Тюменский государственный университет, г.Тюмень, Россия
[2]Башкирский государственный университет, г.Уфа, Россия
[3]ИФМК УФИЦ РАН, г.Уфа, Россия

Рассмотрена генерация и авторезонансное возбуждение магнитного бризера в трехслойном ферромагнетике полями переменной частоты и малой амплитуды при наличии диссипации в системе. Ферромагнитная структура состоит из двух широких одинаковых слоёв, разделённых тонким слоем с изменёнными значениями параметра магнитной анизотропии. Параметры анизотропии считаются функциями от координаты, направленной перпендикулярно границе раздела слоёв. В одномерном случае функция параметра анизотропии моделируется в форме прямоугольника. Внешнее магнитное поле является переменным по времени с малой амплитудой и частотой, являющейся линейной функцией времени [1]. Полученное уравнение движения для намагниченности в виде уравнения синус-Гордона решалось численно с использованием явной схемы интегрирования. Распределение намагниченности в начальный момент времени задавалось в виде блоховской доменной границы, находящейся далеко от тонкого слоя. При определенных значениях параметров тонкого слоя при прохождении доменной границы с постоянной скоростью через него, образуется магнитная неоднородность в виде магнитного бризера [2]. В отсутствии внешнего поля амплитуда бризера со временем затухает. Анализ решений уравнения движения в переменном поле показывает возможность при определенных условиях увеличение со временем амплитуды магнитного бризера. Для каждого случая значений параметров магнитной анизотропии имеется пороговое значение амплитуды магнитного поля приводящее к резонансу. На резонансный эффект влияют также геометрические параметры тонкого слоя: при уменьшении ширины слоя рост амплитуды бризера происходит медленнее по времени. При большой ширине слоя возбуждается еще и трансляционная мода колебаний бризера. Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 18-31-00122.

[1] Назаров В.Н., Екомасов Е.Г. Письма о материалах, **8**:2 (2018), 158-164.

[2] Ekomasov E.G., Gumerov A.M., Kudryavtsev R.V. Journal of Computational and Applied Mathematics, **312** (2017), 198-208.

Решение обратной задачи каротажа собственной поляризации в пачке пластов с зоной проникновения

Жонин А.В., Кузьмичев О.Б., Мартынова Ю.В.
ООО "РН-БашНИПИнефть", г. Уфа, Россия

С целью более точного определения коллекторских свойств пластов по методу собственной поляризации (ПС) необходимо перейти от кажущихся значений кривой каротажа $U_{\Pi C}$ к статическим потенциалам пласта $E_{\Pi C}$, то есть решить обратную задачу.

Рассматривается модель пласта – коллектора толщиной h и удельной электрической проводимостью пласта σ_{Π}, с зоной проникновения радиуса $R_{Z\Pi}$ и удельной электрической проводимостью зоны проникновения $\sigma_{Z\Pi}$, пересеченного скважиной радиусом r_C и удельной электрической проводимостью σ_C.

Аналитическое прямой задачи метода ПС в проницаемом пласте ограниченной толщины имеет вид:

$$U_{\Pi C} = -E_{\Pi C}\frac{\sigma_{\Pi}}{\sigma_{Z\Pi}} \cdot \frac{h}{\pi}\int_0^{+\infty} \frac{\sin\left(m\frac{h}{2}\right)}{\left(m\frac{h}{2}\right)} \frac{K_1(m)R_{Z\Pi}}{N(m)} \cos mzdm, \qquad (1)$$

$$\begin{aligned} N(m) = mr_c\left[(I_1(mR_{Z\Pi})K_0(mR_{Z\Pi}) + \sigma_{\Pi}/\sigma_{Z\Pi} I_0(mR_{Z\Pi})K_1(mR_{Z\Pi}))\cdot\right. \\ \cdot\,(I_0(mr_C)K_1(mr_C) + \sigma_C/\sigma_{Z\Pi} I_1(mr_C)K_0(mr_C))\right] + \\ \left. + \,(I_0(mr_C)I_1(mr_C)K_0(mr_C)K_1(mr_C)(\sigma_C/\sigma_{Z\Pi} - 1)(1 - \sigma_{\Pi}/\sigma_{Z\Pi})\right], \end{aligned}$$

где $I_0(x)$, $I_1(x)$, $K_0(x)$, $K_1(x)$ – модифицированные функции Бесселя.

Интеграл в правой части выражения (1), умноженный на константу $\left(\frac{\sigma_{\Pi}}{\sigma_{Z\Pi}} \cdot \frac{h}{\pi}\right)$, представляет собой омически – геометрический фактор $\nu_{\Pi C}$.

Для рассматриваемой модели была решена обратная задача метода ПС с учетом потенциалов вмещающих пластов:

$$E_{\Pi C}^{(i)} = \frac{U_{\Pi C}^{(i)}}{\nu_{\Pi C}^{(i)}} - \frac{1-\nu_{\Pi C}^{(i)}}{\nu_{\Pi C}^{(i)}}\left(\frac{E_{\Pi C}^{(i-1)} + E_{\Pi C}^{(i+1)}}{2}\right),$$

где $\nu_{\Pi C}^{(i)}$ – омически-геометрический фактор для i-го пласта.

Решение прямой и обратной задачи метода ПС в комплексе с методами электрометрии скважин было апробировано на конкретных материалах геофизических исследований скважин одного из месторождений Западной Сибири.

[1] О.Б. Кузьмичев, А.В. Жонин, Ю.В. Мартынова, С.А. Коломасова. Решение обратной задачи каротажа собственной поляризации в пачке пластов с зоной проникновения (терригенный разрез) // Нефтяное хозяйство. – 2019. – №10. – С. 38–41.

The integral formula for matrix factorizations of the Helmholtz equation in multidimensional space

Juraev D.A.

The Higher Military Aviation School of the Republic of Uzbekistan, Karshi city, Uzbekistan

In this paper, we are talking about the validity of the integral formula for matrix factorization of the Helmholtz equation in a multidimensional bounded domain.

Let $x = (x_1, ..., x_n), y = (y_1, ..., y_n)$ be are points of the Euclidean space $\mathbb{R}^n$ and $G-$region in $\mathbb{R}^n$ with piecewise smooth boundary ∂G, S-part of ∂G, i.e. $\partial G = S \bigcup T$. In the future, we will construct the Carleman matrix for matrix factorizations of the Helmholtz equation in multidimensional bounded domain and based on it we will find an approximate solution to the Cauchy problem in explicit form, using the methodology of previous works (See for instance [1], [2], [3], [4], [5], [6] and [7]).

[1] Juraev D.A. The Cauchy problem for matrix factorizations of the Helmholtz equation in an unbounded domain. Sib. Electron. Mat. Izv. 14 (2017), 752–764.

[2] Zhuraev D.A. Cauchy problem for matrix factorizations of the Helmholtz equation. Ukrainian Mathematical Journal. 69 (2018), No 10., 1583-1592.

[3] Juraev D.A. On the Cauchy problem for matrix factorizations of the Helmholtz equation in a bounded domain. Sib. Electron. Mat. Izv. 15 (2018), 11–20.

[4] Juraev D.A. On the Cauchy problem for matrix factorizations of the Helmholtz equation in a bounded domain. Journal of Universal Mathematics. 1 (2018), No 3, 312–319.

[5] Juraev D.A. On the Cauchy problem for matrix factorizations of the Helmholtz equation in an unbounded domain in $\mathbb{R}^2$. Sib. Electron. Mat. Izv. 15 (2018), 1865–1877.

[6] Juraev D.A. On a regularized solution of the Cauchy problem for matrix factorizations of the Helmholtz equation. Advanced Mathematical Models & Applications 4 (2019), No 1, 86–96.

[7] Juraev D.A. On the Cauchy problem for matrix factorizations of the Helmholtz equation. Journal of Universal Mathematics. 2 (2019), No 2, 113–126.

Группа допускаемых преобразований уравнений динамики двухфазной среды в случае двух пространственных переменных

Иванова Н.Д.

Южно-Уральский государственный университет (национальный исследовательский университет), г.Челябинск, Россия

Рассмотрим систему [1]

$$\begin{cases} \frac{\partial\rho_1}{\partial t} + \vec{u}_1 \cdot \nabla\rho_1 + \rho_1 \mathrm{div}\vec{u}_1 = 0, \\ \frac{\partial\rho_2}{\partial t} + \vec{u}_2 \cdot \nabla\rho_2 + \rho_2 \mathrm{div}\vec{u}_2 = 0, \\ \rho_1 \left(\frac{\partial\vec{u}_1}{\partial t} + \vec{u}_1 \cdot \nabla\vec{u}_1\right) + m_1 \nabla P_1(\rho_1, \rho_2) = -\frac{\rho_2}{\tau}(\vec{u}_1 - \vec{u}_2)^k, \\ \rho_2 \left(\frac{\partial\vec{u}_2}{\partial t} + \vec{u}_2 \cdot \nabla\vec{u}_2\right) + m_2 \nabla P_1(\rho_1, \rho_2) + \nabla P_2(\rho_1, \rho_2) = \frac{\rho_2}{\tau}(\vec{u}_1 - \vec{u}_2)^k, \end{cases}$$

описывающую движения двухфазной жидкости в изотермическом случае. Здесь $\vec{u}_1 = (u_1, v_1), \vec{u}_2 = (u_2, v_2)$ есть векторы скорости, ρ_1, ρ_2 являются плотностями, $P_1(\rho_1, \rho_2)$, $P_2(\rho_1, \rho_2)$ – давления первой и второй фазы, соответственно, $m_2 = \frac{\rho_2}{\rho_{22}}$ – объемная концентрация второй фазы, ρ_{22} – абсолютная плотность второй фазы, $m_1 = 1 - m_2$ – объемная концентрация первой фазы, τ – время релаксации скоростей.

Установлено, что в случае, когда P_1, P_2, k произвольные, а так же при произвольных давлениях и $k = 2$ (Ньютоновский режим обтекания), алгебра симметрий состоит из операторов сдвига по времени и координатам и преобразований Галилея. В случае, когда значение k произвольное, $P_1 = 0$, $P_2 = a_2^2\rho_2$, алгебра симметрий содержит операторы сдвига по времени и координатам, преобразования Галилея, оператор поворота в пространстве и оператор растяжения по плотностям.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований в рамках научного проекта № 18-31-00226 мол_а.

[1] Glasser B.J., Kevrekids I.G., Sundars S. One- and two-dimensional traveling wave solutions in fluidized beds. J. Fluid Mech. 1996. V. 306. P. 183—221.

Эффект Саньяка в пространстве-времени вращающихся черных дыр в теории Эйнштейна-Максвелла

Каримов Р.Х., Измаилов Р.Н., Нанди К.К.

БГПУ им. М.Акмуллы, г.Уфа, Россия

В работе рассматривается задержка времени [1, 2, 3, 4] прибытия между двумя противоположно-направленными пучками света (эффект Саньяка), движущимися по замкнутым круговым орбитам в пространстве-времени Айон-Беато-Гарсия [5] для негеодезического движения источника/приемника света (предполагается что источник и приемник определены в одной точке). В постньютоновском пределе задержка Саньяка в экваториальной плоскости имеет вид:

$$\delta\tau \simeq \delta\tau_S \left(1 - \frac{Q^2}{2R^2}\right) + 4\pi R M \omega_0 \left(1 - \frac{3Q^2}{R^2}\right) - \frac{8\pi a M}{R} \left(1 - \frac{5Q^2}{2R^2}\right), \qquad (1)$$

где $\delta\tau_S = 4\pi\omega_0 R^2$ – задержка Саньяка в плоском пространстве, Q – электрический заряд, M – масса цетрального объекта и ω_0 – угловая скорость источника/приемника света. Уравнения (1) показывает влияние электрического заряда на задержку Саньяка.

Интересным является случай, когда орбита источника/приемника света имеет радиус $R = Q/\sqrt{2}$. В этом случае задержка Саньяка в плоском пространстве равна нулю и, следовательно задержка Саньяка в пространстве-времени Айон-Беато-Гарсия принимает наименьшее значение. Таким образом, если известен электрический заряд источника, можно подобрать орбиту источника/приемника света так, что задержка Саньяка будет наименьшей.

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 18-32-00377.

[1] Tartaglia A., Phys. Rev. D **58**, 064009 (1998).

[2] Karimov R.Kh., Izmailov R.N., Garipova G.M. and Nandi K.K., Eur. Phys. J. Plus **133**, 44 (2018).

[3] Kulbakova A., Karimov R.Kh., Izmailov R.N. and Nandi K.K., Class. Quantum Grav. **35**, 115014 (2018).

[4] Камалова Д.Ю., Давлетшина Н.Ю., Истякова Г.Б., Каримов Р.Х., Инженерная физика, №7, С. 27-30 (2019).

[5] Ayón-Beato E., García A., Phys. Rev. Lett. **80**, 5056 (1998).

Непостоянные равновесные решения динамического уравнения переориентации молекул смектического жидкого кристалла в терминах эллиптических интегралов

Кондратьев Д.В., Мигранов Н.Г.

Академия наук РБ, Башкирский кооперативный институт (филиал) Российского университета кооперации, Башкирский государственный медицинский университет, г.Уфа, Россия

На протяжении нескольких десятилетий ведутся экспериментальные и теоретические исследования оптических материалов с малыми временами переключений. Такими характеристиками среди анизотропных и вязкоупругих образцов обладают жидкие кристаллы (ЖК). Среди управляющих параметров в таких системах могут быть не только внешние воздействия: электрические, магнитные поля, градиенты температур, но и константы упругости, энергии взаимодействия смектического ЖК с подложками, диэлектрическая постоянная, магнитная восприимчивость и т.д.

В [1] рассматривалось равновесное решение для тонкого слоя образца смектического ЖК SmC* в геометрии «bookshelf» под действием приложенного под разными углами электрического поля к образцу. Рассчитаны времена откликов системы на возмущения и рассмотрена двумерная задача с периодическими граничными условиями вызывающими эффект соизмеримости/несоизмеримости вдоль слоев SmC*. Этому эффекту также посвящена работа [2].

В предлагаемой работе исследуются непостоянные равновесные решения ранее полученного в [1] динамического уравнения, описывающего процесс переориентации директора в конечном слое образца сегнетоэлектрического ЖК, выражающиеся через эллиптические интегралы первого рода. В отличие от предыдущих работ здесь рассматривается образец сегнетоэлектрического ЖК во внешних скрещивающихся электрических полях.

[1] Мигранова Д.Н., Кондратьев Д.В., Мигранов Н.Г. Исследование устойчивости равновесных состояний наноматериалов на основе сегнетоэлектрических жидких кристаллов во внешнем электрическом поле // Жидк. крист. и их практич. использ. Том 15 (2015), №3, с. 133-142. DOI: 10.18083/LCAppl.2015.3.125

[2] Мигранова Д.Н., Кондратьев Д.В., Мигранов Н.Г. Метод прямых в решении краевой задачи Пуассона для смектика SmC* во внешнем электрическом поле // Жидк. крист. и их практич. использ. Том 16 (2016), № 3, с. 58-68. DOI: 10.18083/LCAppl.2016.3.58

Dynamics of surface graphene ripplocations on a substrate

Korznikova E. A.[1], Savin A. V.[2], Dmitriev S. V.[1]

[1]Institute of Molecule and Crystal Physics, UFRC, RAS, 450075 Ufa, Russia

[2]Semenov Institute of Chemical Physics, Russian Academy of Sciences, Moscow 119991, Russia

Surface and bulk ripplocations in layered nanomaterials have recently attracted the attention of researchers because they possess the properties of topological solitons, which are capable of efficient transportof mass and energy and of mediating plastic deformation. In a ripplocation, one or a few layers at the surface or in the bulk of a material are bent or folded. So far, only the static properties of ripplocations have been analyzed. In the present study, the dynamics of graphene bubbles and folds on a graphite substrate are analyzed by full-atomic molecular dynamics and with the help of the two-dimensional chain model. It is demonstrated that such objects, classified as surface ripplocations, are robust solitary waves that propagate while practically radiating no energy [1]. Energy and geometrical parameters of the ripplocations are calculated as the functions of their propagation velocity. In the presence of thermal fluctuations the ripplocations can be accelerated or decelerated, showing a random-walk-like dynamics. Collisions of ripplocations result in their merger. Overall, our results reveal that layered materials can support surface ripplocations that are highly mobile topological solitary waves efficiently transporting mass and energy.

The work was supported by the Russian Foundation for Basic Research, grant No. 18-32-20158.

[1] Savin, A.V., Korznikova, E.A., Dmitriev, S.V. Dynamics of surface graphene ripplocations on a flat graphite substrate. Phys. Rev. B 99, 235411 (2019).

Характеристические кольца Ли и симметрии гиперболических систем уравнений, порожденных уравнением Пенлеве I

Костригина О.С.
УГАТУ, г.Уфа, Россия

В работе рассматриваются кольца Ли характеристических векторных полей и высшие симметрии Ли-Беклунда гиперболических систем уравнений

$$p_{xy} = q_x, \quad q_{xy} = 6p_x^2 + y \ (u = p_x, \quad v = q_x) \tag{1}$$

и

$$u_{xy} = v_x, \quad v_{xy} = 12uu_x, \tag{2}$$

порожденных обыкновенным дифференциальным уравнением Пенлеве I

$$u_{yy} = 6u^2 + y.$$

Понятие характеристического векторного поля для гиперболических уравнений впервые ввел в рассмотрение Э.Гурса в работе [1].

