МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РФ
УФИМСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ЦЕНТР
РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК
БАШКИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
БАШКИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ ИМ. М. АКМУЛЛЫ
АКАДЕМИЯ НАУК РЕСПУБЛИКИ БАШКОРТОСТАН

КОМПЛЕКСНЫЙ АНАЛИЗ, МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА И НЕЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Сборник тезисов
Международной научной конференции
(оз. Банное, 18 – 22 марта 2019 г.)

УФА
РИЦ БашГУ
2019

УДК 51
ББК 22.1
К63

К63 **Комплексный анализ, математическая физика и нелинейные уравнения:** сборник тезисов Международной научной конференции (оз. Банное, 18 – 22 марта 2019 г.) / отв. ред. Р.Н. Гарифуллин. – Уфа: РИЦ БашГУ, 2019. – 86 с.
ISBN 978-5-7477-4874-3

Представленные в сборнике тезисы посвящены различным областям фундаментальной и прикладной математики. В большей части работ исследуются различные постановки нелинейных задач. Также рассматриваются задачи теории аппроксимаций, обратные задачи, уравнения с дробными производными.

Тезисы докладов воспроизводятся с представленных авторами оригиналов.

УДК 51
ББК 22.1

ISBN 978-5-7477-4874-3

MINISTRY OF SCIENCE AND HIGHER EDUCATION OF THE RUSSIAN FEDERATION

UFA FEDERAL RESEARCH CENTRE OF RUSSIAN ACADEMY OF SCIENCES

BASHKIR STATE UNIVERSITY

BASHKIR STATE PEDAGOGICAL UNIVERSITY NAMED AFTER M. AKMULLA

ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF BASHKORTOSTAN

COMPLEX ANALYSIS, MATHEMATICAL PHYSICS AND NONLINEAR EQUATIONS

Book of abstracts
of the International conference
Bannoe Lake, Russia
March 18 - 22, 2019

UFA - 2019

UDC 51
BBK 22.1

Complex Analysis, Mathematical Physics and Nonlinear Equations: Book of Abstracts of the International Conference. – Ufa, Russia: RIC BashSU, 2019. – 86 p.
ISBN 978-5-7477-4874-3

Presented in the collection abstracts are devoted to various areas of fundamental and applied mathematics. In most of the works, different formulations of nonlinear problems are investigated. Also problems of approximation theory, inverse problems and equations with fractional derivatives are considered.

Abstracts are reproduced from the originals submitted by the authors.

UDC 51
BBK 22.1

ISBN 978-5-7477-4874-3

Содержание

Начальные задачи для вырожденных полулинейных эволюционных уравнений с производной Римана — Лиувилля

Авилович А.С.
Челябинский государственный университет, г.Челябинск, Россия

Пусть $m-1<\alpha\leq m\in\mathbb{N}$, D_t^α — дробная производная Римана — Лиувилля, L, M — линейные замкнутые плотно определенные в банаховом пространстве $\mathfrak{X}$ операторы, действующие в банахово пространство $\mathfrak{Y}$. Через $\mathcal{L}(\mathfrak{X})$ и $\mathcal{L}(\mathfrak{Y})$ обозначим банаховы пространства линейных ограниченных операторов на $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{Y}$ соответственно. Обозначим также $\overline{\mathbb{R}}_+=\mathbb{R}_+\cup\{0\}$. По определению $(L,M)\in\mathcal{H}_\alpha(\theta_0,a_0)$ [1], если

(i) существуют $a_0\geq 0$ и $\theta_0\in(\pi/2,\pi)$ такие, что для всех $\lambda\in S_{a_0,\theta_0}:=\{\mu\in\mathbb{C}:|\arg(\mu-a_0)|<\theta_0,\mu\neq a_0\}$ $(\lambda^\alpha L-M)^{-1}L\in\mathcal{L}(\mathfrak{X})$, $L(\lambda^\alpha L-M)^{-1}\in\mathcal{L}(\mathfrak{Y})$;

(ii) при любых $a>a_0$, $\theta\in(\pi/2,\theta_0)$ существует такая константа $K=K(a,\theta)>0$, что для всех $\mu\in S_{a,\theta}$

$$\max\{\|(\mu^\alpha L-M)^{-1}L\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{X})},\|L(\mu^\alpha L-M)^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{Y})}\}\leq\frac{K(a,\theta)}{|\mu^{\alpha-1}(\mu-a)|}.$$

Пусть банаховы пространства $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{Y}$ рефлексивны, пара операторов $(L,M)\in\mathcal{H}_\alpha(a_0,\theta_0)$. Тогда $\mathcal{X}=\mathcal{X}^0\oplus\mathcal{X}^1$, $\mathcal{Y}=\mathcal{Y}^0\oplus\mathcal{Y}^1$, $Q=s\text{-}\lim\limits_{n\to\infty}nL_n^L(M)$.

Рассмотрим задачу типа Шоуолтера — Сидорова

$$D_t^\alpha Lx(t)=Mx(t)+N(t,D_t^{\alpha-m}x(t),D_t^{\alpha-m+1}x(t),\dots,D_t^{\alpha-1}x(t))+f(t),\qquad(1)$$

$$D_t^{\alpha-m+k}Lx(t_0)=y_k,\quad k=0,1,\dots,m-1,\qquad(2)$$

Теорема. Пусть банаховы пространства $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$ рефлексивны, $(L,M)\in\mathcal{H}_\alpha(\theta_0,a_0)$, $L_1\in\mathcal{L}(\mathcal{X}^1;\mathcal{Y}^1)$ или $M_1\in\mathcal{L}(\mathcal{X}^1;\mathcal{Y}^1)$, Z открытое множество в $\mathbf{R}\times\mathcal{X}^m$, $N:Z\to\mathcal{Y}^1$, $L_1^{-1}N\in C\big(Z;D_{L_1^{-1}M_1}\big)$ локально липшицево по $\overline{x}$, $f\in C([t_0,T];\mathcal{Y})$ для некоторого $T>t_0$, $L_1^{-1}Qf\in C([t_0,T];D_{L_1^{-1}M_1})$, $g_{m-\alpha}*M_0^{-1}(I-Q)f\in C^{m-1}([t_0,T];\mathcal{X})$, $y_k\in L[D_{L_1^{-1}M_1}]$ для любых $k=0,1,\dots,m-1$. Тогда для некоторого $t_1\in(t_0,T]$ существует единственное решение задачи (1), (2) на отрезке $[t_0,t_1]$.

[1] Федоров В.Е., Романова Е.А., Дебуш А. Аналитические в секторе разрешающие семейства операторов вырожденных эволюционных уравнений дробного порядка // Сиб. журн. чистой и приклад. математики. 2016. Т. 16, № 2. С. 93–107.

Асимптотическое приближение решения задачи роста трещины авто-флюидоразрыва в двумерной постановке

Аксаков А.В., Байков В.А., Борщук О.С., Коновалова С.И.
ООО «РН-УфаНИПинефть», г.Уфа, Россия

В работе рассматривается математическая модель роста трещины авто-ГРП в вертикальной плоскости, включающая уравнения гидродинамики для несжимаемой жидкости в приближении смазочного слоя и линейной теории упругости, краевая задача для которых с учетом условий сопряжения на границе имеет вид [1]:

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\beta w^2}{4\mu}\frac{\partial w}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\beta w^3}{12\mu}\frac{\partial p_e}{\partial z}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\beta w^3}{12\mu}\frac{\partial p_e}{\partial y}\right) = Q_w, \qquad (1)$$

$$p_e = -\frac{G}{4\pi(1-\nu)}\iint_\Omega \left(\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{r}\right)\frac{\partial w}{\partial y'} + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r}\right)\frac{\partial w}{\partial z'}\right) dy'dz', \qquad (2)$$

$$p_e(z)|_{t=0} = p_0(z) - \sigma_{\min}(z), \qquad q|_{z=0} = q(t), \qquad q|_{\partial\Omega} = 0. \qquad (3)$$

где w – ширина раскрытия трещины, $\beta = (\rho_f - \widetilde{\rho}_r)g$ – градиент силы плавучести, μ – вязкость жидкости, ρ_f – плотность жидкости, $\widetilde{\rho}_r$ – обобщенная плотность пород, $p_e = p - \sigma_{\min}$ – избыточное давление, p – давление в трещине, $\sigma_{\min}$ – смыкающие напряжения в пласте, Q_w – утечки в пласт по модели Картера, согласно которой фильтрация жидкости разрыва из объема трещины в пласт описывается одномерным однофазным течением, $r = \sqrt{(y-y')^2 + (z-z')^2}$, ν – коэффициент Пуассона, Ω – область, занятая трещиной, G – модуль сдвига.

Численным решением системы уравнений (1)–(3) методом граничных элементов на двумерной сетке являются поля давления и раскрытия трещины.

Асимптотический анализ показал, что вдали от вершины трещины решение в квазистационарном приближении аппроксимируется классическим решением PKN модели для узкой трещины в бесконечном теле под действием постоянного давления, имеющей в поперечном сечении эллиптическую форму [2].Для данного приближения получены аналитические решения, связывающие ширину раскрытия и полудлину трещины с расходом жидкости и избыточным давлением в трещине, согласующиеся с численными экспериментами.

[1] Bui H. D. *An integral equations method for solving the problem of a plane crack of arbitrary shape.* J. Mech. Phys. Solids. 1977. Vol. 25. pp. 29–39.

[2] Снеддон И. *Преобразования Фурье.* М.: ИЛ, 1955.

Асимптотическое описание слабозатухающих колебаний классической частицы в потенциале Пёшля-Теллера

Алексеева Е.С., Рассадин А.Э.

Лаборатория бесконечномерного анализа и математической физики механико-математического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова, г.Москва, Россия

Рассмотрим следующее обыкновенное дифференциальное уравнение:

$$\ddot{x} + 2\,\delta\,\dot{x} + \frac{2\,\sin x}{\cos^3 x} = 0\,, \tag{1}$$

которое можно интерпретировать как уравнение движения материальной точки единичной массы в потенциале Пёшля-Теллера $U(x) = tg^2 x$ [1] с учётом линейного трения.

Сделаем в нём симплектическую замену координат:

$$x(I,\theta) = \arcsin\left[\frac{\sqrt{I\,(\sqrt{8}+I)}}{\sqrt{2}+I}\,\sin\theta\right], \tag{2}$$

$$\dot{x}(I,\theta) = \frac{(\sqrt{2}+I)\,\sqrt{I\,(\sqrt{8}+I)}\,\cos\theta}{\sqrt{2\,\sin^2\theta + (\sqrt{2}+I)^2\,\cos^2\theta}}, \tag{3}$$

тогда уравнение (1) сведётся к следующей системе обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\dot{I} = -2\,\delta\,\frac{(\sqrt{2}+I)\,I\,(\sqrt{8}+I)\,\cos^2\theta}{2\,\sin^2\theta + (\sqrt{2}+I)^2\,\cos^2\theta}, \tag{4}$$

$$\dot{\theta} = \sqrt{2} + I + \frac{2\,\delta\,\sin 2\,\theta}{2\,\sin^2\theta + (\sqrt{2}+I)^2\,\cos^2\theta}\,. \tag{5}$$

Если $0 < \delta \ll 1$, то систему уравнений (4)-(5) можно усреднить по периоду $2\,\pi$ угловой переменной θ. Полученные укороченные уравнения имеют точное решение, подстановкой которого в формулы (2)-(3) и получается асимптотическое решение исходного уравнения (1).

В докладе приведены графики этих асимптотических решений, а также обсуждена точность полученного приближения.

[1] Poschl, G., Teller, E. Bemerkungen zur Quantenmechanik des anharmonischen Oszillators // Zeitschrift fur Physik. 1933. Bd. 83. No. 3–4. Ss. 143–151.

Travelling solitons and soliton complexes for the Lugiato-Lefever equation

Alfimov G.L.[a], **Barashenkov I.V.**[b], **Fedotov A.P.**[a]
[a] MIET University, Zelenograd, Moscow, Russia;
[b] University of Cape Town, Cape Town, South Africa

We consider travelling-wave solutions for the Lugiato-Lefever equation

$$i\psi_t + \frac{1}{2}\psi_{xx} + \psi - |\psi|^2\psi = -i\gamma\psi + h$$

that are of soliton type, i.e., $\psi \to \psi_0^{\pm}$, $x \to \pm\infty$. Here h and γ are real, $\psi_0^{\pm}$ are complex and satisfy the equation

$$\psi - |\psi|^2\psi = -i\gamma\psi + h.$$

Assuming that $\psi = u + iv$, $\xi = x - Vt$ we arrive at the system

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}u_{\xi\xi} + Vv_\xi + u - u(u^2+v^2) = \gamma v + h,\\ &\frac{1}{2}v_{\xi\xi} - Vu_\xi + v - v(u^2+v^2) = -\gamma u. \end{aligned}$$

Two cases are considered:

(a) If $\gamma = 0$ the system has the first integral and is Hamiltonian. This allows the existence of soliton solutions that are asymptotic to equilibrium states of saddle-focus or saddle type. In this case (i) an asymptotic expansion of soliton solution in the small-amplitude limit is given and (ii) the several branches of soliton solutions are computed and the variation of soliton shape along this branches is studied.

(b) If $\gamma \neq 0$, $V \neq 0$ and $h \neq 0$, it is argued that no soliton solution exist in generic situation. However, these solutions may exist for separate values of these parameters.

Transparent points in Discrete NLS Equation with Saturation

Alfimov G.L.[a], **Korobeinikov A.S.** [a],
Lustri C.J.[b] **and Pelinovsky D.E.**[c]
[a] MIET University, Zelenograd, Moscow, Russia;
[b] Department of Mathematics, Macquarie University, Australia;
[c] Department of Mathematics, McMaster University, Canada

We consider standing lattice solitons for discrete nonlinear Schrödinger equation with saturation (NLSS), where so-called transparent points were recently discovered. These transparent points are the values of the governing parameter (e.g., the lattice spacing) for which the Peierls-Nabarro barrier vanishes. In order to explain the existence of transparent points, we study a solitary wave solution in the continuous NLSS and analyse the singularities of its analytic continuation in the complex plane. The existence of a quadruplet of logarithmic singularities nearest to the real axis is proven and applied to two settings: (i) the fourth-order differential equation arising as the next-order continuum approximation of the discrete NLSS and (ii) the advance-delay version of the discrete NLSS. In the context of (i), the fourth-order differential equation generally does not have solitary wave solutions. Nevertheless, we show that solitary waves solutions exist for specific values of governing parameter that form an infinite sequence. We present an asymptotic formula for the distance between two subsequent elements of the sequence in terms of the small parameter of lattice spacing. It is in excellent agreement with our numerical data. In the context of (ii), we also derive an asymptotic formula for values of lattice spacing for which approximate standing lattice solitons can be constructed. The asymptotic formula is in excellent agreement with the numerical approximations of transparent points. However, we show that the asymptotic formulas for the cases (i) and (ii) are essentially different and that the transparent points do not generally imply existence of continuous standing lattice solitons in the advance-delay version of the discrete NLSS.

Soliton solutions of the vector defocusing Gross-Pitaevskii equation: bifurcations, stability and computer-assisted proofs

Alfimov G. L. [a]**, Smirnov V. V.** [a]**, Zezyulin D. A.** [b]

[a] MIET University, Zelenograd, Moscow, Russia;

[b] ITMO University, St. Petersburg, Russia.

We consider the steady-state solutions for the system of coupled Gross-Pitaevskii equations

$$\begin{cases} i\Psi_{1,t} = -\Psi_{1,xx} + V(x)\Psi_1 + (|\Psi_1|^2 + \beta|\Psi_2|^2)\Psi_1, \\ i\Psi_{2,t} = -\Psi_{2,xx} + V(x)\Psi_2 + (\beta|\Psi_1|^2 + |\Psi_2|^2)\Psi_2. \end{cases} \tag{1}$$

Here $V(x)$ is a trap potential and $\beta > 0$ is a real parameter. The steady-state solutions of (1) are of the form $\Psi_{1,2}(t,x) = e^{-i\mu_{1,2}t}\psi_{1,2}(x)$. Here $\mu_{1,2}$ are real parameters and $\psi_{1,2}(x)$ satisfy the system

$$\begin{cases} \psi_{1,xx} + (\mu_1 - V(x))\psi_1 - (\psi_1^2 + \beta\psi_2^2)\psi_1 = 0, \\ \psi_{2,xx} + (\mu_2 - V(x))\psi_2 - (\beta\psi_1^2 + \psi_2^2)\psi_2 = 0. \end{cases} \tag{2}$$

Soliton solutions of (2) corresponds to boundary condition $\psi_{1,2}(x) \to 0$ as $x \to \pm\infty$.

The results of the study are as follows.

• The method for global search of soliton solutions of (2) for $\mu_{1,2}$ and β fixed is presented. It consists in properly arranged numerical scanning of the set of solutions of (2) that tend to zero at $x \to -\infty$, selecting those of them that vanish also at $x \to +\infty$. Some mathematical statements are proved to justify that *all* soliton solutions have been found. The method is exemplified by the case of harmonic potential $V(x) = x^2$.

• The bifurcations of the soliton solutions that occur when β varies are described. They result in change of stability of the solitons. The corresponding scenarios for loss and restoration of stability are presented.

Обобщенные решения вырождающихся ОДУ с дробной производной.

Артюшин А.Н.
г.Новосибирск, Россия

Пусть $0 < \nu < 1$, $T > 0$. На интервале $(0, T)$ рассматриваем

$$\partial_0^\nu (k(t)y(t)) + c(t)y(t) = f(t), \tag{1}$$

$$k(0)y(0) = 0, \tag{2}$$

где ∂_0^ν — дробная производная Герасимова-Капуто с началом в точке 0. Далее предполагается, что $k(t), c(t) \in C^1[0, T]$, причем $k(t) \geqslant 0$, $c(t) \geqslant \delta > 0$ для $t \in [0, T]$. Особо отметим, что функция $k(t)$ может обращаться на интервале $[0, T]$ в 0 произвольным образом. Задачи такого рода в такой общности ранее не рассматривались.

Главную роль в доказательстве теорем существования и единственности играет следующее интегральное неравенство. Пусть $p \geqslant 1$. Тогда для неотрицательных гладких $r(t), k(t)$ при условии $k(0)y(0) = 0$ имеет место неравенство

$$p \int_0^z r(t)y(t)|y(t)|^{p-2} \partial_0^\nu (k(t)y(t))\, dt \geqslant \frac{(p-1)k(0)}{\Gamma(1-\nu)} \int_0^z r(t) \frac{|y(t)|^p}{t^\nu}\, dt +$$

$$(p-1) \int_0^z r(t)|y(t)|^p \partial_0^\nu k(t)\, dt + \int_0^z k(t)|y(t)|^p D_z^\nu r(t)\, dt,$$

где D_z^ν — дробная производная Римана-Лиувилля с началом в точке z. Данное неравенство можно считать широким обобщением неравенства

$$2y(t)\partial_0^\nu y(t) \geqslant \partial_0^\nu y^2(t),$$

предложенного Алихановым ([1]).

С помощью метода регуляризации доказывается следующая теорема.

Теорема. Пусть $p \geqslant 1$. Тогда для любой функции $f(t) \in L_p(0,T)$ задача (1)-(2) имеет единственное обобщенное решение $y(t) \in L_p(0,T)$.

Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований, проект 18—01—00620.

[1] A.A. Alikhanov, A Priori Estimates for Solutions of Boundary Value Problems for Fractional-Order Equations, Diff. Eq., 2010, v.46, № 5, pp.660-666.

Кинетические уравнения процессов автоотщепления и диссоциации отрицательных ионов

Асфандиаров Н.Л., Пшеничнюк С.А., Нафикова Е.П., Рахмеев Р.Г.

Институт физики молекул и кристаллов УФИЦ РАН

Спектроскопия диссоциативного захвата электронов (ДЗЭ), исследующая сечения образования отрицательных ионов, может быть реализована на основе различных источников ионов масс-анализаторов [1, 2]. При этом для каждого типа приборов (магнитный, времяпролетный, квадрупольный) существует своя шкала времен. Сечения образования временно-живущих молекулярных M^- и стабильных осколочных R^- ионов связаны с полным сечением захвата электронов σ_{Cap} кинетическими уравнениями:

$$M^-(t) = \sigma_{Cap}\exp[-(k_a + k_d)t],$$

$$R^-(t) = \sigma_{Cap}\frac{k_d}{k_a + k_d}[1 - \exp[-(k_a + k_d)t]]$$

где k_a и k_d – константы скорости выброса электрона и диссоциации на фрагменты. Пусть время экстракции ионов из источника равно t^{ext}, а пролета до момента детектирования вторичным электронным умножителем t^{fl}. Тогда наблюдаемая в эксперименте интенсивность ионов

$$I(M^-) = \int_0^{t^{fl}} M^-(t)dt, \qquad I(R^-) = \int_0^{t^{ext}} R^-(t)dt$$

будет функцией этих времен. Этот эффект наблюдается в спектрах ДЗЭ галоген-производных анизола [3] и 4-бромбифенила [4].

Основным выводом работы является то, что спектры ДЗЭ, полученные в различных экспериментальных условиях, закономерно отличаются друг от друга, если процессы их распада происходят на временах

$1/k_a$ и $1/k_d$, сопоставимых с характерными временными окнами прибора t^{ext} и t^{fl}. Корректность интерпретации данных измерений зависит от умения правильно учитывать это обстоятельство и особенно важно в аналитических приложениях метода ДЗЭ.

Работа поддержана РФФИ, проект № 18-03-00179.

[1] S. A. Pshenichnyuk, A. S. Vorob'ev, A. Modelli, J. Chem. Phys. 135, 184301 (2011).

[2] M. Stepanovi, Y. Pariat, M. Allan, J. Chem. Phys., 110, 11376 (1999).

[3] N. L. Asfandiarov, M. V. Muftakhov, S. A. Pshenichnyuk et al, J. Chem. Phys. 147, 234302 (2017).

[4] N. L. Asfandiarov, S. A. Pshenichnyuk, R. G. Rakhmeev, et al, J. Chem. Phys. (2019) in press.

Асимптотические решения задачи конвективной диффузии вне капли при наличии объёмной химической реакции

Ахметов Р.Г.

Башкирский государственный педагогический университет им. М. Акмуллы, г.Уфа, Россия

Рассматривается задача о конвективной диффузии вне капли при наличии объёмной химической реакции в случае, когда число Пекле и константа скорости объёмной химической реакции - достаточно большие. Задача носит сингулярный характер. Малый параметр соответствует большим числам Пекле. Для решения задачи методом согласования асимптотических разложений область вне сферы разбивается на несколько областей. В каждой области вводятся новые независимые переменные и выписываются задачи в локальных переменных. В работе построены главные члены асимптотического решения по малому параметру в следе за каплей. Аналогичная задача вне цилиндра исследовалась в работе [1].

[1] Rustyam G. Akhmetov, Natalya V. Maksimova, “Asymptotic Solution of the Problem to a Convective Diffusion Equation with a Chemical Reaction Around a Cylinder”, Dynamical Systems: Modelling, Springer Proceedings in Mathematics and Statistics, 181, 2016, 233–241, 181, Springer, 2016, 233–241.

On the separable cubic stochastic operators

Baratov B.S.
University Karshi state, Uzbekistan

The purpose of this paper is to investigate a class of separable cubic stochastic operators. Each separable cubic stochastic operator (SCSO) depends on two quadratic matrices A and B which have some relations. In this paper we proved that for each skew symmetric matrix A the corresponding SCSO is a linear operator.

Theorem. If $\forall x^{(0)} \in intS^2$ is, then $\lim\limits_{m\to\infty} Wx^{(m)} = M_3$ will be.

Proof:. We consider the form of operator:

$$W: \begin{cases} x' = x(x+z)(x+y+\frac{1}{2}z), \\ y' = y(x+y)(2x+y+z), \\ z' = z(\frac{3}{2}x+y+z)(x+2y+z) \end{cases} \tag{1}$$

$1-y<1$ and $1-\frac{1}{2}z<1$ is comes out inequality $x'<x$.

