**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
БАШКИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
НИИ «ГАММЕТТ» УФИМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО АВИАЦИОННОГО
ТЕХНИЧЕСКОГО УНИВЕРСИТЕТА**

**НЕЙФЕЛЬД ЭРНСТ ГЕРГАРДОВИЧ:
ИЗБРАННЫЕ ТРУДЫ**

**У ф а
РИЦ БашГУ
2012**

УДК 517.9

Издание осуществлено при финансовой поддержке РФФИ (проект 12-01-06819-моб-г), при поддержке гранта правительства РФ по договору №11.G34.31.0042 и за счет внебюджетных средств БашГУ.

Редакционная коллегия:

канд. физ.-мат. наук, доцент **В.А. Юрьев**
(ответственный редактор);
канд. физ.-мат. наук, доцент **В.В. Картак**;
ст. преподаватель **А.В. Зеркина**.

Нейфельд Эрнст Гергардович: избранные труды. Материалы Международной школы-конференции для студентов, аспирантов и молодых ученых. Т.5. /отв. ред. В.А.Юрьев, В.В.Картак. – Уфа: РИЦ БашГУ, 2012. -149 с.

В сборнике представлены основные научные труды доцента кафедры высшей алгебры и геометрии Нейфельда Эрнста Гергардовича. Настоящее издание составлено на основе цикла лекций, прочитанных на международной школе-конференции для студентов, аспирантов и молодых ученых "Фундаментальная математика и ее приложения в естествознании". Том 5. Сборник приурочен к 80-летию со дня рождения Э.Г.Нейфельда.

УДК 517.9

© БашГУ, 2012 г.

Нейфельд Эрнст Гергардович

Нейфельд Эрнст Гергардович (21.12.1932—19.06.2008) начал работать на кафедре высшей алгебры и геометрии Башкирского государственного университета 1-го ноября 1963 г. в должности старшего преподавателя, после успешного окончания аспирантуры по кафедре геометрии Казанского государственного университета. Научным руководителем в аспирантуре у него был профессор Александр Петрович Норден (1904—1993г), который поставил перед ним задачу о метрике проективного пространства, с кубической поверхностью в качестве абсолюта. Это, так называемое пространство Аппеля, к геометрии которого Нейфельд Э.Г. неоднократно возвращался. Диссертация о метриках в пространстве Аппеля была блестяще защищена в 1963 году, после чего начались будни преподавательской работы в качестве ведущего лектора по основным геометрическим дисциплинам: аналитическая геометрия, многомерная геометрия линейного пространства, дифференциальная геометрия, топология (которую он не очень жаловал из-за отсутствия метрики). Его бывшие студенты рассказывают как оригинально он начал у них читать первую лекцию по дифференциальной геометрии: написал на доске полностью свои инициалы, перевёл с немецкого своё имя, отчество, «а кто такой Нейфельд вы узнаете на экзамене» добавил он. И надо сказать, что строгость приёма экзаменов он сохранил до последних лет своей работы. Однако если студент отвечал с пониманием материала, на оценки был щедр. Оценку «удовлетворительно» не любил ставить, говорил, что это та же двойка, только «подпольная». И всё же к возрастным студентам или к бывшим военнослужащим относился с пониманием, не вредничал. Лекции его были чёткие, просты и доступны любому уровню подготовки.

С февраля 1966 года он был избран на должность доцента кафедры, через год утверждён в звании доцента ВАК, и проработал в этом качестве до конца своих дней. Нельзя сказать, что ему закрывали карьерный рост. Несколько раз ему предлагали занять должность заведующего кафедрой; он вроде бы соглашался, но максимум через полгода с треском проваливал свою административную деятельность. Причём делал это сознательно: дерзил проректору по учебной работе, «не боролся с низкой успеваемостью», саботировал бумаготворчество и т.д. и т.п., и после очередного скандала с облегчением возвращался в должность рядового доцента кафедры.

Солидную долю в его научно-педагогической деятельности (он страшно не любил этот термин) составляла работа по подготовке и чтению

спецкурсов. Это давало ему выход на учеников, на живое с ними общение, на то, что называется «выговориться». Популяризация идей Клейна о связи геометрии с теорией групп, методов тензорного анализа, метод нормализации Нордена, линейчатая геометрия, пространства над алгебрами, теория непрерывных групп и связанных с ними алгебр Ли – вот основные разделы геометрии, откуда черпались темы дипломных а затем и кандидатских работ слушателей этих спецкурсов. В различные годы им подготовлено 6 кандидатов наук по геометрии. Сам он как-то не торопился оформлять свою докторскую диссертацию, хотя материала у него было достаточно: много работ он написал «в стол», часть раздал на дипломные работы. Когда спохватился, было уже поздно по возрасту. Студенты всех поколений его любили; выпускники отзываются о нём с большой теплотой. В общении со студентами и выпускниками всегда был прост и отзывчив.

В сборнике его работ отражены не все научные статьи, которые он публиковал обычно в трудах геометрического семинара Казанского университета, а лишь основные, значимые работы. Так например, в сборнике представлены лишь основные статьи из цикла его работ по многообразиям K -плоскостей. Также отражены его работы по пространствам над стандартными алгебрами, имеющие приложения в теории относительности. Всего им опубликовано, совместно с учениками, 30 работ, из которых 13 работ редакторы посчитали нужным собрать воедино, независимо от времени и объёма публикации, руководствуясь лишь важностью тематики.

В.А.Юрьев, А.В.Зеркина

Статьи Нейфельда Э.Г.