В статье [2] была высказана гипотеза о том, что размерности линейных пространств для интегрируемых уравнений растут медленно. В дальнейшем эта гипотеза была подтверждена многочисленными примерами интегрируемых непрерывных и дискретных моделей. Свойство медленного роста кольца стало рассматриваться в качестве классификационного критерия для интегрируемых уравнений.

В работе показано, что характеристические кольца Ли систем уравнений (1), (2) являются кольцами медленного роста. Для гиперболической системы уравнений (1) построены высшие симметрии Ли-Беклунда.

Описанные характеристические кольца Ли и алгебры Ли-Беклунда могут быть использованы для классификации обыкновенных дифференциальных уравнений, обладающих свойством Пенлеве.

[1] Goursat E. Recherches sur quelques *é*quations aux d*é*riv*é*es partielles du second ordre, Annales de la facult*é* des Sciences de I'Universit*é* de Toulouse 2^e s*é*rie, tome 1, n^0 1 (1899) p.31-78.

[2] Жибер А.В., Муртазина Р.Д. Характеристические алгебры Ли для уравнения $u_{xy} = f(u, u_x)$ //ФПМ. Гамильтоновы и лагранжевы системы. Алгебры Ли. – 2006. – Т. 12. – No 7. – С. 65 - 78.

Приближение целой функции другой целой функцией с простыми нулями

Кудашева Е.Г.
УГАТУ, г.Уфа, Россия

Приведем точный результат оценки скорости приближения целой функции f другой целой функцией q с простыми нулями.

Для любой целой функции f с последовательность нулей (λ_k), $k \in \mathbb{N}$, убывающей функции $\beta : [0, +\infty) \to (0, +\infty)$ и любого числа $\epsilon > 0$ найдется целая функция q с последовательностью только простых нулей $(\gamma_k), k \in \mathbb{N}$ такая, что выполняется условие

$$|\log|q(z)| - \log|f(z)|| \leq \frac{\varepsilon}{|z|^2} \quad \text{при всех } \ z \in \mathbb{C} \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} D(\lambda_k, t_k),$$

где $D(\lambda_k, t_k)$ открытые круги на комплексной плоскости $\mathbb{C}$ с центрами в точках $\lambda_k \in \mathbb{C}$, радиусами $t_k \geq 0$, для последовательности $(t_k) \subset (0, +\infty)$, увязанной с $(\lambda_k), k = 1, 2, ...$, выполняется оценка $\sum\limits_{|\lambda_k| \geq r} t_k \leq \beta(r)$,
$|\gamma_k - \lambda_k| < t_k$, и $\beta(r)$ убывающая при всех $r \geq 0$.

[1] Кудашева Е.Г., Хабибуллин Б.Н. Распределение нулей голоморфных функций умеренного роста в единичном круге и представление в нем мероморфных функций // Математический сборник. - Т. 200. - № 9. - 2009. - с.95-126.

[2] Кудашева Е.Г. Обобщение теорем Неванлинны и изменение асимптотического поведения целой функции при сдвигах ее нулей // Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук. - Уфа. -2010. - 108с.

[3] Хабибуллин Б.Н., Чередникова Л.Ю., Кудашева Е.Г. Вложения компактов сдвигами и неполнота систем экспонент// Современные методы теории краевых задач. // Материалы Международной конференции Воронежская весенняя математическая школа "ПОНТРЯГИНСКИЕ ЧТЕНИЯ - XXVI"Посвящается памяти академика Владимира Александровича Ильина. Воронеж: ФГБОУ ВО ВГУ, 2015. с.121-122.

Динамика солитонов в модели синус-Гордона с притягивающими точечными примесями

Кудрявцев Р.В.[1], Екомасов Е.Г.[2,3], Гумеров А.М.[3], Самсонов К.Ю.[2]
[1] Институт физики молекул и кристаллов УФИЦ РАН, г.Уфа, Россия
[2] Тюменский государственный университет, г.Тюмень, Россия
[3] Башкирский государственный университет, г.Уфа, Россия

В последние годы весьма популярными являются исследования нелинейных дифференциальных уравнений, допускающих решения в виде нелинейных уединенных волн – солитонов. Это связано с их интенсивным применением в различных задачах математической физики. Например, одно из самых известных таких уравнений – уравнение синус-Гордона (УСГ) – используется для описания волновых процессов в геологических средах, динамики ДНК в молекулярной биологии, динамики доменных границ в магнетиках, дислокаций в кристаллах и флюксонов в джозефсоновских контактах и переходах. Учёт влияния возмущений приводит к существенному изменению структуры и энергии солитонов. Много работ посвящено исследованию случая пространственной модуляции (неоднородности) периодического потенциала, или наличия примеси в системе. В данной работе исследуется нелинейная динамика солитонных решений уравнения синус-Гордона в модели с произвольным числом притягивающих примесей.

В работе с помощью метода коллективных переменных получена система дифференциальных уравнений, качественно описывающая одномерную резонансную динамику кинка УСГ и колебания возбуждаемых им примесных мод в модели с произвольным числом разных точечных примесей, расположенных на произвольном расстоянии друг от друга, в присутствии внешней силы и неоднородной диссипации. Найдены её решения для частных случаев наличия двух и трёх точечных примесей, располагающихся на одинаковом расстоянии друг от друга. Исследованы возможные типы связанных колебаний локализованных на примесях волн. Предложены способы использования примесей как генератора для возбуждения различного вида мультисолитонов. Найдены условия для возникновения различных резонансных эффектов, связанных с динамикой кинка: резонансного отражения от притягивающей примеси и «квазитуннелирования». Определено наличие критического значения расстояния между примесями, которое приводит к качественно различным сценариям динамического поведения кинка УСГ.

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 18-31-00122.

Бесконечная факторизация оператора типа свертки

Кузбеков Т.Т.
УГАТУ, г.Уфа, Россия

Пусть $p(z)$ – неотрицательная, субгармоническая функция, удовлетворяющая некоторым условиям (см.[1]). Обозначим через $A_p(C)$ – кольцо целых функций $f(z)$, таких, что $|f(z)| \leq c_1 \exp\{c_2 p(z)\}$, а через A_p – множество последовательностей $\{\varphi_j(z)\}_{j=1}^{\infty}, \varphi_j(z) \in A_p(C)$ для которых $\sum\limits_{j=1}^{\infty} |\varphi_j(z)|^2 \leq c|_1 \exp\{a_2 p(z)\}, z \in C$.

Теорема 1. Пусть $g(z) \in A_p(C)$ и выполняется оценка $|g(z)^2 \leq$
$\leq \left(\sum\limits_{j=1}^{\infty} |\varphi_j(z)|^2\right)^5 \cdot b_1 \exp\{b_2 p(z)\}$, тогда найдется такая совокупность $\{g_j(z)\}_{j=1}^{\infty} \in A_p$, что $g(z) = \sum\limits_{j=1}^{\infty} \varphi_1(z) g_i(z)$.

Теорема 2. Для совокупности функций $\{\varphi_j(z)\}_{j=1}^{\infty} \in A_p$ тождество $1 = \sum\limits_{j=1}^{\infty} \varphi_j(z)\psi_j(z), \{\psi_1(z)\}_{j=1}^{\infty} \in A_p$, справедливо тогда и только тогда, когда $\sum\limits_{j=1}^{\infty} |\varphi_1(z)|^2 \geq a_3 \exp\{-a_4 p(z)\}, z \in C$.

Пусть теперь $\varphi(z) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k z^k \in A_{|z|}(C)$ представляется в виде $\prod\limits_{j=1}^{\infty} \frac{\varphi_1(z)}{p_j}$ и при этом выполняются условия: а) p_j -минимальный по модулю и отличный от нуля нуль функции $\frac{\varphi_1(z)}{p_j} \in A_{|z|}(C)$; б) существуют постоянные $C_1 > 0$ и $C_2 > 0$, что для любого j выполняется неравенство $\left|\frac{\varphi_1(z)}{p_j}\right| \leq C_1 \cdot \exp\{C_2|z|\}$. При этих условиях с помощью теоремы 2 можно получить следующий результат.

Теорема 3. Для того, чтобы целое решение $y(z)$ уравнения $M_\varphi[y] =$
$= \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k y^{(k)}(z) = 0$ представлялось в виде $\sum\limits_{j=1}^{\infty} y_j(z)$, где $M_{\varphi_j}[y_j] = 0$, необходимо и достаточно выполнения оценки $d_1 \exp\{-d_2|z|\} \leq \sum\limits_{j=1}^{\infty} \left|\frac{\varphi(z)}{\varphi_j(z)}\right|^2 \leq$
$\leq d_3 \exp\{d_4|z|\}, z \in C$.

[1] Hormander L. Generators for some rings of analitik functions. -Bull. Amer.Math.Soc., 1967, 73, №6, p.943-949.

Электронные свойства двумерной структуры сформированной вдоль границы раздела полимер/полимер

Лачинов А.Н.[1], Корнилов В.М.[2], Юсупов А.Р.[2], Алтыншина Г.Р.[1], Киан А.[2]

[1]Институт физики молекул и кристаллов УФИЦ РАН,
[2]Башкирский государственный педагогический университет им М.Акмуллы

В докладе представлены результаты экспериментальных исследований электронных свойств границы раздела полимер/полимер. В качестве объектов исследования были использованы субмикронные пленки (до 500 нм) несопряженных органических диэлектриков двух типов: полиариленфталиды и полиметилметакрилат. Методами атомно-силовой микроскопии установлено, что граница раздела имеет сложное строение, но переходная область от одной пленки к другой составляет от 6 до 12 нм в зависимости от технологии изготовления пленок.

Проведены исследования температурной зависимости проводимости вдоль границы раздела 4-х зондовым методом. В интервале температур до 5 K обнаружен металлический тип проводимости. Методом эффекта поля оценили подвижности носителей заряда и установили, что носителями заряда являются электроны. Исследовано влияние поверхностной поляризации полимерных пленок на электронные параметры границы раздела. Учтены две возможности изменения поверхностной поляризации: 1 – путем введения в полимер низкомолекулярных дипольных добавок, 2 – рост поверхностной поляризации при уменьшении толщины пленок вплоть до 2 нм. Обсуждается возможность использования модели поляризационной катастрофы для объяснения наблюдаемых явлений.

Обнаружено влияние электронных состояний локализованных вдоль границы раздела двух органических диэлектриков на транспортные свойства в направлении перпендикулярном границе и на излучательную рекомбинацию экситонов на этой границе. В обоих случаях наблюдается экстремальная зависимость параметров от положения границы раздела внутри полимерной пленки.

Проводится сравнение полученных результатов с аналогичными известными для границ раздела двух неорганических диэлектриков типа перовскитов.

Обсуждается возможность использования обнаруженных явлений для целей разработки органических полевых транзисторов с относительно большой подвижностью носителей заряда, а также в качестве чувствительных элементов химических и биологических сенсоров.

On the indicator of subharmonic function in the half-plane

Malyutin K.G., Kabanko M.V.
Kursk state university, Kursk, Russia

A strictly positive continuous unbounded increasing function $\gamma(r)$ on the half-axis $[0,+\infty)$ is called growth function. Let the growth function $\gamma(r)$ satisfies the condition $\gamma(2r) \le M\gamma(r)$ for some $M > 0$ and for all $r > 0$. We consider the space $J\delta(\gamma(r))^o$ of delta-subharmonic functions of completely regular growth on the upper half-plane with respect to the growth function γ. The definition of the indicator of function from the space $J\delta(\gamma(r))^o$ is introduced. It is proved that the indicator is a essentially bounded function on the segment $[0,\pi]$. The proof uses the methods from the paper [1] and is based on the lemma on Pólya peaks [2].

[1] Malyutin K.G. *Fourier series and δ-subharmonic functions of finite γ-type in a half-plane*, Sbornik: Mathematics, **192**(6), 843–861 (2001).

[2] Polya G. *Bemerkugen über unendlichen Folgeundganzen Functionen*, Math. Ann., **88**, 69–183 (1923).

Аналог экстремальной проблемы Неванлинны для полуплоскости

Малютин К.Г., Ревенко А.А.
Курский государственный университет, г. Курск, Россия

Пусть JM — пространство истинно мероморфных функций в полуплоскости $\mathbb{C}_+ = \{z : \Im z > 0\}$ [1]. Пусть $N(r,f)$ и $T(r,f)$ — её характеристики Неванллинны [2]. Мы доказываем один аналог проблемы Неванлинны, нерешённоой в общем случае до сих пор. Лучшая оценка для мероморфных в комплексной плоскости функций получена в работе [3]. Наш результат в пространстве функций мероморфных в комплексной полуплоскости сформулирован в следующей теореме.

Теорема. Пусть $f \in JM(\rho)$, $\rho > 1$. Тогда

$$\varkappa(f) := \limsup_{r\to\infty} \frac{N(r,f) + N(r,1/f)}{T(r,f)} \ge \frac{5|\sin \pi\rho|}{7(\rho^2-1)} .$$

[1] Fedorov M.A. , Grishin A.F. *Some Questions of the Nevanlinna Theory for the Complex Half-Plane*, Mathematical Physics, Analysis and Geometry, **1**(3), 223–271 (1998).

[2] Malyutin K.G. , *Fourier series and δ-subharmonic functions of finite γ-type in a half-plane*, Sbornik: Mathematics, **192**(6), 843–861 (2001).

[3] Miles J.B. , Shea D.P. *An extremal problem in value distribution theory*, Quart. J. Math. Oxford, **24**, 377–383 (1973).

Гравитационный сдвиг частоты светового сигнала в осциллирующем гало тёмной материи

Маслов Е.М., Кутвицкий В.А.
ИЗМИРАН, г. Москва, Россия

Хотя тёмная материя не взаимодействует напрямую с обычной материей, её осцилляции приводят к осцилляциям гравитационного поля, которые могут быть наблюдаемы по их влиянию на распространение световых сигналов. Мы получили простую формулу для гравитационного сдвига частоты светового сигнала от источника, расположенного в центре сферически-симметричного осциллирующего гало тёмной материи. Используя эту формулу, мы вычислили сдвиг частоты светового сигнала из центра бризероподобного сгустка скалярной тёмной материи в модели с логарифмическим потенциалом самодействия. Решение соответствующей системы уравнений Эйнштейна-Клейна-Гордона, описывающей этот самогравитирующий сгусток, было найдено в работе [1]. Мы получили модуляции гравитационного сдвига частоты удвоенной частотой бризера. Интересно, что на некоторых расстояниях от источника и для некоторых амплитуд бризера мы обнаружили голубой сдвиг частоты вместо красного.

Эти результаты опубликованы в работе [2].

[1] V.A. Koutvitsky, E.M. Maslov, Phys. Rev. D **83**, 124028 (2011).

[2] В.А. Кутвицкий, Е.М. Маслов, ТМФ, **201**, 440 (2019).

On the growth of Dirichlet integral for Q_p functions

Makhmutov S.
Sultan Qaboos University, Oman

Let $D = \{ z : |z| < 1 \}$ be the unit disk in the complex plane $\mathbb{C}$ and denote by $d\sigma_z$ the usual area measure on D. For $z, a \in D$ let $g(z,a)$ be the Green function of D with pole at a.

In the following $d\sigma_z$ represents the usual two-dimensional Lebesgue measure.

Definition. For $0 < p < \infty$, we say that a function f, analytic on D, belongs to Q_p if

$$\sup_{a \in D} \iint\limits_D |f'(z)|^2 g^p(z,a)\, d\sigma_z < \infty$$

Remark. If $p > 1$, then $Q_p = \mathcal{B}$, where $\mathcal{B}$ consists of all analytic functions f on D satisfying $\sup_{z \in D}(1-|z|^2)|f'(z)| < \infty$ and is called the Bloch space. For $p = 1$, $Q_1 = \mathrm{BMOA}$ and, for $0 < p < q \le 1$, the nesting property $Q_p \subsetneq Q_q$ holds. When $p = 0$, $Q_0 = AD$ (the Dirichlet space) $= \{ f : f$ analytic on D and $\iint_D |f'(z)|^2\, d\sigma_z < \infty \}$.

Let $a \in D$. Then we denote $\mathcal{D}_t = \{ z : g(z,a) > t\}$

Theorem 1. For $f \in Q_p$, $0 < p \leq 1$, and any $a \in D$,

$$\lim_{t \to 0} t^p \iint\limits_{\mathcal{D}_t} |f'(z)|^2 \, d\sigma_z = 0.$$

Theorem 2. For $f \in \mathcal{B}$ and any $a \in D$,

$$\lim_{t \to 0} t^p \iint\limits_{\mathcal{D}_t} |f'(z)|^2 \, d\sigma_z = 0$$

for all p, $1 < p < \infty$.