So, $x^{(m+1)} < x^{(m)}$ and $\exists\alpha \in [0,1)\,, x^{(m)} \to \alpha, m \to \infty$ here

$m = 0,1,2,...,.x^{(m)}$ is remit and from low to limit with 0 that is why $\lim\limits_{m\to\infty}\left(x^{(m)}\right) = \alpha \geq 0, \alpha < 1$ is available. $1+\frac{1}{2}x > 1$ and $1+y>1$ is comes out inequality $z'>z$. So, $z^{(m+1)} > z^{(m)}$ and $\exists\gamma \in (0,1]\,, z^{(m)} \to \gamma, m \to \infty$ we can know. $z^{(m)}$ is develop and from high to limit with 1, that is why

$$\lim_{m\to\infty}\left(z^{(m)}\right) = \gamma \leq 1 \tag{2}$$

is available. From $x^{(m)} + y^{(m)} + z^{(m)} = 1$, $\alpha+\beta+\gamma = 1$ we define, $\lim\limits_{m\to\infty}\left(y^{(m)}\right) = \beta = 1-\alpha-\gamma$ we define,will be. Now

$$\lim_{m\to\infty}\left(x^{(m)}, y^{(m)}, z^{(m)}\right) = (\alpha, \beta, \gamma) \tag{3}$$

so $(\alpha+\beta+\gamma) \in T$ it is, here

$T = [M_1 = (1,0,0); M_2 = (0,1,0); M_3 = (0,0,1)]$,

Then $(\alpha+\beta+\gamma) = (0,0,1) = M_3$ will be. So, $\underset{n\to\infty}{lim}\, Wx^{(n)} = M_3$ is, for $\forall x^{(0)} \in intS^2$, theorem has been proved.

[1] U. A. Rozikov and S. Nazir, Separable Quadratic Stochastic Operators, Lobschevskii J. Math. 3, 215 (2010).

[2] U. A. Rozikov and A. Zada on a cllas of Separable Quadratic Stochastic Operators, Lobschevskii J. Math. 3, 32 (2011).

Число и местонахождение собственных значений модели Фридрихса с двумерным возмущением

Бахронов Б.И.

Бухарский государственный университет, г. Бухара, Узбекистан

Пусть $\mathbb{T}^{\mathrm{d}} :\equiv (-\pi;\pi]^{\mathrm{d}}$ – d - мерный тор и $L_2(\mathbb{T}^{\mathrm{d}})$ - гильбертова пространство квадратично- интегрируемых (комплексно-значных) функций, определенных на $\mathbb{T}^{\mathrm{d}}$.

Рассмотрим модель Фридрихса H, действующий в гильбертовом пространстве $L_2(\mathbb{T}^{\mathrm{d}})$ по формуле $H := H_0 - V_1 + V_2$, где операторы H_0 и V_α, $\alpha = 1, 2$ определяются по формулам:

$$(H_0 f)(p) = u(p)f(p), \quad (V_\alpha f)(p) = \mu_\alpha v_\alpha(p) \int_{\mathbb{T}^{\mathrm{d}}} v_\alpha(t) f(t) dt, \quad \alpha = 1, 2.$$

Здесь $u(\cdot)$ и $v_i(\cdot)$, $i = 1, 2$ -вещественнозначные, непрерывные функции на $\mathbb{T}^{\mathrm{d}}$. Очевидно, что если функции $v_1(\cdot)$ и $v_2(\cdot)$ являются линейно независими, то оператор возмущения $V := -V_1 + V_2$ является двумерным.

Легко можно проверить, что оператор H, действующий в гильбертовом пространстве $L_2(\mathbb{T}^{\mathrm{d}})$, является ограниченным и самосопряженным.

Пусть $\mathrm{supp}\{v(\cdot)\}$- носитель функции $v(\cdot)$, $\mathrm{mes}(\Omega)$ - мера Лебега множества $\Omega \subset \mathbb{T}^{\mathrm{d}}$ и

$$E_{\min} := \min_{p \in \mathbb{T}^{\mathrm{d}}} u(p), \quad E_{\max} := \max_{p \in \mathbb{T}^{\mathrm{d}}} u(p).$$

Из известной теоремы Г. Вейля о сохранении существенного спектра при возмущениях конечнего ранга вытекает, что существенный спектр оператора H совпадает с существенным спектром оператора H_0. Следовательно,

$$\sigma_{\mathrm{ess}}(H) = \sigma_{\mathrm{ess}}(H_0) = [E_{\min}; E_{\max}].$$

Теорема 1. Оператор H может иметь не более чем по одному простому собственному значению, лежащих левее $E_{\min}$ и правее $E_{\max}$. Если $\mathrm{mes}(\mathrm{supp}\{v_1(\cdot)\} \cap \mathrm{supp}\{v_2(\cdot)\}) = 0$, то число $z \in \mathbb{C} \setminus [E_{\min}, E_{\max}]$ является собственным значением оператора H тогда и только тогда, когда число z является собственным значением хотя бы одного из операторов $H_1 := H_0 - V_1$ и $H_2 := H_0 + V_2$.

Из определения операторов H_α, $\alpha = 1, 2$ видно, что они имеют более простую структуру чем H. Поэтому теорема 1 играет важную роль при исследовании обычных и пороговых собственных значений, виртуальных уровней, а также числовую область значений оператора H.

Дискретизации уравнения Клейна-Гордона свободные от потенциала Пайерлса-Набарро

Бебихов Ю.В.[1], Дмитриев С.В.[2]

[1]Политехнический институт (филиал) СВФУ в г. Мирном, Россия

[2] Институт проблем сверхпластичности металлов РАН, г.Уфа, Россия

Модель Клейна-Гордона описывается гамильтонианом

$$H = K + E = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \phi_t^2 dx + \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{1}{2}\phi_x^2 + V(\phi)\right] dx, \tag{1}$$

где первый член представляет кинетическую энергию K, а второй - потенциальную энергию E, $\phi(x,t)$ - неизвестное скалярное поле пространственной и временной координат x и t, соответственно. Функция $V(\phi)$ определяет локальный потенциал. Из гамильтониана (1) может быть получено следующее уравнение движения:

$$\phi_{tt} + \frac{dV}{d\phi} - \phi_{xx} = 0. \tag{2}$$

Чтобы дискретизировать уравнение Клейна-Гордона (2), вводится решетка $x = nh$, где $n = 0, \pm1, \pm2, \ldots$ и h - это шаг решетки. Наиболее простая дискретизация уравнения ϕ^4 имеет вид

$$\ddot{\phi}_n = \frac{1}{h^2}(\phi_{n-1} - 2\phi_n + \phi_{n+1}) - V'(\phi_n), \tag{3}$$

где $\phi_n(t) = \phi(nh, t)$.

Однако возможны другие дискретизации, в которых статический потенциал Пайерлса-Набарро в точности равен нулю. Примеры для уравнения ϕ^4 можно найти, например, в [1, 2]. В докладе будет представлен вывод различных дискретных моделей, обладающих таким свойством.

Благодарности: Работа поддержана грантом Российского фонда фундаментальных исследований № 17-02-00984.

[1] J.A. Baimova, Yu.V. Bebikhov, S.V. Dmitriev, A. Khare, A.I. Potekaev. Translationally invariant kink solutions of discrete ϕ^4 models. Russ. Phys. J. **53**, 231 (2010).

[2] Ю.В. Бебихов, Е.А. Корзникова, А.П. Четвериков, С.В. Дмитриев. Волны солитонного типа в нелинейных решетках без потенциала Пайерлса-Набарро. Санкт-Петербург, 2018, 102 С.

Задача Коши для уравнения агрегации в гиперболическом пространстве

Вильданова В.Ф.
БГПУ им.М.Акмуллы, г.Уфа, Россия

В цилиндре $Q^T = \mathbb{H}^n \times (0,T)$ рассматривается задача Коши для уравнения агрегации

$$u_t = \triangle_g^p A(u) - \mathrm{div}_g(uG(u)), \tag{1}$$

где $\triangle_g^p A(u) = \mathrm{div}_g(|\nabla_g A(u)|_g^{p-2}\nabla_g A(u))$ с начальным условием

$$u(x,0) = u_0, \quad u_0(x) \geq 0, \quad x \in \mathbb{H}^n. \tag{2}$$

десь и далее нижний индекс g у операторов div_g, ∇_g на многообразии $\mathbb{H}^n$ будет отличать их от соответствующих операторов в $\mathbb{R}^n$

Пусть $B_r = \{x \in \mathbb{R}^n ||x| < r\}$ шар радиуса $r \in (0,1)$. Мы будем рассматривать гиперболическое пространство $\mathbb{H}^n$ в виде модели Пуанкаре в шаре B_1 с римановой метрикой

$$g_{ij}(x) = \frac{4}{(1-|x|^2)^2}\delta_{ij} \quad (x \in B_1; \quad i,j = 1,...n); \tag{3}$$

кроме того, пусть

$$g^{ij} = (g_{ij})^{-1}, \quad g = det(g_{ij}) \quad (i,j = 1,...n).$$

$$\partial B_1 \equiv \partial_\infty \mathbb{H}^n = \{\infty\}. \tag{4}$$

Геодезическое расстояние между произвольным $x \in \mathbb{H}^n$ и 0 определяется как

$$\rho(x) = \int\limits_0^{|x|} \frac{2}{1-s^2}ds = \ln\left(\frac{1+|x|}{1-|x|}\right) \quad (x \in \mathbb{H}^n \equiv B_1); \tag{5}$$

поэтому

$$|x| = \tanh\left(\frac{\rho(x)}{2}\right), \quad \frac{1}{1-|x|^2} = 2\left[\cosh\left(\frac{\rho(x)}{2}\right)\right]^2. \tag{6}$$

Целью работы является доказательство существования задачи Коши (1) – (2).

Теорема 1. Пусть $A(u) \in C^1[0,\infty)$, $A(0) = 0$, $A'(u) > 0$, $u \in (0,\rho)$ и $0 \leq u_0(x) \leq M_0$. Тогда существует число T, определяемое данными задачи, такое что в цилиндре D^T существует ограниченное слабое решение задачи (1) – (2).

[1] Punzo F. Well-posedness of the Cauchy problem for nonlinear parabolic equations with variable density in the hyperbolic space. Nonlinear Differ. Equ. Appl. 2012. Vol. 19, p. 485—501.

Один класс линейных уравнений с вырожденным оператором при дробной производной Герасимова — Капуто

Борель Л.В., Федоров В.Е.
ФГБОУ ВО «Челябинский государственный университет», г.Челябинск, Россия

Рассмотрим вырожденное неоднородное уравнение

$$D_l^\alpha Lx(t) = Mx(t) + f(t), \quad t \in [0,T), \tag{1}$$

с заданной функцией $f : [0,T) \to \mathcal{Y}$. Его решением является функция $x \in C([0,T); D_m)$ такая, что $Lx \in C^{m-1}([0,T); \mathcal{Y})$,

$$g_{m-\alpha} * \left(Lx - \sum_{k=0}^{m-1} (Lx)^{(k)}(0) g_{k+1} \right) \in C^m([0,T); \mathcal{Y})$$

и для всех $t \in [0,T)$ выполнено равенство (1). Решением задачи Коши

$$x^{(k)}(0) = x^k, k = 0, 1, ..., m-1, \tag{2}$$

для уравнения (1) является решение уравнения $x \in C^{m-1}([0,T); \mathcal{X})$, удовлетворяющее условию (2).

Исследуем разрешимость задачи (1), (2) при условии принадлежности пары операторов (L, M) введенному в работе [1] в рассмотрение классу $\mathcal{H}_\alpha(\theta_0, a_0)$.

Теорема 1 Пусть $\alpha > 0$, банаховы пространства $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$ рефлексивны, $(L, M) \in \mathcal{H}_\alpha(\theta_0, a_0)$, $L_1 \in \mathcal{L}(\mathcal{X}^1; \mathcal{Y}^1)$ или $M_1 \in \mathcal{L}(\mathcal{X}^1; \mathcal{Y}^1)$. Предположим, что $f : [0,T) \to \mathcal{Y}^0 \dot{+} L_1[D_{L_1^{-1}M_1}]$, $L_1^{-1}Qf \in C([0,T); D_{L_1^{-1}M_1})$, $(I-Q)f \in C^{m-1}([0,T); \mathcal{Y})$, $x_k \in D_M$, $Px_k \in D_{L_1^{-1}M_1}$, $k = 0, 1, \dots, m-1$, выполняются равенства

$$D_t^k|_{t=0} M_0^{-1}(I-Q)f(t) = -(I-P)x_k, \quad k = 0, 1, \dots, m-1. \tag{3}$$

Тогда существует единственное решение задачи (1), (2).

Теорема 2 Пусть $\alpha > 0$, банаховы пространства $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$ рефлексивны, $(L, M) \in \mathcal{H}_\alpha(\theta_0, a_0)$, $L_1^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{Y}^1; \mathcal{X}^1)$ или $M_1^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{Y}^1; \mathcal{X}^1)$. Предположим, что $f : [0,T) \to \mathcal{Y}^0 \dot{+} L_1[D_{M_1}]$, $Qf \in C([0,T); D_{M_1 L_1^{-1}})$, $(I-Q)f \in C^{m-1}([0,T); \mathcal{Y})$, $x_k \in D_M$, $Px_k \in D_L$, $k = 0, 1, \dots, m-1$, выполняются равенства (3). Тогда существует единственное решение задачи (1), (2).

[1] Fedorov V.E., Romanova E.A., Debbouche, A.: Analytic in a sector resolving families of operators for degenerate evolution fractional equations, Journal of Mathematical Sciences 228 (4), 380–394 (2018).

Уравнения релятивистской инерциальной навигации

Войтик В.В.
Башкирский государственный медицинский университет, г.Уфа, Россия

Задача об инерциальной навигации заключается в определении положения и ориентации движущейся системы отсчёта по собственному ускорению $\mathbf{W}$ и угловой скорости $\boldsymbol{\Omega}$ как функциям времени.

В релятивистском случае уравнения инерциальной навигации являются, фактически, уравнениями движения тетрады единичных ортогональных 4-векторов [1, формулы (6.19), (6.20)]. В трёхмерном виде уравнения можно записать в виде двух векторных нелинейных дифуравнений первого порядка [2] для вектора $\mathbf{v}'$

$$\frac{d\,\mathbf{v}'}{dt} = \mathbf{W}' - (\mathbf{W}'\mathbf{v}')\mathbf{v}' - \boldsymbol{\Omega}' \times \mathbf{v}' \tag{1}$$

и для матрицы поворота $a^{\alpha\beta}$

$$\frac{1}{2}\, e^{\alpha\lambda\nu} a^{\lambda\beta} \frac{da^{\alpha\beta}}{dt} = \omega'^{\nu}\,, \tag{2}$$

где

$$\boldsymbol{\omega}' = \boldsymbol{\Omega}' - \frac{1-\sqrt{1-v'^2}}{v'^2}\,\mathbf{v}' \times \mathbf{W}'\,. \tag{3}$$

При этом скорость системы отсчёта как функция собственного времени t находится перемножением матрицы поворота и $\mathbf{v}'$.

Для случая постоянного ускорения решение данных уравнений и уравнений движения тетрады найдено в [3].

[1] Ч. Мизнер, К. Торн, Дж. Уилер. Гравитация т.1. М.: Мир, 1977.

[2] В. В. Войтик. Об уравнениях обратной задачи кинематики. Пространство, время и фундаментальные взаимодействия, №1, 2014. с. 28-36

[3] В. В. Войтик. Некоторые способы вычисления параметров криволинейного равноускоренного движения. Пространство, время и фундаментальные взаимодействия, №2, 2015. с. 38-47

Ренормализованные решения параболической задачи с нестепенными нелинейностями для уравнения с мерой в правой части

Воробьев Н.А.

Институт механики им. Р.Р. Мавлютова УФИЦ РАН, г.Уфа, Россия

Пусть Ω — ограниченная область пространства $\mathbb{R}^n = \{x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)\}$, $n \geq 1$. В цилиндрической области $D^T = (0, T) \times \Omega$ рассматривается первая смешанная задача для уравнения вида

$$u_t - \mathrm{div} a(t, x, u, \nabla u) - b(t, x, u, \nabla u) = \mu, \;\; a = (a_1, ..., a_n), \tag{1}$$

Краевые условия однородны:

$$u(t, x)\Big|_S = 0, \quad S = \{t > 0\} \times \partial\Omega, \quad u(0, x) = u_0(x) \in L_1(\Omega). \tag{2}$$

Пусть $L_B(Q)$ обозначает пространство Орлича, соответствующее N-функции B с нормой Люксембурга (см. [1]). Замыкание пространства $Lip_0(Q)$ в $L_B(Q)$ будем обозначать через $E_B(Q)$. Пространство $L_B(Q)$ является сопряженным к пространству $E_{\overline{B}}(Q)$.

Определим анизотропное пространства Соболева-Орлича $\mathring{W}^1_{\mathbf{LB}}(D^T)$, как множество тех элементов $\theta = (v_1, v_2, ..., v_n) \in \prod_{i=1}^n L_{B_i}(\Omega)$, для которых существуют последовательности $\varphi_m \in C_0^1(D^T)$ такие, что $\nabla\varphi_m \to \theta$ $*$-слабо как последовательности функционалов над $\prod_{i=1}^n E_{\overline{B}_i}(D^T)$.

Условие коэрцитивности:

$$a(t, x, r, y) \cdot y \geq \delta_0 S(y) - C_1 F(t, x), \;\; S(y) = \sum_{i=1}^n B_i(y_i), \;\; F \in L_1(D^T). \tag{3}$$

Пусть существуют непрерывная функция $C(m)$ и неотрицательные функции F_j такие, что

$$|a_j(t, x, r, y)| \leq C(m)(F_j(t, x) + \overline{B}_j^{-1}(C(m)S(y))), \;\; F_j \in E_{\overline{B_j}}(D^T), \;\; j = \overline{1, n}, \tag{4}$$

при всех $r \in [-m, m]$, $y, z \in \mathbb{R}^n$, $(t, x) \in D^T$.

Условие монотонности записывается в следующем виде

$$(a(t, x, r, y) - a(t, x, r, z)) \cdot (y - z) > 0, \;\; y \neq z. \tag{5}$$

Пусть

$$|b(t, x, r, y)| \leq F(t, x), \quad \forall r \in \mathbb{R}, \;\; y \in \mathbb{R}^n; \;\; (t, x) \in D^T. \tag{6}$$

Теорема. Пусть выполнены условия (3) – (6). Тогда существует ренормализованное решение задачи (1) – (2) с правой частью вида $\mu = f + \mathrm{div} G + g_t$, где $f \in L_1(D^T)$, $g: \; \nabla g \in \mathring{W}^1_{\mathbf{LB}}(D^T)$, $G_j \in E_{\overline{B_j}}(D^T)$, $j = \overline{1, n}$.

[1] *Красносельский М. А., Рутицкий Я. Б.* Выпуклые функции и пространства Орлича. Москва: – 1958. – Гос. издательство физ.-мат. лит.-ры. – 268 С.

Замечания об орбитальной аналитической классификации ростков трехмерных векторных полей

Воронин С.М.
Челябинский государственный университет, г. Челябинск, Россия

В работе [1] доказана теорема о редукции (аналитическая орбитальная эквивалентность ростков голоморфных векторных полей равносильна аналитической эквивалентности их ростков преобразований монодромии) для двумерных седловых векторных полей, и трехмерных векторных полей вида

$$V = xf_1\partial_x + yf_2\partial_y + zf_3\partial_z, \tag{1}$$

для которых их спектр $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3), \lambda_j = f_j(0)$ образует набор строго зигелева типа (точка 0 является внутренней точкой выпуклой оболочки T комплексных чисел $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$).

Однако, в случае, когда набор λ не строго зигелев ($\lambda \in \partial T$), например, в случае

$$\lambda_1 = -1, \lambda_2 = i, \lambda_3 = -i, \tag{2}$$

метод доказательства теоремы о редукции из [1] не работает. Тем не менее, соответствующая теорема о редукции все-таки имеет место (по крайней мере, для указанного частного случая).

Теорема. *Ростки голоморфных векторных полей вида* (1), (2) *орбитально аналитически эквивалентны если и только если их преобразования монодромии (соответствующие их общей сепаратрисе) аналитически эквивалентны.*

Замечание. Преобразование монодромии поля типа (1),(2), построенное по сепаратрисе $\{x = y = 0\}$ ($\{y = z = 0\}$), является полугиперболическим (соответственно, седловым резонансным). Аналитическая классификация таких ростков исследовалась Шайхуллиной (Туровым). Соответствующие пространства модулей в этих двух классификационных задачах существенно различаются. Это означает, что, по крайней мере для одного из этих двух случаев, теорема о реализации (отображений в качестве преобразований монодромии) не имеет места.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 17-01-00739-а).

[1] Елизаров П. М., Ильяшенко Ю. С. Замечания об орбитальной аналитической классификации ростков векторных полей. Матем. сб., 1983, т. 121(163), № 1(5), с.111–126

Специальная функция из класса Карлемана как универсальная характеристика минимальности системы экспонент

Гайсин А.М.
ИМВЦ УФИЦ РАН, г.Уфа, Россия

Пусть $\Lambda = \{\lambda_n\}$ $(0 < \lambda_n \uparrow \infty)$ – последовательность, подчиненная условию Фейера, т.е. $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{-1} < \infty$,

$$Q(\lambda) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda^2}{\lambda_n^2}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_{2n} \lambda^{2n}.$$

Через $\{M_n^c\}$ обозначим выпуклую регуляризацию $\{M_n\}$, где $M_{2n} = a_{2n}^{-1}$, $M_{2n+1} = 0$.

Теорема. Найдется функция $g \in C^{\infty}(\mathbb{R})$, такая, что:

1) $g(t) \geq 0, \ \int\limits_{-\infty}^{\infty} g(t)dt = 1;$

2) $g^{(n)}(t)$ $(n \geq 1)$ имеет n, а $g(t)$ не имеет ни одной перемен знаков на $\mathbb{R}$;

3) $g(t) \equiv 0$ при $t \leq 0$, $g(t) > 0$ при $t > 0$; функция $-\ln g(t)$ выпукла на $\mathbb{R}_+$;

4) $|g(t) \leq \frac{1}{2}, \ |g'(t)| \leq \frac{1}{2}, \ |g^{(n)}(t)| \leq \frac{1}{2} M_{n-2}^c$ $(n \geq 2)$;

5) для любого $q_0 \in (0, 1)$, для всех $\lambda \geq 0$

$$d_\delta(\lambda) \geq \frac{1 - q_0}{c_0} \left(1 + e^{\lambda \frac{\delta}{2}}\right) |Q(\lambda)| g\left(\frac{q_0}{8}\delta\right),$$

где

$$c_0 = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} M_{2k-2}^c / M_{2k},$$

$d_\delta(\lambda)$ – расстояние от $e^{\lambda t}$ до замыкания линейной оболочки системы экспонент $\{e^{\mu t}\}$, $\mu \in \Lambda \setminus \{\lambda\}$ в $C[0, \delta]$.

Более подробно историю вопроса см. в [1].

[1] Гайсин А.М. Экстремальные задачи в неквазианалитических классах Карлемана // Матем. сб. 2018. Т. 209. № 7. С. 44 – 70.

Критерии существования регулярной миноранты для заданной последовательности

Гайсин Р.А.
Институт математики с ВЦ УФИЦ РАН, г.Уфа, Россия

Пусть $\{M_n\}_{n=0}^{\infty}$ — последовательность положительных чисел. Классом Карлемана на континууме $\gamma \subset \mathbb{C}$ называется множество

$$C_\gamma(M_n) = \{f \in C^\infty(\gamma) : \sup_{z\in\gamma} \left| f^{(n)}(z) \right| \le K_f^n M_n \quad (n \ge 0)\}.$$

При изучении классов Карлемана на произвольных континуумах комплексной плоскости особую роль играют так называемые *регулярные* (в смысле Е.М. Дынькина) последовательности (см. в [1]). Дело в том, что в случае, когда континуум γ отличен от отрезка, скажем, если γ — дуга или $\gamma = \bar{D}$, где D — односвязная ограниченная область плоскости со спрямляемой жордановой границей, условия квазианалитичности классов Карлемана в каких-то терминах удается обычно доказать лишь для регулярного класса Карлемана. Но в общем случае класс $C_\gamma(M_n)$ может и не быть регулярным. Поэтому важно выяснить, при каких условиях на M_n существует регулярная миноранта $\{M_n^*\}$ для $\{M_n\}$, не удовлетворяющая известному условию Банга. Это позволяет перейти к изучению регулярного класса $C_\gamma(M_n^*)$.