1. Э.Г.Нейфельд Геометрия конформно-аппелева пространства // Учёные записки Казанского государственного университета, 123:1 (1963), 128–140 Стр. 7-19
2. Э.Г.Нейфельд Аффинные связности на нормализованном многообразии плоскостей проективного пространства // Известия ВУЗов. Математика, 1976, № 11, 48–55 Стр.20-27
3. Э.Г.Нейфельд О внутренних геометриях многообразия нуль-плоскостей максимальной размерности поляритетов второго порядка // Труды геометрического семинара, 14 (1982), 50–54 Стр. 28-32
4. В.М.Бурдаков, Э.Г.Нейфельд О геометрии поверхностей симплектического и квазисимплектического пространств //Труды геометрического семинара, 15 (1983), 12–14 Стр.33-35
5. Э.Г.Нейфельд О геометриях, определяемых поляритетом в проективном пространстве над алгеброй // Труды геометрического семинара, 15 (1983), 64–66 Стр.36-38
6. Э.Г.Нейфельд Нормализованное семейство плоскостей и геометрия второго рода поверхности // Труды геометрического семинара, 16 (1984), 69–81 Стр.39-51
7. Э.Г.Нейфельд Конформные пространства над алгебрами // Труды геометрического семинара, 18 (1988), 43–57 Стр.52-66
8. Э.Г.Нейфельд Об инволюциях в комплексных пространствах //Труды геометрического семинара, 19 (1989), 71–82 Стр. 67-78
9. Э.Г.Нейфельд О внутренних геометриях нормализованного пенроузиана // Труды геометрического семинара, 20 (1990), 70–73 Стр.79-82
10. Э.Г.Нейфельд Нормализация комплексных грассманианов и квадрик // Труды геометрического семинара, 20 (1990), 58–69 Стр.83-94
11. Н.Д.Александров, Э.Г.Нейфельд, Е.В.Александрова Расслоения на присоединенные алгебры к гиперповерхностям в центроаффинном пространстве. I // Труды геометрического семинара, 21 (1991), 31–40 Стр.95-104
12. Э.Г.Нейфельд Двойственные кубические поляритеты и связанные с ними геометрии // Труды геометрического семинара, 22 (1994), 62–69 Стр.105-112

- 13 Э.Г.Нейфельд О внутренних геометриях
поляризованных комплексных грассманианов //
Известия ВУЗов. Математика. 1995. №5. 51-54 Стр. 113-116

Статьи, где упоминаются работы Нейфельда Э.Г.

1. . В.В. Колян, А.П. Норден Автокомпозиция Стр.117-144
гиперквадрики и нормализация Нейфельда
многообразия прямых //Известия ВУЗов. Математика,
1987, №8, 27–29
- 2 А.П.Норден, А.П.Широков Наследие Н.И. Лобачевского Стр.145-147
и деятельность казанских геометров // УМН, 48:2(290)
(1993), 47–74
- 3 Б.А.Розенфельд Теоретико-групповой смысл Стр.148-149
пространств Нейфельда // Известия ВУЗов. Математика,
1998, №6, 65–66

Э. Г. НЕЙФЕЛЬД

ГЕОМЕТРИЯ КОНФОРМНО-АППЕЛЕВА ПРОСТРАНСТВА

Геометрия пространства Аппеля Ap_3 рассматривается в работах П. Аппеля, Ж. Девима и М. Рошкулеца [1—3]. Аппель [1] ввел угловую метрику пространства, определив меру ориентированного угла с помощью пары действительных чисел.

Будем рассматривать пространство аффинной связности без кручения трех измерений или T_3 , в котором может быть определена мера угла между двумя направлениями в смысле Аппеля, причем эта мера угла сохраняется при параллельном переносе этих направлений вдоль произвольной кривой. Локальные пространства T_3 есть пространства Аппеля, а аффинная связность является типа метрической связности геометрии Вейля с той только разницей, что здесь мы имеем кубическую метрику. При этом обнаруживается глубокая аналогия геометрии T_3 с двумерной геометрией Вейля, подробно изученной А. П. Норденом [4]. Так же как и произвольное двумерное пространство Вейля может быть конформно отображено на плоскость Евклида, пространство T_3 может быть отображено на Ap_3 с сохранением угловой метрики, т. е. является *конформно-аппелевым* пространством.

В работе [5] была построена геометрия пространства Ap_3 , как геометрия эквиаффинного пространства, в котором задан инвариантный циклический аффиносор g_k^i ($i, j, k = 0, 1, 2$)

$$g_k^i g_l^k g_j^l = \delta_j^i. \quad (1)$$

Если аффиносор g_k^i — действительный, то имеем собственно пространство Аппеля или Ap_3^+ , если g_k^i — мнимый, то имеем псевдоаппелево пространство Ap_3^- [5]. Абсолют пространства Ap_3 есть три независимые точки, соответствующие собственным векторам I^i, I^i, J^i аффиносора g_k^i . Каждая точка

абсолюта определяет в Ap_3 связку параллельных сильно-изотропных прямых, каждая пара точек абсолюта — пучок параллельных сильно-изотропных плоскостей R_2 [5], внутренняя геометрия которых евклидова. Пучки сильно-изотропных плоскостей определяются ковекторами I_i, I_i^1, I_i^2 , образующие взаимный репер репера I^i, I^i, I^i .

Аффинор g_i^k можно заменить системой аффиноров

$$\begin{aligned} I_i I^k &= \frac{1}{3} (\delta_i^k + g_i^k + g_i^k), \\ e_i^k &= \frac{1}{3} (2\delta_i^k - g_i^k - g_i^k), \quad g_i^k = g_i^j g_j^k, \\ \epsilon_i^k &= \frac{1}{\iota\sqrt{3}} (g_i^k - g_i^k), \end{aligned} \quad (2)$$

где $\iota = 1$ в случае Ap_3^+ и $\iota = i$ в случае Ap_3^- . Эти аффиноры всегда действительны и несколько в другом виде введены М. Рошкулецом [3]. Аффинор e_i^k есть единичный аффинор сильно-изотропной плоскости пучка I_i , ϵ_i^k — оператор поворота на прямой в смысле Евклида угол в этой плоскости:

$$\epsilon_i^k \epsilon_j^i = \epsilon_j^k, \quad \epsilon_i^k \epsilon_j^i = -\iota^2 e_j^k. \quad (3)$$

Прямые, лежащие в сильно-изотропной плоскости и плоскости, проходящие через сильно-изотропную прямую, называются слабо-изотропными [5], их направляющие векторы (ковекторы) являются собственными аффинора e_i^k .