Sharpness of results follow from the next result

Theorem 3. Let $0 < p \leq 1$. For each ε, $0 < \varepsilon < p$, there exists $f_\varepsilon \in Q_p$ such that

$$\lim_{t \to 0} t^{p-\varepsilon} \iint\limits_{\mathcal{D}_t} |f'_\varepsilon(z)|^2 \, d\sigma_z = \infty.$$

Theorem 4. There exists $f_0 \in \mathcal{B}$ such that

$$\lim_{t \to 0} t \iint\limits_{\mathcal{D}_t} |f'_0(z)|^2 \, d\sigma_z \neq 0.$$

Zeros of Holomorphic Functions in Finitely Connected Domains

Menshikova E.B.
Bashkir State University, Ufa, Russia

Let D be a *finitely connected domain with non-empty exterior* or a *simply connected domain with two different points on the boundary* ∂D *of* D in the *complex plane* $\mathbb{C}$, $\mathsf{Z} = \{\mathsf{z}_j\}_{j=1,2,\ldots}$ be a sequence of points in D without limit points in D. For $S \subset D$, we write $S \Subset D$ if S is a *precompact* subset of D. $\operatorname{sbh}(D \backslash S)$ is the class of all *subharmonic functions* on an open neighbourhood of $D \backslash S$. If $S_o \subset D$ is a subset with *non-empty interior* $\operatorname{int} S_o \Subset S \Subset D$, then $\operatorname{sbh}_{+0}(D \setminus S_o; S, 1)$ is the class of all functions $v \in \operatorname{sbh}(D \backslash S)$ with the following two properties: [**0**] $\lim\limits_{D \ni z \to \partial D} v(z) = 0$ *and there is* $S_v \Subset D$ *such that* $v \geq 0$ *on* $D \backslash S_v$, [**1**] $|v| \leq 1$ *on* $S \backslash S_o$. If we replace property [**0**] here with a more strict property [**00**] *there is a domain* $D_v \Subset D$ *such that* $v \equiv 0$ *on* $D \setminus D_v$, then we obtain the class $\operatorname{sbh}_{00}(D \setminus S_o; S, 1) \subset \operatorname{sbh}_{+0}(D \setminus S_o; S, 1)$. The class $\operatorname{sbh}^{\uparrow}_{+0}(D \setminus S_o; S, 1)$ consists of functions obtained as the limit of an increasing sequence of functions from $\operatorname{sbh}_{+0}(D \setminus S_o; S, 1)$.

Main Theorem. *Let* $\mathsf{Z} = \{\mathsf{z}_j\}_{j=1,2,\ldots} \subset D$ *be a sequence without limit points in* D*, and* $M \not\equiv -\infty$ *be a continuous subharmonic function on* D *with Riesz measure* $\varDelta_M$*. Then the following three statement are equivalent:*

[**z1**] *There is a holomorphic function* f *on* D *such that* Z *is the zero set of* f *into account the multiplicity and* $|f| \leq \exp M$ *on* D*.*

[**z2**] *For any non-empty* $\mathrm{int}S_o \Subset S \Subset D$ *there is a constant* $C \geq 0$ *such that*

$$\sum_{zj \in D\setminus S_o} v(\mathsf{z}_j) \leq \int_{D\setminus S_o} v\,\mathrm{d}\Delta_M + C \qquad (\preccurlyeq)$$

for each function $v \in \mathrm{sbh}^{\uparrow}_{+0}(D \setminus S_o; S, 1)$
[**z3**] *There are non-empty* $\mathrm{int}S_o \Subset S \Subset D$ *and a constant* $C \geq 0$ *such that* $(\preccurlyeq)$ *is fulfilled for each infinitely differentiable function* $v \in \mathrm{sbh}_{00}(D \setminus S_o; S, 1)$.

Our Main Theorem was announced without proof and in a weaker form in [1, Theorem 2]. This weaker form is proved in [2, Theorem 1].

The work was supported by a Grant of the Russian Science Foundation (Project No. 18-11-00002).

[1] Menshikova E. B., Khabibullin B. N. On the Distribution of Zero Sets of Holomorphic Functions. II // Funktsl. Anal. i Prilozhen., **53**:1 (2019), 84–87 (Russian); English transl. Funct. Anal. Its Appl **53** (2019), 65–68.

[2] Menshikova E. B., Khabibullin B. N. A Criterion for the Sequence of Roots of a Holomorphic function with Restrictions on its Growth // Izvestiya VUZ. Matematika (2020) (Russian); English transl. Russian Mathematics (to appear).

Описание точечного спектра матричного оператора с интегральными операторными элементами

Меражов Н.И., Расулов Т.Х.
Бухарский государственный университет, г.Бухара, Узбекистан

Через $\mathbb{T}^{\mathrm{d}}$ обозначим d - мерный куб $(-\pi;\pi]^{\mathrm{d}}$ соответствующим отождествлением противоположных граней и через $L_2(\mathbb{T}^{\mathrm{d}})$ обозначим гильбертова пространство квадратично- интегрируемых (комплексно-значных) функций, определенных на $\mathbb{T}^{\mathrm{d}}$. Пусть

$$L_2^{(2)}(\mathbb{T}^{\mathrm{d}}) := \{f = (f_1, f_2) :\ f_\alpha \in L_2(\mathbb{T}^{\mathrm{d}}),\ \alpha = 1, 2\}.$$

Рассмотрим матричный оператор T, действующий в гильбертовом пространстве $L_2^{(2)}(\mathbb{T}^{\mathrm{d}})$ как

$$T := \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{12}^* & T_{22} \end{pmatrix},$$

где матричные элементы $T_{ij} : L_2(\mathbb{T}^{\mathrm{d}}) \to L_2(\mathbb{T}^{\mathrm{d}})$, $i \leq j$, $i, j = 1, 2$ являются интегральными операторами:

$$(T_{ii}f_i)(x) = t_{ii}(x) \int_{\mathbb{T}^{\mathrm{d}}} t_{ii}(s) f_i(s) ds, \quad i = 1, 2;$$

$$(T_{12}f_2)(x) = t_{21}(x) \int_{\mathbb{T}^{\mathrm{d}}} t_{12}(s) f_2(s) ds, \quad f_i \in L_2(\mathbb{T}^{\mathrm{d}}), \quad i = 1, 2.$$

Здесь $t_{ij}(\cdot)$ - вещественно-значная непрерывная функция на $\mathbb{T}^{\mathrm{d}}$. При этом операторная матрица T является ограниченным и самосопряженным оператором в $L_2^{(2)}(\mathbb{T}^{\mathrm{d}})$.

Положим

$$\Delta(\lambda) := \begin{vmatrix} \lambda - \|t_{11}\|^2 & -(t_{11}, t_{21}) & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & -\|t_{12}\|^2 & -(t_{12}, t_{22}) \\ -(t_{11}, t_{21}) & -\|t_{21}\|^2 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & -(t_{12}, t_{22}) & \lambda - \|t_{22}\|^2 \end{vmatrix}.$$

Основным результатом настоящей работы является следующая теорема.

Теорема. Операторная матрица T имеет чисто точечный спектр и для него имеет место равенство

$$\sigma_{\mathrm{pp}}(T) = \{0\} \cup \{\lambda \in \mathbb{R} : \Delta(\lambda) = 0\}.$$

Причем, число $\lambda = 0$ является босконечнократным собственным значением оператора T.

Устойчивая разностная схема для второй краевой задачи, поставленной для уравнения смешанно-составного типа на пространстве $\mathbb{R}^{n+1}$

Меражова Ш.Б., Азимова Д.О., Меражов Н.И.

Бухарский государственный университет, shsharipova@mail.ru

В данной работе предлагается разностная схема для второй краевой задаче для общего уравнения смешанного типа в пространстве R^{n+1}, которое вырождается внутри, а также на границе области определения.

Пусть $\Omega \subset R^n$ - ограниченная, односвязная область с границей $\gamma \in C^2$. Положим $Q = \Omega \times (-T, T)$, $\Gamma-$ граница области Q. $Q^+ = Q \cap t > 0, Q^- = Q \backslash Q^+$.

В области Q рассмотрим дифференциальное уравнение:

$$Lu = K(x,t) \cdot u_{tt} - h(x,t) \cdot \triangle_x u + a(x,t) u_t + \sum_{i=1}^{n} a_i(x,t) u_{x_i} + c(x,t) \cdot u = f(x,t), \quad (1)$$

где $\triangle_x u = \sum_{i,j=1}^{n} u_{x_i x_j}$, $K(x,t) \in C^2(\overline{Q})$, $h(x,t) \in C^{\infty}(\overline{Q})$, $a(x,t), a_i(x,t) \in C^1(\overline{Q})$, $c(x,t) \in C(Q)$; $t \cdot K(x,t) > 0, t \neq 0; K(x,0) = 0, x \in \overline{\Omega}; a(x,-T) = 0; h(x,t) > 0, (x,t) \in Q; h(x,t) = 0, (x,t) \in S; \beta(x) \equiv a(x,0) - K_t(x,0) < 0, x \in \overline{\Omega}$.

Отметим, что в цилиндрической области Q уравнения (1) является уравнением смешанного типа. А именно при $t > 0$- гиперболо-параболического типа, при $t < 0$- эллиптико-параболического типа.

Вторая краевая задача: Найти в области Q решения уравнения:

$$Lu = f(x,t) \quad (1)$$

удовлетворяющее условию

$$u(x,-T)=u(x,T)=u_t(x,T)=0x\in\overline{\Omega} \tag{2}$$

В настоящей работе предлагается, следующая устойчивая разностная схема для численного решение (1) – (2) второй краевой задачи для уравнения смешанного типа:

$$L^{-}u\equiv K\big(\frac{\tau\overline{\tau}u}{\Delta^2}\big)-h\sum_{i,j=1}^{n}\frac{1}{\Delta\chi_i^2}\cdot\xi_i\overline{\xi_j}u+\frac{a\overline{\tau}u}{\Delta}+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\Delta\chi_i}\cdot a_i\overline{\xi_i}u+cu=f,$$

$$k=\overline{-m+1,0};l_i=\overline{0,N};i=\overline{1,n}, \tag{3}$$

$$L^{-}u\equiv K\big(\frac{\overline{\tau\tau}u}{\Delta^2}\big)-h\sum_{i,j=1}^{n}\frac{1}{\Delta\chi_i^2}\cdot\xi_i\overline{\xi_j}u+\frac{a\overline{\tau}u}{\Delta}+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\Delta\chi_i}\cdot a_i\overline{\xi_i}u+cu=f,$$

$$k=\overline{1,m};l_i=\overline{0,N};i=\overline{1,n}, \tag{$3'$}$$

$$u^{-m}=u^{m}=\frac{1}{\Delta}\tau u^{m}=0,l_i=\overline{0,N};i=\overline{1,n} \tag{4}$$

Здесь $u=u(t^k,x_{1,l_1},x_{2,l_2},\dots,x_{n,l_n})=u^k_{l_1,l_2,\dots,l_n},i=\overline{1,n},\ \varphi,\varphi^{-1},\psi_i,\psi_i^{-1}$-операторы сдвига. $\varphi u=u^{k+1}_{l_i}=u^{k+1}$, $\varphi^{-1}u=u^{k-1}_{l_i}=u^{k-1}$, $\psi_i u=u^k_{l_i+1}=u_{l_i+1}$, $\psi_i^{-1}u=u^k_{l_i-1}=u_{l_i-1}$, а также $\tau,\overline{\tau},\xi_i,\overline{\xi_i}-$ разностные операторы: $\tau=\varphi-1,\overline{\tau}=1-\varphi^{-1},\xi_i=\psi_i-1,\ \overline{\xi_i}=1-\psi_i^{-1},\Delta-$ шаг по t, а $\Delta\chi_i$ - шаг по $x_i,i=\overline{1,n}$.

Система линейных алгебраических уравнений $(3)-(3)'-(4)$ относительно неизвестных $\left\{u^k_{l_1,l_2,\dots,l_n}\right\}^{k=\overline{-m,m}}_{l_i=\overline{0,N_i},i=\overline{1,n}}$ образует полную систему.

[1] Врагов В.Н. Краевые задачи для неклассических уравнений математической физики. - Новосибирск: НГУ, 1983-84с.

К субгармоническим функциям с разделенными переменными

Мурясов Р.Р.

Башкирский государственный университет, г.Уфа, Россия

Пусть $[a,b]:=\{x\in\mathbb{R}\colon a\leqslant x\leqslant b\}$ — отрезок на *вещественной оси* $\mathbb{R}$, $a,b\in\mathbb{R}$. Для $k=1,2,\dots$ класс $C^k[a,b]$ — это все k раз непрерывно дифференцируемые функции на своем открытом интервале, содержащем $[a,b]$. Рассматриваем *дифференциальный оператор* вида $L:=\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}+p_1\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}+p_0$ на $C^2[a,b]$, $x\in[a,b]$, p_0,p_1 непрерывные функции $[a,b]$.

Пусть $f_1,f_2\colon[a,b]\to\mathbb{R}$ непрерывны. Функция $f\colon[a,b]\to\mathbb{R}$ называется (f_1,f_2)-*выпуклой*, если для любых $x_1<x_2$ из $[a,b]$ и $c_1,c_2\in\mathbb{R}$ из $c_1f_1(x_j)+c_2f_2(x_j)\geqslant f(x_j)$ при $j=1,2$ следует $c_1f_1(x)+c_2f_2(x)\geqslant f(x)$ для любых $x\in[x_1,x_2]$ [1, гл. I, § 1]. Наша

Основная Теорема. *Пусть f_1, f_2 — базис ядра оператора L. $L(f) \geqslant 0$ для $f \in C^2[a,b]$, если и только если f является (f_1, f_2)-выпуклой.*

Исследование мотивировано изучением аппроксимирующих экспоненциальных систем в пространствах голоморфных функций на областях и в компактах на *комплексной плоскости* $\mathbb{C}$. Ранее было обнаружено [2], [3, гл. 3], что существенную роль в таких исследованиях играют субгармонические функции [4] с разделёнными переменными на $\mathbb{C}$.

Следствие. *Пусть $f, g\colon \mathbb{R} \to (0, +\infty)$, $f, g \in C^2(\mathbb{R})$. Функция, определённая как $z = x + iy \longmapsto f(x)g(y)$, $z \in \mathbb{C}$, $x, y \in \mathbb{R}$, субгармоническая на $\mathbb{C}$, если и только если найдётся $q \in \mathbb{R}$, для которого*

[+] *при* $q>0$ f, g *соотв.* $(e^{\sqrt{q}x}, e^{-\sqrt{q}x})$- *и* $(\cos\sqrt{q}y, \sin\sqrt{q}y)$*-выпуклы,*

[−] *при* $q<0$ f, g — $(\cos\sqrt{|q|}x,\ \sin\sqrt{|q|}x)$- *и* $(e^{\sqrt{|q|}y}, e^{-\sqrt{|q|}y})$*-выпуклы,*

[**0**] *при* $q = 0$ f, g — *выпуклые функции.*

Исследование выполнено при поддержке гранта Российского научного фонда, проект № 18-11-00002.

[1] Ибрагимов И. И. Методы интерполяции функций и некоторые их применения. М.: Наука, 1971, 520 стр.

[2] Хабибуллин Б. Н. Полнота систем целых функций в пространствах голоморфных функций // Матем. заметки, **66**:4 (1999), 603–616.

[3] Хабибуллин Б. Н. Полнота систем экспонент и множества единственности, 4-е изд., доп. Уфа: РИЦ БашГУ, 2012 , xvi+176 стр. `http://www.researchgate.net/publication/271841461`

[4] Хейман У., Кеннеди П. Субгармонические функции. М.: Мир, 1980

Об одном классе линейных операторов в гильбертовых пространствах целых функций

Мусин И.Х.

Институт математики с ВЦ УФИЦ РАН, г. Уфа, Россия

Пусть $H(\mathbb{C}^n)$ – пространство целых функций в $\mathbb{C}^n$, $d\mu_n$ – мера Лебега в $\mathbb{C}^n$, $abs\, u = (|u_1|, \ldots, |u_n|)$ для $u = (u_1, \ldots, u_n) \in \mathbb{R}^n$ $(\mathbb{C}^n)$.

Пусть $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ – полунепрерывная снизу функция такая, что:

$i_1)$ $\varphi(x) = \varphi(abs\, x)$, $x \in \mathbb{R}^n$; $i_2)$ $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\varphi(x)}{\ln(1 + \|x\|)} = +\infty$; $i_3)$ сужение φ на $[0, \infty)^n$ не убывает по каждой переменной.

С функцией φ свяжем гильбертово пространство

$$F^2_\varphi = \{f \in H(\mathbb{C}^n) : \|f\|_\varphi = \left(\int_{\mathbb{C}^n} |f(z)|^2 e^{-2\varphi(abs\, z)}\, d\mu_n(z)\right)^{\frac{1}{2}} < \infty\}.$$

Через $L^{\infty}_{1,+}(\mathbb{C}^n, \varphi)$ обозначим множество измеримых функций g в $\mathbb{C}^n$ таких, что $g(z) = g(abs\, z)$ $(z \in \mathbb{C}^n)$ и $\forall \alpha \in \mathbb{Z}^n_+$ сходятся интегралы

$$\int_{\mathbb{C}^n} |g(z)|\, e^{-2\varphi(abs\, z)} |z^\alpha|^2 \; d\mu_n(z).$$

Для каждого $\alpha \in \mathbb{Z}^n_+$ определим числа $\gamma_g(\alpha) = \int_{\mathbb{C}^n} g(z)\, e^{-2\varphi(abs\, z)} |z^\alpha|^2 \; d\mu_n(z)$, $c_\alpha(\varphi) := \int_{\mathbb{C}^n} |z^\alpha|^2 e^{-2\varphi(abs\, z)} \, d\mu_n(z)$. Введём функцию $\mathcal{K} : \mathbb{C}^{2n} \to \mathbb{C}$ по правилу: $\mathcal{K}(z, w) = \sum\limits_{|\alpha| \geq 0} \frac{z^\alpha w^\alpha}{c_\alpha(\varphi)}$.