В работах [2], [3] получены некоторые критерии существования такой регулярной миноранты $\{M_n^*\}$ для $\{M_n\}$ (это — условия а) и б) анонсируемой здесь теоремы). Здесь доказан аналогичный критерий в терминах интеграла Лапласа функции следа. Все эти результаты сформулируем в виде одной теоремы.

Теорема 1. *Пусть $M_n > 0$, $\left(\frac{M_n}{n!}\right)^{\frac{1}{n}} \to \infty$ при $n \to \infty$. Для того, чтобы существовала регулярная последовательность $\{M_n^*\}$, такая, что*

$$M_n^* \le M_n, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{M_n^*}{M_{n+1}^*} < \infty,$$

необходимо и достаточно, чтобы выполнялось одно из следующих эквивалентных условий:

а) существует положительная, непрерывная на $[0,\infty)$ функция $r = r(t)$, $tr(t) \downarrow 0$, $t^2 r(t) \uparrow$ при $t \to \infty$ такая, что

1) $\frac{1}{M_n^{\frac{1}{n}}} \le r(n)$ $(n \ge 1)$; 2) $\int\limits_1^\infty r(t)\, dt < \infty$;

б) если $T(r) = \max\limits_{n\ge 0} \frac{r^n}{M_n}$ — функция следа, а $\omega_T = \omega_T(r)$ — наименьшая вогнутая мажоранта функции $\ln T(r)$, то $\int\limits_1^\infty \frac{\omega_T(r)}{r^2}\, dr < \infty$;

в) $\int\limits_0^p \ln\ln H(\delta)d\delta < \infty \quad (p > 0$ *такое, что* $H(p) = e)$,

где $H(\delta) = \int\limits_0^\infty T(r)e^{-\delta r}dr$ *— преобразование Лапласа функции следа* $T(r)$.

Отметим, что доказательства критерия б) из [3] и нового критерия в) основаны на свойствах преобразования Лежандра. Теорема 1 доставляет достаточное условие нетривиальности класса Сиддики.

[1] Трунов К.В., Юлмухаметов Р.С. Квазианалитические классы Карлемана на ограниченных областях // Алгебра и анализ. 2008. Т. 20. № 2. С. 178–217.

[2] Гайсин Р.А. Критерии квазианалитичности типа Салинаса-Коренблюма для областей общего вида // Уфимский матем. журнал. 2013. Т. 5. № 3. С. 28–40.

[3] Гайсин Р.А. Регуляризация последовательностей в смысле Е.М. Дынькина // Уфимский матем. журнал. 2015. Т. 7. № 2. С. 66–72.

Зависимость порядка ряда экспонент от коэффициентов и опорной функции области сходимости

Гайсина Г.А.

Башкирский государственный университет, г.Уфа, Россия

Пусть G – ограниченная выпуклая область с гладкой границей, $0 \in G$ и пусть $\Lambda = \{\lambda_n\}$ $(0 < |\lambda_1| < |\lambda_2| < \ldots < |\lambda_n| < |\lambda_{n+1}| \to \infty)$ – последовательность комплексных чисел, такая, что

$$\tau = \varlimsup_{n\to\infty} \frac{n}{|\lambda_n|} = 0, \quad \delta = \varlimsup_{n\to\infty} \frac{1}{|\lambda_n|} \ln\left|\frac{1}{Q'(\lambda_n)}\right| = 0, \quad Q(\lambda) = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{\lambda^2}{\lambda_n^2}\right).$$

Через $H(G, \Lambda)$ обозначим класс функций f, представимых в G рядами экспонент

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{\lambda_n z}.$$

Для функций $f \in H(G, \Lambda)$ порядок определяется следующим образом:

$$\rho = \varlimsup_{z\to\partial G} \frac{\ln^+\ln^+|f(z)|}{-\ln d(z)}, \quad a^+ = \max(a,\ 0), \quad d(z) = \inf_{\xi\in\partial G}|z - \xi|.$$

Теорема 1 [1]. Для любой ограниченной выпуклой области G с гладкой границей порядок ρ любой функции $f \in H(G, \Lambda)$ удовлетворяет оценкам

$$\frac{\rho}{\rho+1} \leq \beta \leq \frac{\rho}{\rho+1} + q_0, \tag{1}$$

где

$$\beta = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\ln^+ \ln^+ [|a_n| e^{K(-\varphi_n)|\lambda_n|}]}{\ln |\lambda_n|}, \quad q_0 = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\ln^+ \ln \left| \frac{1}{Q'(\lambda_n)} \right|}{\ln |\lambda_n|},$$

$\lambda_n = |\lambda_n| e^{i\varphi_n}$, $K(\varphi)$ – опорная функция множества $\overline{G}$.

Этот результат допускает уточнение, а именно верна

Теорема 2. В условиях и обозначениях теоремы 1

$$\frac{\rho}{\rho+1} \leq \beta \leq \max\left(\frac{\rho}{\rho+1},\ q_0\right). \tag{2}$$

Оценки (2) точны – обе границы достигаются. Гипотеза о неулучшаемости правой оценки (1), высказанная нами в работе [1], неверна.

[1] Гайсин А.М., Гайсина Г.А. Поведение коэффициентов ряда экспонент конечного порядка роста вблизи границы // Итоги науки и техники. ВИНИТИ РАН, М. Принята к печати.

Соотношение типа Гаусса № 13 для функции Горна H_3

Гарипов И.Б., Мавлявиев Р.М.

Казанский федеральный университет, г.Казань, Россия

В теории обобщенного волнового уравнения и осисеммитрического уравнения Гельмгольца важную роль играет конфлюэтная функция Горна [1]

$$H_3(\alpha, \beta; \delta; z, t) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_{m-n}(\beta)_m}{(\delta)_m} \frac{z^m}{m!} \frac{t^n}{n!},$$

для которой в [1] приведены два Гауссовых соотношения:

$$H_3(\alpha, \beta; \delta; z, t) - H_3(\alpha, \beta; \delta-1; z, t) = \frac{\alpha\beta}{\delta(1-\delta)} z H_3(\alpha+1, \beta+1; \delta+1; z, t),$$

$$H_3(\alpha, \beta+1; \delta; z, t) - H_3(\alpha, \beta; \delta; z, t) = \frac{\alpha}{\delta} z H_3(\alpha+1, \beta+1; \delta+1; z, t).$$

При $t = 0$ данные соотношения как частный случай перейдут в известные соотношения для функции Гаусса [2]:

$$F(\alpha, \beta; \delta; z) - F(\alpha, \beta; \delta - 1; z) = \frac{\alpha\beta}{\delta(1-\delta)} z F(\alpha + 1, \beta + 1; \delta + 1; z),$$

$$F(\alpha, \beta + 1; \delta; z) - F(\alpha, \beta; \delta; z) = \frac{\alpha}{\delta} z F(\alpha + 1, \beta + 1; \delta + 1; z).$$

В этой работе доказана формула

$$\delta(1-z) H_3(\alpha, \beta; \delta; z, t) - \delta H_3(\alpha, \beta - 1; \delta; z, t) + (\delta - \alpha) z H_3(\alpha, \beta; \delta + 1; z, t) =$$

$$= \frac{zt}{1-\alpha} H_3(\alpha - 1, \beta; \delta + 1; z, t),$$

из которой при $t = 0$ как частный случай следует

$$\delta(1-z) F(\alpha, \beta; \delta; z) - \delta F(\alpha, \beta - 1; \delta; z) + (\delta - \alpha) z F(\alpha, \beta; \delta + 1; z) = 0.$$

[1] Капилевич М. Б. О конфлюэнтных функциях Горна // Дифференциальные уравнения, 1966. Т. 2, № 9. С. 1239–1254.

[2] Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений (4-е изд.). М.: Наука, 1963.

Задача с условиями периодичности для уравнения смешанного типа с двумя линиями изменения типа

Гималтдинова А.А.

Уфимский государственный нефтяной технический университет, г.Уфа, Россия

Для уравнения

$$Lu \equiv (\operatorname{sgn} x) u_{xx} + (\operatorname{sgn} y) u_{yy} + bu = 0, \quad b \in R, \tag{1}$$

в прямоугольной области $D = \{(x, y) \in R^2 \mid -l < x < l, -\alpha < y < \beta\}$, α, β, $l \in R_+$, изучена следующая нелокальная задача.

Задача. *Найти функцию* $u(x, y)$, *удовлетворяющую условиям:*

$$u(x, y) \in \mathrm{C}(\overline{D}) \cap \mathrm{C}^1(D) \cap \mathrm{C}^2(D_1 \cup D_2 \cup D_3 \cup D_4),$$

$$Lu(x, y) \equiv 0, \quad (x, y) \in D_1 \cup D_2 \cup D_3 \cup D_4,$$

$$u(x, y)\big|_{x=l} = u(x, y)\big|_{x=-l}, \; u_x(x, y)\big|_{x=l} = u_x(x, y)\big|_{x=-l}, \quad y \in [-\alpha, \beta],$$

$$u(x,y)\big|_{y=\beta} = \varphi(x), \;\; u(x,y)\big|_{y=-\alpha} = \psi(x), \;\; x \in [-l,l],$$

где φ и ψ – заданные достаточно гладкие функции, D_i – подобласти области D в соответствующих четвертях плоскости XOY.

Ранее для уравнения (1) при $b = 0$ были исследованы первая и вторая краевые задачи [1, 2].

Решение поставленной задачи построено в виде суммы ряда по биортогональной системе соответствующей спектральной задачи для обыкновенного дифференциального оператора с разрывным коэффициентом. Единственность решения доказана на основании полноты биортогональной системы в пространстве $L_2[-l,l]$. При доказательстве существования решения, т.е. при обосновании сходимости ряда, возникла проблема малых знаменателей. В связи с этим получены оценки об отделенности малых знаменателей от нуля с соответствующей асимптотикой, которые позволили доказать существование решения задачи.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ – РБ (проект 17-41-020516).

[1] Гималтдинова А.А. Задача Дирихле для уравнения Лаврентьева – Бицадзе с двумя линиями изменения типа в прямоугольной области // ДАН, 2015. Т. 460, № 3, С. 260–266.

[2] Гималтдинова А.А. Задача Неймана для уравнения Лаврентьева – Бицадзе с двумя линиями изменения типа в прямоугольной области // ДАН, 2016. Т. 466, № 1, С. 7–11.

Рассеяние солитонов уравнения синус-Гордона в модели с произвольным числом примесей, внешней силой и затуханием

Гумеров А.М.[1], Кудрявцев Р.В.[1,2], Екомасов Е.Г.[1]

[1] Башкирский государственный университет, Россия

[2] Институт физики молекул и кристаллов УФИЦ РАН, Россия

Одним из самых известных представителей интегрируемых нелинейных дифференциальных уравнений является уравнение синус-Гордона (УСГ). На сегодняшний день модели, основанные на использовании данного уравнения и его различных модификаций, встречаются в самых разнообразных областях естествознания: геологии, молекулярной биологии, физике, космологии и т.д. Построение различных моделей, наиболее адекватно описывающих физические системы, приводит к необходимости модифицировать УСГ, вводя, например, переменные коэффициенты, внешнюю силу и затухание. Часто исследуется случай наличия пространственной модуляции периодического потенциала (или примеси) (см. например, [1, 2, 3]).

В работе для случая (1+1)-мерного модифицированного УСГ показана возможность аналитического и численного вычисления динамики солитонов для случая произвольного числа примесей. Для случая наличия двух примесей определено наличие критического расстояния между примесями, которое приводит к двум качественно различным сценариям динамического поведения кинка УСГ. Рассмотрены структура и свойства трех- и четырехкинковых решений уравнения синус-Гордона, возбуждаемых в области примесей.

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 18-31-00122.

[1] Gumerov A.M., Ekomasov E.G., Zakir'yanov F.K., Kudryavtsev R.V., Comput. Math. Math. Phys., **54**(3) (2014) 491-504.

[2] Ekomasov E.G., Gumerov A.M., Kudryavtsev R.V., JETP Letters, **101**(12) (2015) 835-839.

[3] Ekomasov E.G., Gumerov A.M., Kudryavtsev R.V., J. Comp. Appl. Math, **312** (2017) 198-208.

Геометрический критерий задачи интерполяции в пространстве функций конечного порядка в полуплоскости

Гусев А.Л.

Курский государственнiй университет, г.Курск, Россия

Задача интерполяции в пространстве $[\rho, \infty]^+$, $\rho > 1$, функций конечного порядка в полуплоскости рассматривалась в работе [1]. Были найдены критерии ее разрешимости в терминах канонических произведений, определяемых узлами интерполяции. Мы находим новые критерии ее разрешимости в терминах меры, определяемой узлами интерполяции. Пусть $A = \{a_n\}_1^\infty$, $A \subset \mathbb{C}_+$, $a_n = r_n e^{i\theta_n}$ — последовательность различных точек, все предельные точки которой принадлежат вещественной оси (условимся бесконечную точку считать принадлежащей вещественной оси). Обозначим через $\Phi_z^+(\alpha) = n^+(C(z, \alpha|z|) \setminus a_n)$, где $C(a, r)$ — открытый круг с центром в точке a радиуса r, $n^+(G) = \sum\limits_{a_n \in G} \sin(\arg a_n)$, a_n – точка из $\{a_n\}_1^\infty$, ближайшая к z (если таких точек несколько, то, для определенности, выбираем точку с наибольшей мнимой частью).

Теорема. 2 Для разрешимости задачи простой свободной интерполяции в пространстве $[\rho, \infty]^+$, $\rho > 1$, необходимо и достаточно, чтобы при любом $\varepsilon > 0$ сходился ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(\arg a_n)}{|a_n|^{\rho+\varepsilon}} < \infty$$

и при любом фиксированном $q \in (0,1)$ для любого $\varepsilon > 0$ существует $R = R(\varepsilon)$ такое, что при $|z| \geqslant R$ выполняются соотношения:

$$\frac{\Phi_z^+(\alpha)}{|z|^{\rho+\varepsilon}} \leqslant \begin{cases} \dfrac{\alpha}{q}\,, & \alpha \geqslant q\sin(\arg z)\,, \\ 1/\ln\dfrac{eq\sin(\arg z)}{\alpha}\,, & \alpha < q\sin(\arg z)\,. \end{cases}$$

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта No18-01-00236.

[1] K. G. Malyutin, A. L. Gusev, The interpolation problem in the spaces of analytical functions of finite order in the half-plane, Пробл. анал. Issues Anal., 7(25), спецвыпуск (2018), 113–123.

Условия существования собственных значений одного семейства 2×2-операторных матриц

Дилмуродов Э.Б.

Бухарский государственный университет, г. Бухара, Узбекистан

Пусть $\mathbb{T}^3 :\equiv (-\pi;\pi]^3$ – трехмерный тор, $\mathcal{H}_0 := \mathbb{C}$ - одномерное комплексное пространство, $\mathcal{H}_1 := L_2(\mathbb{T}^3)$ - гильбертова пространство квадратично- интегрируемых (комплексно-значных) функций, определенных на $\mathbb{T}^3$ и $\mathcal{H} := \mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1$. Гильбертово пространство $\mathcal{H}$ называется *двухчастичным обрезанным подпространством* фоковского пространства.

Рассмотрим семейства 2×2-операторных матриц $\mathcal{A}_\mu(k)$ действующую в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ как

$$\mathcal{A}_\mu(k) := \begin{pmatrix} A_{00}(k) & \mu A_{01} \\ \mu A_{01}^* & A_{11}(k) \end{pmatrix},$$

где матричные элементы определяются по формулам

$$A_{00}(k)f_0 = w_0(k)f_0, \quad A_{01}f_1 = \int_{\mathbb{T}^3} f_1(t)dt, \quad (A_{11}(k)f_1)(p) = w_1(k,p)f_1(p).$$

Здесь $f_i \in H_i$, $i = 0,1$; $\mu > 0$, а функции $w_0(\cdot)$ и $w_1(\cdot)$ имеют вид

$$w_0(k) := \varepsilon(k) + \gamma,\ \gamma \in \mathbb{R}, \quad w_1(k,p) := \varepsilon(p) + \varepsilon(1/2(k+p)) + \varepsilon(k),$$

$$\varepsilon(k) := \sum_{i=1}^{3}(1 - \cos k_i),\ k = (k_1,k_2,k_3) \in \mathbb{T}^3.$$

При этих предположениях операторная матрица $\mathcal{A}_\mu(k)$, действующий в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$, является ограниченным и самосопряженным.

Для каждого $\gamma > 0$ положим

$$\mu_0(\gamma) := \sqrt{\gamma}\left(\int_{\mathbb{T}^3} \frac{dt}{w_1(0,t)}\right)^{-1/2}.$$

Теорема. A) Пусть $\gamma \le 0$. Тогда для $\mu > 0$ оператор $\mathcal{A}_\mu(0)$ имеет единственное отрицательное собственное значение.

B) Пусть $\gamma > 0$.

B_1) Если $\mu \in (0; \mu_0(\gamma))$, то оператор $\mathcal{A}_\mu(0)$ не имеет отрицательных собственных значений.

B_2) Если $\mu = \mu_0(\gamma)$, то оператор $\mathcal{A}_\mu(0)$ имеет резонанс с нулевой энергией.

B_3) Если $\mu > \mu_0(\gamma)$, то оператор $\mathcal{A}_\mu(0)$ имеет единственное отрицательное собственное значение.

О решении задачи протекания вязкой жидкости на основе метода Бубнова–Галеркина

Домнич А.А., Артемов М.А.

ВУНЦ ВВС «ВВА», Воронежский госуниверситет, г. Воронеж, Россия

Рассматривается стационарная задача о протекании ньютоновской несжимаемой жидкости через ограниченную область $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ $(d = 2, 3)$ при учете инерционных сил и пристенного скольжения типа Навье:

$$\begin{cases} (\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{u} - \nu\Delta\boldsymbol{u} + \nabla p = \boldsymbol{F} \ \text{ в } \Omega, \\ \operatorname{div}\boldsymbol{u} = 0 \quad \text{в } \Omega, \\ 2\nu(\boldsymbol{\mathcal{E}}(\boldsymbol{u})\mathbf{n})_{\tan} = -K\boldsymbol{u}_{\tan} \ \text{ на } \partial\Omega\setminus\Gamma, \\ \boldsymbol{u}\cdot\mathbf{n} = 0 \ \text{ на } \partial\Omega\setminus\Gamma, \\ \boldsymbol{u}_{\tan} = \mathbf{0} \ \text{ на } \Gamma, \\ (1/2)|\boldsymbol{u}|^2 - 2\nu\big(\boldsymbol{\mathcal{E}}(\boldsymbol{u})\mathbf{n}\big)\cdot\mathbf{n} + p = q \ \text{ на } \Gamma, \end{cases} \tag{1}$$

где $\boldsymbol{u}$ — скорость течения, p — давление в жидкости, $\boldsymbol{F}$ — плотность внешних сил, $\nu > 0$ — коэффициент вязкости, $\boldsymbol{\mathcal{E}}(\boldsymbol{u})$ — тензор скоростей деформации, $\boldsymbol{\mathcal{E}}(\boldsymbol{u}) = (\nabla\boldsymbol{u} + (\nabla\boldsymbol{u})^T)/2$, $K > 0$ — коэффициент проскальзывания, $\mathbf{n}$ — единичная внешняя нормаль к $\partial\Omega$, Γ — фиксированное подмножество $\partial\Omega$, на котором происходит протекание, q — напор на Γ.

Введем подпространство соболевского пространства $\boldsymbol{H}^1(\Omega)$:

$$\boldsymbol{Z}_\Gamma(\Omega) \equiv \{\boldsymbol{v} | \ \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{H}^1(\Omega), \ \operatorname{div} \boldsymbol{v} = 0, \ \boldsymbol{v} \cdot \mathbf{n}|_{\partial\Omega\setminus\Gamma} = 0, \ \boldsymbol{v}_{\tan}|_\Gamma = \mathbf{0}\}.$$

Определение. *Слабым решением* граничной задачи (1) будем называть вектор-функцию $\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{Z}_\Gamma(\Omega)$, удовлетворяющую равенству

$$-\sum_{i=1}^{d} \left(u_i \boldsymbol{u}, \frac{\partial \boldsymbol{w}}{\partial x_i} \right)_{L^2(\Omega)} + \big((1/2)|\boldsymbol{u}|^2 + q, \boldsymbol{w} \cdot \mathbf{n}\big)_{L^2(\Gamma)} + 2\nu \big(\mathcal{E}(\boldsymbol{u}), \mathcal{E}(\boldsymbol{w})\big)_{L^2(\Omega)}$$
$$+ K(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{w})_{L^2(\partial\Omega\setminus\Gamma)} = (\boldsymbol{F}, \boldsymbol{w})_{L^2(\Omega)}, \qquad \forall \boldsymbol{w} \in \boldsymbol{Z}_\Gamma(\Omega).$$

На основе метода Бубнова–Галеркина доказана следующая

Теорема. *Предположим, что имеют место включения:* $\partial\Omega \in C^{0,1}$, $\boldsymbol{F} \in \boldsymbol{L}^2(\Omega)$, $q \in L^2(\Gamma)$ *и* $(d-1)$*-мерная мера Лебега множества* $\partial\Omega \setminus \Gamma$ *положительна. Тогда задача* (1) *имеет хотя бы одно слабое решение* $\boldsymbol{u}_0$ *в пространстве* $\boldsymbol{Z}_\Gamma(\Omega)$ *и выполнено следующее равенство*

$$2\nu \|\mathcal{E}(\boldsymbol{u}_0)\|^2_{L^2(\Omega)} + K\|\boldsymbol{u}_0\|^2_{L^2(\partial\Omega\setminus\Gamma)} + (q, \boldsymbol{u}_0 \cdot \mathbf{n})_{L^2(\Gamma)} = (\boldsymbol{F}, \boldsymbol{u}_0)_{L^2(\Omega)}.$$

Моделирование ценообразования маржируемых опционов

Дышаев М.М., Федоров В.Е.
Челябинский государственный университет, г.Челябинск, Россия

В [1] получена групповая классификация моделей ценообразования маржируемых опционов при недостаточной ликвидности вида

$$u_t + \frac{\sigma^2 x^2 u_{xx}}{(1 - x v(u_x) u_{xx})^2} = 0. \tag{1}$$

Спецификации $v(u_x)$, при которых уравнение (1) обладает дополнительными симметриями, соответствуют моделям с логарифмической (LGR, при $v(u_x) = \beta$, $\beta = \text{const}$) и степенной (PWR, при $v(u_x) = \beta/u_x$) функциями спроса. Для этих спецификаций проведено численное решение уравнения (1) с использованием значений фактических рыночных показателей. Моделировались цены маржируемых колл–опционов на фьючерсный контракт на курс «доллар США — российский рубль» и на фьючерс на обыкновенные акции ПАО Сбербанк, торгуемые на ПАО Московская Биржа. Цены на наиболее ликвидные инструменты хорошо описываются линейной моделью Блэка — Шоулза (рис. 1), не учитывающей влияние ликвидности. Для активов с условно недостаточной ликвидностью фактические данные лежат ближе к кривым LGR- и PWR-модели (рис. 2). Методика сопоставления данных представлена в [2].

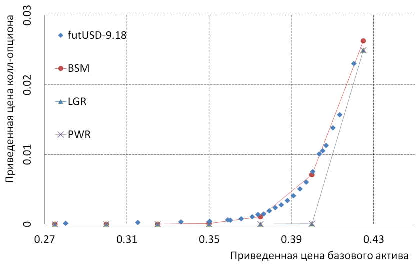


Рис. 1. Колл-опцион на фьючерс
на курс доллар США - российский рубль

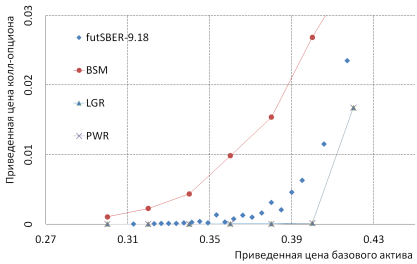


Рис. 2. Колл-опцион на фьючерс
на курс обыкновенных акций Сбербанка

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 19-01-00244.

[1] Федоров В. Е, Дышаев М. М. Симметрии и точные решения одного нелинейного уравнения ценообразования опционов // Уфим. мат. журн. 2017. Т. 9, № 1. С. 29–41.

[2] Дышаев М. М., Федоров В. Е., Авилович А. С., Плетнев Д. А. Моделирование эффектов обратной связи при ценообразовании маржируемых опционов на Московской Бирже // Челяб. физ.-мат. журн. 2018. Т. 3, вып. 4. С. 379–394.