Метрика Ap_3 определяется с помощью тензоров

$$a_{ijk} = \frac{2}{\iota\sqrt{3}} e_{ilm} g_l^i g_j^m, \quad a^{ijk} = \frac{2}{\iota\sqrt{3}} e^{ilm} g_l^j g_m^k, \quad (4)$$

которые отличаются только множителем $\frac{2}{\iota\sqrt{3}}$ от тензоров, введенных в [5]. Легко видеть, что кубические формы, соответствующие тензорам (4) равны произведению трех линейных независимых форм, действительных в случае Ap_3^- и содержащие две мнимо-сопряженные формы в случае Ap_3^+ .

Тензоры a_{ijk} и a^{ijk} , а также тривекторы e_{ijk} и e^{ijk} взаимны в том смысле, что

$$a_{ijk} a^{ijl} = 2\delta_k^l, \quad e_{ijk} e^{ijl} = 2\delta_k^l. \quad (5)$$

Заменяя аффиноры g_i^k в (4) аффинорами (2), получим:

$$a_{ijk} = 3I_{(i} a_{jk)}, \quad a^{ijk} = 3I^{(i} a^{jk)}, \quad (6)$$

$$e_{ijk} = 3I_{[i} \epsilon_{jk]}, \quad e^{ijk} = 3I^{[i} \epsilon^{jk]}, \quad (7)$$

где a_{ij} — метрический тензор плоскостей R_2 пучка I_i , ε_{ij} — его дискриминантный бивектор, a^{ij} и ε^{ij} — соответственно или взаимные тензоры в R_2 ,

$$a^{ij}a_{ik} = e_k^j, \quad \varepsilon^{ik}\varepsilon_{ij} = \varepsilon^2 e_j^k. \quad (8)$$

§ 1. Связность пространства T_3

Пространство T_3 определим как пространство аффинной связности без кручения, в котором задано поле ковариантно-постоянного аффинора g_i^k :

$$g_i^k = g_i^k(x) \quad (1.1)$$

и

$$g_i^k = \delta_i^k. \quad (1.2)$$

Рассмотрим произвольную связность Γ_{ij}^k без кручения, относительно которой

$$\nabla_k g_i^j = 0. \quad (1.3)$$

Если связность Γ_{ij}^k существует, то по теореме А. П. Широкова [6] существует голономная система координат (x) , в которой аффинор g_i^k принимает постоянное значение. В (x) связность Γ_{ij}^k определяется с точностью трех произвольных векторных полей a_i, b_i, c_i :

$$\Gamma_{ij}^k = a_i \delta_j^k + \tilde{b}_i g_j^k + \tilde{c}_i g_j^k, \quad (1.4)$$

где

$$\tilde{b}_i = g_i^k b_k, \quad \tilde{c}_i = g_i^k c_k.$$

Определенная связность (1.4) есть, вообще говоря, связность с кручением, тензор которого равен:

$$S_{ij}^k = S_{[i} \delta_{j]}^k + \frac{1}{2} e_{ijm} a^{kmn} r_n, \quad (1.5)$$

где векторы S_i и r_i равны:

$$S_i = a_i - \frac{1}{2} b_i - \frac{1}{2} c_i, \quad (1.6)$$

$$r_i = -\frac{\sqrt{3}}{2} (b_i - c_i). \quad (1.7)$$

Для того, чтобы связность (1.4) была связностью без кручения, необходимо и достаточно, чтобы

$$a_i = b_i = c_i. \quad (1.8)$$

Таким образом, задание аффинора (1.1) определяет связность без кручения с точностью до произвольного векторного поля a_i :

$$\Gamma_{ij}^k = \overset{\circ}{\Gamma}_{ij}^k + a_i \delta_j^k + \tilde{a}_i g_j^k + \overset{\approx}{a}_i g_j^k, \quad (1.9)$$

где $\overset{\circ}{\Gamma}_{ij}^k$ — связность нулевой кривизны. Связность (1.9) аналогична связности двумерной геометрии Вейля [4, стр. 312], так как g_i^k есть аналог версора [5]. Полагая $a_i = \frac{2}{3} p_i$, можно привести (1.9) к виду:

$$\Gamma_{ij}^k = \overset{\circ}{\Gamma}_{ij}^k + p_i \delta_j^k + p_j \delta_i^k - a_{ijm} a^{klm} p_l. \quad (1.10)$$

Обозначим через e_{ijk} и e^{ijk} взаимные тривекторы пространства (5) и пронормируем их так, что в (x)

$$e_{123} = 1. \quad (1.11)$$

Очевидно, что

$$\nabla_l e_{ijk} = 3\omega_l e_{ijk}. \quad (1.12)$$

Определяя *основные* тензоры пространства по формулам (4), получим в силу (1.12) и (1.3):

$$\nabla_l a_{ijk} = 3\omega_l a_{ijk}, \quad \nabla_l a^{ijk} = -3\omega_l a^{ijk}. \quad (1.13)$$

Вектор ω_l естественно назвать дополнительным вектором тензора a_{ijk} . При перенормировании e_{ijk} и a_{ijk} :

$$\hat{e}_{ijk} = \lambda^3 e_{ijk}, \quad \hat{a}_{ijk} = \lambda^3 a_{ijk}$$

имеем

$$\overset{\wedge}{\omega}_i = \omega_i + \partial_i \ln \lambda. \quad (1.14)$$

В системе координат (x) при нормировании (1.11) $a_{ijk} = \text{const}$ и, следовательно,

$$\omega_i = -a_i.$$

Таким образом, задание тензорного поля (с точностью до множителя) a_{ijk} (3) и дополнительного вектора ω_i определяет связность (1.9) однозначно. Связность (1.9) назовем связностью пространства T_3 .