На пространстве $\mathcal{P}$ всех (аналитических) полиномов P с топологией, индуцированной из F^2_φ, определим оператор $T_g : \mathcal{P} \to F^2_\varphi$ по правилу $T_g(P)(z) = \int_{\mathbb{C}^n} g(w) P(w) \mathcal{K}(z, \overline{w}) e^{-2\varphi(abs\, w)} \; d\mu_n(w), \; z \in \mathbb{C}^n$.

Теорема. Оператор T_g допускает (единственное) расширение до линейного непрерывного оператора на F^2_φ тогда и только тогда, когда последовательность $\left(\frac{\gamma_g(\alpha)}{c_\alpha(\varphi)}\right)_{|\alpha| \geq 0} \in l_\infty$. Для оператора $\widetilde{T_g}$ – расширения оператора T_g на F^2_φ – имеем $\|\widetilde{T_g}\| = \sup\limits_{|\alpha| \geq 0} \frac{|\gamma_g(\alpha)|}{c_\alpha(\varphi)}$. Оператор $\widetilde{T_g}$ компактен тогда и только тогда, когда

$$\lim_{|\alpha| \to +\infty} \frac{\gamma_g(\alpha)}{c_\alpha(\varphi)} = 0.$$

Данный результат – обобщение теоремы 3.2 С.М. Грудского и Н.Л. Василевского из [1].

[1] S.M. Grudsky and N.L. Vasilevski, Toeplitz operators on the Fock space: radial component effects, Integral Equations Operator Theory, 44 (2002), 10–37.

О приближенном построении границы области устойчивости неавтономных периодических систем

Мустафина И.Ж.
УКГП, г.Учалы, Россия

Рассматривается неавтономная система

$$\frac{dx}{dt} = [A_0 + S(t, \alpha, \beta)]x, \qquad x \in R^N\,, \tag{1}$$

где α и β – скалярные параметры, A_0 – постоянная матрица, а матрица $S(t, \alpha, \beta)$ непрерывно зависит от t, а от α и β зависимость является C^m – гладкой (здесь $m \geq 1$). Предполагаются выполненными равенства: $S(t + T, \alpha, \beta) \equiv S(t, \alpha, \beta)$ и $S(t, 0, 0) \equiv 0$.

Пусть матрица A_0 имеет простое собственное значение 0, а остальные ее собственные значения имеют отрицательные вещественные части. Тогда $x = 0$ является негиперболической точкой равновесия системы (1) при $\alpha = 0$ и $\beta = 0$, а значение $(0,0) \in \mathit{\Pi}$ (здесь $\mathit{\Pi}$ – плоскость параметров (α, β)) принадлежит границе области устойчивости точки равновесия $x = 0$ системы. При этом обычно через точку $(0,0) \in \mathit{\Pi}$ проходит одна или несколько гладких граничных кривых (см., например, [1, 2]). В настоящем докладе приводится схема приближенного построения граничных кривых, проходящих через точку $(0,0) \in \mathit{\Pi}$

Обозначим через e и g собственные векторы матрицы A_0 и транспонированной матрицы A_0^* соответственно, отвечающие собственному значению 0. Эти векторы можно нормировать: $(e,g) = 1$. Положим:

$$V_1 = e^{TA_0} \int_0^T e^{-\tau A_0} S_\alpha'(\tau) d\tau, \quad V_2 = e^{TA_0} \int_0^T e^{-\tau A_0} S_\beta'(\tau) d\tau\,, \quad \zeta_1 = (V_1 e, g)\,, \quad \zeta_2 = (V_2 e, g)\,.$$

Теорема. Пусть $\zeta_1^2 + \zeta_2^2 > 0$. Тогда через точку $(0,0) \in \mathit{\Pi}$ проходит единственная гладкая граничная кривая γ области устойчивости точки равновесия $x = 0$ системы (1). При этом прямая $\beta = -\frac{\zeta_1}{\zeta_2}\alpha$ является касательной к граничной кривой γ.

[1] Шильников Л.П., Шильников А.Л., Тураев Д.В. и др. Методы качественной теории в нелинейной динамике. Ч. 2. М.-Ижевск: Ин-т компьют. исслед., 2009.

[2] Белова А.С., Ибрагимова Л.С., Юмагулов М.Г. Методы исследования устойчивости линейных периодических ситем, зависящих от малого параметра. // Итоги науки и техники. Сер. Соврем. мат. и ее прил. Темат. обз., Москва, 2019.

Исследование спектра одной диагонализируемой 2×2-операторной матрицы

Мустафоева З.Э., Расулов Т.Х.

Бухарский государственный университет, г.Бухара, Узбекистан

Пусть $\mathbb{T}^{\mathrm{d}} = (-\pi; \pi]^{\mathrm{d}}$ - d-ный куб с соответствующим отождествлением противоположных граней, $\mathcal{H}_n := L_2((\mathbb{T}^{\mathrm{d}})^n)$, $n = 1, 2$ - гильбертово пространство квадратично-интегрируемых (комплекснозначных) функций, определенных на $(\mathbb{T}^{\mathrm{d}})^n$, $n = 1, 2$ и $\mathcal{H} := \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$.

В настоящей работе рассматривается оператор $\mathcal{A}$, который действует в гильбертовом пространстве $\mathcal{L} := \mathbb{C}^2 \otimes \mathcal{H}$ как 2×2- операторная матрица

$$\mathcal{A} := \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{12}^* & A_{22} \end{pmatrix},$$

с матричными элементами

$$(A_{11} f_1^{(\mathrm{s})})(p) = (\mathrm{s}\varepsilon + w(p)) f_1^{(\mathrm{s})}(p), \quad (A_{12} f_2^{(\mathrm{s})})(p) = \alpha \int_{\mathbb{T}^{\mathrm{d}}} v(t) f_2^{(-\mathrm{s})}(p,t) dt,$$

$$(A_{22}f_2^{(\mathrm{s})})(p,q)=(\mathrm{s}\varepsilon+w(p)+w(q))f_2^{(\mathrm{s})}(p,q), \quad \{f_1^{(\mathrm{s})},f_2^{(\mathrm{s})},\mathrm{s}=\pm\}\in\mathcal{L}.$$

Здесь $\varepsilon>0$; $v(\cdot)$ и $w(\cdot)$ – вещественно-значные непрерывные функции на $\mathbb{T}^{\mathrm{d}}$ и $\alpha>0$ – "параметр взаимодействия".

С целью изучения спектральных свойств оператора $\mathcal{A}$ наряду с этим оператором рассмотрим еще следующие два ограниченных самосопряженных операторов $\mathcal{A}^{(\mathrm{s})}$, $\mathrm{s}=\pm$, которые действуют в $\mathcal{H}$ как 2×2 блочно-операторные матрицы

$$\mathcal{A}^{(\mathrm{s})}:=\begin{pmatrix} \widehat{A}_{11}^{(\mathrm{s})} & \widehat{A}_{12} \\ \widehat{A}_{12}^* & \widehat{A}_{22}^{(\mathrm{s})} \end{pmatrix}$$

с элементами

$$(\widehat{\mathcal{A}}_{11}^{(\mathrm{s})}f_1)(p)=(-\mathrm{s}\varepsilon+w(p))f_1(p), \quad (\widehat{\mathcal{A}}_{12}f_2)(p)=\alpha\int_{\mathbb{T}^{\mathrm{d}}}v(t)f_2(p,t)dt,$$

$$(\widehat{\mathcal{A}}_{22}^{(\mathrm{s})}f_2)(p,q)=(\mathrm{s}\varepsilon+w(p)+w(q))f_2(p,q), \quad (f_1,f_2)\in\mathcal{H}.$$

Сформилируем основной результат работы.

Теорема. Имеет место равенства $\sigma(\mathcal{A})=\sigma(\mathcal{A}^{(+)})\cup\sigma(\mathcal{A}^{(-)})$. Причем

$$\sigma_{\mathrm{ess}}(\mathcal{A})=\sigma_{\mathrm{ess}}(\mathcal{A}^{(+)})\cup\sigma_{\mathrm{ess}}(\mathcal{A}^{(-)}),\ \sigma_{\mathrm{p}}(\mathcal{A})=\sigma_{\mathrm{p}}(\mathcal{A}^{(+)})\cup\sigma_{\mathrm{p}}(\mathcal{A}^{(-)});$$
$$\sigma_{\mathrm{disc}}(\mathcal{A})\subseteq\sigma_{\mathrm{disc}}(\mathcal{A}^{(+)})\cup\sigma_{\mathrm{disc}}(\mathcal{A}^{(-)});$$
$$\sigma_{\mathrm{disc}}(\mathcal{A})=\{\sigma_{\mathrm{disc}}(\mathcal{A}^{(+)})\cup\sigma_{\mathrm{disc}}(\mathcal{A}^{(-)})\}\setminus\sigma_{\mathrm{ess}}(\mathcal{A}).$$

О кратности виртуального уровня молекулярно-резонансной модели

Неъматова Ш.Б., Расулов Т.Х.

Бухарский государственный университет, г.Бухара, Узбекистан

Пусть $\mathbb{T}^3=(-\pi;\pi]^3$ - трехмерный куб с соответствующим отождествлением противоположных граней, $\mathcal{H}_0:=\mathbb{C}$ - одномерное комплексное пространство, $\mathcal{H}_1:=L_2(\mathbb{T}^3)$ - гильбертова пространство квадратично- интегрируемых (комплексно-значных) функций, определенных на $\mathbb{T}^3$ и $\mathcal{H}:=\mathcal{H}_0\oplus\mathcal{H}_1$.

Рассмотрим молекулярно-резонансную модель $\mathcal{A}$, действующий в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ как операторная матрица

$$\mathcal{A}:=\begin{pmatrix} A_{00} & A_{01} \\ A_{01}^* & A_{11} \end{pmatrix}$$

с матричными элементами $A_{ij}:=\mathcal{H}_j\to\mathcal{H}_i,\ i,j=0,1:$

$$A_{00}f_0=w_0f_0,\ A_{01}f_1=\mu_1\int_{\mathbb{T}^3}v_1(t)f_1(t)dt,$$

$$(A_{11}f_1)(p)=w_1(p)f_1(p)-\mu_2v_2(p)\int_{\mathbb{T}^3}v_2(t)f_1(t)dt.$$

Здесь w_0–вещественное число, $\mu_\alpha > 0$, $\alpha = 1, 2$–параметры взаимодействия, $v_\alpha(\cdot)$, $\alpha = 1, 2$ и $w_1(\cdot)$ вещественно-значные непрерывные функции на $\mathbb{T}^3$. В этих предположениях оператор $\mathcal{A}$ является ограниченным и самосопряженным в $\mathcal{H}$. Пусть $m := \min\limits_{p\in\mathbb{T}^3} w_1(p)$, $M := \max\limits_{p\in\mathbb{T}^3} w_1(p)$.

Определим регулярные в $\mathbb{C} \setminus [m, M]$ функции

$$\Delta_1(z) := w_0 - z - \mu_1^2 \int_{\mathbb{T}^3} \frac{v_1^2(t)dt}{w_1(t) - z}, \quad \Delta_2(z) := 1 - \mu_2 \int_{\mathbb{T}^3} \frac{v_2^2(t)dt}{w_1(t) - z}.$$

Пусть функция $w_1(\cdot)$ имеет единственный невырожденный минимум в точке $p_0 \in \mathbb{T}^3$, функции $w_1(\cdot)$, $v_\alpha(\cdot)$, $\alpha = 1, 2$ имеют непрерывные частные производные до порядка 3 в некоторой окрестности точки $p_0 \in \mathbb{T}^3$ и мера Лебега множества $\operatorname{supp}\{v_1(\cdot)\} \cap \operatorname{supp}\{v_2(\cdot)\}$ равен нулью, где $\operatorname{supp}\{v_\alpha(\cdot)\}$ носитель функции $v_\alpha(\cdot)$. При $w_0 > m$ положим

$$\mu_1^0 := \left((w_0 - m) \left(\int_{\mathbb{T}^3} \frac{v_1^2(t)dt}{w_1(t) - m} \right)^{-1} \right)^{1/2}, \quad \mu_2^0 := \left(\int_{\mathbb{T}^3} \frac{v_2^2(t)dt}{w_1(t) - m} \right)^{-1}.$$

Сформулируем основной результат работы.

Теорема. Оператор $\mathcal{A}$ имеет двухкратный виртуальный уровень в точке $z = m$ тогда и только тогда, когда $\mu_\alpha = \mu_\alpha^0$ и $v_\alpha(p_0) \neq 0$ при $\alpha = 1, 2$.

Некоторые гамильтоновы системы Кимуры.

Павленко В.А.
ФГБОУ ВО БГАУ, ФГБОУ ВО БашГУ, г.Уфа, Россия

Помимо шести классических уравнений Пенлеве, которые интегрируются методом изомонодромной деформации (ИДМ), современных ученых привлекают и другие нелинейные ОДУ более высокого порядка, которые также допускают применение ИДМ. На сегодняшний день известен конечный список таких уравнений.

К их числу относятся решения иерархии гамильтоновых вырождений системы Гарнье, выписанной в известной статье Кимуры [1]. В настоящий момент автором были рассмотрены некоторые из них. В каждой предыдущей работе автора были рассмотрены по два линейнх эволюционных уравнения с временами t_1 и t_2, которые зависели от двух пространственных переменных. Такие эволюционные уравнения можно рассматривать как аналоги уравнений Шредингера, которые определялись гамильтонианами Кимуры. В терминах решений соотвествующих линейных ОДУ методом ИДМ были построены решения данных эволюционных уранений.

В этой работе будет представлен предельный переход между гамильтоновыми системами Кимуры. Кимура выписывал свои системы в разных видах. Кимура указал только предельный переход в рациональном виде. Автору удалось найти переход и в других видах. С помощью этого предельного перехода также переходят и решения соотвествующих уравнений Шредингера.

[1] The degeneration of the two dimensional Garnier system and the polynomial Hamiltonian structure// Annali di Matematica pura et applicata IV. V. 155. No. 1. P. 25 – 74.

Эллиптические краевые задачи с быстрорастущими разрывными нелинейностями

Павленко В.Н., Постникова Е.Ю.
Челябинский государственный университет, г. Челябинск, Россия

Рассматривается задача Дирихле для эллиптического уравнения с в ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^{\not{\kappa}}$ с границей $\partial\Omega$, удовлетворяющей условию конуса,

$$-\Delta u = g(x, u), x \in \Omega, \qquad (1)$$

$$u = 0 \text{ на } \partial\Omega. \qquad (2)$$

Нелинейность $g(x, u)$ в уравнении (1) измерима по x и для п.в. $x \in \Omega$ сечение $g(x, \cdot)$ имеет конечные односторонние пределы $g(x, u_-)$, $g(x, u_+)$ для любого $u \in \mathbb{R}$ и непрерывно справа.

Вариационным методом устанавливается следующий результат.

Теорема. Предположим, что

1) для п.в. $x \in \Omega$ $g(x, u_-) \leqslant g(x, u)$ $\forall u \in \mathbb{R}$;

2) для п.в. $x \in \Omega$ $|g(x, u)| \leqslant a(x) + \exp\left(|u|^{\alpha}\right)$ $\forall u \in \mathbb{R}$, где $a(x)$ - измеримая ограниченная функция на Ω, $0 < \alpha < 1$;

3) для п.в. $x \in \Omega$ $\int_0^u g(x, s)ds \leqslant C_1 |u|^{\gamma} + C_2(x)$ $\forall u \in \mathbb{R}$, где $C_1 > 0$, $C_2(x)$ - суммируемая на Ω функция, $0 < \gamma < 2$

Тогда задача (1)-(2) при имеет слабое решение $u(x)$ из $\overset{\circ}{W}{}^1_2(\Omega)$, значения которого для п.в. $x \in \Omega$ являются точками непрерывности $g(x, \cdot)$.

Основное отличие сформулированной теореме от аналогичных результатов - существование слабого решения со специальном свойством (см, например, [1]).

[1] Claudianor O. Alves, Jefferson A. Santos Multivalued Elliptic Equation with exponential critical growth in $\mathbb{R}^2$ Journal of Differential Equations Volume 261, Issue 9, 2016, Pages 4758-4788

О стабилизации энтропийных решений нелинейных вырождающихся параболических уравнений

Панов Е.Ю.