Связанная динамика магнитных вихрей обобщенного уравнения Ландау-Лифшица

Екомасов А.Е.[1], Степанов С.В.[1], Антонов Г.И[1], Звездин К.А.[2], Екомасов Е.Г.[1,3]

[1] Башкирский Государственный Университет, Уфа, Россия
[2] Институт общей физики им. А.М. Прохорова РАН, Москва, Россия
[3] Тюменский государственный университет, Тюмень, Россия

Большое внимание, в настоящее время, привлекают исследования вихревых решений Обобщенного уравнения Ландау-Лифшица [1, 2, 3]. Наличие в этом уравнении слагаемого, учитывающего взаимодействие намагниченности и спин-поляризованного тока, позволяет исследовать процессы переключения и возбуждения осцилляций намагниченности в магнитных наноструктурах с помощью тока и внешнего магнитного поля. С помощью численного решения Обобщенного уравнения Ландау-Лифшица, проведено исследование динамики и структуры двух дипольно связанных магнитных вихрей в трехслойном наностолбике, под действием внешнего магнитного поля и спин-поляризованного электрического тока. Показана возможность существования различных режимов движения вихрей, в зависимости от величины поляризованного тока и магнитного поля. Для случая стационарной динамики связанных магнитных вихрей, найдена зависимость частоты их колебаний от величины тока. Показана возможность управления частотой стационарного движения вихрей и подстройки амплитуды управляющих токов с помощью внешнего магнитного поля. С помощью аналитического метода для упрощенного описания динамики связанных вихрей, получены зависимости частоты от величины тока и внешнего магнитного поля, качественно совпадающие с численными результатами. Построена зависимость величины магнитного поля, раздельно переключающего полярность вихрей от величины спин-поляризованного тока. Показано, что динамический и квазистатический сценарии переключения полярности вихря имеют место при различных значениях поля/тока.

Работа поддержана грантом РФФИ, проект № 19-02-00316/19.

[1] Locatelli N., Ekomasov A.E., Khvalkovskiy A.V. and et. al., Applied Physics Letters. 102, 062401 (2013).

[2] Екомасов А.Е., Степанов С.В., Звездин К.А., Екомасов Е.Г., Физика металлов и металловедение. 118, 345 (2017).

[3] Степанов С.В., Екомасов А.Е., Звездин К.А., Екомасов Е.Г. ФТТ 60, 1045 (2018).

Нелинейные гиперболические уравнения с интегралом первого порядка

Жибер А.В., Юрьева А.М.
Институт математики с ВЦ УНЦ РАН, г.Уфа, Россия
Башкирский государственный университет, г.Уфа, Россия

В работе описан специальный класс нелинейных гиперболических уравнений
$$u_{xy} = f(x, y, u, u_x, u_y), \tag{1}$$
обладающих x-интегралом первого порядка и y-интегралом n-го порядка. Известно (см. [1]), что уравнения вида
$$u_{xy} = \frac{p - \varphi_u}{\varphi_{u_y}} u_x + \frac{q}{\varphi_{u_y}} \sqrt{u_x}, \tag{2}$$
обладающие y-интегралом второго порядка дифференциальной подстановкой сводятся к уравнениям вида (1). Отметим (см. [2], [3], [4], [5]), что известные уравнения Лэне содержатся в классе уравнений (2).

Исследование выполнено при поддержке гранта Российского научного фонда (проект №15-11-20007).

[1] Zhiber A.V. Yur'eva A.M. Special Class of Liouville-Type Hyperbolic Equations — J Math Sci (2019) 236: 594.

[2] А.В. Жибер, А.М. Юрьева Гиперболические уравнения лиувилллевского типа специального класса — Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры, 2017. Том 137. С. 17-25

[3] Laine M. E. Sur J'application de la methode de Darboux aux eqautions $s = f(x, y, z, p, q)$. — Comptes rendus. V. 182, 1926. P.1126-1127.

[4] Капцов О.В. Методы интегрирования уравнений с частными произвводными — Москва: ФИЗМАТЛИТ, 2009. 182 с.

[5] Капцов О.В. О проблеме классификации Гурса. — Программирование, 2012. №2. С. 68-71.

Решение обратной коэффициентной задачи для нелинейного уравнения пьезопроводности с осциллирующими граничными условиями

Жонин А.В., Мартынова Ю.В.

ООО «РН-УфаНИПинефть», г.Уфа, Россия

В работе рассматривается экспериментальная методика для определения фильтрационных свойств горных пород, основанная на принципе гидропрослушивания при периодически изменяющемся давлении.

Нелинейный закон фильтрации в образце горной породы описывается в форме Девликамова [1]:

$$\phi c \frac{\partial p}{\partial t} = \frac{1}{\mu} \frac{\partial}{\partial x}\left(k \frac{\partial p}{\partial x}\right), 0 < x < L, t > 0, \tag{1}$$

$$k = k\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right) = \left\{ \begin{array}{l} k_{max}, \frac{\partial p}{\partial x} \geq H, \\ k_{min}, \frac{\partial p}{\partial x} < H, \end{array} \right. \tag{2}$$

где $p(x;t)$ – давление в точке x образца горной породы в момент времени t, k – проницаемость горной породы, μ - динамическая вязкость флюида, ϕ – пористость горной породы, c – сжимаемость флюида, L – длина образца горной породы, H – начальный градиент давления.

Граничные условия описывают ситуацию, когда на левом конце задается периодически изменяющее давление, на правом – ограниченный объем [2]:

$$p(0;t) = p_A \sin \omega t, \tag{3}$$

$$\left(\frac{\partial p}{\partial t}+\frac{kA}{V\mu c_f}\frac{\partial p}{\partial x}\right)\bigg|_{x=L}, \tag{4}$$

где p_A – амплитуда колебания, ω – частота колебания, A – площадь сечения образца горной породы, V – «паразитный» объем.

В случае аномальной фильтрации ($k \neq const$) решение обратной задачи заключается в восстановлении коэффициентов k_{max}, k_{min}, H в зависимости от градиента давления:

$$\|p(L;t)-p(L;t)_{exp}\| \underset{k_{max},k_{min},H}{\longrightarrow} \min, \tag{5}$$

где $p(L;t)$ – значения давления на правом конце образца, полученные в результате численного решения прямой задачи (1) – (4) при фиксированных значениях параметров k_{max}, k_{min}, H; $p_{exp}(L;t)$ – экспериментальные значения давления на правом конце образца горной породы.

Предложенный метод позволяет определить фильтрационные свойства горных пород в зависимости от градиента давления даже в случае аномальной фильтрации. Для повышения точности идентификации закона фильтрации необходимо оптимизировать измерительную систему, амплитуду и частоту колебаний для каждого типа горных пород.

[1] Девликамов В.В., Хабибуллин З.А., Кабиров М.М. Аномальные нефти. – М.: Недра, 1975. – 168 с.

[2] Kranz R.L., Saltzman J.S., Blacic J.D. Hydraulic diffusivity measurements on laboratory rock samples using an oscillating pore pressure method // International Journal of Rock Mechanics, Mining. Sci. Geomechanics. – 1990. – No27 (5). – P. 345-352.

Нелокальная краевая задача для одного неклассического уравнения третьего порядка

Жураев Б.Б., Йулдошева Н.М.

Термезский филиал Ташкентского технического университета, г.Термез, Узбекистан

Рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\sum_{i=0}^{2}a_i(x,y)\frac{\partial^i u}{\partial x^i}+b(x,y)\frac{\partial u}{\partial y}=F(x,y) \tag{1}$$

не ограничивая общности в месте уравнение (1) можно взять уравнение

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\sum_{i=0}^{2}a_i(x,y)\frac{\partial^i u}{\partial x^i}=F(x,y) \tag{2}$$

так как если уравнение (1) $b(x,y) \in C^{3,1}(D)$, то преобразование

$$u(x,y) = v(x,y)exp(\frac{1}{2}\int\limits_0^y b(x,t)dt)$$

приводит к уравнению (2), где $D = \{(x,y) : 0 < x < 1, 0 < y \leq 1\}$.

Для уравнения (2) в области D рассмотрим следующая краевая задача:

Найти в области D решение $u(x,y) \in C^{2,1}(\bar{D}) \cap C^{3,2}(D)$ уравнения (2) удовлетворяющее краевым условиям:

$$\alpha_0(x)u(x,0) + \alpha_1(x)u_y(x,0) = h_0(x), 0 \leq x \leq 1, \tag{3}$$

$$\beta_0(x)u_y(x,0)+\beta_1(x)u_y(x,y_0)+\beta_2(x)u_y(1,y) = h_1(x), 0 < y < 1, 0 \leq x \leq 1, \tag{4}$$

$$\gamma_0(x)u(0,y) + \gamma_1(y)u_x(0,y) + \gamma_2(y)u_{xx}(0,y) = P_0(y), \tag{5}$$

$$\delta_0(y)u(1,y) + \delta_1(y)u_{xx}(1,y)P_1(y), \tag{6}$$

$$\rho_0(y)u_x(0,y) + \rho_1(y)u_x(1,y) = P_2(y), 0 \leq y \leq 1. \tag{7}$$

Здесь $\alpha_i(x), \beta_i(x), h_i(x), \delta_i(x), \gamma_j(y), P_j(y), h_i(x) (i = 0,1, j = 0,1,2)$. Заданные непрерывные функции, причем $\alpha_0^2 + \alpha_1^2 \neq 0, \beta_0^2 + \beta_1^2 + \beta_2^2 \neq 0, \gamma_0^2 + \gamma_1^2 + \gamma_2^2 \neq 0, \delta_0^2 + \delta_1^2 \neq 0, \rho_0^2 + \rho_1^2 \neq 0$.

Для рассматриваемой задачи доказывается теоремы существования и единственности регулярных решений.

On the ill-posed Cauchy problem for matrix factorizations of the Helmholtz equation

Juraev D.A.

Karshi State University, Karshi city, Uzbekistan

In the paper it is considered the Cauchy problem for the matrix factorizations of the Helmholtz equation in a bounded and an unbounded domains. Using the Carleman matrix, we construct an explicitly regularized solution of the Cauchy problem for the matrix factorization of the Helmholtz equation in are $m-$dimensional bounded and an unbounded domains.

It is known that the Cauchy problem for elliptic equations is unstable with respect to a small change in the data, i.e. incorrect (example of Hadamard). In unstable problems, the image of the operator is not closed; therefore, the solvability condition cannot be written in terms of continuous linear functionals. Thus, in the Cauchy problem for elliptic equations with data on a part of the domain's boundary, the solution is usually unique, the problem is solvable for an everywhere dense set of data, but this set is not closed. Consequently, the theory of the solvability of such problems is significantly more difficult and deeper than theory of solvability of Fredholm equations. The first results in this direction appeared only in the mid-1980s in the works of L.A. Aizenberg, A.M. Kytmanov, N.N. Tarkhanov (see [1]).

In many well-posed problems for a system of equations of elliptic type of the first order with constant coefficients, the factorizing operator of Helmholtz, the calculation of the value of the vector function on the whole boundary is inaccessible. Therefore, the problem of reconstructing, solving a system of equations of elliptic type of the first order with constant coefficients, the factorizing operator of Helmholtz (see for instance [2], [3], [4]) is one of the topical problems in the theory of differential equations.

[1] Tarkhanov N.N. The Cauchy problem for solutions of elliptic equations. Akad. Verl., Berlin, V. 7. 1995.

[2] Zhuraev D.A. Cauchy problem for matrix factorizations of the Helmholtz equation. Ukrainian Mathematical Journal. 69:10 (2018), 1583-1592.

[3] Juraev D.A. The Cauchy problem for matrix factorizations of the Helmholtz equation in an unbounded domain, Sib. Electron. Mat. Izv. 14 (2017), 752–764.

[4] Juraev D.A. On the Cauchy problem for matrix factorizations of the Helmholtz equation in an unbounded domain in $\mathbb{R}^2$. Sib. Electron. Mat. Izv. 15 (2018), 1865–1877.

О гладкости решения краевой задачи с вырождающимся уравнением

Задворнов О.А., Трифонова Г.О.

Казанский федеральный университет, г. Казань, Россия

Рассматривается краевая задача на ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, вообще говоря, с вырождением по градиенту

$$\operatorname{div}\left(\frac{g(x,|\nabla w(x)|)}{|\nabla w(x)|}\,\nabla w(x)\right) = \operatorname{div} F(x), \quad x \in \Omega, \tag{1}$$

$$w(x) = 0, \quad x \in \partial\Omega, \tag{2}$$

где $F = (f_1, f_2, \ldots, f_n)$, $f_i \in L_p(\Omega)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, $p \geqslant 2$,

$$g(x,\lambda) = \begin{cases} 0\,, & 0 \leqslant \lambda \leqslant \mu(x), \\ \kappa(x)(\lambda - \mu(x))\,, & \mu(x) \leqslant \lambda, \end{cases}$$

функции $\mu, \kappa : \Omega \to R_+$ измеримы и ограничены,

$$0 \leqslant \mu(x) \leqslant \overline{\mu}, \quad 0 < \underline{\kappa} \leqslant \kappa(x) \leqslant \overline{\kappa}$$

Такие задачи возникают в теории фильтрации несжимаемой жидкости, следующей закону с предельным градиентом [1]. При $\mu(x) \equiv 0$ уравнение (1) становиться линейным, строго эллиптичным и при $p > n$ решение будет гельдеровым [2, Теорема 14.1, стр. 250]

Теорема. Пусть граница области $\partial\Omega$ удовлетворяет условию (A) [2, стр. 30] и $p > n$, тогда всякое обобщенное решение краевой задачи (1-2) непрерывно по Гельдеру.

[1] Ляшко А.Д., Карчевский М.М. О решении некоторых нелинейных задач теории фильтрации// Известия Вузов. Математика. – 1975. – No 6. – С. 73–81.

[2] Ладыженская О.А., Уральцева Н.Н. Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. М: Наука, 1975.

Symmetry breaking in competing single-well linear-nonlinear potentials

Zezyulin D. A. [a], Lebedev M. E. [b,c], Alfimov G. L. [c,d], and Malomed B. A. [a,e]

[a] ITMO University, St. Petersburg, Russia;
[b] All-Russian Institute for Scientific and Technical Information, RAS, Moscow, Russia;
[c] Institute of Mathematics with Computer Center, RAS, Ufa, Russia;
[d] MIEE University, Zelenograd, Moscow, Russia;
[e] Tel Aviv University, Israel

The combination of linear and nonlinear potentials, both shaped as a single well, enables competition between the confinement and expulsion induced by the former and latter potentials, respectively. We demonstrate that this setting leads to spontaneous symmetry breaking (SSB) of the ground state in the respective generalized nonlinear Schrödinger (Gross-Pitaevskii) equation:

$$i\Psi_t = -\Psi_{xx} + \frac{1}{2}\omega^2 x^2 \Psi - P(x)\Psi|\Psi|^2. \tag{1}$$

Two different SSB bifurcation scenarios are possible, depending on the shape of the nonlinearity – modulation profile, which determines the nonlinear potential $P(x)$. If the profile is bounded (remaining finite at $|x| \to \infty$), at a critical value of the integral norm the spatially symmetric state loses its stability, giving rise to a pair of mutually symmetric stable asymmetric ones via a direct pitchfork bifurcation. On the other hand, if the nonlinear potential is unbounded, two unstable asymmetric modes merge into the symmetric metastable mode and destabilize it via an inverted pitchfork bifurcation.

[1] D. A. Zezyulin, M. E. Lebedev, G. L. Alfimov, and B. A. Malomed, Symmetry breaking in competing single-well linear-nonlinear potentials, Phys. Rev. E **98**, 042209 (2018).

Black hole strong lensing in modified gravity

Izmailov R.N.

Zel'dovich International Center for Astrophysics, Bashkir State Pedagogical University, 3A, October Revolution Street, Ufa 450008, RB, Russia

Recently, by integrating the Fermat potential in MOdified Gravity (MOG), the weak field first order light deflection angles caused by a point-like star and a large compact object have been found and their deviations from those of general relativity (GR) have been discussed [1]. Lensing behavior could be a useful diagnostic to differentiate between Schwarzschild black hole of GR (SGR) and of MOG. The static spherically symmetric BH solution obtained by Moffat [2] is what we call here the Schwarzschild-MOG (abbreviated as SMOG). The SMOG is characterized by a massive vector field with an enhanced Newtonian acceleration defined by a gravitational constant $G = G_N(1+\alpha)$, where G_N is the Newtonian gravitational constant, α is the MOG parameter representing a repulsive Yukawa-like force ($\alpha > 0$). SMOG leads to SGR at $\alpha = 0$.

For the strong field regime, we shall adopt Bozza's method [3] to analyse the angular radius of the BH *shadow* θ_∞, image separation s and flux ratio r, all as functions of α [4]. The methods work for a larger interval $-1 < \alpha < \infty$ without any pathology so that the value of α may be left essentially open to be constrained by future lensing observations. However, for numerical illustration, we shall assume the SMBH SgrA* as a toy model of SMOG to numerically estimate the degree of deviation from SGR values within a finite interval, $-1 < \alpha < 3$, slightly larger than the one in [5].

The reported study was funded by RFBR according to the research project No. 18-32-00377.

[1] Moffat J.W. and Rahvar S., Mon. Not. R. Astron. Soc. **482**, 4514 (2019).

[2] Moffat J.W., J. Cosmol. Astropart. Phys. **03**, 004 (2006).

[3] Bozza V., Phys. Rev. D **66**, 103001 (2002).

[4] Izmailov R.N., Karimov R.Kh., Zhdanov E.R. and Nandi K.K., Mon. Not. R. Astron. Soc., **483**, 3754 (2019).

[5] Pérez D., Armengol F.G.L. and Romero G.E., Phys. Rev. D **95**, 104047 (2017).

Асимптотика решения при динамической бифуркации седло-узел

Калякин Л.А.

Институт математики с ВЦ УНЦ РАН, г.Уфа, Россия

Рассматривается полулинейное дифференциальное уравнение второго порядка, параметры которого медленно меняются. При замороженных параметрах соответствующее автономное уравнении имеет неподвижные точки: седло и устойчивые узлы. При деформации параметров пара седло-узел сливается. Строится асимптотическое решение вблизи такой динамической бифуркации. Выяснено, что в узком переходном слое главные члены асимптотики описываются уравнениями Риккати и КПП. Важным результатом является установление факта затягивания устойчивости: момент срыва значительно сдвигается от момента бифуркации. Точные утверждения проиллюстрированы результатами численных экспериментов.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 17-11-01004).

Эффект Саньяка в скаляр-тензор-векторной теории гравитации

Каримов Р.Х.

БГПУ им. М.Акмуллы, г.Уфа, Россия

Интерес к исследованию модифицированных теорий гравитации в последнее десятилетие значительно вырос. Это связано с открытием некоторых явлений необъясняемых общей теорией относительности. Для объяснения этих явлений общая теория относительности требует изменений в больших (астрофизических и больше) масштабах. Одной из таких теорий является скаляр-тензор-векторная теория гравитация. Эта модифицированная теория предполагает наличие пятого взаимодействия (аналог потенциала Юкавы) – помимо гравитации, электромагнитного, сильного и слабого, задаваемого параметром α, уменьшающим гравитационное притяжение [1, 2]. В работе будет исследован эффект Саньяка для решения Керра в скаляр-тензор-векторной теории гравитации с гравитационной постоянной

$$G = G_{\rm N}(1+\alpha). \tag{1}$$

Выражение для задержки времени двух противоположно направленных сигналов, движущихся в поле гравитации вокруг массивного объекта для негеодезического движения в постньютоновском приближении имеет вид:

$$\delta\tau \simeq \delta\tau_S - \frac{8\pi a(1+\alpha)M}{R} + 4\pi R(1+\alpha)M\omega_0. \tag{2}$$

Из уравнения (2) видно, что параметр α не влияет на основной вклад в задержку Саньяка, а появляется только во втором и третьем порядке. Это объясняется тем, что в режиме сильной гравитации отталкивание, вызванное аналогом потенциала Юкавы, не может противодействовать усиленному гравитационному притяжению, вызванному измененной гравитационной постоянной (1). В результате гравитационное поле в скаляр-тензор-векторной теории гравитации сильнее, чем в общей теории относительности, и задержка Саньяка, соответственно, больше.

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 18-32-00377.

[1] Moffat J.W., J. Cosmol. Astropart. Phys. **12**, 001 (2004).

[2] Izmailov R.N., Karimov R.Kh., Zhdanov E.R. and Nandi K.K., Mon. Not. R. Astron. Soc. **483**, 3754 (2019).

Интегральные формулы в теории трансцендентов Пенлеве

Киселев О.М.

Институт математики с ВЦ УФИЦ РАН, г.Уфа, Россия

Приводятся интегральные формулы для вычисления данных монодромии в системах уравнений связанных с уравнениями Пенлеве. Эти формулы содержат решения вспомогательных линейных систем с параметрами, определяемыми решением уравнения Пенлеве в заданной точке. По данным монодромии можно получить решение обратной задачи – интегральную формулу для трансцендента Пенлеве. Эта формула выводится из задачи Римана о сопряжении аналитических решений вспомогательной линейной системы.

Такие интегральные формулы оказываются эффективными для решения задачи Коши для уравнений Пенлеве и построения неинтегрируемых возмущений уравнений Пенлеве в некоторых специальных случаях.

Модель образования двумерных искажений в сегнетоэлектрическом жидком кристалле во внешнем электрическом поле

Кондратьев Д.В., Мигранов Н.Г.

Академия наук РБ, Башкирский кооперативный институт (филиал) Российского университета кооперации, Башкирский государственный медицинский университет, г.Уфа, Россия

Исследуется возможность появления периодических искажений в слоях смектика во внешнем электрическом поле. Рассматривается теоретическая модель поведения смектического жидкого кристалла (ЖК), ограниченного двумя полубесконечными пластинами со слабой энергией сцепления на границах. В рассматриваемой модели электрическое поле направлено под углом к оси x в плоскости xOz. Искажения предполагаются только в плоскости xOz.

Искажение смектических слоев сегнетоэлектрического ЖК $u(x,z)$ определяется из уравнения Эйлера-Лагранжа для функционала $F = \int_V f(x,y,z,u(x,z))\,dV + S$, где $f(x,y,z,u(x,z))$ – плотность упругой энергии в объеме образца сегнетоэлектрика, которое имеет вид:

$$A_{12}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + B_2\frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial z^2} - B_{||}\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - E_0^2 \epsilon_a \epsilon_0 \cos(2\theta)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0.$$

Решение уравнения ищем в виде

$$u = u_0 \sin(kx)\sin(\pi z/d).$$

Получены выражения для нахождения волнового вектора k вдоль оси x при фиксированной толщине образца сегнетоэлектрика. Полученные результаты являются уточнением результатов, полученных в работах [1, 2]. В отличие от вышеупомянутых результатов, здесь реализован континуальный подход в исследовании проблемы возникновения периодических искажений смектических слоев.

[1] Мигранова Д. Н., Кондратьев Д. В., Мигранов Н. Г. Метод прямых в решении краевой задачи Пуассона для смектика SmC* во внешнем электрическом поле // Жидк. крист. и их практич. использ. 2016. Т. 16, N3. С. 58-68. DOI: 10.18083/LCAppl.2016.3.58

[2] Мигранов Н. Г., Кондратьев Д. В. Слоевые анизотропные жидкости: деформация структур в электрическом и магнитном полях // Труды ИМех им. Р.Р. Мавлютова. Том 12 (2017), № 2, с. 214-218. DOI: 10.21662/uim2017.2.032

Формула следа для магнитного лапласиана

Кордюков Ю.А.[1,3], **Тайманов И.А.**[2,3]
[1]Институт математики с ВЦ УФИЦ РАН, г. Уфа, Россия
[2]Институт математики им. Соболева СО РАН, г. Новосибирск, Россия
[3]Новосибирский государственный университет, г. Новосибирск, Россия

Пусть (M, g) — компактное риманово многообразие размерности n и F — замкнутая 2-форма на M (форма магнитного поля). Предположим, что форма F удовлетворяет условию квантования $[F] \in H^2(M, 2\pi\mathbb{Z})$. Тогда существует такое эрмитово линейное расслоение (L, h^L) с эрмитовой связностью $\nabla^L : C^\infty(M, L) \to C^\infty(M, T^*M \otimes L)$ (магнитный потенциал), что форма кривизны $R^L = (\nabla^L)^2$ связности ∇^L связана с формой магнитного поля F соотношением $F = iR^L$.