Мера угла между двумя направлениями в T_3 определяется по формуле

$$P(\varphi, \psi) = \frac{a_{ijk} v^i v^j w^k}{(a_{pqr} v^p v^q v^r)^{\frac{2}{3}} (a_{stx} w^s w^t w^x)^{\frac{1}{3}}} \quad (1.15)$$

и не зависит, следовательно, от нормирования тензора a_{ijk} . В силу (1.13) мера угла есть инвариант при параллельном

переносе направлений v^i и w^i . Если $\omega_i = \text{grad}$, то можно так пронормировать тензор a_{ijk} , что

$$\nabla_l a_{ijk} = 0 \quad (1.16)$$

и тензор a_{ijk} может быть приведен к виду

$$a_{ijk} = e^3 \int a_l du^l \circ a_{ijk}, \quad \dot{a}_{ijk} = \text{const.} \quad (1.17)$$

Пространство T_3 в этом случае назовем типа Римана и обозначим через T'_3 .

§ 2. Изотропные направления пространства T_3

Направление в точке T_3 называется сильно-изотропным, если оно удовлетворяет условию

$$a_{ijk} v^j v^k = 0. \quad (2.1)$$

Дифференцируя ковариантно, получим

$$a_{ijk} v^j \nabla_l v^k = 0,$$

откуда

$$\nabla_l v^i = \lambda_l v^i \quad (2.2)$$

и, следовательно, сильно-изотропные направления образуют поле абсолютно параллельных направлений. Обратно, если в некотором пространстве аффинной связности A_3 существуют три независимых поля абсолютно параллельных направлений v^i_1, v^i_2, v^i_3 таких, что

$$\nabla_k v^i_1 = \lambda_{k1} v^i_1, \quad \nabla_k v^i_2 = \lambda_{k2} v^i_2, \quad \nabla_k v^i_3 = \lambda_{k3} v^i_3,$$

то в этом случае можно построить тензор

$$a^{ijk} = (v^i_1 v^j_2 v^k_3),$$

для которого имеем:

$$\nabla_l a^{ijk} = (\lambda_{l1} + \lambda_{l2} + \lambda_{l3}) a^{ijk},$$

т. е. данная связность есть связность пространства T_3 .

Таким образом, связность T_3 характеризуется существованием трех независимых полей абсолютно параллельных направлений и если других направлений не существует, то они совпадают с сильно-изотропными направлениями угловой метрики пространства.

Сильно-изотропные ковекторы пространства образуют поля абсолютно параллельных площадок, которые являются голономными, так как из условия

$$\nabla_k \omega_i = \mu_k \omega_i$$

следует

$$e^{ikl} \omega_i \nabla_k \omega_l = 0.$$

Огибающие этого поля являются поверхностями, касательные плоскости которых сильно изотропны. Назовем эти поверхности *поверхностями расслоения* пространства. В T_3 имеется три однопараметрических семейств поверхностей расслоения, линии пересечения которых являются линиями тока абсолютно параллельных направлений. В T_3^- все поверхности расслоения действительны, в T_3^+ существует единственное семейство действительных поверхностей расслоения, соответствующие ковектору I_i ; два других семейства мнимо-сопряжены и пересекаются по действительным линиям тока вектора I^i . Поверхности расслоения являются вполне геодезическими, так как любой вектор поверхности расслоения слабо-изотропен и, следовательно, (ср. [2]),

$$v^i = e_k^i v^k.$$

Дифференцируя ковариантно, получим

$$\delta v^i = e_k^i v^k,$$

т. е. δv^i принадлежит поверхности.

Поверхности расслоения несут два поля абсолютно параллельных направлений, следовательно, внутренняя геометрия этих поверхностей есть геометрия Вейля [4, стр. 315].

§ 3. Строеие тензора кривизны

Тензор кривизны связности (1.9) легко получить, используя формулу преобразования тензора кривизны при преобразовании связности [4, стр. 132]. Учитывая, что тензор кривизны связности $\overset{\circ}{\Gamma}_{ij}^k$ равен нулю, получим

$$R_{kij}{}^l = 2\nabla_{[k} a_{i]} \delta_j^l + 2\nabla_{[k} \tilde{a}_{i]} g_j^l + 2\nabla_{[k} \tilde{a}_{i]} \tilde{g}_j^l \quad (3.1)$$

или

$$R_{kij}{}^l = 2p_{[ki]} \delta_j^l + 2p_{[k|j|} \delta_{i]}^l - 2p_{[k|m|} a_{i]jn} a^{lmn}, \quad (3.2)$$

где

$$p_{ki} = \nabla_k p_i, \quad p_i = \frac{3}{2} a_i.$$

Свертывая (3.2) по k и l , получим тензор Риччи

$$R_{ij} = -p_{[ij]} - a_{ijm} a^{mpq} p_{pq} \quad (3.3)$$

или окончательно

$$R_{ij} = -K^l a_{ijl} - i^2 Q^l e_{ijl}. \quad (3.4)$$

Векторы

$$K^i = a^{ilm} p_{lm}, \quad Q^i = e^{ijk} p_{jk} \quad (3.5)$$

назовем по аналогии с двумерной геометрией Вейля [4, стр. 326] *векторами кривизны и растяжения* пространства.

Тождественное обращение в нуль вектора Q^i характеризует пространства типа Римана T_3 ; обращение в нуль обоих векторов (3.5) есть необходимое и достаточное условие того, что пространство плоское, т. е. Ap_3 .

Очевидно, что векторные поля K^i и Q^i не произвольны, а удовлетворяют определенным условиям, которые являются следствиями тождеств Риччи и Бианки.

Прежде всего покажем, что тензор кривизны определяется заданием векторов K^i и Q^i и метрического тензора, т. е. определяется заданием тензора Риччи.

Обозначая через Q^i , Q_1^i и Q_2^i ротеры векторов p_i , $\tilde{p}_i$ и $\tilde{\tilde{p}}_i$, получим:

$$R_{kij}{}^l = \frac{3}{2} e_{kis} (Q^s \delta_j^l + Q_1^s g_j^l + Q_2^s g_j^l). \quad (3.6)$$

Применяя тождества Риччи и Бианки, получим условия, которым должны удовлетворять векторы Q^i , Q_1^i , Q_2^i :

$$Q^i + \tilde{Q}_1^i + \tilde{\tilde{Q}}_2^i = 0 \quad (3.7)$$

и

$$\nabla_k Q^k = -3\omega_k Q^k, \quad \nabla_k Q_1^k = -3\omega_k Q_1^k, \quad \nabla_k Q_2^k = -3\omega_k Q_2^k. \quad (3.8)$$

Заметим, что условия (3.7) и (3.8) не накладывают ограничений на вектор p_i .