Новгородский государственный университет, Великий Новгород, РФ

В полупространстве $\Pi = \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n$ рассматривается задача Коши для нелинейного вырождающегося параболического уравнения

$$u_t + \operatorname{div}_x(\varphi(u) - a(u)\nabla_x u) = 0 \tag{1}$$

с вектором потока $\varphi(u) = (\varphi_1(u), \dots, \varphi_n(u)) \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$, с неотрицательной симметричной матрицей диффузии $a(u) \in L^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}^{n\times n})$ и с начальных условием

$$u(0, x) = u_0(x) \in L^\infty(\mathbb{R}^n). \tag{2}$$

Основным результатом работы является следующая

Теорема 1. Пусть $u_0 = u_0(x) \in L_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, то есть $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ и

$$\operatorname{meas}\{\, x \in \mathbb{R}^n \mid |u_0(x)| > \delta \,\} < +\infty \ \forall \delta > 0.$$

Предположим также, что *на любом интервале* $(-h, 0)$ *или* $(0, h)$, $h > 0$ *не могут одновременно выполняться условие линейности вектора* $\varphi(u)$ *и равенство* $a(u) \equiv 0$ *(почти всюду).* Тогда энтропийное решение (э.р.) $u(t, x)$ задачи (1), (2) (в смысле [1]) удовлетворяет следующему свойству стабилизации:

$$\operatorname*{ess\,lim}_{t\to+\infty} \sup_{y\in\mathbb{R}^n} \int_{|x-y|<1} |u(t, x)|dx = 0.$$

В случае законов сохранения $a \equiv 0$ Теорема 1 доказана в [2]. В общем случае доказательство существенно опирается на результаты [3] о стабилизации пространственно-периодических э.р.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант 18-01-00258-а) и Министерства науки и образования РФ (проект 1.445.2016/1.4).

[1] G.-Q. Chen, B. Perthame, Well-posedness for non-isotropic degenerate parabolic-hyperbolic equations, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire. 2003. V. 20, pp. 645–668.

[2] E. Yu. Panov, On decay of entropy solutions to multidimensional conservation laws, arXiv: 1904.01370, accepted in in SIAM J. on Math. Anal.

[3] E. Yu. Panov, Decay of periodic entropy solutions to degenerate nonlinear parabolic equations, arXiv: 1901.05036, accepted in J. Differ. Equ.

Об интерполяционных последовательностях в пространстве И. И. Привалова

Родикова Е. Г.

Брянский государственный университет имени акад. И. Г. Петровского, г. Брянск, Россия

Пусть $\mathbb{C}$ - комплексная плоскость, D - единичный круг на $\mathbb{C}$, $H(D)$ - множество всех функций, аналитических в D. При всех $0 < q < +\infty$ определим класс И. И. Привалова Π_q:

$$\Pi_q = \left\{ f \in H(D) : \sup_{0<r<1} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\ln^+ |f(re^{i\theta})| \right)^q d\theta < +\infty \right\}.$$

Сформулируем задачу кратной интерполяции в классе Π_q:
пусть $\{\alpha_k\}_1^\infty \subset D$ и $\{w_k\}_1^\infty \subset \mathbb{C}$; p_j — кратность появления числа α_j в $\{\alpha_k\}_1^\infty$, $s_j \geq 1$ — кратность появления числа α_j на отрезке $\{\alpha_k\}_1^j$. Выясним, при каких условиях на $\{\alpha_k\}$ и $\{w_k\}$ можно построить в явном виде функцию $f \in \Pi_q$, такую что

$$f^{(s_k-1)}(\alpha_k) = w_k, \ k = 1, 2, \ldots? \tag{1}$$

Задача (1) в Π_q при всех $q > 1$ решена в [2]. Всюду далее $0 < q < 1$.

Для любого $\beta > -1$ обозначим $\pi_{\beta,k}(z, \alpha_k)$ бесконечное произведение М. М. Джрбашяна с нулями $\{\alpha_k\} \subset D$ (см. [1]) без k-го фактора. Пусть $n(r) = card\{\alpha_k : |\alpha_k| < r\}$. Справедлива

Теорема 1. Пусть $\{\alpha_k\} \subset D$ находится в конечном числе углов Штольца. Если 1) $\int\limits_0^1 n^q(r)dr < +\infty$; 2) $|\pi_{p,k}(\alpha_k, \alpha_j)| \geq \exp \frac{-\mu(k)}{(1-|\alpha_k|)^{\frac{1}{q}}}$, где $p > \frac{1}{q} - 1$, $\mu(k) > 0$, $\mu(k) = o(1)$, $k \to +\infty$, и 3) $\sup\limits_{k\geq 1}\{p_k\} < +\infty$, то для любой последовательности $\{w_k\}$, такой что $\ln^+ |w_k| = o\left((1 - |\alpha_k|)^{-1/q}\right)$, $k \to +\infty$, можно построить функцию $f \in \Pi_q$, являющуюся решением задачи (1).

Необходимость первого условия теоремы вытекает из утверждения:

Теорема 2. Если $\{\alpha_k\}_{k=1}^{+\infty} \subset D$ — последовательность нулей некоторой функции $f \in \Pi_q$, то $\int\limits_0^1 n^q(r)dr < +\infty$.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 18-31-00180 мол-а).

[1] Джрбашян М. М. // Сообщ. Инст. матем. и мех. АН Арм. ССР, 2 (1948), 3–40.

[2] Родикова Е. Г., Беднаж В. А. // Сиб. электрон. матем. изв., 16 (2019), 1762–1775.

Один критерий полноты экспоненциальных систем

Салимова А.Е., Хабибуллин Б.Н.
Башкирский государственный университет, г.Уфа, Россия

$\mathsf{Z} = \{\mathsf{z}_k\}_{k=1,2,\dots}$ — последовательность попарно различных точек на *комплексной плоскости* $\mathbb{C}$ без предельных точек в $\mathbb{C}$, $0 \leqslant r < R < +\infty$,

$$l_{\mathsf{Z}}(r,R) := \max\left\{ \sum_{r<\operatorname{Re}\mathsf{z}_k\leqslant R} \operatorname{Re}\frac{1}{\mathsf{z}_k}, \sum_{-R\leqslant\operatorname{Re}\mathsf{z}_k<-r} \operatorname{Re}\frac{1}{-\mathsf{z}_k} \right\}.$$

Для компакта $K \subset \mathbb{C}$ его *ширина в направлении* 0 определяется как величина $\sup\bigl\{\operatorname{Im} z - \operatorname{Im} z' \colon z \in K, z' \in K\bigr\}$.

Теорема. *Пусть число $b \geqslant 0$ и для некоторой пары вертикальных углов ненулевого раствора с биссектрисой-мнимой осью точки $\mathsf{z}_k \in \mathsf{Z}$ при больших k не попадают в эти углы. Эквивалентны три высказывания:*

I. *Для любого компакта $K \subset \mathbb{C}$ ширины $\leqslant 2\pi b$ в направлении 0 система $\bigl\{e^{\mathsf{z}_k z}\bigr\}_k$, $z \in \mathbb{C}$, полна в пространстве локально аналитических функций на K в естественной топологии индуктивного предела.*

II. $\inf\limits_{d} \sup\limits_{1\leqslant r<R<+\infty} \Bigl(l_{\mathsf{Z}}(r,R) - \bigl(b + d(R)\bigr)\ln\dfrac{R}{r}\Bigr) = +\infty$, *где* $\inf$ *в левой части берётся по всех положительным функциям d на положительной оси, стремящимся к нулю при приближении к $+\infty$.*

III. *Для любой ненулевой целой функции f экспоненциального типа на $\mathbb{C}$, обращающейся в нуль на Z, выполнено соотношение*

$$\inf_{d} \sup_{1\leqslant r<R<+\infty} \left(\int_r^R \frac{\ln\bigl|f(iy)f(-iy)\bigr|}{y^2}\,\mathrm{d}y - 2\pi\bigl(b + d(R)\bigr)\ln\frac{R}{r} \right) = +\infty,$$

где $\inf$ *в левой части берётся по тем же функциям d, что и в* **II**.

Этот результат существенно дополняет и развивает критерии полноты экспоненциальных систем в пространствах голоморфных функций на компактах и в областях из $\mathbb{C}$, а также базисные свойства целых функций экспоненциального типа [1], [2, Ch. 22], [3, гл. 3]. Работа поддержана грантом Российского научного фонда, проект № 18–11–00002.

[1] Malliavin P., Rubel L. A. On small entire functions of exponential type with given zeros // Bull. Soc. Math. France, **89**:2 (1961), 175–201.

[2] Rubel L. A. Entire and Meromorphic Functions. Springer-Verlag, 1996.

[3] Хабибуллин Б. Н. Полнота систем экспонент и множества единственности. Монография-обзор, 4-е изд., допол. Уфа: РИЦ БашГУ, 2012 `https://www.researchgate.net/publication/271841461`

О новом методе прогнозирования временных рядов

Седов А.И.

Магнитогорский государственный технический университет им. Г.И. Носова, г.Магнитогорск, Россия

В работе [1] был предложен метод прогнозирования временных рядов. Там же был приведен пример практического применения для прогнозирования индекса биржи IMOEX. Метод, основанный на теории возмущений и решения обратных задач спектрального анализа, является принципиально новым в теории прогнозирования временных рядов. Обоснование метода для задач прогнозирования даны в работах [2, 3]. В последующей работе метод обобщается на многомерные временные ряды. Для прогнозирования используется оператор Лапласа. Обоснование возможности прогнозирования и алгоритмы приведены в работе [4].

[1] Sedov A.I. The Use the Inverse Problem of Spectral Analysis to Forecast Time Series // Journal of Computational and Engineering Mathematics. 2019. T. 6. No1. C. 74-78.

[2] Седов А.И. О существовании и единственности решения обратной задачи спектрального анализа для самосопряженного дискретного оператора // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия: Математическое моделирование и программирование. 2008. No27 (127). С. 100-103.

[3] Седов А.И. Об обратной задаче спектрального анализа // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия: Математическое моделирование и программирование. 2011. No4 (221). С. 91-99.

[4] Седов А.И. О приближенном решении обратной задачи спектрального анализа для степени оператора Лапласа // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия: Математическое моделирование и программирование. 2010. No16 (192). С. 73-78.

Линеаризация с помощью нелокальных преобразований и первые интегралы для семейства ОДУ второго порядка

Синельщиков Д.И.

Национальный исследовательский университет Высшая школа экономики, г. Москва, Россия

В докладе рассматривается следующее семейство уравнений

$$y_{zz} + f(z,y)y_z^2 + g(z,y)y_z + h(z,y) = 0, \qquad (1)$$

где f, g и h, $gh \not\equiv 0$ произвольные достаточно гладкие функции. В ряде работ [1, 2, 3] рассматривалась задача линеаризации (1) с помощью следующих нелокальных преобразований

$$w = F(z, y), \quad d\zeta = G(z, y)dz. \tag{2}$$

Здесь F и G достаточно гладкие функции, такие что $F_y G_y \neq 0$. Однако, наиболее общий случай задачи линеаризации (1) с помощью преобразований (2), а именно случай когда $F_z \neq 0$ и в качестве линейного уравнения используется уравнение гармонического осциллятора с затуханием

$$w_{\zeta\zeta} + \beta w_\zeta + \alpha w = 0, \tag{3}$$

где $\alpha \neq 0, \beta \neq 0$ произвольные параметры, не исследовался.

В докладе в явном виде находятся соотношения на функции f, g и h описывающие уравнения из (1) эквивалентные (3). Кроме того, показано что каждое из линеаризуемых уравнений из семейства (1) обладает первым интегралом. Отдельно рассматриваются случаи когда данный первый интеграл является либо автономным, либо рациональной функцией. Приводятся примеры автономных и неавтономных уравнений из семейства (1), в частности обобщения уравнений Даффинга и Ван дер Поля, линеаризуемых с помощью преобразований (2). Демонстрируется что соответствующие первые интегралы могут быть использованы для нахождения периодических решений, в том числе предельных циклов, линеаризуемых уравнений из семейства (1).

[1] L.G.S. Duarte, I.C. Moreira, F.C. Santos, Linearization under nonpoint transformations, J. Phys. A. Math. Gen. 27 (1994) L739–L743. doi:10.1088/0305-4470/27/19/004.

[2] W. Nakpim, S.V. Meleshko, Linearization of Second-Order Ordinary Differential Equations by Generalized Sundman Transformations, Symmetry, Integr. Geom. Methods Appl. 6 (2010) 1–11. doi:10.3842/SIGMA.2010.051.

[3] N.A. Kudryashov, D.I. Sinelshchikov, On the criteria for integrability of the Liénard equation, Appl. Math. Lett. 57 (2016) 114–120. doi:10.1016/j.aml.2016.01.012.

Инвариантные подмодели ранга 1 уравнений гидродинамического типа

Сираева Д. Т.

Институт механики им. Р.Р. Мавлютова УФИЦ РАН, г. Уфа, Россия

Рассматриваются уравнения гидродинамического типа [1, 2]

$$D\mathbf{u} + \rho^{-1}\nabla p = 0, \quad D\rho + \rho\,\mathrm{div}\mathbf{u} = 0, \quad Dp + \rho f_\rho \mathrm{div}\mathbf{u} = 0, \tag{1}$$

где $D = \partial_t + (\mathbf{u}\cdot\nabla)$ — оператор полного дифференцирования; $\nabla = \partial_{\vec{x}}$ — градиент по пространственным независимым переменным $\vec{x}$; $\vec{u}$ — вектор скорости; ρ —

плотность; p — давление; t — время. Уравнение состояния имеет специальный вид [1]

$$p = f(\rho) + h(S), \tag{2}$$

в силу которого последнее уравнение системы (1) может быть записано для энтропии

$$DS = 0.$$

Система (1) с учетом уравнения состояния (2) допускает двенадцатимерную алгебру Ли L_{12}. Алгебра Ли расширяется за счет оператора дифференцирования по давлению $Y_1 = \partial_p$. Оптимальная система неподобных подалгебр алгебры Ли L_{12} построена в работе [3].

С помощью 3-мерных подалгебр [3] вычисляются инвариантные подмодели ранга 1, представляющие собой системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Для пяти построенных подмоделей найдены точные решения. По одному решению инвариантной подмодели ранга 1 описано движение частиц в пространстве в целом.

Работа поддержана грантом РФФИ (№ 18-29-10071) и частично средствами государственного бюджета по госзаданию (№ 0246-2019-0052)

[1] Овсянников Л. В. Программа ПОДМОДЕЛИ. Газовая динамика // Прикладная математика и механика. Москва: РАН. 1994. Т. 58, вып. 4. С. 30–55.

[2] Хабиров С. В. Лекции. Аналитические методы в газовой динамике. Уфа. БГУ. 2013. 224 с.

[3] Сираева Д. Т. Оптимальная система неподобных подалгебр суммы двух идеалов // Уфимский математический журнал. 2014. Т. 6, вып. 1. С. 94—107.

Solitons in a system of two coupled Gross-Pitaevskii equations with complex PT-symmetric harmonic potential

Smirnov V.V., Alfimov G.L.
MIET University, Zelenograd, Moscow, Russia

Solitons for the Gross-Pitaevskii equation (GPE) with complex PT-symmetric potential recently has attracted a lot of attention due to their applications in photonics and physics of ultracold gases. In the case of scalar repulsive GPE with PT-symmetric harmonic potential, the profile of the soliton is described by the complex ODE

$$u_{xx} + (\mu - (x - i\alpha)^2)u - |u|^2 u = 0 \tag{1}$$

with zero boundary conditions at $\pm\infty$. Here $\mu, \alpha \in \mathbb{R}$ and $u(x)$ is a complex-valued function. The soliton solutions of (1) were described in [1].

Here we apply the method of "filtering out" of singular solutions (see [2]) to detect and compute stationary nonlinear modes for a pair of coupled repulsive GPE with complex harmonic potential. The equation (1) is replaced by the system

$$\begin{cases} u_{1,xx} + (\mu - (x - i\alpha)^2)u_1 - (|u_1|^2 + \beta\,|u_2|^2)u_1 = 0, \\ u_{2,xx} + (\mu - (x - i\alpha)^2)u_2 - (\beta\,|u_1|^2 + |u_2|^2)u_2 = 0. \end{cases} \tag{2}$$

Here $\beta > 0$ and $\mu, \alpha \in \mathbb{R}$. The method allowed us to list all coexisting soliton solutions of (2) (for moderate values of μ) and to describe some new bifurcations.

[1] D.A. Zezyulin, V.V. Konotop, Phys. Rev. A, **85**, 043840, (2012).

[2] G.L.Alfimov, I.V.Barashenkov, A.P.Fedotov, V.V.Smirnov, D.A.Zezyulin, Physica D, **397**, 39-53, (2019).

Оценки множеств периодов суммы и произведения периодических функций многих переменных

Соколова Г.К.

Иркутский государственный университет, г.Иркутск, Россия

Функция $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ многих переменных называется *периодической* с периодом $\bar{T}$, если существует вектор $\bar{T} \neq \bar{0}$ такой, что для всех $\bar{r} \in \mathbb{R}^n$ выполняется равенство $f(\bar{r} + \bar{T}) = f(\bar{r})$. Период $\bar{T}_0$, наименьшего модуля, сонаправленный с вектором $\bar{T}$, назовём *основным* периодом функции f в данном направлении $\bar{\mathfrak{T}}$, где $\bar{T} = |\bar{T}| \cdot \bar{\mathfrak{T}}$. Справедлива следующая теорема.

Теорема. Сумма и произведение двух непрерывных периодических функций $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ и $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ с множествами периодов P_f и P_g соответственно, являются периодическими функциями тогда и только тогда, когда существуют такие периодические функции $f_1 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ и $g_1 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, что $f + g = f_1 + g_1$ или $f \cdot g = f_1 \cdot g_1$, и $\mathrm{P}_{f_1} \cap \mathrm{P}_{g_1} \neq \varnothing$.