Магнитным лапласианом называется дифференциальный оператор второго порядка, действующий в пространстве $C^\infty(M, L)$ по формуле

$$\Delta^L = (\nabla^L)^* \nabla^L,$$

где $(\nabla^L)^* : C^\infty(M, T^*M \otimes L) \to C^\infty(M, L)$ обозначает оператор, сопряженный к ∇^L относительно скалярных произведений на $C^\infty(M, L)$ и $C^\infty(M, T^*M \otimes L)$, задаваемых римановой метрикой на M и эрмитовой структурой на L. Он является квантовым гамильтонианом заряженной частицы, движущейся по многообразию M во внешнем магнитном поле.

Соответствующая классическая динамическая система — магнитный геодезический поток — представляет собой гамильтонову систему на кокасательном расслоении T^*M многообразия M, наделенном скрученной симплектической формой $\Omega = \sum_{j=1}^n dp_j \wedge dx^j + \sum_{j,k=1}^n F_{jk} dx^j \wedge dx^k$ (здесь $F = \sum_{j,k=1}^n F_{jk} dx^j \wedge dx^k$ — форма магнитного поля), с гамильтонианом

$$\mathcal{H}(x, p) = \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^n g^{jk} p_j p_k.$$

Формула следа Гийемина-Урибе представляет собой асимптотическую формулу, связывающую собственные значения магнитного лапласиана и инварианты магнитного геодезического потока. В докладе мы напомним некоторые основные понятия и результаты, связанные с формулой следа Гийемина–Урибе, и приведем конкретные примеры ее вычислений.

Работа выполнена при финансовой поддержке Лаборатории топологии и динамики Новосибирского государственного университета (грант правительства РФ № 14.Y26.31.0025).

Индекс концентрации комплексной последовательности

Кривошеева О.А.
Башкирский государственный университет, г.Уфа, Россия

Пусть $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}_{k=1}^{\infty}$ — кратная последовательность различных комплексных чисел, $|\lambda_{k+1}| \geq |\lambda_k|$, $k \geq 1$, и $|\lambda_k| \to \infty$, $k \to \infty$. Выясняются условия, при которых Λ можно разбить на так называемые относительно малые группы, которые в некотором смысле отделены друг от друга. Необходимость подобного разбиения возникает при исследовании задач представления функций из инвариантных подпространств посредством рядов экспоненциальных многочленов (см., например, [1],[2]).

Пусть $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}_{k=1}^{\infty}$ и $U = \{U_m\}_{m=1}^{\infty}$ — разбиение последовательности $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ на группы U_m, $m \geq 1$. Перенумеруем члены Λ. Точки λ_k, попавшие в группу U_m, будем обозначать $\lambda_{m,l}$, а их кратности — $n_{m,l}$. Первый индекс — номер группы, а второй индекс меняется в пределах от 1 до M_m, где M_m — число точек λ_k, попавших в группу U_m. Положим $N_m = \sum_{l=1}^{M_m} n_{m,l}$. Пусть Λ разбита на группы $U = \{U_m\}_{m=1}^{\infty}$, где $U_m = \{\lambda_{m,\nu}\}_{\nu=1}^{M_m}$. Будем говорить, что группы U_m относительно малы, если

$$\lim_{m\to\infty} \max_{1\leq j,l\leq M_m} \frac{|\lambda_{m,j} - \lambda_{m,l}|}{|\lambda_{m,1}|} = 0, N(\Lambda, U) = \lim_{m\to\infty} \frac{N_m}{|\lambda_{m,1}|} = 0.$$

Пусть $S_\Lambda(U)$ — групповой индекс конденсации последовательности Λ, введенный в работе [1], и S_Λ^1 — индекс концентрации Λ, введенный в работе [2].

Теорема. *Пусть* $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}$. *Верны следующие утверждения:*

1) Если $U = \{U_m\}$ *— разбиение* Λ *на относительно малые группы, то* $S_\Lambda^1 \geq 2S_\Lambda(U)$.

2) Если $S_\Lambda^1 > -\infty$, *то существует разбиение* U *на относительно малые группы такое, что* $S_\Lambda(U) \geq 3S_\Lambda^1$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 18-11-00002).

[1] Кривошеев А.С., Кривошеева О.А. Базис в инвариантном подпространстве аналитических функций Матем. сб. 2013. Т. 204, № 12. С. 49-104.

[2] Кривошеев А.С., Кривошеева О.А. Базис в инвариантном подпространстве целых функций Алгебра и анализ. 2015. Т. 27, № 12. С. 132-195.

Полнота системы собственных функции задачи Геллерстедта для оператора Лаврентьева–Бицадзе с условием склеивания Франкля

Кучкарова А.Н.
Башкирский государственный университет, г. Уфа, Россия

Рассмотрим уравнение

$$Lu \equiv u_{xx} + \operatorname{sgn} y \cdot u_{yy} + \lambda u = 0, \tag{1}$$

где $\lambda \in \mathbb{C}$, в области D, ограниченной: 1) простой кривой Жордана Γ, лежащей в верхней полуплоскости $y > 0$ с концами в точках $A_1(-1,0)$ и $A_2(1,0)$; 2) характеристиками A_1C_1 $(x+y=-1)$, C_1O $(x-y=0)$, OC_2 $(x+y=0)$ и C_2A_2 $(x-y=1)$ уравнения ((1)) при $y<0$, где $C_1 = (-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$, $C_2 = (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$, $O = (0,0)$.

Обозначим $D_0 = D \cap \{y > 0\}$, $D_1 = D \cap \{x < 0, y < 0\}$, $D_2 = D \cap \{x > 0, y < 0\}$.

В области D для уравнения ((1)) поставим следующую спектральную задачу.

Задача G_λ. *Найти значения комплексного параметра λ и соответствующие им функции $u(x,y)$, удовлетворяющие условиям:*

$$u(x,y) \in \mathrm{C}(\,\overline{D}\,) \cap \mathrm{C}^2(D_0 \cup D_1 \cup D_2), \tag{2}$$

$$Lu(x,y) \equiv 0, \ \ (x,y) \in D_0 \cup D_1 \cup D_2, \tag{3}$$

$$u(x,y) = 0, \ \ (x,y) \in C_1O \cup OC_2 \cup \Gamma, \tag{4}$$

$$\lim_{y\to 0+0} u_x(x,y) = \lim_{y\to 0-0} u_x(x,y), \ \ -1 < x < 0, \ \ 0 < x < 1, \tag{5}$$

$$\lim_{y\to 0+0} u_y(x,y) = h \lim_{y\to 0-0} u_y(x,y), \ \ -1 < x < 0, \tag{6}$$

$$\lim_{y\to 0+0} u_y(x,y) = H \lim_{y\to 0-0} u_y(x,y), \ \ 0 < x < 1, \tag{7}$$

где h, H – действительные числа, отличные от нуля.

Задача определения течения внутри плоскопараллельного симметричного сопла Лаваля заданной формы (прямая задача теории сопла Лаваля) Ф.И. Франклем [1], была впервые сведена к новой краевой задачи с разрывными условиями сопряжения.

Отметим работу [2], в которой приведена полнота системы собственный функций задачи Трикоми для оператора Лаврентьева –Бицадзе с условием склеивания Франкля в пространстве L_2 в области эллиптичности.

Найдены собственные значения и построены в явном виде соответствующие собственные функции спектральной задачи Геллерстедта для оператора Лаврентьева –Бицадзе с условием склеивания Франкля. Установлено, что система собственных функций полна в пространстве L_2 в эллиптической и гиперболических подобластях и не полна в целом в смешанной области.

При $h = H = 1$ задача G_λ исследована в работе [3].

[1] *Франкль Ф. И.* Теорема существования слабого решения прямой задачи теории плоскопараллельного сопла Лаваля в первом приближении // Известия вузов. Математика. 1959. Т. 6, № 13 С.192-201

[2] *Moiseev E.I., Gulyaev D.A.* The completeness of the eigenfunctions of the Tricomi problem for the Lavrent'ev–Bitsadze equation with the Frankl gluing condition// Integral Transforms and Special Functions, 2016 том 27, № 11, с. 893-898 DOI

[3] *Сабитов К.Б., Кучкарова А.Н.* Спектральные свойства решения задачи Геллерстедта для уравнений смешанного типа и их применения // Сибирский математический журнал. 2001. Т. 42. № 5. С.1147-1161.

Coding of solutions for the Duffing equation with non-homogeneous nonlinearity

Lebedev M.E.[a], Shipitsyn K.V.[b],

[a] All-Russian Institute for Scientific and Technical Information, RAS, Russia

[b] MIET University, Zelenograd, Moscow, Russia;

We consider the equation

$$u_{xx} - u - P(x)u^3 = 0 \tag{1}$$

where $P(x)$ is a 2π-periodic function. Our aim is to describe the solutions for (1) that are bounded in $\mathbb{R}$. The prototypical examples are

$$P_1(x) = \sin x;$$

and

$$P_2(x) = \begin{cases} 1, & x \in [2n\pi, (2n+1)\pi); \\ -1 & x \in [(2n+1)\pi, (2n+2)\pi) \end{cases}$$

where $n \in \mathbb{Z}$. Proposition 2 of [1] states that if $P(x_0) > 0$ then there exist a one-parametric C^1-set of solutions for (1) that collapse (tend to infinity) at $x = x_0$. So, a "great part" of solutions for (1) are singular and, consequently, unbounded.

In the plane $(u(0), u_x(0))$ of initial data for (1) we select the sets $\mathcal{U}^{\pm}_{2\pi}$ defined as follows. We say that $(u, u') \in \mathcal{U}^{+}_{2\pi}$ if the solution of Cauchy problem for (1) with initial data (u, u') remains bounded at $[0; 2\pi]$. Similarly, we say that $(u, u') \in \mathcal{U}^{-}_{2\pi}$ if the corresponding solution of Cauchy problem remains bounded at $[-2\pi; 0]$. The shapes of $\mathcal{U}^{\pm}_{2\pi}$ were computed numerically by means of scanning of the plane $(u(0), u_x(0))$ using CUDA parallel computing platform. The Poincare map T (a map over the period of $P(x)$) provides one-to-one correspondence between $\mathcal{U}^{-}_{2\pi}$ and $\mathcal{U}^{+}_{2\pi}$.

More detailed analysis is possible in $P_2(x)$ case, since exact solutions in this case are available. It is shown that the intersection $\Delta = \mathcal{U}^{+}_{2\pi} \cap \mathcal{U}^{-}_{2\pi}$ consists of infinite number of isolated components Δ_n, $n \in \mathbb{Z}$. This make possible the complete description of bounded solutions of (1) in terms symbolic dynamics associated with action of T on the set Δ.

[1] G. L. Alfimov, M. E. Lebedev, On regular and singular solutions for equation $u_{xx} + Q(x)u + P(x)u^3 = 0$, Ufa Mathtmatical Journal, **7**, (2015), pp.3 - 18.

Perturbation theory for solitons: brief historical review

Maslov E.M.

Pushkov Institute of Terrestrial Magnetism, Ionosphere and Radio Wave Propagation (IZMIRAN) of the Russian Academy of Sciences, Troitsk, Moscow, Russia

(in memory of prof. Vladimir I. Karpman)

The history of creation and the main ideas of the perturbation theory for solitons based on the inverse scattering transform are presented. The theory is applicable to the perturbed Korteweg-de Vries equation, nonlinear Schrodinger equation, sine-Gordon equation, and others. As an example, the action of perturbations on a single Korteweg-de Vries soliton is fully considered.

Об аппроксимации одной задачи оптимального управления коэффициентами эллиптических уравнений со смешанными производными

Лубышев Ф.В., Манапова А.Р.
Башкирский государственный университет, г.Уфа, Россия

Настоящая работа посвящена изучению проблем, связанных с разработкой и исследованием разностных аппроксимаций задач оптимального управления нелинейного типа, описываемых эллиптическими уравнениями со смешанными коэффициентами и неограниченной нелинейностью. Управляющими параметрами являются коэффициенты при старших производных. В случае неограниченной нелинейности условия, налагаемые на коэффициенты уравнения состояния, выполнены в настоящей работе лишь в некоторой окрестности значений точного решения исходной задачи. Для случая, когда решение исходной дифференциальной задачи достаточно гладкое, в теории метода сеток проведено достаточно полное исследование проблем аппроксимации задач оптимального управления [1]-[2]. При понижении требований к дифференциальным свойствам искомого решения анализ сходимости разностных аппроксимаций существенно усложняется. В работе разработан подход, позволяющий исследовать разностные аппроксимации исходных экстремальных задач. Установлены оценки скорости сходимости аппроксимаций по состоянию и функционалу, слабая сходимость по управлению. Проведена регуляризация аппроксимаций.

[1] Лубышев Ф. В., Манапова А.Р. О некоторых задачах оптимального управления и их разностных аппроксимациях и регуляризации для квазилинейных эллиптических уравнений с управлениями в коэффициентах // Журнал вычисл. матем. и матем. физики, Т. 47, № 3, С. 376–396 (2007).

[2] Лубышев Ф. В., Манапова А.Р. Разностные аппроксимации задач оптимизации для полулинейных эллиптических уравнений в выпуклой области с управлениями в коэффициентах при старших производных // Журнал вычисл. матем. и матем. физики, Т. 53, № 1, С. 20–46 (2013).

Вычисление интегралов Адамара специального вида

Медведева Н.Б., Викторова В.А.
Челябинский государственный университет, г.Челябинск, Россия

Коэффициенты асимптотического разложения преобразования монодромии сложной монодромной особой точки аналитического векторного поля на плоскости при некоторых условиях невырожденности выражаются через интегралы Адамара от функций, возникающих при составлении систем уравнений в вариациях, отвечающих ребрам диаграммы Ньютона векторного поля [1]. Интеграл Адамара – это один из способов регуляризации расходящихся несобственных интегралов для функций со степенной особенностью. Предлагается способ приближенного вычисления интегралов Адамара указанного вида.

Выполнено при финансовой поддержке РФФИ, проект 17-01-00739.

[1] Медведева Н.Б. Асимптотическое разложение преобразования монодромии. Челябинский физико-математический журнал. Т.1. Вып. 1. 2016. С. 59-72.

Постановка обратной задачи для определения ядра в одном интегро-дифференциальном уравнении

Меражова Ш.Б., Меражов Н.И., Умарова У.У.
Бухарский государственный университет, г. Бухара, Узбекистан

В данной работе приводится постановка обратной задачи для интегро-дифференциальному уравнению параболического типа.

Представляет большой интерес как в практическом, так и в теоретическом отношении исследование обратных задач для параболических интегро-дифференциальных уравнений с интегральным членом типа свертки. Обратным задачам определения правой части либо одного из коэффициентов параболического уравнения с дополнительной информацией разных видов посвящен ряд работ.

Рассмотрим следующее уравнение:

$$u_t - Lu = \int_0^t K(x', \tau) u(x, t-\tau) d\tau, \quad (x,t) \in R_T^n, \tag{1}$$

здесь, L - дифференциальный оператор, имеет следующий вид:

$$L = \sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j}(x,t) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(x,t) \frac{\partial}{\partial x_i} + c(x,t).$$

Для этого уравнения можно поставить следующую обратную задачу:

Обратная задача. Пусть требуется определить пару функций $u(x,t)$ решение задачи и $K(x',t)$ ядра из уравнения (1) удовлетворяющее следующее условия:

$$u|_{t=0} = \varphi(x) \tag{2}$$

$$u(x',0,t) = g(x',t); x' \in R^{n-1}, 0 \leq t \leq T,$$
$$g(x',0) = \varphi(x',0), \tag{3}$$

где $R^n_T = \{(x,t)|x = (x',x_n) \in R^n,\ 0 < t < T,\ T > 0\}$.

Обратная задача исследуется при помощи вспомогательной задачи, в которой в дополнительном условии содержится искомые функции.

[1] Романов В.Г. Обратные задачи математической физики. М, Наука,1984 г., 263 стр.

[2] Дурдиев Д.К., Рашидов А.Ш. Обратная задача определения ядра в одном интегро-дифференциальном уравнении параболического типа// Дифференциальные уравнения. том 49, 2013 г.

Весовое пространство Фока. Свойства воспроизводящих ядер.

Мусин И.Х.

Институт математики с ВЦ УФИЦ РАН, г.Уфа, Россия

Пусть $H(\mathbb{C}^n)$ – пространство целых функций в $\mathbb{C}^n$, $d\mu_n$ – мера Лебега в $\mathbb{C}^n$, $abs\, u = (|u_1|, \ldots, |u_n|)$ для $u = (u_1, \ldots, u_n) \in \mathbb{R}^n$ ($\mathbb{C}^n$).

Пусть $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ – полунепрерывная снизу функция такая, что:

i_1). $\varphi(x) = \varphi(abs\, x),\ x \in \mathbb{R}^n$;

i_2). $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\varphi(x)}{\ln(1 + \|x\|)} = +\infty$;

i_3). сужение φ на $[0,\infty)^n$ не убывает по каждой переменной.

Через L^2_φ обозначим пространство измеримых функций $f : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ таких, что

$$\|f\|^2_\varphi = \int_{\mathbb{C}^n} |f(z)|^2 e^{-2\varphi(abs\, z)}\ d\mu_n(z) < \infty.$$

Со скалярным произведением

$$(f,g)_\varphi = \int_{\mathbb{C}^n} f(z)\overline{g(z)} e^{-2\varphi(abs\, z)}\ d\mu_n(z),\ f,g \in L^2_\varphi,$$

L^2_φ – гильбертово пространство.

Пусть $F^2_\varphi = L^2_\varphi \cap H(\mathbb{C}^n)$. F^2_φ – замкнутое подпространство пространства L^2_φ. Пространство F^2_φ рассматривалось в [1].

Пусть K_z – воспроизводящее ядро для F^2_φ в точке $z \in \mathbb{C}^n$. Определим нормализованное воспроизводящее ядро k_z в точке $z \in \mathbb{C}^n$ по формуле

$$k_z(w) = \frac{K_z(w)}{\|K_z\|_\varphi},\ w \in \mathbb{C}^n.$$

Теорема 1. $k_z \to 0$ слабо в F^2_φ при $\|z\| \to +\infty$.
Справедливо более сильное утверждение.
Теорема 2. $k_z \to 0$ слабо в L^2_φ при $\|z\| \to +\infty$.

[1] И.Х. Мусин, О некоторых линейных операторах на пространстве фоковского типа, Уфимск. матем. журн., 10:4 (2018), 85-91

Исследование границ областей устойчивости нелинейных дифференциальных уравнений

Мустафина И.Ж.
Россия

Рассматривается нелинейное дифференциальное уравнение

$$x' = A(\alpha,\beta)x + a(x,\alpha,\beta)\,, \quad x \in R^N\,, \tag{1}$$

где α и β – скалярные параметры, квадратная матрица $A(\alpha,\beta)$ является непрерывно дифференцируемой по совокупности переменных, а нелинейность $a(x,\alpha,\beta)$ равномерно по α и β удовлетворяет соотношению: $\|a(x,\alpha,\beta)\| = O(\|x\|^2)$ при $x \to 0$.

При всех значениях параметров α и β уравнение (1) имеет решение $x = 0$. Связное множество G в плоскости параметров (α,β) будем называть *областью устойчивости* решения $x = 0$ уравнения (1), если для любых $(\alpha,\beta) \in G$ решение $x = 0$ является устойчивым. Граница области устойчивости, как правило, образована совокупностью некоторых гладких кривых.

В настоящем докладе приводится схема приближенного построения границы области устойчивости решения $x = 0$ уравнения (1) в окрестности некоторой точки (α_0,β_0). Изучается также задача об основных сценариях бифуркаций при переходе параметров (α,β) через точки границы, а также вопросы об опасных и безопасных границах. Предполагается, что при $\alpha = \alpha_0$ и $\beta = \beta_0$ матрица $A_0 = A(\alpha_0,\beta_0)$ имеет простое собственное значение 0 или пару простых чисто мнимых собственных значений $\pm\omega_0 i$, а остальные собственные значения матрицы A_0 имеют отрицательные вещественные части. Используются методы теории бифуркаций и формулы теории возмущений линейных операторов.

Ограничимся здесь приведением лишь одного из полученных результатов. Пусть матрица $A_0 = A(\alpha_0, \beta_0)$ имеет простое собственное значение 0. Обозначим через e и g собственные векторы матрицы A_0 и транспонированной матрицы A_0^* соответственно, отвечающие собственному значению 0. Положим

$$\zeta_1 = \frac{(A'_\alpha(\alpha_0, \beta_0)e, g)}{(e, g)}, \quad \zeta_2 = \frac{(A'_\beta(\alpha_0, \beta_0)e, g)}{(e, g)}.$$

Теорема. Пусть выполнено условие: $\zeta_1^2 + \zeta_2^2 \neq 0$. Тогда через точку (α_0, β_0) плоскости параметров (α, β) проходит единственная гладкая граничная кривая γ области устойчивости G точки равновесия $x = 0$ системы (1).

Виртуальный уровень для обобщенной модели Фридрихса в нецелочисленной решетке

Неъматова Ш.Б.

Бухарский государственный университет, г. Бухара, Узбекистан

Для каждого фиксированного $h > 0$ через $\mathbb{T}_h^{\mathrm{d}}$ обозначим d - мерный куб $(-\pi; \pi]^{\mathrm{d}}$ соответствующим отождествлением противоположных граней. Из строение множество $\mathbb{T}_h^{\mathrm{d}}$ следует, что для любого $B \subset \mathbb{R}^{\mathrm{d}}$ существует $h = h(B) > 0$ такое, что $B \subset \mathbb{T}_h^{\mathrm{d}}$, т.е. $\lim\limits_{h\to 0} \mathbb{T}_h^{\mathrm{d}} = \mathbb{R}^{\mathrm{d}}$.

Пусть $\mathcal{H}_0 := \mathbb{C}$ - одномерное комплексное пространство, $\mathcal{H}_1 := L_2(\mathbb{T}_h^{\mathrm{d}})$ - гильбертова пространство квадратично- интегрируемых (комплексно-значных) функций, определенных на $\mathbb{T}_h^{\mathrm{d}}$ и $\mathcal{H} := \mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1$.

Рассмотрим обобщенную модель Фридрихса A, действующий в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ как операторная матрица

$$A := \begin{pmatrix} A_{00} & A_{01} \\ A_{01}^* & A_{11} \end{pmatrix}$$

с матричными элементами $A_{ij} := \mathcal{H}_j \to \mathcal{H}_i$, $i, j = 0, 1$:

$$A_{00}f_0 = -\varepsilon f_0, \ A_{01}f_1 = \alpha \int_{\mathbb{T}_h^{\mathrm{d}}} v(t) f_1(t) dt, \ (A_{11}f_1)(p) = (-\varepsilon + w(p)) f_1(p).$$

Здесь ε–положительное число, $\alpha > 0$–параметр взаимодействия, $v(\cdot)$ и $w(\cdot)$ вещественно-значные аналитические функции на $\mathbb{T}_h^{\mathrm{d}}$.

Пусть

$$m_h := \min_{p\in\mathbb{T}_h^{\mathrm{d}}} w(p), \quad M_h := \max_{p\in\mathbb{T}_h^{\mathrm{d}}} w(p).$$

Определим регулярную в $\mathbb{C} \setminus [m_h, M_h]$ функцию

$$\Delta(z) = -\varepsilon - z - \alpha^2 \int_{\mathbb{T}_h^{\mathrm{d}}} \frac{v^2(t)dt}{-\varepsilon + w(t) - z}.$$

Предположим, что функция $w(\cdot)$ имеет единственный невырожденный максимум в точке $p_0(h) \in \mathbb{T}_h^{\mathrm{d}}$. Положим

$$\Delta(-\varepsilon + M_h) := \lim_{z \to -\varepsilon + M_h + 0} \Delta(z).$$

Теорема 1. Верны следующие утверждение:

а) Оператор A имеет собственное значение $z = -\varepsilon + M_h$ тогда и только тогда, когда $\Delta(-\varepsilon + M_h) = 0$ и $v(p_0(h)) = 0$;

б) Оператор A имеет виртуальный уровень в точке $z = -\varepsilon + M_h$ тогда и только тогда, когда $\Delta(-\varepsilon + M_h) = 0$ и $v(p_0(h)) \neq 0$.