Из (3.6), (3.7) и (3.4) следует

$$\tilde{Q}_1^i = -\frac{1}{2} Q^i + \frac{\sqrt{3}}{2} K^i, \quad \tilde{\tilde{Q}}_2^i = -\frac{1}{2} Q^i - \frac{\sqrt{3}}{2} K^i. \quad (3.9)$$

Подставляя (3.9) в (3.8) получим условия, накладываемые на векторное поле K^i .

В силу (3.9) можно представить тензор кривизны в виде:

$$R_{kij}{}^l = \frac{3}{2} e_{kjm} [Q^m \delta_j^l - Q^l \delta_j^m + a_{jns} a^{lmn} Q^s + K^s (a^{lmn} e_{sjn} + e^{lmn} a_{sjn})]. \quad (3.10)$$

§ 4. Конформное соответствие

Два пространства T_3 и T_3^v конформны между собой, если их основные тензоры отличаются только скалярным множителем. Пользуясь произволом в выборе этого мно-

жителя, можно считать, что эти тензоры равны. При условии

$$a_{ijk} = a_{ijk}^v$$

вектор

$$q_i = \omega_i - \omega_i^v \quad (4.1)$$

не меняется при совместном перенормировании основных тензоров; по аналогии с геометрией Вейля [4, стр. 166] будем называть его вектором конформного преобразования. При конформном соответствии аффинная связность (1.9) преобразуется по закону:

$$\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ij}^k + q_i \delta_i^k + q_j \delta_j^k - a_{ijl} a^{klm} q_m, \quad (4.2)$$

а преобразование тензора кривизны вполне определяют следующие соотношения:

$$K^i = K^i + a^{ijk} \nabla_j q_k, \quad Q^i = Q^i + e^{ijk} \nabla_j q_k. \quad (4.3)$$

Так как основной тензор a_{ijk} можно всегда преобразовать так, чтобы соответствующая ему кубическая форма имела в системе координат (x) постоянные коэффициенты [ср. (1.11)] и (3), то любое пространство T_3 можно конформно отобразить на пространство Аппеля Ap_3 . Отсюда также следует, что любые два T_3 конформны между собой.

Рассмотрим два вектора a^i и a^i в T_3 , образующие между собой угол (φ, ψ) и находящиеся в отношении ρ , так, что

$$a^i = \rho (\varphi, \psi)_k^i a^k, \quad (4.4)$$

где

$$(\varphi, \psi)_k^i = P \delta_k^i + Q g_k^i + R g_k^{2i},$$

есть А-версор пространства [5]; P, Q, R — функции Аппеля двух переменных φ и ψ . Переноса каждый вектор параллельно в связностях Γ_{ij}^k и Γ_{ij}^k соответственно вдоль некоторой кривой, т. е.

$$\delta a^i = \delta a^i = 0,$$

и учитывая (4.2), получим вдоль кривой

$$(d \ln \rho + q_i du^i) a^k + (d\varphi + \tilde{q}_i du^i) a^k + (d\psi + \tilde{\tilde{q}}_i du^i) a^k = 0.$$

Отсюда

$$q_i du^i = -d \ln \rho, \quad \tilde{q}_i du^i = -d\varphi, \quad \tilde{\tilde{q}}_i du^i = -d\psi. \quad (4.5)$$

Если пространство плоское и

$$q_i = \partial_i \ln \rho$$

есть градиент, то мы имеем конформное отображение Ap_3 на T_3 типа Римана. В случае, если два вектора из векторов q_i , $\tilde{q}_i$ и $\tilde{\tilde{q}}_i$ — градиенты, то из условий интегрируемости следует, что третий вектор — градиент, и мы имеем конформное отображение двух Ap_3 . В этом случае

$$\partial_i \ln \rho = \tilde{\partial}_i \tilde{\varphi} = \tilde{\tilde{\partial}}_i \tilde{\tilde{\varphi}}, \quad (4.6)$$

т. е. функции $\ln \rho$, $\tilde{\varphi}$, $\tilde{\tilde{\varphi}}$ есть три сопряженных решения уравнения Эмбера [2], так что функция трехмерной алгебры [3]

$$\rho e^{\theta\tilde{\varphi} + \theta^2\tilde{\tilde{\varphi}}}, \quad \theta^3 = 1$$

есть аналитическая функция.

С другой стороны, если x, y, z — канонические координаты [5] пространства Ap_3 , то произвольная аналитическая функция

$$\chi^v = f(\chi), \quad (4.7)$$

$$\chi = x + \theta y + \theta^2 z, \quad \chi^v = x^v + \theta y^v + \theta^2 z^v$$

осуществляет конформное отображение $\overset{v}{A}p_3$ на Ap_3 , при этом их линейные элементы находятся в зависимости:

$$ds^3 = |f'|^3 ds^3, \quad (4.8)$$

где $|f'| = \rho$ есть модуль производной функции f' . Легко видеть, что

$$\rho e^{\theta\tilde{\varphi} + \theta^2\tilde{\tilde{\varphi}}} = f'(x + \theta y + \theta^2 z). \quad (4.9)$$

Рассмотрим теперь конформное соответствие двух пространств типа Римана, основные тензоры которых пронормированы так, что они ковариантно-постоянны. Тогда:

$$\overset{v}{a}_{ijk} = e^{3\lambda} a_{ijk} \quad (4.10)$$

и

$$\overset{v}{\Gamma}_{ij}^k = \Gamma_{ij}^k + \lambda_i \delta_j^k + \tilde{\lambda}_i g_j^k + \tilde{\tilde{\lambda}}_i g_j^k, \quad \lambda_i = \partial_i \lambda. \quad (4.11)$$

Кривая в T_3' определена уравнением

$$x^i = x^i(s),$$

где s — натуральный параметр в смысле Аппеля. Вектор $t^i = \frac{dx^i}{ds}$ есть единичный вектор касательной; при конформ-

ном отображении T_3' на $\overset{v}{T}_3$:

$$\overset{v}{t}^i = e^{-\lambda} t^i. \quad (4.12)$$

Векторы t^i , $\tilde{t}^i$ и $\tilde{\tilde{t}}^i$ определяют в каждой точке кривой репер Аппеля, и мы имеем формулы Френе кривой в T_3 , аналогичные формулам Френе в Ap_3 [5]:

$$\frac{\delta t^i}{d} = k_1 \tilde{t}^i + k_2 \tilde{\tilde{t}}^i \quad (4.13)$$

и т. д., где k_1 и k_2 — кривизны кривой.