Отметим, что в условиях приведённой теоремы множества периодов суммы P_{f+g} и произведения $\mathrm{P}_{f \cdot g}$ периодических функций f и g, вообще говоря, разные и содержат, по крайней мере, пересечение $\mathrm{P}_f \cap \mathrm{P}_g$, но не всегда совпадают с ним. Другими словами, имеют место оценки снизу

$$\mathrm{P}_f \cap \mathrm{P}_g \subseteq \mathrm{P}_{f+g}, \;\; \mathrm{P}_f \cap \mathrm{P}_g \subseteq \mathrm{P}_{f \cdot g}.$$

Примем во внимание ряд следующих утверждений.

З а м е ч а н и е 1. Если вдоль направления $\bar{\mathfrak{T}}$ функция $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ имеет основным период $\bar{T}_0$, а функция $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ постоянная, тогда функции $f + g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ и $f \cdot g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ являются периодическими с основным периодом $\bar{T}_0$ в данном направлении $\bar{\mathfrak{T}}$.

З а м е ч а н и е 2. Если вдоль направления $\bar{\mathfrak{T}}$ функция $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ периодическая или постоянная, а $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ непериодическая, то сумма $f + g :$

$\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ и произведение $f \cdot g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ являются непериодическими функциями в данном направлении $\bar{\mathfrak{T}}$.

З а м е ч а н и е 3. Если вдоль направления $\bar{\mathfrak{T}}$ функции $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ и $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ периодические или непериодические одновременно, то сумма $f + g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ и произведение $f \cdot g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ могут быть периодическими, постоянными или непериодическими функциями в направлении $\bar{\mathfrak{T}}$.

Таким образом, можно сделать заключение, что множества периодов суммы P_{f+g} и произведения $\mathrm{P}_{f \cdot g}$ периодических функций $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ и $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ содержат не только пересечение множеств периодов P_f и P_g этих функций, но и включают в себя периоды, которые возникают в направлениях, вдоль которых f и g одновременно непериодические. Справедливы оценки сверху

$$\mathrm{P}_{f+g} \subseteq \mathrm{P}_f \cap \mathrm{P}_g \cup (\overline{\mathrm{P}_f \cup \mathrm{P}_g}), \;\; \mathrm{P}_{f \cdot g} \subseteq \mathrm{P}_f \cap \mathrm{P}_g \cup (\overline{\mathrm{P}_f \cup \mathrm{P}_g}).$$

О простейшем тривиальном каноническом законе сохранения для гиперболических уравнений

Старцев С.Я.
Институт математики с ВЦ УФИЦ РАН, г.Уфа, Россия

Для скалярного гиперболического уравнения

$$u_{xy} = F(x, y, u, u_x, u_y) \tag{1}$$

предложен конструктивный алгоритм анализа тривиальных законов сохранения, то есть соотношений вида $\rho = D_x(\psi)$. Здесь ρ и ψ являются функциями от x, y, u и производных вида $u_i = \partial^i u/\partial x^i$, $\bar{u}_j = \partial^j u/\partial y^j$, а D_x – полная производная по x в силу (то есть на решениях) уравнения.

С некоторыми оговорками (связанными с нетривиальностью ядра D_x для некоторых уравнений), указанный алгоритм позволяет регулярным образом выразить все частные производные ψ по переменным u, u_i, $\bar{u}_j$ в терминах функций ρ и F (то есть локально обратить оператор D_x). В частности, применение этого алгоритма позволяет доказать, что падение порядка хотя бы у одного из y-инвариантов Лапласа уравнения является необходимым (и почти достаточным) условием для того, чтобы функция F_{u_y} принадлежала образу полной производной D_x в силу этого уравнения.

Условие вида $F_{u_y} = D_x(\psi)$ возникает во многих ситуациях. Большинство их них можно рассматривать как те или иные частные случаи ситуации, когда решения уравнения (1) переводятся подстановкой $v = g$, где g зависит хотя бы от одной из производных u по y, в решения уравнения $v_{xy} = \tilde{F}(x, y, v, v_x)$. Например, наличию y-интегралов (нетривиальных элементов ядра D_x) соответствует случай $\tilde{F} = 0$.

Более подробное изложение вышеупомянутого алгоритма и его приложений дано в [1].

[1] С. Я. Старцев, Законы сохранения для гиперболических уравнений: локальный алгоритм поиска прообраза относительно полной производной // Итоги науки и техн. Сер. Соврем. мат. и ее прил. Темат. обз., 2019, Т. 162, С. 85–92.

Спектральные свойства дифференциальных сингулярных операторов нечетного порядка в вырожденном случае

Султанаев Я.Т., Назирова Э.А.

БГПУ им.Акмуллы, г.Уфа, Россия, БашГУ, г.Уфа, Россия

Рассматривается дифференциальное выражение вида:

$$ly = (-1)^n 2iy^{(2n+1)} + \sum_{k=l}^{n}(-1)^k \left(p_k y^{(k)}\right)^{(k)} +$$

$$+ i\sum_{k=m}^{n-1}(-1)^k \left[\left(q_k y^{(k+1)}\right)^{(k)} + \left(q_k y^{(k)}\right)^{(k+1)}\right] = i\sigma y, \tag{1}$$

Случай, когда дифференциальное выражение не содержит слагаемых с искомой функцией и производные низших порядков, называется вырожденным. Несмотря на то, что дифференциальные выражения нечетного порядка ранее изучались рядом авторов, вырожденный случай остается не достаточно изученным.

Нами решена задача о нахождении асимптотических при $x \to \infty$ формул для фундаментальной системы решений модельного уравнения вида (1) и с их помощью проведен анализ возможных индексов дефекта соответствующего минимального дифференциального оператора:

$$-2iy^{(5)} + (p_2 y'')'' - (p_1 y')' - i[(q_1 y')'' + (q_1 y'')' = 2i\sigma y, \tag{2}$$

где $p_{1,2}(x)$, $q_1(x)$ – дважды непрерывно-дифференцируемые функции на $(0, \infty)$.

При выполнении ряда условий регулярности на рост данных функций, нами были описаны классы дифференциальных операторов, имеющих индексы дефекта (4,4), (3,3), (2,3) и (3,2).

Работа выполнена при поддержке: грант РФФИ N18-01-00250-А (Султанаев Я.Т., Назирова Э.А.) и грант министерства образования и науки Республики Казахстан N AP05133397 (Султанаев Я.Т.).

[1] М.Ф. Федорюк, Асимптотические методы для линейны ОДУ, Москва, Наука, 1983.

[2] М.А.Наймарк, Линейные дифференциальные операторы, Москва, 1969.

[3] М.Ф. Федорюк, Асимптотические методы для линейны ОДУ, Москва, Наука, 1983.

[4] M.S.P. Eastham, C.G.M. Grudniewicz, Asymptotic theory and deficiency indices for higher-order self-adjoint differential equations , Department of Mathematics, Chelsea College, University of London, Manresa Road, London SW3 6LX, pp.255-271.

[5] W.N. Everitt, A. Zettl, Generalized symmetric ordinary differential expressions. The general theory , Niew archief voor wisKunde, 3, 1979, 363-397.

О восстановлении функции в полосе по интегралам по окружностям с центрами на фиксированной прямой

Сысоев С.Е.

Уфимский государственный авиационный технический университет, г.Уфа, Россия

Пусть $H = \{(x_1, x_2) : x_1 \in R,\ x_2 > 0\} \subset R^2$ верхняя полуплоскость, обозначим $\gamma(a, r)$ окружность с центром в точке $(a, 0)$ на прямой $x_2 = 0$ и радиусом $r > 0$. Для непрерывной финитной функции $f \in C_0(H)$ положим

$$g(a, r) = \int_{\gamma(a,r)} f(x_1, x_2) ds,$$

где ds – евклидов элемент длины кривой $\gamma(a, r)$. Решение задачи восстановления f по данным $g(a, r)$, заданным для всех окружностей в R^2 с центрами на прямой $x_2 = 0$, известно [1]. Рассмотрим задачу восстановления функции f в полосе $\Omega = \{(x_1, x_2) : x_1 \in R,\ 0 < x_2 < h\} \subset H$, где $h = const > 0$, исходя из интегралов $g(a, r)$, заданных только для окружностей в R^2 с центрами на прямой $x_2 = 0$ и радиусами $0 < r < h$, т.е. для семейства дуг окружностей в полосе Ω. Решение этой задачи единственно, если $f \in L_1(\Omega)$ [2].

Рассматриваемая задача сведена к решению внешней задачи для преобразования Радона функции u с носителем в единичном круге на плоскости. Эта функция связана с f соотношением

$$f(x_1, x_2) = \frac{4x_2}{(1 + x^2)^2} u(\frac{2x_1}{1 + x^2}, \frac{1 - x^2}{1 + x^2}),$$

где $x^2 = x_1^2 + x_2^2$, а ее преобразование Радона известно для прямых, не пересекающих эллипс $(1 + h^2)x_1^2 + ((1 + h^2)x_2 + h^2)^2 = 1$. Решение получившейся внешней задачи для преобразования Радона функции u позволило получить формулу восстановления f в полосе Ω.

[1] A.Denisjuk, Fract. Calc. and Appl. Anal., 2 (1999), No 1, p. 31–46.

[2] С.Е.Сысоев, Успехи мат. наук, 52 (1997), No 4, с. 213–214.

Структура существенного спектра и дискретный спектр оператора энергии трехмагнонных систем в ферромагнитной модели Гейзенберга с взаимодействием ближайших соседов

Ташпулатов С.М.
Институт ядерной физики АН РУз., г. Ташкент, Узбекистан

Гамильтониан рассматриваемой системы имеет вид:

$$H = -J\sum_{m,\tau}(\overrightarrow{S}_m \overrightarrow{S}_{m+\tau}),$$

где $J > 0-$ параметр билинейного обменного взаимодействие между ближайшими соседями в решетке Z^ν, $\overrightarrow{S}_m-$ оператор атомного спина со значениями $s = \frac{1}{2}$, в узле m, а τ означает суммирование по ближайшим соседям в Z^ν. Гамильтониан H действует в симметрическом пространстве Фока $\mathcal{H}$. Спектральные свойства оператора энергии трехмагнонных систем тесно связаны со спектральными свойствами его двухмагнонных подсистем. Обозначим через $\mathcal{H}_3$ пространство трехмагнонных состояний оператора H. Ясно, что пространство $\mathcal{H}_3$ является инвариантным относительно оператора H. Обозначим через H_3 сужение оператора H на подпространство $\mathcal{H}_3$. А обозначим через $\mathcal{H}_2$ пространство двухмагнонных состояний оператора H. Ясно, что пространство $\mathcal{H}_2$ также является инвариантным относительно оператора H. Обозначим через H_2 сужение оператора H на подпространство $\mathcal{H}_2$. Пусть λ, μ, γ является квазиимпульсами магнонов и $\Lambda = \lambda + \mu + \gamma$, $\Lambda_1 = \lambda + \mu$, $\Lambda_2 = \lambda + \gamma$, и $\Lambda_3 = \mu + \gamma$. Тогда оператор $H_{3\Lambda}$ можно представить в виде $H_{3\Lambda} = H_{2\Lambda_1} \bigotimes I + I \bigotimes (H_{2\Lambda_2} + H_{2\Lambda_3}) + K_\Lambda$, где $I-$ единичный оператор в пространстве $\mathcal{H}_1$, а оператор K_Λ является операторамы конечного ранга, здесь $\mathcal{H}_1$ является одномагнонным пространством оператора H. Поэтому существенные спектры оператора $H_{3\Lambda}$ и оператора $H_{2\Lambda_1} \bigotimes I + I \bigotimes (H_{2\Lambda_2} + H_{2\Lambda_3})$ совпадают.

Теорема. Пусть $\Lambda_1 = \Lambda_2 = \Lambda_3 = 0$, тогда существенный спектр оператора $H_{3\Lambda}$ состоит из единственного отрезка $\sigma_{ess}(H_{3\Lambda}) = [0, 24J]$, а дискретный спектр состоит из конечного числа точек.

Нами получении нижняя и верхняя оценка для количество точек дискретного спектра оператора $H_{3\Lambda}$.

Релятивистская задержка времени в пространстве-времени Айон-Беато-Гарсия

Тулеганова Г.Ю., Лукманова Р.Ф.
ФГБОУ ВО Башкирский государственный педагогический университет им. М. Акмуллы, г.Уфа, Россия

Пространство-время Айон-Беато-Гарсия (АБГ) является точным решением общей теории относительности (ОТО), предложенным Айон-Беато и Гарсия [1], призванным решить одну из «проблем» черной дыры, называемую сингулярностью. Сингулярность рассматривается как один из недостатков ОТО.

Новые регулярные решения уравнений Эйнштейна для черных дыр АБГ были найдены с учетом связи с нелинейным электродинамическим полем. Нелинейная теория сводится к теории Максвелла в пределе слабого поля и решение соответствует заряженной черной дыре при $|Q| \leq 2s_c m \approx 1,05m$, где метрика, инварианты кривизны и электрическое поле регулярны повсюду. В данной работе мы исследуем релятивистскую задержку времени (РЗВ) методом, предложенным в [2,3] в пространстве-времени АБГ и оцениваем влияние заряда Q на задержку времени.

Результирующие оценки порядка величин для Δt_1, Δt_2 и Δt_3 получены для двойной системы пульсар - черная дыра. Показано, что они достаточно устойчивы, то есть порядок величин остается неизменным даже при изменении параметра Q с сохранением малых углов и общих значений соответственно. Еще одним выводом работы является, что с увеличением значения заряда Q величина РЗВ уменьшается. Учитывая возможности современного оборудования, можно рассчитывать на точность измерений в пределах микросекундного порядка, однако измерение членов более высокого порядка Δt_2 и Δt_3 вряд ли будет достигнуто в ближайшем будущем.

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 18-32-00377.

[1] Ayón-Beato E., García A., Phys. Rev. Lett. **80**, 5056 (1998).

[2] Izmailov R.N., Zhdanov E.R., Bhadra A., Nandi K.K., Eur. Phys. J. C **79**, 105 (2019).

[3] Izmailov R.N., Karimov R.Kh., Potapov A.A., Nandi K.K., Ann. Phys. **413**, 168069 (2020).

Об одной нелокальной задаче для нагруженного параболического уравнения

Тураев К.Н.

Термезский государственный университет, г.Термез, Узбекистан

В настоящее время круг рассматриваемых задач для нагруженных параболических уравнений значительно расширился. Это объясняется тем, что многие практически важные задачи, связанные с динамикой почвенной влаги, с процессом диффузии частиц в турбулентной плазме, с охлаждением неоднородного изогнутого стержня, моделированием процесса излучения лазера, приводят к локальным и нелокальным краевым условиям. Исследования последних лет убедительно показывают, что в математической биологии весьма часто возникают как локальные краевые, так и нелокальные краевые задачи [1].

А задачи со свободной границей для нагруженного параболического уравнения относятся к категории малоизученных [2, 3].

В настоящей заметке рассматривается задача со свободной границей типа Флорина с нелокальным граничным условием для нагруженного квазилинейного параболического уравнения.

Постановка задачи. Требуется найти функции $s(t), u(t,x)$ удовлетворяющие условиям

$$u_t - a(u_x)u_{xx} = cu(t,0), D = \{(t,x) : 0 < t \le T, 0 < x < s(t)\}, \tag{1}$$

$$u(0,x) = \varphi(x), \quad 0 \le x \le s_0, \tag{2}$$

$$u_x(t,0) = f(t), \quad 0 \le t \le T, \tag{3}$$

$$\alpha u(t,x_0) = u(t,s(t)), \quad 0 \le t \le T, \tag{4}$$

$$u_x(t,s(t)) = \psi(t), \quad 0 \le t \le T. \tag{5}$$

[1] Нахушев А.М.Нагруженные уравнения и их применение. Москва: Наука, 2012. 232 с.

[2] Adrina C.Briozzo., Domingo A.Tarzia. A one-phase Stefan problem for a non-classical heat equation with a heat flux condition on the fixed face. //App.Math.and Com. 2016. No.182, № 5. P. 809-818.

[3] Adrina C.Briozzo., Domingo A.Tarzia. Existence and uniqueness for one-phase Stefan problems of non-classical heat equations with temperature boundary condition at a fixed face // El.Jour.Differ.Eq. 2016. No.206, № 21. P. 1-16.

Задача со свободной границей для квазилинейного уравнения диффузии с нелинейным граничным условием

Тураев Р.Н.

Институт математики АН РУЗ, г.Ташкент, Узбекистан

Квазилинейные параболические уравнения второго порядка лежат на основе математических моделей самых разнообразных явлений и процессов в физике, механике,биологии, экологии и многих других областях знаний .

Нелинейные задачи диффузии со свободными граничными условиями обычно используются для описания расширения и распространения биологических видов или химических веществ, а свободная граница используется для представления границы этого расширения [1].

В настоящей работе изучается задача со свободной границей типа Флорина для квазилинейного параболического уравнения с нелинейном граничным условием.