Особенности многообразий монодромии и усеченные решения уравнений Пенлеве

Новокшенов В.Ю.

Институт математики с ВЦ УФИЦ РАН, г.Уфа, Россия

Рассмотрено поведение решений первого (PI) и второго (PII) уравнений Пенлеве, отвечающих специальному выбору данных монодромии. Прослежена связь между особенностями двумерного комплексного многообразия данных монодромии и аналитическими свойствами соответствующих им решений. Оказывается, что последние не имеют полюсов в том или ином критическом секторе комплексной плоскости. Они относятся к так называемому классу "усеченных" решений (tronquée solutions) по классификации П.Бутру [1]. Обсуждаются структуры, образуемые полюсами в комплексной плоскости, и их визуализация с помощью аппроксимаций Паде [2].

[1] Новокшенов В.Ю. Специальные решения первого и второго уравнений Пенлеве и особенности данных монодромии, Труды ИММ УрО РАН, Т. 18(2), (2012), 179-190.

[2] Novokshenov V.Yu. Distributions of poles to Painlevé transcendents via Padé approximations, Constructive Approximation, V.39(1) (2014) 85-99.

О специальных классах решений уравнения нелинейной диффузии с источником (стоком)

Орлов Св.С.
Институт динамики систем и теории управления
имени В.М. Матросова СО РАН, г. Иркутск, Россия

Рассматривается квазилинейное параболическое уравнение

$$u_t = \nabla_x \cdot [k(u)\nabla_x u] + l(u), \tag{1}$$

в котором искомая функция $u = u(t, x)\colon \Omega \to [0; +\infty)$ определена и непрерывна на множестве $\Omega \subset [0; +\infty) \times \mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$. Предполагается, что $k(u) = k_0 u^\sigma$, $l(u) = l_0 u^\tau$, параметры k_0, l_0, σ, $\tau \in \mathbb{R}$, причём k_0, σ, $\tau > 0$. В литературе (1) часто называют *уравнением нелинейной диффузии с источником* ($l_0 > 0$) или *стоком* ($l_0 < 0$).

Выполнив замену $u(t, x) \to [u(t, r)/k_0]^{\frac{1}{\sigma}}$, где $r \triangleq \|x\|_{\mathbb{R}^n} = (\sum_{i=1}^n x_i^2)^{\frac{1}{2}}$, приведём (1) к одномерному уравнению

$$u_t = uu_{rr} + u_r^2/\sigma + (n-1)uu_r/r + pu^{\frac{\sigma+\tau-1}{\sigma}}, \tag{2}$$

где $p = k_0^{(1-\tau)/\sigma} l_0 \sigma \in \mathbb{R}$. Настоящее исследование посвящено построению решений уравнения (2), удовлетворяющих краевому условию

$$u(t, r)|_{\partial\Omega} = 0 \tag{3}$$

с неизвестной (свободной) границей $\partial\Omega = \{(t, r)\colon s(t, r) = 0\}$. Здесь мы предполагаем, что $\partial\Omega$ определяется уравнением $s(t, r) = 0$, которое в пространстве независимых переменных (t, r) задаёт некоторую достаточно гладкую кривую.

При помощи *прямого метода Кларксона — Крускала* [1] найдены редукции краевой задачи (2), (3) к семейству начальных задач для ОДУ второго порядка типа Льенара

$$\begin{gathered} vv'' + (v')^2/\sigma + [k_1(s)v + 1]v' + [k_2(s)v + k_3(s)]v + pv^{\frac{\sigma+\tau-1}{\sigma}} = 0, \\ v(s)|_{s=0} = 0, \quad v'(s)|_{s=0} = v_1 \in \{-\sigma, 0\}, \end{gathered} \tag{4}$$

где коэффициенты $k_1(s)$ и $k_2(s)$ связаны с $k_3(s) \in C^1(M)$, $M \subset \mathbb{R}$ дифференциальными соотношениями специального вида. В работе получен ряд условий на коэффициенты $k_i(s)$ ($i = 1, 2, 3$) и параметры σ и τ, при выполнении которых решения начальных задач (4) могут быть выражены в квадратурах.

[1] Clarkson P.A., Kruskal M.D. New similarity reductions of the Boussinesq equation // J. Math. Phys., 1989, Vol. 30, No 10. P. 2201–2213.

Квантование одной гамильтоновой системы Кимуры

Павленко В.А.
ФГБОУ ВО БГАУ, г.Уфа, Россия

Рассматриваются два совместных между собой линейных уравнения с временами t_1 и t_2, которые зависят только от двух пространственных переменных. Эти уравнения являются аналогами уравнений Шредингера, которые опеределяются гамильтонианами Кимуры, см. [1]:

$$H_{t_k}^{2+1+1+1}(t_1, t_2, q_1, q_2, p_1, p_2) \quad (k = 1, 2) \tag{1}$$

пары совместных между собой систем, которые допускают применение метода изомонодромных деформаций (ИДМ). Установлено, что решения гамильтоновой системы $H^{2+1+1+1}$ Кимуры явным образом задаются совместными решениями $H^{2+1+1+1}$ Накамуры, см. [2].

В данной работе мы только начали выписывать решения эволюционных уравнений, которые задаются гамильтонианами Кимуры. Мы начали с гамильтониана $H(1, 1, 1, 2)$. Но в работе Кимуры имеются ещё целый ряд уравнений, которые задаются другими гамильтонианами. Все они являются аналогами уравнений Шредингера. Эти результаты будут обсуждаться в последующих работах.

[1] Hironobu Kimura. The degeneration of the two dimentional Garnier system and the polynomial Hamiltonian structure. Vol. 4 CLV(1989), pp. 24-74

[2] Hiroshi Kawakami, Akane Nakamura and Hidetaka Sakai. Degeneration scheme of 4-dimentional Painleve-type equations. http://arXiv:1209.3836v3 [math.CA] 4 Aug 2016

Эллиптические системы с разрывными нелинейностями

Павленко В.Н., Постникова Е.Ю.
Челябинский государственный университет, г.Челябинск, Россия

Рассматривается эллиптическая краевая задача в ограниченной области $\Omega \in \mathbb{R}^n$ с границей $\partial\Omega$ класса C^2

$$L_1 u(x) = g_1\left(x, u(x), v(x)\right),\ L_2 v(x) = g_2\left(x, u(x), v(x)\right),\ x \in \Omega, \tag{1}$$

$$u(x) = v(x) = 0 \text{ на } \partial\Omega, \tag{2}$$

где $L_s u(x) = -\sum\limits_{i,j=1}^{n} \left(a_{ij}^s(x) u_{x_i}\right)_{x_j} + a^s(x) u(x)$ равномерно эллиптический коэрцитивный дифференциальный оператор в Ω, $s = 1, 2$, нелинейности $g_s\left(x, u, v\right)$, $s = 1, 2$ суперпозиционно измеримые.

Определение. Решением задачи (1)-(2) называют пару функций $u(x)$ и $v(x)$ из $W_q^2(\Omega)$, удовлетворяющая уравнению (1) почти всюду на Ω и граничному условию (2), $q > 1$.

Вариационным методом [1], [2] получен следующий результат.

Теорема. Предположи, что

1) существует функция $G(x, u, v)$ такая, что для любых u, v, h_1, h_2 из $\mathbb{R}$ функция $G(x, u + th_1, v + th_2)$ абсолютно непрерывна по t на $[0, 1]$ и для почти всех $t \in [0, 1]$ выполнено равенство $\frac{d}{dt}G(x, u + th_1, v + th_2) = g_1(x, u + th_1, v + th_2) \cdot h_1 + g_2(x, u + th_1, v + th_2) \cdot h_2$;

2) $|g_s(x, u, v)| \leq C(x) + b(|u|^\nu + |v|^\nu)$ $\forall u, v \in \mathbb{R}$ и почти всех $x \in \Omega$, $C \in L^2(\Omega)$, $b > 0$, $0 \leq \nu < 1$, $s = 1, 2$;

3) для любых u, v, h_1, h_2 из $\mathbb{R}$ существует $\lim\limits_{t \to 0+} [(g_1(x, u+th_1, v+th_2) - g_1(x, u, v))h_1 + (g_2(x, u + th_1, v + th_2) - g_2(x, u, v))h_2] \geq 0$;

Тогда задача (1)-(2)) имеет решение.

Выделен класс нелинейностей, удовлетворяющих условиям теоремы.

[1] Павленко В.Н. О разрешимости некоторых нелинейных уравнений с разрывными операторами //ДАН СССР.-1972.-т.204,№6.-с. 1320-1323.

[2] Павленко В.Н. Вариационный метод для уравнений с разрывными операторами //Вестник Челяб.ун- та.Математика.Механика.1994.-№1(2).-с.87-95

Положительные решения суперлинейных краевых задач с разрывной нелинейностью

Павленко В.Н.

Челябинский государственный университет, г.Челябинск, Россия

В ограниченной области $\Omega \in \mathbb{R}^n$ $(n \geq 3)$ с границей $\partial\Omega$ класса C^2 рассматривается эллиптическая краевая задача с параметром $\lambda > 0$

$$Lu(x) = \lambda g(x, u(x)), \; x \in \Omega, \tag{1}$$

$$u(x) = 0, \text{ на } \partial\Omega, \tag{2}$$

где $Lu(x) = -\sum\limits_{i,j=1}^{n} (a_{ij}(x)u_{x_i})_{x_j} + \sum\limits_{j=1}^{n} b_j(x)u_{x_j}(x) + C(x)u(x)$ равномерно эллиптический дифференциальный оператор, коэффициенты которого достаточно гладкие $C(x)$ и $-\sum\limits_{j=1}^{n} (b_j(x))_{x_j}(x) + C(x)$ неотрицательны на $\bar{\Omega}$. Предполагается, что нелинейность $g(x, u)$ борелева ($\mod 0$) [1], для почти всех $x \in \Omega$ функция $g(x,\cdot)$ имеет конечные односторонние пределы в любой точке $u \in \mathbb{R}$ и $g(x,u) \in [g_-(x,u), g_+(x,u)]$, где $g_\pm(x,u)$ — нижний и верхний предел $g(x,\cdot)$ в точке u.

Определение. Обобщенным решением задачи (1)-(2) называется функция $u \in W_q^2(\Omega)$, $q > 1$, удовлетворяющая почти всюду на Ω включению $Lu(x) \in \lambda[g_-(x,u(x)), g_+(x,u(x))]$ и граничному условию (2).

Топологическом методом доказывается следующее утверждение.

Теорема. Пусть выполнены условия:

1) для почти всех $x \in \Omega$ функция $g(x,u)$ равна нулю при $u < 0$ и неотрицательна при $u \geq 0$;

2) существует $1 < \gamma \leq \frac{n+1}{n-1}$ и $a(x) \in L^\infty(\Omega)$ такие, что при почти всех $x \in \Omega$ $g(x,u) \leq a(x) \cdot u^\gamma$, $\forall u \geq 0$;

3) $\lim\limits_{u\to+\infty} \frac{g(x,u)}{u} = +\infty$ равномерно по $x \in \Omega$;

4) $\lim\limits_{u\to+\infty} \frac{g(x,u)}{u^\beta} = 0$ равномерно по $x \in \Omega$, где $\beta = \frac{n+1}{n-1}$.

Тогда для любого $\lambda > 0$ задача (1)-(2) имеет обобщённое положительное решение.

[1] Красносельский М.А., Покровский А.В. Системы с гистерезисом. М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1983.

О влиянии спинового загрязнения волновых функций молекулярных систем на ошибку расчёта физико-химических свойств отрицательных ионов

Панкратьев Е.Ю.

Институт физики молекул и кристаллов УФИЦ РАН

450075, г. Уфа, пр. Октября, 151

Большая часть вычислительной химии имеет дело с расчётами, когда пространственные части α и β спиновых орбиталей волновой функции молекулярной системы совпадают. Т.е. орбитальная волновая функция представлена в ограниченной форме (закрытые электронные оболочки). Системы с закрытыми оболочками характеризуются дважды занятыми молекулярными орбиталями (МО), и лишь спиновые составляющие волновых функций электронов на таких МО антипараллельны. Однако электронно-возбуждённые, положительно и отрицательно заряженные формы молекул, в большинстве случаев, являются радикальными частицами, т.е. должны описываться неограниченной волновой функцией (открытые электронные оболочки). Проведение квантово-химических расчётов уже на этапе нахождения волновой функции молекулярной системы методом самосогласованного поля (неэмперические методы и теория функционала плотности) с использованием неограниченных волновых функций, в подавляющем числе случаев, сопровождается проблемой спинового загрязнения [1, 2] – искусственного примешивания высокоспиновых электронных состояний (загрязнителей).

Приближенные волновые функции с высокой степенью спинового загрязнения нежелательны, т.к. они не являются собственными функциями оператора полного квадрата спина $< S^2 >$. Применение таких волновых функций при строгом подходе не оправдано, т.к. приводит к искусственному искажению энергетических, геометрических и электрических свойств молекул. С целью очистки волновой функции от нежелательных компонент часто применяют спиновую аннигиляцию – выделение компоненты нужной мультиплетности с помощью операторов проектирования [3]. Однако такой метод не надёжен полностью.

Возможным решением данной проблемы является использование спин-ограниченных волновых функций. На примере расчёта в квантово-химическом пакете ПРИРОДА 17 (автор Лайков Д.Н., МГУ) в приближениях $U - PBE/3z$ и $RO - PBE/3z$ положительны и отрицательных ионов циклических, а также ката- и пери-конденсированных полициклических ароматических углеводородов (31 молекула) изучено влияние спинового загрязнения на рассчитываемые физико-химические свойства.

При проведении расчётов с участием отрицательных ионов можно рекомендовать использовать спин-ограниченные квантово-химические методы для решения обозначенной проблемы.

Работа выполнена при поддержке АН РБ и РФФИ, региональный грант № 17-42-020643.

[1] Young D. C. Spin Contamination. Computational Chemistry: A Practical Guide for Applying Techniques to Real World Problems. Wiley. 2002. P. 227-230. DOI: 10.15587/2313-8416.2014.30726

[2] Кругляк Ю. А. Обобщенный метод Хартри-Фока и его версии: от атомов и молекул до полимеров // ScienceRise. 2014. Т. 5. № 3. С. 6-21. DOI: 10.1002/0471220655.ch27

[3] Lowdin P.-O. Angular Momentum Wavefunctions Constructed by Projector Operators // Rev. Mod. Phys. 1964. V.36. №4. P.966-976. DOI: 10.1103/RevModPhys.36.966

Специальные случаи интерполяции суммами рядов экспонент

Попенов С. В., Мерзляков С. Г.
Институт математики с ВЦ УФИЦ РАН, г.Уфа, Россия

Изучается проблема интерполяции суммами рядов экспонент в выпуклых областях. Расматриваются абсолютно сходящиеся ряды, причем показатели экспонент рассматриваемых рядов принадлежат некоторому заданному множеству. Ранее авторами получены условия разрешимости проблемы интерполяции, связывающие множество показателей и допустимые множества интерполяционных узлов, а в ряде конкретных ситуаций получены критерии разрешимости. Теперь это удалось сделать в некоторых достаточно общих специальных ситуациях. В частности, рассмотрен случай, когда множество показателей экспонент имеет два предельных направления сгущения в бесконечности, а также случай, когда множество интерполяционных узлов лежит на двух лучах. Доказательство необходимости найденных условий можно применять в более общих ситуациях.

Местоположение существенного спектра одного семейства 3×3-операторных матриц

Расулов Т.Х., Сайлиева Г.Р.
Бухарский государственный университет, г. Бухара, Узбекистан

Пусть $\mathbb{T}^{\mathrm{d}} :\equiv (-\pi;\pi]^{\mathrm{d}}$ – d - мерный тор, $\mathcal{H}_0 := \mathbb{C}$ - одномерное комплексное пространство, $\mathcal{H}_1 := L_2(\mathbb{T}^{\mathrm{d}})$ - гильбертова пространство квадратично- интегрируемых (комплексно-значных) функций, определенных на $\mathbb{T}^{\mathrm{d}}$, а $\mathcal{H}_2 := L_2^{\mathrm{sym}}((\mathbb{T}^{\mathrm{d}})^2)$ - гильбертова пространство квадратично-интегрируемых (комплексно-значных) симметричных функций, определенных на $(\mathbb{T}^{\mathrm{d}})^2$ и $\mathcal{H} := \mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$.

Рассмотрим семейство 3×3-операторных матриц

$$H(K) = \begin{pmatrix} H_{00}(K) & H_{01} & 0 \\ H_{01}^* & H_{11}(K) & H_{12} \\ 0 & H_{12}^* & H_{22}(K) \end{pmatrix} : \mathcal{H} \to \mathcal{H}, \quad K \in \mathbb{T}^{\mathrm{d}},$$

с матричными элементами

$$H_{00}(K)f_0 = w_0(K)f_0, \quad H_{01}f_1 = \int_{\mathbb{T}^{\mathrm{d}}} v_0(t)f_1(t)dt,$$

$$(H_{11}(K)f_1)(p) = w_1(K;p)f_1(p), \quad (H_{12}f_2)(p) = \int_{\mathbb{T}^{\mathrm{d}}} v_1(t)f_2(p,t)dt,$$

$$(H_{22}(K)f_2)(p,q) = w_2(K;p,q)f_2(p,q), \quad f_i \in \mathcal{H}_i, \quad i = 0,1,2.$$

Здесь $w_0(\cdot)$ и $v_i(\cdot)$, $i = 0, 1$ вещественно-значные непрерывные функции на $\mathbb{T}^{\mathrm{d}}$, а $w_1(\cdot;\cdot)$ и $w_2(\cdot;\cdot,\cdot)$ вещественно-значные непрерывные функции на $(\mathbb{T}^{\mathrm{d}})^2$ и $(\mathbb{T}^{\mathrm{d}})^3$, соответственно. Причем, при каждом фиксированном $K \in \mathbb{T}^{\mathrm{d}}$ функция $w_2(K;\cdot,\cdot)$ есть симметричная функция.

При каждом фиксированном $K, p \in \mathbb{T}^{\mathrm{d}}$ определим регулярную в области $\mathbb{C} \setminus [E_K(p); E_K(p)]$ функцию

$$\Delta_K(p\,; z) = w_1(K;p) - z - \frac{1}{2}\int_{\mathbb{T}^{\mathrm{d}}} \frac{v_1^2(t)dt}{w_2(K;p,t) - z},$$

где числа $E_K(p)$ и $E_K(p)$ определяются по равенствам

$$E_K(p) := \min_{q \in \mathbb{T}^{\mathrm{d}}} w_2(K;p,q), \quad E_K(p) := \max_{q \in \mathbb{T}^{\mathrm{d}}} w_2(K;p,q).$$

Пусть Λ_K - множество тех точек $z \in \mathbb{C}$, для которых равенство $\Delta_K(p\,; z) = 0$ имеет место хотя бы для одной $p \in \mathbb{T}^{\mathrm{d}}$ и

$$m_K := \min_{p,q \in \mathbb{T}^{\mathrm{d}}} w_2(K;p,q), \quad M_K := \max_{p,q \in \mathbb{T}^{\mathrm{d}}} w_2(K;p,q).$$

Теорема. Для существенного спектра $\sigma_{\mathrm{ess}}(H(K))$ оператора $H(K)$ имеет место равенство $\sigma_{\mathrm{ess}}(H(K)) = \Lambda_K \cup [m_K; M_K]$.

Об одной краевой задаче для уравнения гиперболического типа

Расулов Х.Р.

Бухарский государственный университет, г. Бухара, Узбекистан

Рассмотрим уравнение

$$-(-y)^m U_{xx} + x^m U_{yy} + c(x,y)U = f(x,y,U), \qquad m = const > 0 \qquad (1)$$

где $c(x,y)$ и $f(x,y)$ заданные функции в конечной односвязной области Ω плоскости независимых переменных (x,y), ограниченной характеристиками $OC : x + y = 0,\ AC : x^p + (-y)^p = 1$ уравнения (1), выходящими из точек $O(0,0), A(1,0)$ и отрезком $J = OA$ прямой $y = 0$, $2p = m + 2$. Введем обозначения:

$$\Theta(x) = (\tfrac{x^p}{2})^{\frac{1}{q}} - i(\tfrac{x^p}{2})^{\frac{1}{q}},$$

$$F_{0x}^{-c}[a,b,c,x^k]f(x) = \tfrac{1}{\Gamma(c)}\int_0^x f(t)(x^k - t^k)^{c-1} F(a,b,c,\tfrac{x^k - t^k}{x^k}) k t^{k-1} dt,\ k > 0,$$

$$A_{0x}^1[f](x) = f(x) - \int_0^x f(t)\tfrac{t}{x}\tfrac{\partial}{\partial t} I_0[\tfrac{\lambda i}{q}\sqrt{x(x-t)}]dt.$$

Здесь, $\Theta(x)$ - аффикс точки пересечения характеристики уравнения (1), выходящей из точки $(x,0)$ с характеристикой ОС; F_{0x}^{-c} - интеграл обобщенного дробного порядка $c(c > 0)$ от функции $f(x)$, [1]; A_{0x}^1 - известный оператор, введенный в [2]; I_0 - модифицированная функция Бесселя первого рода.

Задача ВС. Найти функцию U(x, y) со следующими свойствами:

1) $U(x,y) \in C[\overline{\Omega}] \cap (C^1[\Omega \cap J])$, $\int_0^1 |\nu(x^{\frac{1}{q}})| [x(1-x)]^{-\beta} dx < \infty$;

2) $U(x,y)$ - регулярное в области Ω решение уравнения (1), удовлетворяющее краевым условиям $U(x,0) = \tau(x), x \in \overline{J}$, $A_{0x}^1\{x^p \frac{d}{dx^{2q}}(x^{2q})\frac{1}{(1-2\beta)} F_{0x}^{-c}[2\beta-1, \beta, \beta, x^{2q}](x^{2q})^{\frac{2\beta-1}{2}} U[\Theta(x)]\} = a(x)\nu(x) + b(x)$, $x \in J$, где $\tau(x), a(x), b(x)$ - заданные функции, $2\beta = \frac{m}{m+2}$, $\nu(x) = \lim\limits_{y\to 0} \frac{\partial U(x,y)}{\partial y}$.

В данном сообщении при определенных ограничениях на заданные функции доказана однозначная разрешимость задачи ВС. Отметим, что в силу обратимости операторов A_{0x}^1 и F_{0x}^{-c} из задачи ВС, как частный случай, следует первая задача Дарбу для уравнения (1).

[1] Хасанов А. Об одной задаче для уравнения $signy|y|^m U_{xx} + x^m U_{yy} = 0$. Известия АН УзССР, сер. физ.-мат. наук, 1982 г., N 2, с. 8-19.

[2] Бакиевич Н.И. Сингулярные задачи для уравнения $\eta^\alpha U_{\xi\xi} + U_{\eta\eta} - \mu^2 \eta^\alpha U = 0$ Известия вузов, сер. математика. 1964 г., N 2, с. 7-13.

Об обобщенном операторе Данкла

Рахимова А.И.

Башкирский государственный университет, г. Уфа, Россия

В математической физике широко применяются дифференциально-разностные операторы, к ним также относится обобщенный оператор Данкла [1], [2].

В пространстве целых функций $H(\mathbb{C})$ обобщенный оператор Данкла определяется по формуле:

$$\Lambda f(z) = \frac{d}{dz} f(z) + \frac{c}{z} \sum_{j=0}^{m-1} \alpha_j f(\alpha_j z), \ c \in \mathbb{R}_+, \ \alpha_j = e^{\frac{2\pi i j}{m}}, \ j = (0; m-1),$$

как частный случай при условии $m = 2$ получается оператор Данкла:

$$\Lambda_0 f(z) = \frac{d}{dz} f(z) + \frac{c}{z} f(z), \ c \in \mathbb{R}_+.$$

Оператор Λ отображает пространство $H(\mathbb{C})$ в пространство $H(\mathbb{C})$, то есть действие оператора на целую функцию дает целую функцию.