При конформном преобразовании:

$$k_1 = e^\lambda k_1^v - \tilde{\lambda}_i t^i, \quad k_2 = e^\lambda k_2^v - \tilde{\tilde{\lambda}}_i t^i. \quad (4.14)$$

Производные кривизн преобразуются по закону

$$\begin{aligned} \frac{dk_1}{ds} &= e^{2\lambda} \frac{dk_1^v}{ds} - (\nabla_j \lambda_i - \lambda_j \tilde{\lambda}_i) t^i t^j - \tilde{\tilde{\lambda}}_i t^i k_2 \\ \frac{dk_2}{ds} &= e^{2\lambda} \frac{dk_2^v}{ds} - (\nabla_j \lambda_i - \tilde{\lambda}_j \tilde{\lambda}_i) t^i t^j - \tilde{\lambda}_i t^i k_1. \end{aligned} \quad (4.15)$$

Из (4.14) и (4.15) следует, что величины

$$l_1 = \frac{dk_1}{ds} - \frac{1}{2} k_2^2, \quad l_2 = \frac{dk_2}{ds} - \frac{1}{2} k_1^2 \quad (4.16)$$

при конформном преобразовании преобразуются по закону:

$$l_1 = e^{2\lambda} l_1^v - g_i^k \lambda_{jk} t^i t^j, \quad l_2 = e^{2\lambda} l_2^v - g_i^k \tilde{\lambda}_{jk} t^i t^j, \quad (4.17)$$

где

$$\lambda_{ij} = \nabla_i \lambda_j - \frac{1}{2} (\lambda_i \lambda_j + \tilde{\lambda}_i \tilde{\lambda}_j + \tilde{\tilde{\lambda}}_i \tilde{\tilde{\lambda}}_j).$$

В случае, если оба пространства плоские, то конформное отображение задается функцией (4.7), сравнивая (4.8) и (4.10), имеем

$$\lambda = \ln |f'|$$

и

$$\varphi = \ln f' = \lambda + \theta \mu + \theta^2 \nu \quad (4.18)$$

есть аналитическая функция, а функции μ и ν есть сопряженные в смысле Эмбера функции λ :

$$\partial_i \mu = \tilde{\lambda}_i, \quad \partial_i \nu = \tilde{\tilde{\lambda}}_i,$$

так что

$$\begin{aligned} d\varphi &= (\lambda_i + \theta \tilde{\lambda}_i + \theta^2 \tilde{\tilde{\lambda}}_i) du^i \\ d^2\varphi &= (\nabla_j \lambda_i + \theta \nabla_j \tilde{\lambda}_i + \theta^2 \nabla_j \tilde{\tilde{\lambda}}_i) du^i du^j. \end{aligned} \quad (4.19)$$

Следуя А. П. Нордену [7, стр. 180], введем производную Шварца от функции $\overset{v}{\chi} = f(\chi)$:

$$\{\overset{v}{\chi}, \chi\} = \frac{f'''}{f'} - \frac{3}{2} \left(\frac{f''}{f'} \right)^2. \quad (4.20)$$

Из (4.18) следует, что

$$\{\overset{v}{\chi}, \chi\} = \varphi'' - \frac{1}{2} \varphi'^2.$$

Подставляя (4.19) получим

$$\{\overset{v}{\chi}, \chi\} dx^3 = \lambda_{ij} du^i du^j + \theta g_i^k \lambda_{jk} du^i du^j + \theta^2 g_i^k \lambda_{jk} du^i du^j. \quad (4.21)$$

Тождественное обращение в нуль производной Шварца характеризует дробно-линейную функцию

$$\overset{v}{\chi} = \frac{\alpha\chi + \beta}{\gamma\chi + \delta}. \quad (4.22)$$

Преобразование, соответствующее функции (4.22) образует девятичленную группу преобразований, которую назовем A -конформной.

При A — конформном преобразовании тензор

$$\lambda_{ij} \equiv 0.$$

Из (4.21) и (4.17) следует, что формы $l_1 ds^2$ и $l_2 ds^2$ инвариантны при A -конформном преобразовании. Эти формы являются аналогом параметра Либмана двумерной конформной геометрии кривой [7, стр. 181]. Обращение в нуль величин l_1 и l_2 определяет в Ap_3 класс кривых, преобразующиеся в себя при (4.22). Эти кривые являются аналогом окружностей двумерной конформной геометрии и определяются уравнениями

$$\frac{dk_1}{ds} - \frac{1}{2} k_2^2 = 0, \quad \frac{dk_2}{ds} - \frac{1}{2} k_1^2 = 0, \quad (4.23)$$

общее решение которых при $k_1 \neq k_2$ определяется с помощью эллиптических функций Вейерштрасса

$$k_1 = \frac{C}{\wp} (\wp' + 1), \quad k_2 = \frac{C}{\wp} (\wp' - 1), \quad (4.24)$$

где

$$\wp = \wp \left(Cs + C_1; 0, -\frac{1}{3} \right), \quad C, C_1 = \text{const},$$

причем первый интеграл системы (4.23) имеет вид:

$$k_1^3 - k_2^3 = 24C^3, \quad (4.25)$$

т. е. кривые имеют постоянный инвариант l [5].