Постановка задачи. Требуется найти на некотором отрезке $0 < t \le T$ непрерывно дифференцируемую функцию $s(t)$, такую, что $s(0) = s_0 > 0$, $0 < \dot{s}(t) \le N$, $s(t)-$удовлетворяет условию Гельдера, а функция $u(t,x)$ в области $D = \{(t,x) : 0 < t \le T, 0 < x < s(t)\}$ удовлетворяет уравнению

$$u_t(t,x) = a(t,x,u_x)u_{xx}(t,x) + (b(u))_x, \quad (t,x) \in D \tag{1}$$

и следующим начальным и граничным условиям

$$u(0,x) = \varphi(x), \quad 0 \le x \le s_0, \tag{2}$$

$$u_x(t,0) = f(t, u(t,0)), \quad 0 \le t \le T, \tag{3}$$

$$u(t, s(t)) = 0, \quad 0 \le t \le T, \tag{4}$$

$$u_x(t, s(t)) = \psi(t), \quad 0 \le t \le T. \tag{5}$$

Сначала задача (1)-(5) сводится типа задача Стефана и доказывается их эквивалентность. Затем устанавливаются некоторые априорные оценки для решений $s(t), u(t,x)$ и их производные в норм Гельдера. Далее, на основе установленных оценок исследуется поведение свободной границы в рассматриваемом промежутке времени, доказывается единственности решения первоначальной задачи, и далее доказывается глобальную разрешимость полученной задачи при помощи методом неподвижной точки Шаудера.

[1] Ren-Hu Wang a,b, Lei Wang a, Zhi-Cheng Wang.Free boundary problem of a reaction–diffusion equation with nonlinear convection term. J. Math. Anal. Appl. 467 (2018) 1233—1257.

Задача со свободной границей с интегральным граничным условием

Тураев Р.Н., Эшкораев К.А.

Институт математики АН РУЗ, г.Ташкент, Узбекистан, Чирчикский педагогческий университет, г.Чирчик,Узбекистан.

Задачи с интегральным граничным условием встречаются в процессах распространения тепла в тонком нагретом стержне, если задан закон изменения общего количества тепла стерженя [1]. Для параболических уравнений задачи со свободной границей с интегральным условием рассмотрены в работах [2, 3]. В настоящей работе исследуется задача со свободной границей типа Флорина с интегральным условием.

Постановка задачи. Требуется найти на некотором отрезке $0 < t \le T$ непрерывно дифференцируемую функцию $s(t)$, такую, что $s(0) = s_0 > 0$, $0 < \dot{s}(t) \le N$, $s(t)-$удовлетворяет условию Гельдера, а функция $u(t,x)$ в области $D = \{(t,x) : 0 < t \le T, 0 < x < s(t)\}$ удовлетворяет уравнению

$$u_t(t,x) = u_{xx}(t,x), \quad (t,x) \in D, \tag{1}$$

и следующим начальным и граничным условиям

$$u(0,x) = \varphi(x), \quad 0 \le x \le s_0, \tag{2}$$

$$u_x(t,0) = f(t), \quad 0 \le t \le T, \tag{3}$$

$$\int\limits_0^{s(t)} u(t,x)dx = 0, \quad 0 \le t \le T, \tag{4}$$

$$u(t, s(t)) = p, \quad 0 \le t \le T. \tag{5}$$

Исследование проводится по следующей схеме. Сначала задача (1)-(5) сводится к задаче типа Стефана с нелокальным граничным условием. Затем получаются некоторые априорнные оценки для решений $s(t), u(t,x)$ и их производных. Далее на основе полученных оценок исследуется поведение свободной границы в рассматриваемом промежутке времени, доказываются единственность решения и глобальная разрешимость задачи.

[1] The solution of the heat equation subject to the specification of energy // Quart. Appl. Math. 1963. Vol. XXI, no. 2. P. 155–160.

[2] The one phase Stefan problem subject to the specification of energy // J. Math. Anal. Appl. 1982. Vol. 861. P. 281–291.

[3] Comparini E. and Tarzia D. A. A Stefan problem for the heat equation subject to an integral condition // Rend. Sem. Mat. Univ. Padova. 1985. Vol. 73. P. 119–136.

Группа симметрий вязкой двухфазной среды

Туров М.М., Панов А.В.

Челябинский государственный университет, г.Челябинск, Россия

Рассматривается система уравнений в частных производных

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho_1}{\partial t} + u_1 \frac{\partial \rho_1}{\partial x} + \rho_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial \rho_2}{\partial t} + u_2 \frac{\partial \rho_2}{\partial x} + \rho_2 \frac{\partial u_2}{\partial x} = 0, \\ \rho_1 \left(\frac{\partial u_1}{\partial t} + u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} \right) + m_1 \frac{\partial \left(P(\rho_1, \rho_2) + \mu \frac{\partial u_1}{\partial x} \right)}{\partial x} = -\frac{\rho_2}{\tau}(u_1 - u_2), \\ \rho_2 \left(\frac{\partial u_2}{\partial t} + u_2 \frac{\partial u_2}{\partial x} \right) + m_2 \frac{\partial P(\rho_1, \rho_2)}{\partial x} = \frac{\rho_2}{\tau}(u_1 - u_2), \end{cases}$$

описывающая динамику вязкой двухфазной среды в случае одной пространственной переменной. Здесь u_1, u_2 — скорости первой и второй фазы, ρ_1, ρ_2 – парциальные плотности фаз, $P(\rho_1, \rho_2)$ – давление смеси, $m_2 = \frac{\rho_2}{\rho_{22}}$ – объёмная концентрация второй фазы, ρ_{22} – абсолютная плотность второй фазы (постоянная величина), $m_1 = 1 - m_2$ – объёмная концентрация первой фазы, μ – вязкость несущей среды.

Выполнена групповая классификация данной системы по параметрам – вязкости и давлению. Найдены группы допускаемых преобразований рассматриваемой системы при различных значениях вязкости.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ 18-31-00226 мол_а.

[1] Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. М.-Л.: Гостехиздат, 1950.

Дискретные бризеры и мультибризеры в модели Пейрара-Бишопа молекулы ДНК

Фахретдинов М.И., Закирьянов Ф.К., Екомасов Е.Г.
Башкирский государственный университет, г.Уфа, Россия

В модели Пейрара-Бишопа молекулы ДНК получены стационарные дискретные бризеры (ДБ) и мультибризеры [1]. Разработан оригинальный комплекс программ для моделирования дискретных и мобильных бризеров и изучения их свойств [2]. Получена область существования ДБ для всего диапазона допустимых частот ДБ в зависимости от параметра межчастичного взаимодействия S, характеризующего стекинг-взаимодействие молекулы ДНК. Впервые получены решения в виде односайтовых ДБ, двухсайтовых ДБ, заданных кодовыми последовательностями $\{+1,+1\}$, $\{-1,+1\}$ и трёхсайтовых ДБ, заданных кодовыми последовательностями $\{-1,+1,-1\}$ и $\{-1,0,+1\}$. Показано, что найденные решения устойчивы по отношению к малым возмущениям. Методом продолжения решения по параметру изучен механизм потери устойчивости ДБ в исследуемой модели при изменении параметра межчастичного взаимодействия S. Для односайтовых ДБ и двухсайтовых ДБ, заданных кодовыми последовательностями $\{+1,+1\}$, происходит явление обмена стабильностью при $S_{crit} \approx 0.6519$, в результате которого при $S < S_{crit}$ односайтовые ДБ являются устойчивыми, а двухсайтовые — нет. А при $S > S_{crit}$ — наоборот, односайтовые ДБ являются неустойчивыми, а двухсайтовые — устойчивыми. Для трёхсайтовых ДБ потеря устойчивости происходит в результате бифуркаций Хопфа при $S \approx 0.186$ для ДБ, заданного кодовой последовательностью $\{-1,+1,-1\}$, и при $S \approx 0.254$ для ДБ, заданного кодовой последовательностью $\{-1,0,+1\}$. Методом продолжения решения по параметру построена зависимость энергии и амплитуды найденных решений от параметра межчастичного взаимодействия S.

Работа выполнена при частичной поддержке гранта РФФИ №20-02-00213А.

[1] Фахретдинов М.И., Закирьянов Ф.К., Екомасов Е.Г. Дискретные бризеры и мультибризеры в модели ДНК Пейрара-Бишопа // Нелинейная динамика. 2015. Т. 11. № 1. С. 77-87.

[2] Фахретдинов М.И., Закирьянов Ф.К. Дискретные бризеры в модели ДНК Пейрара-Бишопа // Журнал технической физики. – 2013. – Т. 83, № 7. – С. 1-5.

A computation of solitons in a system of three NLS-type equations with nonlinear coupling

Fedotov A.P.
MIET University, Zelenograd, Moscow, Russia

In a recent paper [1], a method for the detection and numerical computation of stationary nonlinear modes in vector nonlinear Schrödinger-type systems was presented. It has been shown that the method works effectively for various NLS-type equations with defocusing nonlinearity, such as Gross-Pitaevskii equation with real and complex potential, Lugiato-Lefever equation and other. Here I report on application of the method to compute soliton solutions for a system of three nonlinearly coupled NLS equations with additional potential $V(x)$. These solutions satisfy the system of three coupled ODEs

$$\begin{cases} u_{1,xx} + (\mu - V(x))u_1 - (u_1^2 + \beta_{12}u_2^2 + \beta_{13}u_3^2)u_1 = 0, \\ u_{2,xx} + (\mu - V(x))u_2 - (\beta_{21}u_1^2 + u_2^2 + \beta_{23}u_3^2)u_2 = 0, \\ u_{3,xx} + (\mu - V(x))u_3 - (\beta_{31}u_1^2 + \beta_{32}u_2^2 + u_3^2)u_3 = 0. \end{cases} \tag{1}$$

Here $\beta_{i,j} > 0$, $i, j = 1, 2, 3$, and $\mu \in \mathbb{R}$. The prototypical example of the potential $V(x)$ is the quantum harmonic oscillator, $V(x) = x^2$. The soliton solutions satisfy the boundary conditions

$$u_i(x) \to 0, \quad x \to \pm\infty, \quad i = 1, 2, 3. \tag{2}$$

The algorithm employs the fact that "the most part" of solutons of Cauchy problem for (1) have a singularity on a real axis. Any solution of (1) that vanishes at $+\infty$ has the asymptotics

$$u_i(x) = (C_i + o(1))\tilde{u}(x), \quad x \to +\infty,$$

where $C_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2, 3$, and $\tilde{u}(x)$ is the solution of linearized problem

$$u_{xx} + (\mu - V(x))u = 0$$

that vanishes at $+\infty$. So, the algorithm consists in scanning of the space (C_1, C_2, C_3) seeking for solutions that are not singular and selecting the soliton solutions among them. Since the procedure admits efficient parallelization, for numerical implementation the software for GPU was used. The code on CUDA involves (i) numerical solution of Cauchy problem; (ii) exact localization of a singularity point $x = \tilde{x}$; (iii) adjusting of the values C_i, $i = 1, 2, 3$ in such a way that $\tilde{x} \to -\infty$.

[1] G.L.Alfimov, I.V.Barashenkov, A.P.Fedotov, V.V.Smirnov, D.A.Zezyulin, Physica D, **397**, 39-53 (2019).

Инвариантные движения частиц общей трехмерной подгруппы группы всех пространственных переносов

Хабиров С.В.
Институт механики УФИЦ РАН, г.Уфа, Россия

Уравнения механики сплошной среды инвариантны относительно группы Галилея расширенной растяжением. Группа содержит абелеву подгруппу переносов по пространству, включая равномерное движение начала отчета (галилеевы преобразования). Изучена алгебра Ли этой группы и построена оптимальная система подалгебр с точностью до внутренних автоморфизмов [1]. 6-и мерной абелевой подгруппе пространственных переносов соответствует абелева подалгебра, структура которой содержит 13 не подобных подалгебр [2]. Среди них выделена общая 3-х мерная подалгебра, содержащая все операторы галилеевых преобразований. Эта подалгебра содержит 5 произвольных параметров - инвариантов группы внутренних автоморфизмов алгебры Ли. Относительно общей подалгебры рассмотрены все инвариантные решения с линейным полем скоростей для идеальной газовой динамики. Изучены движения частиц в целом. Каждая частица двигается по прямым линиям. В определенные моменты времени частицы собираются на линейных многообразиях коллапсов. В зависимости от значений произвольных параметров могут быть несколько многообразий коллапсов. Рассмотрены движения выделенных объемов частиц в виде параллелепипедов, которые проецируются в параллелограммы на многообразиях коллапсов. На примере уравнений газовой динамики у полученных решений изучено движение звуковых поверхностей в зависимости от уравнений состояния. Выведены уравнения для звуковых характеристик полученных решений. Приведен пример движения звукового коноида простейшего решения.

[1] Чиркунов Ю.А., Хабиров С.В. Элементы симметрийного анализа дифференциальных уравнений механики сплошной среды. Новосибирск: НГТУ, 2012, 659 с.

[2] Хабиров С.В. Лекции. Аналитические методы в газовой динамике. Уфа: БашГУ, 2013, 224 с.

Development of Malliavin – Rubel Theorems

Khabibullin B.N.
Bashkir State University, Ufa, Russia

Let $\mathsf{Z} = \{\mathsf{z}_j\}_{j=1,2,\dots}$, $\mathsf{Z}' = \{\mathsf{z}'_j\}_{j=1,2,\dots}$ be a pair of sequences of points in the *complex plane* $\mathbb{C}$ without limit points in $\mathbb{C}$, $0 \leqslant r < R < +\infty$,

$$l_{\mathsf{Z}}(r, R) := \max\Biggl\{ \sum_{r<\operatorname{Re}\mathsf{z}_j\leqslant R} \operatorname{Re}\frac{1}{\mathsf{z}_j}, \sum_{-R\leqslant\operatorname{Re}\mathsf{z}_j<-r} \operatorname{Re}\frac{1}{-\mathsf{z}_j} \Biggr\}.$$

$I_*^{\exp}(\mathsf{Z})$ is the class of all *entire functions* $f \neq 0$ *of exponential type* with zero set $\mathrm{Zero}_f \supset \mathsf{Z}$ into account the multiplicity; $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ is the *real axis*.

Main Theorem. *If* $\liminf\limits_{j\to\infty} \min\bigl\{|\mathrm{Re}\, \mathsf{z}_j|/|\mathsf{z}_j|, |\mathrm{Re}\, \mathsf{z}'_j|/|\mathsf{z}'_j|\bigr\} > 0$, *then the following three statement are equivalent:*

[**E1**] *For each* $g \in I_*^{\exp}(\mathsf{Z}')$ *there is* $f \in I_*^{\exp}(\mathsf{Z})$ *such that* $\bigl|f(iy)\bigr| \overset{\forall y\in\mathbb{R}}{\leq} \bigl|g(iy)\bigr|$.

[**E2**] *There is a pair of functions* $f \in I_*^{\exp}(\mathsf{Z})$ *and* $g \in I_*^{\exp}(\mathsf{Z}')$ *such that* $\sup\limits_{0\leq r<R<+\infty} \bigl(l_{\mathrm{Zero}_g}(r,R) - l_{\mathsf{Z}'}(r,R)\bigr) < +\infty$ *and* $\bigl|f(iy)\bigr| \overset{\forall y\in\mathbb{R}}{\leq} \bigl|g(iy)\bigr|$.

[**E3**] $\sup\limits_{0\leq r<R<+\infty} \bigl(l_{\mathsf{Z}}(r,R) - l_{\mathsf{Z}'}(r,R)\bigr) < +\infty$.

If $\mathsf{Z} \subset \mathbb{R}^+ := \{r \in \mathbb{R} \colon r \geq 0\}$ and $\mathsf{Z}' \subset \mathbb{R}^+$, then our Main Theorem is the Malliavin – Rubel Theorem [1, Theorem 4.1], [2, Ch. 22, Main Theorem]. We prove our Main Theorem in a much more general subharmonic form, covering all main results from [1], [3], [4], [2, Ch. 22], [5, Ch. 3].

The work was supported by a Grant of the Russian Science Foundation (Project No. 18-11-00002).

[1] Malliavin P., Rubel L. A. On small entire functions of exponential type with given zeros // Bull. Soc. Math. France, **89**:2 (1961), 175–201.

[2] Rubel L. A. Entire and Meromorphic Functions. Springer-Verlag, 1996.

[3] Khabibullin B. N. On the growth of entire functions of exponential type along the imaginary axis // Mat. Sb., **180**:5 (1989), 706–719; Math. USSR-Sb., **67**:1 (1990), 149–163.

[4] Khabibullin B. N. On the growth of entire functions of exponential type with given zeros along a line // Analysis Mathematica. **17**:3 (1991), 239–256 (Russian).

[5] Khabibullin B. N. Completeness of exponential systems and sets of uniqueness. 4th ed., revised. Ufa: Publishing Center of BashSU, 2012 `https://www.researchgate.net/publication/271841461` (Russian).

On perturbation of a Schrodinger operator with localized complex-valued potential

Khusnullin I.Kh.

Akmulla Bashkir State Pedagogical University, Ufa, Russia

Let $V_1(x)$ and $V_2(x)$ be complex-valued functions from $C_0^\infty(\mathbb{R})$, x_1 is an arbitrary number, parameters $0 < \mu, \varepsilon \ll 1$ satisfy the relation

$$\varepsilon\mu^{-1} = o(1). \tag{1}$$

In the work we consider the operator

$$\mathcal{H}_{\varepsilon,\mu} := -\frac{d^2}{dx^2} + \mu^{-1}\left(V_1\left(\frac{x-x_1}{\varepsilon}\right) + \varepsilon V_2(x)\right)$$

in $L_2(\mathbb{R})$ on domain $W_2^2(\mathbb{R})$.