Теорема. Обобщенный оператор Данкла Λ сопряжен к оператору умножения на переменную $\frac{p(k)}{k} z$

$$\Lambda^* = \frac{p(k)}{k} z \cdot .$$

Теорема. Оператор Λ является оператором обобщенного дифференцирования Гельфонда-Леонтьева $D(f(z), g(z))$, порожденным функцией

$$g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{p(1)p(2)...p(k)},$$

где коэффициенты $p(k)$ имеют вид $p(k) = k + c\sum_{j=0}^{m-1} e^{\frac{2\pi i j(k+1)}{m}}$, $k \in \mathbb{N}$, то есть справедлива формула $\Lambda^n f(z) = D^n(f(z), g(z))$, $n \in \mathbb{N}$.

[1] Напалков В.В., Напалков В.В.(мл.) Операторы Данкла как операторы свертки // Доклады Академии наук. 2008. Т. 423. № 3. С. 300–302.

[2] Карамов И.И., Напалков В.В. Обобщенный оператор Данкла // Уфимский математический журнал. 2014. Т. 6. № 1. С. 59–68.

О движущихся примесях нелинейного уравнения Клейна-Гордона.

Салимов Р.К.,Екомасов Е.Г.

Башкирский государственный университет, г. Уфа, Россия

Обычно при рассмотрении уравнений Клейна-Гордона с различными неоднородностями или примесями, примеси считаются стационарными. Неоднородности или примеси в таких задачах моделируют различные дефекты, например для уравнения синус Гордона дефекты в магнитных материалах [1-3].

С более общей точки зрения было бы интересно рассмотреть систему подвижных неоднородностей, взаимодействующих с полем. Интерес к таким системам вызван тем, что на притягивающих неоднородностях возможны локализованные состояния. Если же подвижную притягивающую неоднородность достаточно сильно ускорить, то естественно предположить, что локализованное состояние поля не удержится на неоднородности. Если неоднородность имеет некоторую массу, то состояние примеси с локализованным на ней полем будет добавлять к этой массе некоторую эффективную поправку. Далее, в зависимости от величины ускорения таких неоднородностей можно предположить два состояния с двумя разными эффективными массами таких неоднородностей и переходы между этими состояниями.

$$H = H_{def} + H_u + H_{int} \tag{1}$$

Далее дифференцируя (1) по времени и приравнивая производную нулю, можно получить уравнения движения для поля и для частицы.

[1] A. M. Gumerov, E. G. Ekomasov, F. K. Zakir'yanov, R. V. Kudryavtsev, Comput. Math. Math. Phys., 54(3) (2014) 491–504.

[2] E. G. Ekomasov, A.M. Gumerov, R.V. Kudryavtsev, JETP Letters, 101(12) (2015) 835–839.

[3] E.G. Ekomasov, A. M. Gumerov, R. V. Kudryavtsev, Journal of Computational and Applied Mathematics, 312 (2017) 198–208.

Условная устойчивость решения обратной задачи интегро-дифференциального уравнения акустики

Сафаров Ж.Ш.

Ташкентский университет информационных технологий, г.Ташкент, Узбекистан

Рассматривается начально-краевая задача для интегро-дифференциального уравнения гиперболического типа

$$\frac{1}{c^2(z)}v_{tt} = \varrho_z - \frac{d\ln\rho(z)}{dz}R(z,t),\ z>0,\ t>0, \tag{1}$$

$$v\mid_{t\leq 0}\equiv 0,\ R(+0,t)=\delta'(t), \tag{2}$$

где $c(z)>0$ - скорость волны, $\rho(z)$ - плотность среды, $v(z,t)$ - акустическое давление; напряжение $R(z,t)$ связано с $v(z,t)$ по формуле

$$R(z,t)=v_z(z,t)+\int_0^t k(t-\tau)v_z(z,\tau)d\tau; \tag{3}$$

$\delta'(t)$ - производная дельта - функции Дирака. Обратная задача ставиться следующим образом: определить ядро $k(t),\ t>0$, входящее в (1) посредством (3), если относительно решения задачи известна информация

$$v(+0,t)=g(t),\ t>0. \tag{4}$$

В работе [1], доказана теорема о локальной однозначной разрешимости обратной задачи. Работа [2] посвящена глобальной однозначной разрешимости обратной задачи. Основным результатом данной работы является оценка устойчивости решения обратной задачи.

Пусть $K(h_0)$ множество функций $k(t)\in C^2[0,T]$, удовлетворяющих для $t\in[0,T]$ неравенству $\|k(t)\|_{C^2[0,T]}\leq h_0$ с фиксированной положительной постоянной h_0.

Теорема. Пусть $k^1(t) \in K(h_0)$ и $k^2(t) \in K(h_0)$ - два решения обратной задачи (1) - (4) с данными $g^1(t)$ и $g^2(t)$, соответственно. Тогда найдется такое положительное число $C = C(h_0, T)$, что справедлива оценка устойчивости

$$\|k^1(t) - k^2(t)\|_{C^2[0,T]} \leq C\|g^1(t) - g^2(t)\|_{C^2[0,T]}.$$

[1] Сафаров Ж.Ш. Дурдиев Д.К.Обратная задача для интегро-дифференциального уравнения акустики. *Дифференциальные уравнения*,2018,том 54,№1,с 136-144.

[2] Jurabek Sh. Safarov, Global solvability of the one-dimensional inverse problem for the integro-di?erential equation of acoustics, *J. Sib. Fed. Univ. Math. Phys.*, 2018, Volume 11, Issue 6, pp 753–763.

Возбуждение кинков в цепочке Клейна-Гордона при ударе в конец цепочки молекулой

Семенова М.Н. [1], Шарапов Е.А.[2], Корзникова Е.А.[3], Дмитриев С.В.[3]

[1]Политехнический институт (филиал) СВФУ в г. Мирном, Россия

[2] ООО Башнефть Полюс, г. Уфа, Россия

[3] Институт проблем сверхпластичности металлов РАН, г.Уфа, Россия

В настоящее время все большее значение для развития науки и техники приобретают различные методы высокоэнергетических воздействий, среди которых можно выделить большие пластические деформации, обработку токами высокой интенсивности, бомбардировку поверхности ионами и нейтронами. В ряде случаев такое воздействие может приводить к возникновению в структуре материала так называемых краудионов - дефектов пониженной размерности в плотноупакованных рядах кристаллической решетки. Особенность их заключается в том, что при достаточно высокой энергии формирования они обладают низким барьером миграции играя при этом важную роль в процессе массопереноса в материале. Ввиду того что движение краудионов происходит вдоль плотноупакованного атомного направления, данная задача является квазиодномерной и может быть успешно промоделирована с использованием известной модели цепочки Френкеля - Конторовой (цепочки Клейна-Гордона). В нашей работе данная модель была использована для изучения зарождения и распространения краудионов (антикинков).вызванных воздействием молекулы, состоящей из K атомов. Установлено, что молекулы с $1 < K < 10$ более эффективны в инициировании краудионов по сравнению с одним атомом ($K = 1$), потому что полная энергия, необходимая для инициирования краудиона по молекулой меньше. Это происходит потому, что один атом может инициировать только сильно локализованные быстро движущиеся краудионы, которые требуют относительно большой энергии. Молекула имеет конечную длину, и ввиду этого способна возбуждать более широкий кинк с меньшей скоростью и меньшей энергией. Наши результаты могут быть полезны для анализа атомистических механизмов массопереноса в кристаллах, подверженных атомной и молекулярной бомбардировке.

Благодарности: Работа поддержана грантом Российского фонда фундаментальных исследований № 18-32-20158.

О классификации инвариантных подмоделей ранга 2 идеальной гидродинамики

Сираева Д. Т.
ИМех УФИЦ РАН, г. Уфа, Россия

Рассматриваются уравнения идеальной гидродинамики [1]:

$$D\mathbf{u} + \rho^{-1}\nabla p = 0, \quad D\rho + \rho\,\mathrm{div}\mathbf{u} = 0, \quad Dp + \rho f_\rho \mathrm{div}\mathbf{u} = 0, \tag{1}$$

где $D = \partial_t + (\mathbf{u} \cdot \nabla)$ — оператор полного дифференцирования; $\nabla = \partial_{\vec{x}}$ — градиент по пространственным независимым переменным $\vec{x}$; $\vec{u}$ — вектор скорости; ρ — плотность; p — давление; t — время. Уравнение состояния имеет вид [1]

$$p = f(\rho) + h(S), \tag{2}$$

в силу которого последнее уравнение системы (1) может быть записано для энтропии

$$DS = 0.$$

Система (1) с учетом уравнения состояния (2) допускает двенадцатимерную алгебру Ли L_{12}. Оптимальная система неподобных подалгебр алгебры Ли L_{12} построена в работе [2].

С помощью двумерных подалгебр вычисляются инвариантные подмодели ранга 2 канонического вида, классифицирующиеся на подмодели эволюционного или стационарного типов [3], [4], [5].

Работа поддержана грантом РФФИ (№ 18-29-10071) и частично средствами государственного бюджета по госзаданию (№ 0246-2019-0052)

[1] Овсянников Л. В. Программа ПОДМОДЕЛИ. Газовая динамика // Прикладная математика и механика. Москва: РАН. 1994. Т. 58, вып. 4. С. 30–55.

[2] Сираева Д. Т. Оптимальная система неподобных подалгебр суммы двух идеалов // Уфимский математический журнал. 2014. Т. 6, вып 1. С. 94—107.

[3] Мамонтов Е. В. Инвариантные подмодели ранга два уравнений газовой динамики // Прикладная механика и техническая физика. 1999. Т. 40, вып. 2. С. 50–55.

[4] Хабиров С. В. Аналитические методы в газовой динамике. Уфа. БГУ. 2013. 224 с.

[5] Хабиров С. В. Приведение инвариантной подмодели газовой динамики к каноническому виду // Математические заметки. 1999. Т. 66, вып. 3. С. 439–444.

Задача Коши для линейных уравнений распределенного порядка в банаховых пространствах

Стрелецкая Е.М., Федоров В.Е.

Челябинский государственный университет, г.Челябинск, Россия

Пусть $\mathfrak{Z}$ — банахово пространство, $A \in \mathcal{L}(\mathfrak{Z})$, т. е. линейный и ограниченный оператор. Рассмотрим уравнение распределенного порядка [1]

$$\int_a^b \omega(\alpha) \mathrm{D}_t^\alpha z(t) d\alpha = Az(t),\ t \geq 0, \tag{1}$$

где $\mathrm{D}_t^\alpha z(t)$ — дробная производная Герасимова — Капуто, $0 \leq a < b$, $m-1 < b \leq m \in \mathbb{N}$, $\omega(\alpha) : [a,b] \to \mathbb{C}$, и задачу Коши

$$z^{(k)}(0) = z_k,\ k = 0, 1, ..., m-1 \tag{2}$$

для него. Решением задачи (1), (2) будем называть $z \in C(\overline{\mathbb{R}}_+; \mathfrak{Z})$, для которого существует $\int\limits_a^b \omega(\alpha)\mathrm{D}_t^\alpha z(t)d\alpha \in C(\overline{\mathbb{R}}_+; \mathfrak{Z})$ и выполняются равенства (1), (2).

Обозначим через $E(K, a; \mathfrak{Z})$ множество таких функций $z : \overline{\mathbb{R}}_+ \to \mathfrak{Z}$, что

$$\exists K > 0 \quad \exists a > 0 \quad \forall t \in \overline{\mathbb{R}}_+ \quad \|z(t)\|_{\mathfrak{Z}} \leq Ke^{at}.$$

Теорема 1 [1]. Пусть $A \in \mathcal{L}(\mathfrak{Z})$, $z_k \in \mathfrak{Z}$, $k = 0, 1, \dots, m-1$, и для некоторого $\beta > 1$ функции $W_a^b(\lambda)$, $W_k^b(\lambda)$, голоморфны на множестве $S_\beta := \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \geq \beta, \arg\lambda \in (-\pi, \pi)\}$ и удовлетворяют условиям

$$\exists C_1 > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall \lambda \in S_\beta \quad |W_a^b(\lambda)| \geq C_1 |\lambda|^{m-1+\delta},$$

$\exists C_2 > 0\, \forall k \in \{0, 1, \ldots, m-1\}\, \forall \lambda \in S_\beta\, |W_a^k(\lambda)||W_a^b(\lambda)|^{-1} \leq C_2|\lambda|^{k-m+1-\delta}$, $k = 0, 1, \ldots, m-1$. Тогда существует единственное решение задачи (1), (2) в пространстве $E(\mathfrak{Z})$.

[1] Fedorov V.E., Streletskaya E.M. Initial-value problems for linear distributed-order differential equations in Banach spaces // Electron. J. Differential Equations. 2018. Vol. 2018, no. 176. P. 1–17.

Потраекторная устойчивость динамических систем относительно шума

Султанов О.А.
Институт математики с ВЦ УФИЦ РАН, г.Уфа, Россия

Исследуется влияние постоянно действующего мультипликативного шума на устойчивость динамических систем. Предполагается, что исходная системы имеет локально устойчивое решение с подходящей функцией Ляпунова. Возмущенная система описывается с помощью стохастических дифференциальных уравнений Ито. Описываются ограничения на функцию интенсивности шума, при которых гарантируется сохранение устойчивости решения с вероятностью 1 [1].

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект №17-11-01004).

[1] О. А. Султанов, Об устойчивости почти наверное динамических систем относительно белого шума // Соврем. мат. и ее прил. Темат. обз., 152, 2018, 120–124.

Пятиэлектронных систем в модели Хаббарда. Второе дублетное состояние

Ташпулатов С.М.
ИЯФ АН РУз., г. Ташкент, Узбекистан; sadullatashpulatov@yandex.com

Рассматривается оператор энергии пятиэлектронных систем в модели Хаббарда и описывается структура существенного спектра и дискретный спектр системы для второго дублетного состояния. Гамильтониан рассматриваемой модели имеет вид

$$H = A \sum_{m,\gamma} a^+_{m,\gamma} a_{m,\gamma} + B \sum_{m,\tau,\gamma} a^+_{m+\tau,\gamma} a_{m,\gamma} + U \sum_{m} a^+_{m,\uparrow} a_{m,\uparrow} a^+_{m,\downarrow} a_{m,\downarrow}.$$

Здесь A,B,$U-$ параметры, τ означает сумми- рование по ближайшим соседям; $\gamma-$ спиновый индекс; $a^{+}_{m,\gamma}$ и $a_{m,\gamma}-$ операторы рождения и уничтожения электрона в узле $m \in Z^{\nu}$.

Гамильтониан H действует в антисимметрическом пространстве Фока $\mathcal{H}_{as}$. Пусть φ_0- вакуумный вектор в пространстве $\mathcal{H}_{as}$. Второе дублетное состояние соответствует базисные функции

$$^{2}d^{1/2}_{m,n,r,t,l\in Z^{\nu}} = a^{+}_{m,\downarrow}a^{+}_{n,\uparrow}a^{+}_{r,\downarrow} \times a^{+}_{t,\uparrow}a^{+}_{l,\uparrow}\varphi_0.$$

Пусть $^{2}\mathcal{H}^{d}_{1/2}$ подпространство, соответствующее второму дублетному состоянию. Через $^{2}H^{d}_{1/2}$ обозначим сужение оператора H на подпространство $^{2}\mathcal{H}^{d}_{1/2}$. Обозначим $\Lambda_1 = \lambda + \mu$, $\Lambda_2 = \gamma + \theta$.

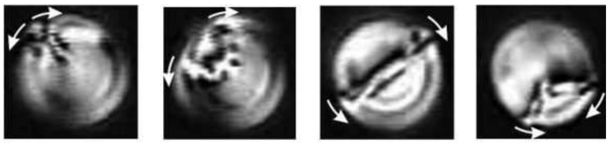
Теорема 1.*Если $\nu = 1$ и $U < 0$, тогда существенный спектр оператора $^{2}H^{d}_{1/2}$ системы во втором дублетном состоянии есть объединение семьи отрезков: $\sigma_{ess}(^{2}H^{d}_{1/2}) = [a+c+e, b+d+f] \cup [a+c+\widetilde{z}_3, b+d+\widetilde{z}_3] \cup [a+e+z_2, b+f+z_2] \cup [a+z_2+\widetilde{z}_3, b+z_2+\widetilde{z}_3] \cup [c+e+z_1, d+f+z_1] \cup [c+z_1+\widetilde{z}_3, d+z_1+\widetilde{z}_3] \cup [e+z_1+z_2, f+z_1+z_2]$. Дискретный спектр оператора $^{2}H^{d}_{1/2}$ состоит из не более одного точки. Здесь и далее $a = 2A - 4B\cos\frac{\Lambda_1}{2}$, $b = 2A + 4B\cos\frac{\Lambda_1}{2}$, $c = 2A - 4B\cos\frac{\Lambda_2}{2}$, $d = 2A + 4B\cos\frac{\Lambda_2}{2}$, $e = A - 2B$, $f = A+2B$, $z_1 = 2A-2\sqrt{U^2 + 4B^2\cos^2\frac{\Lambda_1}{2}}$, $z_2 = 2A-2\sqrt{U^2 + 4B^2\cos^2\frac{\Lambda_2}{2}}$, $\widetilde{z}_3 = A + 2\sqrt{U^2 + B^2}$. Если $z_1 + z_2 + \widetilde{z}_3 \notin \sigma_{ess}(^{2}H^{d}_{1/2})$, то существует единственное пятиэлектронное антисвязанное состояние, иначе дискретный спектр оператора $^{2}H^{d}_{1/2}$ пуст.*

Теорема 2.*Если $\nu = 1$ и $U > 0$, тогда существенный спектр оператора $^{2}H^{d}_{1/2}$ есть объединение семьи отрезков: $\sigma_{ess}(^{2}H^{d}_{1/2}) = [a+c+e, b+d+f] \cup [a+c+z_3, b+d+z_3] \cup [a+e+\widetilde{z}_2, b+f+\widetilde{z}_2] \cup [a+\widetilde{z}_2+z_3, b+\widetilde{z}_2+z_3] \cup [c+e+\widetilde{z}_1, d+f+\widetilde{z}_1] \cup [c+\widetilde{z}_1+z_3, d+\widetilde{z}_1+z_3] \cup [e+\widetilde{z}_1+\widetilde{z}_2, f+\widetilde{z}_1+\widetilde{z}_2]$. Дискретный спектр оператора $^{2}H^{d}_{1/2}$ состоит из не более одного точки. Здесь $\widetilde{z}_1 = 2A + 2\sqrt{U^2 + 4B^2\cos^2\frac{\Lambda_1}{2}}$, $\widetilde{z}_2 = 2A + 2\sqrt{U^2 + 4B^2\cos^2\frac{\Lambda_2}{2}}$, $z_3 = A-2\sqrt{U^2 + B^2}$. Если $\widetilde{z}_1+\widetilde{z}_2+z_3 \notin \sigma_{ess}(^{2}H^{d}_{1/2})$, то существует единственное пятиэлектронное антисвязанное состояние, иначе дискретный спектр оператора $^{2}H^{d}_{1/2}$ пуст.*

Динамика кольцевых ориентационных стенок – солитонов на поверхности капель слабого нематохолестерика в электрическом поле

Тимиров Ю.И., Басырова Е.Р., Скалдин О.А.
Институт физики молекул и кристаллов УФИЦ РАН, г.Уфа, Россия

В работе экспериментально исследована динамика ориентационных структур в каплях нематохолестерических жидких кристаллов диаметром $D < 50$ мкм с диапазоном шага спирали $240 > P > 72$ мкм в переменном электрическом поле. В представленном случае образуются сплюснутые капли, в которых реализуются периодические процессы рождения и схлопывания структурных ориентационных петель. На рис. 1 представлены капли, изображающие начальное состояние (рис. 1*а*) и рождение петли (рис. 1*б*), схлопывание (рис. 1*в*, рис. 1*г*) и обратный процесс.



(*а*) (*б*) (*в*) (*г*)

Рис. 1: Динамика дисклинационной линии в последовательные моменты времени для капли с $D = 46$ мкм и $P = 238$ мкм

Одним из главных факторов, определяющих появление такого рода петель во всем диапазоне концентраций холестерика, является диаметр капли, т.е. для всех капель с диаметром меньше 50 мкм являются именно процессы рождения и схлопывания петель на поверхности капель. Как описывалось в работе [1] в объеме капли развивается ЭГД неустойчивость с появлением электроконвективных вихрей, и динамика структурных превращений по существу зависит от соотношения размеров конвективных вихрей и радиуса капли. Если размер конвективного вихря незначительно отличается от радиуса капли, то мы имеем стационарную электроконвекцию и отсутствие динамики структурных изменений.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 18-32-00805 мол-а). В экспериментальных исследованиях использовалось оборудование ЦКП "Спектр" ИФМК УФИЦ РАН и РЦКП "Агидель"

[1] А.Н. Чувыров, А.П.Крехов, Ю.А.Лебедев, Ю.И. Тимиров. ЖЭТФ, 2016, Т.150, вып.5 (11), с. 1030-1040.

Задача со свободной границей для квазилинейного нагруженного параболического уравнения

Тураев К.Н.
Термезкий филиал Ташкентского государственного университета,
г.Термез, Узбекистан

В современной науке наблюдается повышенный интерес задачи для нагруженных параболических уравнений [1]. А задачи со свободной границей для нагруженного параболического уравнения относятся к категории малоизученных [2],[3].

В настоящей работе изучается нелокальная задача со свободной границей типа Флорина для нагруженного квазилинейного параболического уравнения.

Постановка задачи. Требуется найти пару функций $s(t), u(t,x)$, такую что непрерывно дифференцируемая функция $s(t)$ определена на отрезке $0 < t \leq T, s(0) = s_0 > 0, 0 < \dot{s}(t) \leq N$, а функция $u(t,x)$ в области $D = \{(t,x) : 0 < t \leq T, 0 < x < s(t)\}$ удовлетворяет уравнение

$$a(t,x,u_x)u_{xx}(t,x) - u_t(t,x) = cu(t,x_0), \quad (t,x) \in D \tag{1}$$

и следующим начальным и граничным условиям

$$u(0,x) = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq s_0, \tag{2}$$

$$u_x(t,0) = \psi_1(t), \quad 0 \leq t \leq T, \tag{3}$$

$$\alpha u(t,0) = u(t,s(t)), \quad 0 \leq t \leq T, \tag{4}$$

$$u_x(t,s(t)) = \psi_2(t), \quad 0 \leq t \leq T. \tag{5}$$

Исследование проводится по следующей схеме. Сначала задача сводится типа задача Стефана и доказывается их эквивалентность. Далее, устанавливается априорные оценки свободной границей и решений и их производных в норм Гельдера. На основе установленных оценок исследуется поведение свободной границы в рассматриваемом промежутке времени, доказывается единственности решения первоначальной задачи. И в итоге доказывается существование решения полученный и первоначальной задачи при помощи методом неподвижной точки Шаудера.

[1] Нагруженные уравнения и их применение.Москва: Наука, 2012, 232 с.

[2] Adrina C.,Briozzo.,Domingo A.,Tarzia. A one-phase Stefan problem for a non-classical heat equation with a heat flux condition on the fixed face. App.Math.and Com. 2006.No 182. P. 809–818.

[3] Adrina C.,Briozzo.,Domingo A.,Tarzia. Existence and uniqueness for one-phase Stefan problems of non-classical heat equations with temperature boundary condition at a fixed face. El. Jour. Differ. Eq. 2006. No 182. P. 1–16.

Нелинейная задача Флорина для квазилинейного уравнения диффузии с учетом нелинейной конвекции

Тураев Р.Н.

Институт математики АН РУз, г.Ташкент, Узбекистан

В современной науке наблюдается повышенный интерес к процессам, происходящим в нелинейных средах. Здесь можно указать задачи гидро- и газодинамики, физики плазмы, теории химических реакций и др. В настоящей работе изучается задача со свободной границей типа Флорина для квазилинейного параболического уравнения с учетом нелинейной конвекции.