Поверхность третьего порядка

$$a\overline{\chi}\overline{\chi}\overline{\chi} + a\overline{\chi}\overline{\chi} + \overline{\alpha}\overline{\chi}\overline{\chi} + \overline{\alpha}\overline{\chi}\overline{\chi} + \overline{\beta}\overline{\beta}\overline{\chi} + \overline{\beta}\overline{\beta}\overline{\chi} + \overline{\beta}\overline{\beta}\overline{\chi} + C = 0, \quad (4.26)$$

где χ , $\overline{\chi}$, $\overline{\chi}$ и т. д. сопряженные трехмерные алгебры

$$\chi = x + \theta y + \theta^2 z, \quad \overline{\chi} = x + \varepsilon \theta y + \varepsilon^2 \theta^2 z,$$

$$\overline{\chi} = x + \varepsilon^2 \theta y + \varepsilon \theta^2 z, \quad \varepsilon = \sqrt[3]{1},$$

а a и C действительные числа, при преобразовании (4.22) преобразуется в поверхность такого же типа. При $\alpha = \beta$ поверхность (4.26) есть A -сфера [5]. Будем называть поверхность (4.26) обобщенной A -сферой. Таким образом, при A -конформном преобразовании обобщенные A -сферы преобразуются в себя, при этом они могут вырождаться в некоторые поверхности второго порядка ($a = 0$) или плоскости.

Уравнение обобщенной A -сферы может быть приведено к виду:

$$a_{ijk}x^i x^j x^k + 3b_i x^i + C = 0 \quad (4.27)$$

или в канонических координатах:

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz + 3b_1 x + 3b_2 y + 3b_3 z + C = 0.$$

§ 5. Симметрические T_3

Пространство аффинной связности называется симметрическим, если

$$\nabla_m R_{kij}{}^l = 0. \quad (5.1)$$

Так как тензор кривизны T_3 определяется заданием тензора Риччи, то для того, чтобы пространство T_3 было симметрическим, необходимо и достаточно

$$\nabla_k R_{ij} = 0. \quad (5.2)$$

Отсюда в силу (3.4) следует

$$3\omega_l R_{ij} - \varepsilon^2 e_{ijs} \nabla_l Q^s - a_{ijs} \nabla_l K^s = 0,$$

т. е.

$$\nabla_l Q^i = -3\omega_l Q^i, \quad \nabla_l K^i = -3\omega_l K^i. \quad (5.3)$$

Таким образом, векторы Q^i и K^i образуют поля абсолютно-параллельных направлений и являются сильно-изотропными. Условия интегрируемости системы (5.3) имеют вид:

$$2Q^i Q^j - Q^i \tilde{Q}^j - Q^i \tilde{Q}^j = 0, \quad 2Q^i K^j - Q^i \tilde{K}^j - Q^i \tilde{K}^j = 0. \quad (5.4)$$

Очевидно, что векторы Q^i и K^i линейно-зависимы. Рассматривая только действительный случай, получим единственное условие интегрируемости,

$$2Q^i - Q^i_1 - Q^i_2 = 0. \quad (5.5)$$

Отсюда и из (3.9) следует, что векторы Q_1^i и Q_2^i сильно-изотропны. Полагая

$$Q^i = \lambda I^i, \quad K^i = \alpha I^i,$$

получим из (3.10)

$$R_{kij}{}^l = \iota^2 (\lambda \varepsilon_{ki} e_j^l + \alpha \varepsilon_{ki} \varepsilon_j^l), \quad \lambda, \alpha = \text{const} \quad (5.6)$$

и

$$\nabla_l I^i = -3\omega_l I^i.$$

Из (5.6) следует, что тензор кривизны симметрического T_3 имеет ранг два и

$$R_{kij}{}^l I^j = 0.$$

Симметрическое пространство T_3 типа Римана имеет абсолютно параллельное векторное поле I^i , линейный элемент этого пространства равен:

$$ds^3 = 3dx^\alpha d\sigma^2, \quad (5.7)$$

где $d\sigma$ — линейный элемент риманова двумерного пространства постоянной кривизны и является первой фундаментальной формой поверхностей расслоения.

Симметрические T_3 при $\alpha = 0$ имеют кососимметричный тензор Риччи, внутренняя геометрия поверхностей расслоения этих пространств квазиевклидова.

ЛИТЕРАТУРА

1. P. Appeli. Propositions d'Algèbre et de Géométrie de la considération des racines cubiques de l'unité. Comptes rendus Ac. d. Sc. Paris, 1877, t. 84, p. 540.
2. J. Devisme. Sur un espace quasi-eulidien à trois dimensions attaché à l'équation de M. P. Humbert. Comptes rendus Ac. d. Sc. Paris, 1932, t. 195, p. 1059.
3. M. Roşculeţ. O teorie a funcțiilor de o verabila hiperkomplexa în spațiul cu trei dimensiuni. Studii și cercetări mat., 1954, t. V, № 3/4, p. 361.
4. А. П. Норден. Пространства аффинной связности. ГИТТЛ, М.-Л., 1950.
5. Э. Г. Нейфельд. О геометрии пространства Аппеля. Сборник аспирантских работ (точные науки). Издательство Казанского университета, 1962, стр. 148—157.
6. А. П. Широков. Об одном свойстве ковариантно постоянных аффиноров. ДАН, 102, 1955, стр. 461—468.
7. А. П. Норден. Теория поверхностей, М., 1956.

УДК 513.015

Э. Г. Нейфельд

АФФИННЫЕ СВЯЗНОСТИ НА НОРМАЛИЗОВАННОМ МНОГООБРАЗИИ ПЛОСКОСТЕЙ ПРОЕКТИВНОГО ПРОСТРАНСТВА

Как известно, множество всех k -плоскостей n -мерного проективного пространства есть $(k+1)(n-k)$ -мерное дифференцируемое многообразие $P_{n,k}$, диффеоморфное поверхности Грассмана в $P^{\binom{n+1}{k+1}-1}$. В настоящей работе показывается, что заданием дифференцируемого соответствия между плоскостями из P_n и плоскостями дополнительной размерности $n-k-1$ в $P_{n,k}$ определяется аффинная связность. Это соответствие определяет нормализацию поверхности Грассмана в смысле А. П. Нордена; введенная связность является внутренней связностью нормализованной поверхности Грассмана. Изучаются свойства этой связности и доказывается, что при $k \leq n-k-1$ она будет проективно-евклидовой над алгеброй матриц $(k+1)$ -го порядка. В заключении рассматриваются аффинные связности на многообразии плоскостей неевклидовых и симплектических пространств.