It is well known (see, for example, [1, Chapter V]) that operator $\mathcal{H}_0 := -\frac{d^2}{dx^2}$ in $L_2(\mathbb{R})$ on domain $W_2^2(\mathbb{R})$ is self-adjoint, its discrete spectrum is empty, and the continuous spectrum coincides with the semi-axis $[0, +\infty)$.

We denote

$$\langle g \rangle := \int_{\mathbb{R}} g(t)dt.$$

Theorem. Suppose that condition (1) holds true. If

$$\mathrm{Re}\,(\langle V_1 \rangle + \langle V_2 \rangle) > 0,$$

then there exists the unique eigenvalue $\lambda_{\varepsilon,\mu}$ of operator $\mathcal{H}_{\varepsilon,\mu}$ tending to zero as $\varepsilon \to 0$. This eigenvalue is simple and its asymptotics reads as

$$\lambda_{\varepsilon,\mu} = -\frac{1}{4}\left(\varepsilon\mu^{-1}\right)^2 (\langle V_1 \rangle + \langle V_2 \rangle)^2 + O\left(\varepsilon^3\mu^{-3}\right).$$

If

$$\mathrm{Re}\,(\langle V_1 \rangle + \langle V_2 \rangle) < 0,$$

then operator $\mathcal{H}_{\varepsilon,\mu}$ has no eigenvalues converging to zero as $\varepsilon \to 0$.

Acknowledgements. This work was supported by RFBR grants N18-01-00250-A, N18-51-06002 Az-a.

[1] T. Kato. Perturbation theory for linear operators. Springer, New York, 1966.

Определитель Байка на уравнениях Штурма – Лиувилля

Черданцев И.Ю.

Башкирский государственный университет, г.Уфа, Россия

Пусть функции $u_k\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $k = 1, \ldots, n$, — решения уравнений

$$\frac{\mathrm{d}^2 u_k}{\mathrm{d}x^2} = \Big(\lambda_k - \frac{1}{6}v\Big)u_k, \quad \lambda_k \in \mathbb{R}; \quad v\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

— непрерывно дифференцируемая функция. Решениям u_k сопоставим квадратную матрицу $A_n := \Big(u_k^{(j)}\Big)_{k=1,\ldots,n}^{j=0,\ldots,n-1}$, где $u_k^{(j)}$ — j-ая производная функции u_k. Определитель $\det A_n$ — *определитель Байка.*

Основной результат — *явные формулы для определителя Байка.*

Теорема. *Пусть*

$$m := \begin{cases} \frac{n}{2}, & \text{если } n \text{ чётное}, \\ \frac{n+1}{2}, & \text{если } n \text{ чётное}, \end{cases} \qquad P_{ij} := \prod_{\substack{p=1 \\ p \neq i}}^{m} (\lambda_p - \lambda_{m+j}),$$

а также S_m *— симметрическая группа порядка* m, ε_σ *— знак перестановки* $\sigma \in S_m$, $\sigma_i := \sigma(i)$. *В этих обозначениях*

$$\det A_{2m} = \sum_{\sigma\in S_m} \varepsilon_\sigma P_{\sigma_1 1}\cdot\ldots\cdot P_{\sigma_m m}\big(u_{\sigma_1^{-1}}u^{(1)}_{m+1} - u^{(1)}_{\sigma_1^{-1}}u_{m+1}\big) \times\cdots\times\big(u_{\sigma_m^{-1}}u^{(1)}_{2m} - u^{(1)}_{\sigma_m^{-1}}u_{2m}\big),$$

$$\det A_{2m-1} = (-1)^{m-1}\sum_{\sigma\in S_m} \varepsilon_\sigma P_{\sigma_1 1}\cdot\ldots\cdot P_{\sigma_{m-1} m-1}\big(u_{\sigma_1^{-1}}u^{(1)}_{m+1} - u^{(1)}_{\sigma_1^{-1}}u_{m+1}\big) \times\cdots\times\big(u_{\sigma_{m-1}^{-1}}u^{(1)}_{2m-1} - u^{(1)}_{\sigma_{m-1}^{-1}}u_{2m-1}\big)u_{\sigma_m^{-1}}.$$

Работа проделана совместно с Б. И. Сулеймановым.

Исследование сложной особой точки одной трёхмерной динамической системы

Черепанова Е.А.

Челябинский Государственный Университет, г.Челябинск, Россия

В работе [1] рассматривается система уравнений в частных производных, описывающая сферически симметричное движение двухфазной среды. При некоторых дополнительных предположениях о зависимости давления от плотностей, задача отыскания стационарных движений приводит к системе обыкновенных дифференциальных уравнений, зависящих от пяти переменных. У этой системы, оказывается, имеются два первых интеграла, так что система сводится к системе третьего порядка. Асимптотика этой системы (при стремлении к бесконечности одного из основных параметров системы) описывается следующей системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot{q_1} = q_1(2a^2q_2 - kq_1r(q_1-q_2)),\\ \dot{q_2} = br(q_1-q_2)(q_1^2-a^2),\\ \dot{r} = q_2r(q_1^2-a^2). \end{cases}$$

В настоящей работе исследуется поведение этой системы в окрестности её состояний равновесия $A_0 = (q_1 = 0, q_2 = 0, r = 0)$ и $A_\infty = (q_1 = 0, q_2 = 0, r = \infty)$.

Показано, что:

1) нет траекторий системы, входящих в особую точку A_0;

2) имеется однопараметрическое семейство траекторий, входящих в точку A_∞.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 18-31-00226 мол_а).

[1] Рахматулин Х.А. Основы газодинамики взаимопроникающих движений сжимаемых сред. Прикл. математика и механика. 1956. Т. 20, 2. С. 184–195.

О некоторых приложениях комплексных аналогов семейства полиномов Лагранжа

Шакиров И.А.

ФГБОУ НГПУ, г.Набережные Челны, Россия

Семейство интерполяционных полиномов Лагранжа $\Phi_n^c(x,s)$, $s \in [0, 2\pi]$ [1] представлено в комплексной форме

$$\Phi_n^c(x,t) = \sum_{m=-n+1}^{n-1} c_m t^m + c_n \varphi(t^n, c), \quad t \in \gamma \tag{1}$$

$$(\varphi(t^n) = \frac{1}{2}[(1-ic)t^n + (1+ic)t^{-n}], \quad c \in R),$$

с целью использования (1) при построении взаимосогласованных квадратурных формул для сингулярных и регулярных интегралов, входящих в уравнение

$$Kx(t) \equiv (Ux)(t) + (Thx)(t) = y(t), \tag{2}$$

$$(Ux)(t) = (b_1 Ix + b_2 Wx + b_3 Sx + b_4 WSx)(t), \quad t \in \gamma,$$

и при приближенном решении уравнения (2) методом механических квадратур; здесь $x = x(t)$ - искомая, $y(t)$ - заданная функции, $(Ix)(t) = x(t)$,

$$(Sx)(t) = \frac{1}{\pi i} \int_\gamma \frac{x(\tau)}{\tau - t} d\tau, (Wx)(t) = x[\alpha(t)], (Thx)(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma h(t,\tau) x(\tau) \frac{d\tau}{\tau},$$

$\alpha(t) = 1/t, \quad -t, \quad -1/t$ - рассматриваемые сдвиги $\gamma = \{z||z| = 1\}$ на себя.

Если в (1) $c = \pm 1$, то получаются простейшие интерполяционные квадратурные формулы для сингулярных интегралов с указанными сдвигами, а также простые вычислительные схемы метода квадратур для уравнения (2).

Теорема 1. Квадратурные формулы $(Sx)(\alpha(t)) \approx (S\Phi_n^{\pm 1} x)(\alpha(t))$, построенные по узлам $t_k = exp(i\pi k/n)$, $k = \overline{1, 2n}$ сходятся в среднем с показателем p, $1 < p < +\infty$ для произвольной R - интегрируемой плотности $x(t) \in \widetilde{R}(y)$.

Теорема 2. Пусть оператор K линейно обратим в пространстве $L_p(\gamma)$, $1 < p < \infty$ и выполнены условия вида $ib_3 - b_2 = 0$, $y(t)$, $h(t,\tau) \in \widetilde{R}(y)$. Тогда соответствующая методу механических квадратур система линейных алгебраических уравнений, представленная в операторной форме $K_n x_n \equiv \Phi_n^{\pm 1(t)} U x_n + \Phi_n^{\pm 1(t)} T \Phi_n^{\pm 1(\tau)}(h x_n) = \Phi_n^{\pm 1(t)} y$, имеет единственное решение $x_n^*(t)$, которое сходится к точному решению $x^*(t)$ уравнения (2) в среднем с показателем p. Если же функции $y(t)$, $h(t,\tau) \in C(\gamma)$, то

$||x^* - x_n^*||_{L_p} = O[\overline{E}_n^t(h) + \overline{E}_n^\tau(h) + \overline{E}_n(y)]$, где $\overline{E}_n^t(h)$ и $\overline{E}_n^\tau(h)$ - наилучшие равномерные приближения функции $h(t,\tau)$ по соответствующим переменным полиномами из множества $H_n^{\pm 1}$ (полиномами вида (1) при $c = \pm 1$).

[1] Шакиров И.А. О тригонометрическом интерполяционном полиноме Лагранжа, имеющем минимальную норму как оператор из $C_{2\pi}$ в $C_{2\pi}$ // Изв. вузов. Математика. - 2010. № 10. - С. 60-68.

Математическая модель искажения смектических слоев во внешних магнитном и электрическом полях

Шапошников Н.С.
Башкирский государственный педагогический университет им. М. Акмуллы, г.Уфа, Россия

В [1] исследовалось периодическое структурообразование в объеме образца под воздействием граничных условий специального вида, в [2] рассмотрен процесс возникновения периодических искажений смектических слоев в скрещенных магнитном и электрическом полях. Цель предлагаемой работы – получение критических значений магнитного и электрического полей, при которых такого рода искажения возможны.

Искажение смектических слоев сегнетоэлектрического ЖК $u(x,z)$ определяется из условия минимума функционала

$$F = \int_V f(x,y,z,u(x,z))\,dV + S,$$

где $f(x,y,z,u(x,z))$ – плотность упругой энергии в объеме образца сегнетоэлектрика.

Искажения смектических слоев ищем в виде $u = u_0 \sin(kx)\sin(\pi z/d)$.

Получены значения волнового числа k_x и критического значения электрического поля E_c:

$$k_x^2 = \frac{1}{2}\frac{\epsilon_a \epsilon_0 E^2 \cos^2\alpha \cos 2\theta}{A_{12}}, E_c^2 = \frac{2\pi\sqrt{B_0 A_{12}}}{d\epsilon_a\epsilon_0 \cos 2\theta \cos^2\alpha},$$

при которых возникают периодические искажения смектических слоев, результаты согласуются с [3]. Для случая магнитного поля соответствующие результаты совпадают с [2].

[1] Мигранова Д.Н., Кондратьев Д.В., Мигранов Н.Г. Метод прямых в решении краевой задачи Пуассона для смектика SmC* во внешнем электрическом поле // Жидк. крист. и их практич. использ. Том 16 (2016), №3, с. 58-68. DOI: 10.18083/LCAppl.2016.3.58

[2] Мигранов Н.Г., Кондратьев Д.В. Слоевые анизотропные жидкости: деформация структур в электрическом и магнитном полях // Труды ИМех им. Р.Р. Мавлютова. Том 12 (2017), № 2, с. 214-218. DOI: 10.21662/uim2017.2.032

[3] Кондратьев Д.В., Мигранов Н.Г. Периодические искажения слоев смектического жидкого кристалла в магнитном и электрическом полях // Жидк. крист. и их практич. использ. Том 19 (2019), №1, с. 79-86. DOI: 10.18083/LCAppl.2019.1.79

О глобальной мероморфности решений уравнений Пенлеве и их иерархий

Шумкин М.А.
МГУ, Москва, Россия

Установлено, что каждое локальное голоморфное решение любого из обыкновенных дифференциальных уравнений, составляющих иерархии первого и второго уравнений Пенлеве, задает решение специального вида (типа ускоренных волн или типа масштабирования) соответствующих им солитонных уравнений параболического типа. Благодаря этому доказано, что все локальные голоморфные решения указанных уравнений допускают аналитическое продолжение до функций, мероморфных на всей комплексной плоскости. Это результаты совместной работы с А.В.Домриным и Б.И.Сулеймановым.

Поведение решений непрерывно-дискретных систем в окрестностях негиперболических точек равновесия

Юмагулов М.Г.
Башкирский государственный университет, г.Уфа, Россия

Рассматривается зависящая от параметра μ непрерывно-дискретная система, описываемая уравнениями:

$$\left.\begin{array}{ll} x'(t) = f(x(t), y_k, \mu)\,, & t_k \leqslant t < t_{k+1} \\ y_{k+1} = g(x(t_{k+1}), y_k, \mu)\,, & (k = 0, 1, 2, \ldots) \end{array}\right\} \tag{1}$$

с начальными условиями $x(t_0) = x_0$ и $y(t_0) = y_0$. Здесь $x \in R^n$ и $y \in R^m$ – векторы, характеризующие состояния непрерывной и дискретной части динамической системы. Функции $f(x, y, \mu)$ и $g(x, y, \mu)$ предполагаются гладкими. Системы вида (1) возникают при исследовании реальных процессов с учетом импульсных возмущений, приводящих к скачкообразному изменению состояния моделируемой системы (см., например, [1], [2])

В докладе обсуждаются вопросы о свойствах точек равновесия и периодических решений системы (1): устойчивость, гиперболичность, основные сценарии локальных бифуркаций и их признаки.

[1] Agranovich G.A. Some problems of discrete/continuous systems stabilization // Functional Differential Equations. 2003. Vol. 10. № 1-2. P. 5-17.

[2] Марченко В.М., Зачкевич З. Представление решений управляемых гибридных дифференциально-разностных импульсных систем // Дифференциальные уравнения. 2009. Т. 45. № 12. С. 1775-1786.

Об одной задаче оптимального управления для процессов описываемых линейным уравнением третьего порядка

Ягубова М.М.
Баку, Азербайджан

Рассматривается следующая задача: Найти такие распределенное управление $u(x,y,t)$ и стартовые управления $\upsilon^0(x,y)$, $\upsilon^1(x,y)$, для которых решение $z(x,y,t)$ начально-краевой задачи

$$\begin{array}{l}\beta z_{tt} + z_t - \frac{\partial}{\partial t}\triangle z - \triangle z = u(x,y,t), \\ (x,y,t) \in Q = \Omega \times (0,T) = \{0 < x < a,\ 0 < y < b,\ 0 < t < T\}\end{array} \tag{1}$$

$$z(0,y,t) = z(x,0,t) = z(a,y,t) = z(x,b,t) = 0 \tag{2}$$

$$z(x,y,0) = \upsilon^0(x,y),\ z(x,y,0) = \upsilon^1(x,y) \tag{3}$$

удовлетворяет условию

$$z(x,y,T) = \varphi(x,y),\ (x,y) \in \Omega \tag{4}$$

и при этом функционал

$$J(u,\upsilon^0,\upsilon^1) = \int\limits_Q u^2(x,y,t)dxdydt + \alpha_0 \int\limits_\Omega (\upsilon^0(x,y))^2 dxdy + \alpha_1 \int\limits_\Omega (\upsilon^1(x,y))^2 dxdy$$

принимает минимальное значение, где $\beta, T, a, b, \alpha_0 > 0, \alpha_1 > 0$ -заданные числа, $\Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ оператор Лапласа, $\varphi(x,y)$ заданная функция.

В работе сначала получается представление решения задачи (1)-(3) в виде двойного ряда, а далее строятся оптимальные управления $u(x,y,t)$, $\upsilon^0(x,y)$, $\upsilon^1(x,y)$ в виде двойных рядов

[1] Ларкин Н.А., Новиков В.А., Яненко Н.Н. Нелинейные уравнения переменного типа, Новосибирск, Наука, 1983, 269 с.

[2] Салехов Г.С. Вычисление рядов. М.: ГИТТЛ, 1955, 143 с.

[3] Титчмарш Э.Ч. Разложения по собственным функциям, связанные с дифференциальными уравнениями второго порядка. М.:ИЛ., т.II, 1961,554 с.

Научное издание

КОМПЛЕКСНЫЙ АНАЛИЗ, МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА И НЕЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Сборник тезисов
Международной научной конференции
(оз. Банное, 10 – 14 марта 2020 г.)

Лицензия на издательскую деятельность
ЛР № 021319 от 05.01.99 г.

Подписано в печать 05.03.2020 г. Формат 60х84/16.
Усл. печ. л. 4,37. Уч.-изд. л. 4,56.
Изд. № 8. Заказ 74.

Редакционно-издательский центр
Башкирского государственного университета
450076, РБ, г. Уфа, ул. Заки Валиди, 32.

Отпечатано на множительном участке
Башкирского государственного университета
450076, РБ, г. Уфа, ул. Заки Валиди, 32.