Постановка задачи. Требуется найти на некотором отрезке $0 < t \leq T$ непрерывно дифференцируемую функцию $s(t)$, такую, что $s(0) = s_0 > 0$, $0 < \dot{s}(t) \leq N$, $s(t)-$удовлетворяет условию Гельдера, а функция $u(t,x)$ в области $D = \{(t,x) : 0 < t \leq T, 0 < x < s(t)\}$ удовлетворяет уравнению

$$u_t(t,x) = a(u_x)u_{xx}(t,x) + (b(u))_x, \quad (t,x) \in D \tag{1}$$

и следующим начальным и граничным условиям

$$u(0,x) = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq s_0, \tag{2}$$

$$u_x(t,0) = \psi(t), \quad 0 \leq t \leq T, \tag{3}$$

$$u(t,s(t)) = 0, \quad 0 \leq t \leq T, \tag{4}$$

$$u_x(t,s(t)) = p, \quad 0 \leq t \leq T. \tag{5}$$

В этой формулировке уравнения (1) $a(u_x)$ - представляет коэффициент диффузии, $b(u)$ - нелинейная конвективная функция потока, $b'(u)$ - можно рассматривать как нелинейную скорость [1]. Сначала задача (1)-(5) сводится типа задача Стефана и доказывается их эквивалентность. Затем устанавливаются некоторые априорные оценки для решений $s(t), u(t,x)$ и их производные в норм Гельдера. Далее, на основе установленных оценок исследуется поведение свободной границы в рассматриваемом промежутке времени, доказывается единственности решения первоначальной задачи, и далее доказывается глобальную разрешимость полученной задачи при помощи методом неподвижной точки Шаудера [2].

[1] Ren-Hu Wang a,b, Lei Wang a, Zhi-Cheng Wang.Free boundary problem of a reaction–diffusion equation with nonlinear convection term. J. Math. Anal. Appl. 467 (2018) 1233—1257.

[2] Тахиров Ж.О., Тураев Р.Н. Нелокальная задача Стефана для квазилинейного параболического уравнения. Вест.Самарского Гос.Тех.Универ.Сер."Физ.-мат.Науки".2012.No 26. С. 99–106.

Полуформальная нормализация простейших ростков двумерных голоморфных отображений седлового типа

Туров М.М.

Челябинский государственный университет, г.Челябинск, Россия

В работе рассматриваются ростки голоморфных отображений $F : (\mathbb{C}^2, 0) \to (\mathbb{C}^2, 0)$ вида

$$F(x, y) = (2x + \cdots, \frac{1}{2}y + \cdots). \tag{1}$$

Как обычно (см. [1]) два ростка F, G такого вида называются формально эквивалентными, если существует формальная замена координат H в $(\mathbb{C}^2, 0)$ переводящая росток F в росток G: $H \circ F = G \circ H$.

Росток отображения вида (1) является резонансным: произведение его мультипликаторов равно 1. По теореме Пуанкаре – Дюлака (см. [1]), такой росток формально эквивалентен так называемой предварительной формальной нормальной форме (ПФНФ): $F_0 : (x, y) \mapsto (xf(u), yg(u))$, $f(0) = 2, g(0) = \frac{1}{2}, u = xy$ - резонансный моном. Оказывается, соответствующая формальная нормализующая замена является "полуформальной" (т.е. формальной по "резонансной" переменной "u", и голоморфной по остальным):

Теорема. *Формальная нормализующая замена координат сопрягающая голоморфный росток вида* (1) *с некоторой его ПФНФ, представима в виде* $H(x, y) = (xH_1, yH_2)$, *где* $H_j(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} u^k(\alpha_k^j(x) + \beta_k^j(y))$, *коэффициенты* α_k^j, β_k^j *голоморфны в одном и том же круге, и удовлетворяют нормировочным условиям* $\alpha_0^1(0) = 1, \beta_0^2(0) = 1, \alpha_k^2(0) = 0, \beta_k^1(0) = 0, u = xy, j = 1, 2.$

Замечание 1. Полуформальность формальной нормализующей замены координат будет полезна при исследовании аналитической классификации ростков вида (1).

Замечание 2. Фактически, полуформальная нормализация ранее систематически использовалась (для векторных полей) уже в работе Дюлака [2].

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ 17-01-00739 А.

[1] Арнольд В.И. Геометрические методы в теории обыкновенных дифференциальных уравнений. 4-е изд. М.: МЦНМО, 2012. 384 с.

[2] Дюлак Г. О предельных циклах. М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1980, 160 с.

Законы сохранения для систем уравнений Рахматулина и Андерсона — Джексона двухфазной динамики

Федоров В.Е.

Челябинский государственный университет, г.Челябинск, Россия

Показано, что система уравнений Андерсона — Джексона [1]

$$\begin{array}{l}\rho_t + \rho_x u + \rho u_x = 0,\\ \sigma_t + \sigma_x v + \sigma v_x = 0,\\ u_t + u u_x + \rho^{-1}(1 - c\sigma)\left(P_\rho \rho_x + P_\sigma \sigma_x\right) + b\rho^{-1}\sigma(u - v) = 0,\\ v_t + v v_x + c\left(P_\rho \rho_x + P_\sigma \sigma_x\right) + \sigma^{-1}\left(Q_\rho \rho_x + Q_\sigma \sigma_x\right) - b(u - v) = 0\end{array} \qquad (1)$$

с функциями давления $P = P(\rho, \sigma)$, $Q = Q(\rho, \sigma)$, описывающая динамику газовзвеси при стоксовом обтекании частиц [2], является при условии непостоянства функции P нелинейно самосопряженной с подстановкой

$$R = A(tu - x) + Bu + C,\ S = A(tv - x) + Bv + D,\ U = At\rho + B\rho,\ V = At\sigma + B\sigma,$$

где R, S, U, V — сопряженные переменные к ρ, σ, u, v (см. [3]). Это позволило вычислить ряд законов сохранения системы уравнений (1). Показано, что полученные результаты справедливы также для системы (1) с $Q \equiv 0$, называемой системой уравнений Рахматулина [4].

Исследование выполнено при поддержке Министерства образования и науки РФ, задание No1.6462.2017/БЧ.

[1] Anderson T. B., Jackson R. Fluid mechanical description of fluidized beds. Equations of motion // Industrial & Engineering Chemistry Fundamentals. 1967. Vol. 6, no. 4. P. 527–539.

[2] Бедарев И. А., Федоров А. В. Структура и устойчивость ударной волны в газовзвеси с двумя давлениями // Вычислит. технологии. 2015. Т. 20, № 2. С. 3–19.

[3] Ibragimov N. H. Nonlinear self-adjointness in constructing conservation laws // Archives of ALGA. 2010–2011. Vol. 7/8. P. 1–99.

[4] Рахматулин Х. А. Основы газодинамики взаимопроникающих движений сжимаемых сред // Приклад. математика и механика. 1956. Т. 20, № 2. С. 184–195.

О распределение нулей голоморфных функций

Хабибуллин Б. Н., Меньшикова Э. Б., Хабибуллин Ф. Б.
Башкирский государственный университет, г. Уфа, Россия

Пусть M — действительная функция в подобласти $D \neq \varnothing$ комплексной плоскости $\mathbb{C}$ с частными производными первого порядка, удовлетворяющими локально равномерному условию Липшица, вследствие чего нормированный оператор Лапласа $\frac{1}{2\pi}\triangle M =: \mu_M$ можно интерпретировать как действительную борелевскую меру μ_M на D; последовательность точек $\mathsf{Z} = \{\mathsf{z}_\mathsf{k}\}_{\mathsf{k}=1,2,\dots} \subset \mathsf{D}$ не имеет точек сгущения внутри D.

Теорема о нулях ([1]–[4]). *Существование голоморфной функции f с последовательностью нулей в точности Z с учётом кратности и одновременным ограничением $|f| \leqslant \exp M$ на D эквивалентно условию*

[**Z**] *Существует число $C \geqslant 0$, относительно компактная подобласть $D_0 \subset D$ и компакт $K \subset D_0$, с которыми*

$$\sum_k v(\mathsf{z}_k) \leqslant \int_{D\setminus K} v \,\mathrm{d}\mu_M + C \tag{1}$$

для всех субгармонических функций v на $D\setminus K$ при $\sup_{D_0\setminus K} |v| \leq 1$, $v \geqslant 0$ в дополнении до D некоторого компакта из D и $\lim_{D\ni z\to\mathbb{C}\setminus D} v(z) = 0$.

Ряд результатов вида критериев о существовании голоморфной функции $f \neq 0$ с $|f| \leqslant \exp M$ на D и *обращающейся в нуль на* Z с учётом кратности в виде условия [**Z**] с (1), но уже с *дополнительным в* [**Z**] *условием* $v \geqslant 0$ на $D \setminus K$, получен в [3, теоремы 1–5 и следствия к ним].

Исследование выполнялось за счёт грантов РНФ, № 18-11-00002 — статьи [2]–[4], а также РФФИ, № 18-51-06002 — второй соавтор в [3].

[1] Хабибуллин Б. Н., Розит А. П. *К распределению нулевых множеств голоморфных функций* // Функц. анализ и его прил., **52**:1 (2018), 26–42.

[2] Меньшикова Э. Б., Хабибуллин Б. Н. *К распределению нулевых множеств голоморфных функций.* II // Функц. анализ и его прил., **53**:1 (2019), 84–87.

[3] Хабибуллин Б. Н., Хабибуллин Ф. Б. *К распределению нулевых множеств голоморфных функций.* III. *Теоремы обращения* // Функц. анализ и его прил., 2019 (принято к печати). https://arxiv.org/abs/1811.10393v1

[4] Меньшикова Э. Б., Хабибуллин Б. Н. *К распределению нулевых множеств голоморфных функций.* IV // Функц. анализ и его прил., 2019 (готовится к печати). https://arxiv.org/abs/1812.11716v1

Модели раскрытия плоских трещин

Хабиров С.В.
ИМех УФИЦ РАН, г.Уфа, Россия

При интенсивной закачке жидкости в добывающую скважину в пласте образуются трещины. Математическая модель образования трещин в полной постановке сложна. Она основана на упруго-пластической теории пласта, теории вязкой жидкости, теории фильтрации жидкости в пласте, теории краевых задач с подвижной границей. Есть два пути приближенного описания раскрытия трещин. Первый путь — решение упруго-пластической задачи с заданным давлением в трещине. Второй путь — решение задачи со свободной границей для вязкой жидкости в трещине, которую сжимает пласт по закону Гука. В основе второго пути лежит закон сохранения массы вдоль трещины, точные решения уравнений Навье-Стокса, законы фильтрации на границе, условия сильного разрыва на конце трещины, закон Гука упругой силы пласта.

Математические модели раскрытия трещин должны прогнозировать образование разветвленной сети трещин для интенсивного вытеснения полезных веществ.

В работе выводятся приближенные модели для плоскопараллельных вертикальных трещин второго пути.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ №18-29-10071 и госзадания 2046-2019-0052.

Исследование влияния жесткости опор на статическую устойчивость трубопровода

Хакимов А.Г.
ИМех УФИЦ РАН, г.Уфа, Россия

В гидроупругих системах одновременно происходит взаимодействие упругих и гидродинамических неустойчивостей. Внешние воздействия могут быть как независимыми друг от друга, так и связанными. В [1] получена формула, учитывающая осесимметричное расширение трубы и ее продольное укорочение, условия закрепления трубы на опорах, изменение температуры стенки трубопровода

$$P_{0cr} = P_E n^2 - p_{i0} F_i (1-\chi) + p_{e0} F + p_{e0} F_i (1-\chi) - \rho_i F_i U_i^2 - \beta T + \gamma W_n^2,$$

$$P_E = \frac{4\pi^2 D}{L^2}, \chi = \frac{2\nu}{1+\lambda}, \lambda = \frac{Eh}{CL}, \beta = \frac{2\pi\alpha EhR_i}{(1+\lambda)}, \gamma = \frac{\pi^3 EhR_i}{2(1+\lambda)L^2},$$
$$D = EJ,\ F_i = \pi R_i^2,\ \ F = \pi\left[(R_i+h)^2 - R_i^2\right],\ J = \pi\left[(R_i+h)^4 - R_i^4\right]\Big/4.$$

Здесь P_{0cr} - критическое значение сжимающей трубопровод силы, P_E - критическое значение статической продольной сжимающей силы на трубопровод (n=1), F_i - площадь сечения в свету трубопровода, R_i - внутренний радиус поперечного сечения трубопровода, h, F -толщина стенки и площадь поперечного сечения трубопровода, E, ρ - модуль упругости и плотность материала трубопровода, D, J - изгибная жесткость и момент инерции поперечного сечения трубопровода, ρ_i - плотность жидкости, ν - коэффициент Пуассона, α - коэффициент линейного теплового расширения, T - изменение температуры трубопровода, W_n - амплитуда малого отклонения, L - длина арки выброса, C - продольная жесткость опоры единичной дуги, давления внутри и вне трубопровода p_{i0}, p_{e0} и скорость U_i изменяются независимо друг от друга.

Изгибная жесткость трубопровода, растягивающие силы, внешнее гидростатическое давление, уменьшение температуры стенки трубопровода стабилизируют, а сжимающие силы, внутреннее гидростатическое давление, увеличение температуры стенки трубопровода, движение жидкости с любой скоростью внутри трубопровода дестабилизируют его.

С увеличением жесткости опор происходит увеличение влияния температуры и уменьшение влияния внутреннего давления на критическое значение сжимающей трубопровод силы.

Результаты получены при финансовой поддержке гранта РФФИ (№ 17-41-020400_р_а).

[1] Хакимов А.Г. Статическая устойчивость газопроводов // Экспозиция Нефть Газ. Март. № 1 (68). 2019. С. 48-52.

On the dynamics of a quasi-strictly non-Volterra quadratic stochastic operator

Khamraev A.Yu.
Karshi State University, Karshi city, Uzbekistan

For a quasi-strictly non-Volterra quadratic stochastic operator on the two-dimensional simplex found all fixed and periodic points. The description of the limit set of the trajectory for this operator is given. One of the main tasks in the study of a dynamic system is to study the evolution of the state of the system. Typically, the "descendants"of the state of the system are determined by some law. Quadratic stochastic operators were first introduced in the work of S. Bernshtein [1] and are used to solve problems arising in mathematical genetics ([1],[3]). The study of the asymptotic behavior of the trajectories of quadratic stochastic operators was first begun by S. Ulam. The theory of Volterra quadratic stochastic operators was developed based on the theories of Lyapunov function and tournaments. The notion of a strictly non-Volterra quadratic stochastic operator was introduced in [3]. The results of [3]-[4] show that the dynamics of strictly non-Volter operators is much richer than the dynamics of Voltaire operators. Therefore, every nevolter quadratic operator is a good example in the theory of nonlinear dynamical systems. In addition, the problem of a complete description of the behavior of the trajectories of quadratic stochastic operators has not been completely solved even in a two-dimensional simplex and remains an open problem to the present. It is for the class of non-Volterra quadratic stochastic operators that many questions remain open, and in this case a general theory has not yet been constructed. In this paper, we consider quadratic stochastic operators, which will be called quasi-strictly non-Volterra.

[1] Bernshtein S.N. Solution of a Mathematical Problem Related theory of inheritance. Uchenye zapiski nauch.-issledovan. Chairs of Ukraine. Mathematics, 1924, No1, 83-115.

[2] Devaney R.L. An introduction to chaotic dynamical systems, stud. Nonlinearity, Westview Press, Boulder, CO 2003.

[3] Jamilov U.U., Rozikov U.A. On the Dynamics of Strictly Non-Volter vadratic stochastic operators on a two-dimensional simplex. Mat. Sb., 009, T. 200, No9, 81-94.

[4] Jamilov U.U. On Symmetric Strictly non-Volterra Quadratic Stochastic Operators. Disc., Nonlin., and Comp., 2016. V.5, No3, 263-283.

О фазовых портретах одного семейства трёхмерных векторных полей с неизолированными особыми точками

Чиркова Е.А.

Челябинский Государственный Университет, г.Челябинск, Россия

В работах Ремизова [1, 2], связанных с особенностями геодезических потоков, исследовалось семейство векторных полей с неизолированными особыми точками: $\dot{x} = y, \dot{y} = py, \dot{p} = M(x, y, p)$, где функция M – кубический многочлен по p специального вида: $M = \alpha(x, y)(p^2 - x) - yp(\beta_1(x, y)p^2 + \beta_2(x, y)p + \beta_3(x, y))$, где $\alpha(0, 0) \neq 0$, $\beta_1(0, 0) \neq 0$, $\beta_2(0, 0) = \beta_3(0, 0) = 0$. В данной работе проведено исследование этого семейства в случае, когда многочлен M вырождается в квадратный: $\beta_1(0, 0) = 0$. В "разрешающих особенность" координатах ($u=\frac{x}{p^2}-1, v=\frac{y}{p^3}$) соответствующая система записывается в виде:

$$\begin{cases} \dot{u}=v-2\bar{\alpha}u-2vp^2(\bar{\beta_1}p^2+\bar{\beta_2}p+\bar{\beta_3})-2\bar{\alpha}u^2-2uvp^2(\bar{\beta_1}p^2+\bar{\beta_2}p+\bar{\beta_3}), \\ \dot{v}=v-3\bar{\alpha}uv-3v^2p^2(\bar{\beta_1}p^2+\bar{\beta_2}p+\bar{\beta_3}), \\ \dot{p}=\bar{\alpha}up+vp^3(\bar{\beta_1}p^2+\bar{\beta_2}p+\bar{\beta_3}), \end{cases}$$

где $\bar{\alpha}=\alpha((u+1)p^2,vp^3)$, $\bar{\beta_i}=\beta_i((u+1)p^2,vp^3), i=2,3$. Данная система имеет особые точки $(-1,0,0)$, $(\frac{1}{3\alpha_0},\frac{2}{3}+\frac{2}{9\alpha_0},0)$, $\alpha_0=\alpha(0,0)$ и неизолированные особые точки $(0,0,p_0)$, $p_0\in(\mathbb{R},0)$. Оказалось, что фазовый портрет системы существенно зависит от значения α_0.

Теорема.

1. При $\alpha_0\neq 0$ существуют две выделенные фазовые кривые (сепаратрисы), входящие в особую точку $(0,0,0)$. При проектировании $(x,y,p)\mapsto(x,y)$ (важном для приложений, см. [2]), одна из них переходит в полукубическую параболу, а другая – в точку $(0,0)$. При $\alpha_0=-\frac{1}{3}$ происходит бифуркация: сепаратрисы сливаются в одну.

2. При $\alpha_0<0$ существует однопараметрическое семейство фазовых кривых, входящих в особую точку $(0,0,0)$; "центральной" кривой этого семейства является одна из сепаратрис (при $\alpha_0<-\frac{1}{3}$ – одна, при $\alpha_0\in(-\frac{1}{3},0)$ – другая.)

[1] Павлова, Н.Г.;Ремизов, А.О. Полная классификация типичных особенностей геодезических потоков на 2-поверхностях с псевдоримановыми метриками / УМН, 72:3(435) (2017), 195–196; Russian Math. Surveys, 72:3 (2017), 577–579.

[2] Павлова, Н.Г.;Ремизов, А.О. Завершение классификации типичных особенностей геодезических потоков в метриках двух классов /Изв. РАН. Сер. матем., 83:1 (2019), 119–139.

Теорема о реализации функциональных модулей в одной задаче об аналитической классификации

Шайхуллина П.А.

Челябинский государственный университет, г.Челябинск, Россия

Росток голоморфного отображения $F:(\mathbb{C}^2,0)\to(\mathbb{C}^2,0)$ будем называть *полугиперболическим*, если один из его мультипликаторов равен единице, а второй — гиперболический. Например, росток $F_\lambda = \left(\frac{x}{x-1}, e^\lambda y\right)$ — полугиперболический.

Определение Два ростка F и $\tilde{F}$ будем называть строго аналитически (формально) эквивалентными, если существует голоморфная (формальная) локальная замена координат $H(x,y) = (x+o(x^2), y+o(x))$, $x \to 0$ их сопрягающая: $F \circ H = H \circ \tilde{F}$.

Обозначим $\mathbf{F}_\lambda$ — класс ростков, строго формально эквивалентных F_λ. Замену координат, сопрягающую росток $F \in \mathbf{F}_\lambda$ с F_λ будем называть *нормализующей*. Задача о строгой аналитической классификации ростков класса $\mathbf{F}_\lambda$ рассматривалась в работе [1]. Оказалось, что препятствием к аналитической нормализации ростка являются так называемые «функциональные инварианты». Один из способов их построения следующий. Проколотая окрестность начала координат покрывается секториальными областями. На каждой из них строится голоморфная нормализующая замена координат. Функции перехода полученного нормализующего атласа и доставляют искомые функциональные инварианты. В [1] было проведено исследование полученных функциональных инвариантов и показано, что каждому из них может быть поставлен в соответствие некоторый набор:

Определение Пространство $\mathbf{M}_\lambda$ всевозможных наборов $(A_{j,j+1}, B_{j,j+1}, C)$, где $j \in \mathbb{Z}_4$, $j = 2,3,4$, $A_{2,3} = A_{2,3}(t,\tau)$, $B_{2,3} = B_{2,3}(t,\tau)$ голоморфны в $(\mathbb{C}_*, 0) \times (\mathbb{C}, 0)$; $A_{3,4} = A_{3,4(\tau)}$, $B_{3,4} = B_{3,4}(t,\tau)$ голоморфны в $(\mathbb{C}, 0)$; $A_{4,1} = A_{4,1}(t,\tau)$, $B_{4,1} = B_{4,1}(t,\tau)$ голоморфны в $(\mathbb{C}^2, 0)$; $C \in \mathbb{C}$.

Теорема 1 ([1]) Любому ростку $F\mathbf{F}_\lambda$ можно поставить в соответствие набор $m_F \in \mathbf{M}_\lambda$ так, что два ростка строго аналитически эквивалентны тогда и только тогда когда их наборы совпадают.

Основным результатом настоящей работы является следующая

Теорема 2 Отображение $F \mapsto m_F$ — сюрьективно: $\forall m \in \mathbf{M}_\lambda$ существует $F \in \mathbf{F}_\lambda$ так, что $m = m_F$.

С учётом теоремы 1 это даёт полное решение задачи об аналитической классификации росток класса $\mathbf{F}_\lambda$.

Работа поддержана грантом РФФИ 17-01-00739А

[1] Шайхуллина П.А. Функциональные инварианты типичных ростков полугиперболических отображений, ЧФМЖ, 2017.

Пространственные нелинейные колебания трубопровода на подвижном основании при действии переменного внутреннего давления

Шакирьянов М.М.
ИМех УФИЦ РАН, г.Уфа, Россия

Рассматриваются пространственные колебания участка трубопровода на подвижном основании относительно горизонтальной оси, проходящей через опоры. Одна из опор жестко связана с основанием, а другая, прикрепленная к нему линейно-упругими элементами, может скользить в продольном направлении. Крепления трубы на опорах - шарнирные. Трубу, изогнутую собственным весом, весом и постоянным давлением заключенной в ней жидкости, отклоняют на небольшой угол от вертикали и в некоторый момент времени, сообщив начальную угловую скорость, отпускают. В этот же момент внутреннее давление в трубе становится переменным, а основание начинает совершать поступательные вертикальные колебательные движения. Деформации, связанные с выходом оси трубопровода из плоскости изгиба, предполагаются малыми. Поэтому используется математическая модель изгибно-вращательных движений трубопровода [1]. Учитываются взаимодействия внутреннего давления и изменения кривизны осевой линии, а также продольной и осевой деформаций трубы. Рассматривается первая форма колебаний. Применением процедуры Бубнова-Галеркина решение задачи сводится к интегрированию системы двух нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений изгибных и вращательных колебаний трубы. Задача Коши с заданными начальными условиями решается с помощью численного метода Рунге-Кутта. Приведена оценка влияния среднего давления в стальном трубопроводе на его пространственные колебания. Представлены графические зависимости пространственных колебаний, их фазовые картины, Фурье-спектры и отображения Пуанкаре. Дан их анализ.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (проекты №17-41-020400 -р-а, №18-01-00150) и средствами государственного бюджета по госзаданию на 2019-2022 годы (№ г.р. 0246-2019-0088).

[1] Ильгамов М.А.Колебания упругих оболочек, содержащих жидкость и газ. М: Наука. 1969. 180 с.

Научное издание

КОМПЛЕКСНЫЙ АНАЛИЗ, МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА И НЕЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Сборник тезисов
Международной научной конференции
(оз. Банное, 18 – 22 марта 2019 г.)

Лицензия на издательскую деятельность
ЛР № 021319 от 05.01.99 г.

Подписано в печать 15.03.2019 г. Формат 60х84/16.
Усл. печ. л. 4,95. Уч.-изд. л. 5,16.
Изд. № 15. Заказ 48.

Редакционно-издательский центр
Башкирского государственного университета
450076, РБ, г. Уфа, ул. Заки Валиди, 32.

Отпечатано на множительном участке
Башкирского государственного университета
450076, РБ, г. Уфа, ул. Заки Валиди, 32.