§ 1. Нормализация многообразия плоскостей и введение связности

Многообразие $P_{n,k}$ назовем нормализованным, если каждой k -плоскости $P_k(\bar{x}_a)$, определенной базисными точками $\bar{x}_a$ и пробегающей в $P_{n,k}$ некоторую область, соответствует плоскость дополнительной размерности $P_{n-k-1}(\bar{y}_p)$, причем

$$P_k(\bar{x}_a) \cap P_{n-k-1}(\bar{y}_p) = \emptyset. \quad (1.1)$$

Это соответствие определяется уравнениями

$$\bar{x}_a = \bar{x}_a(u^i), \quad \bar{y}_p = \bar{y}_p(u^i); \quad a, b, c, d = \overline{0, k, p, q, 2, 1, \dots, n-k}, \quad (1.2)$$

где $\bar{x}_a, \bar{y}_p$ — дифференцируемые функции параметров u^i -локальных координат на $P_{n,k}$ ($i, j, k, l = \overline{1, (k+1)(n-k)}$). Эти функции определены с точностью до преобразования

$$\bar{x}_{a'} = A_{a'}^a \bar{x}_a, \quad \bar{y}_{p'} = B_{p'}^p \bar{y}_p, \quad (1.3)$$

матрицы которых

$$A = \|A_{a'}^a\|, \quad B = \|B_{p'}^p\|$$

не вырождены, их элементы — произвольные функции параметров. Так как $P_k(\bar{x}_a)$ пробегает некоторую область в $P_{n,k}$, то

$$\text{rang} \|\partial_i \bar{x}_a\| = (k+1)(n-k), \quad (1.4)$$

где $\bar{x}_a$ — однородные координаты точек $\bar{x}_a$, $\alpha = \overline{0, n}$.

Из (1.1) следует, что точки $\bar{x}_a$ и $\bar{y}_p$ независимы и образуют вершины репера в P_n . Дифференцируя функции (1.2), получим разложения

$$\begin{aligned} \partial_i \bar{x}_a &= l_{ia}^c \bar{x}_c + m_{ia}^p \bar{y}_p, \\ \partial_i \bar{y}_p &= l_{ip}^q \bar{y}_q + n_{ip}^a \bar{x}_a, \end{aligned} \quad (1.5)$$

которые назовем деривационными уравнениями нормализованного $P_{n,k}$.

При преобразовании (1.3) коэффициенты l_{ia}^c и l_{ip}^q преобразуются по закону

$$\begin{aligned} l_{ia'}^{c'} &= l_{ia}^c A_c^{c'} A_{a'}^a + A_c^{c'} \partial_i A_a^c, \\ l_{ip'}^{q'} &= l_{ip}^q B_q^{q'} B_{p'}^p + B_q^{q'} \partial_i B_p^q, \end{aligned} \quad (1.6)$$

поэтому их можно рассматривать как коэффициенты *связности в векторных расслоениях* γ_n^{k+1} и γ_n^{n-k} , базой которых будет $P_{n,k}$, а слои изоморфны векторным пространствам V_{k+1} и V_{n-k} соответственно. Заметим, что расслоение γ_n^{n-k} определено только в силу соответствия (1.2). При $k=0$ l_{ia}^c является нормализатором в смысле А. П. Нордена ([2], с. 200).

Величины m_{ia}^p , n_{ip}^a преобразуются как координаты тензоров. В силу (1.4) тензор m_{ia}^p невырожден и определяет биективное отображение касательного пространства к $P_{n,k}$ на слой $V_{k+1}^* \otimes V_{n-k}$ тензорного произведения расслоений γ_n^{k+1} и γ_n^{n-k} , поэтому в касательном расслоении, т. е. на $P_{n,k}$ индуцируется связность, которую назовем связностью 1-го рода нормализованного многообразия плоскостей. Ее коэффициенты однозначно определяются из уравнения

$$D_i^1 m_{ja}^p \stackrel{\text{def}}{=} \partial_i m_{ja}^p - \Gamma_{ij}^k m_{ka}^p - l_{ia}^c m_{jc}^p + l_{iq}^p m_{ja}^q = 0 \quad (1.7)$$

и равны

$$\Gamma_{ij}^k = (\partial_i m_{ja}^p - l_{ia}^c m_{jc}^p + l_{iq}^p m_{ja}^q) m_p^{ka},$$

где

$$m_p^{ka} m_{ia}^p = \delta_i^k, \quad m_p^{ka} m_{kb}^q = \delta_b^a \delta_p^q.$$

Условия интегрируемости уравнений (1.5) и (1.7) имеют вид

$$L_{ijb}^a = -2n_{[i|q|}^a m_{j]b}^p, \quad L_{ijq}^p = 2n_{[i|q|}^a m_{j]a}^p, \quad (1.8)$$

$$\Gamma_{(ij)}^k = 0, \quad (1.9)$$

$$R_{kij}^l = -L_{kia}^c m_{jc}^p m_p^{ka} + L_{kiq}^p m_{ja}^q m_p^{ka}, \quad (1.10)$$

где L_{ijb}^a , L_{ijq}^p и R_{kij}^1 — тензоры кривизны связностей с коэффициентами l_{ib}^a , l_{iq}^p и Γ_{ij}^k соответственно. Из (1.9) следует, что связность 1-го рода не имеет кручения.

§ 2. Матричные структуры на многообразии плоскостей

Введем аффиноры

$$\Delta_{jb}^{ia} = m_p^{ia} m_{jb}^p, \quad \tilde{\Delta}_{jq}^{ip} = m_q^{ia} m_{ja}^p. \quad (2.1)$$

Так как

$$\Delta_{kb}^{ia} \Delta_{jd}^{kc} = \delta_b^c \Delta_{jd}^{ia}, \quad \tilde{\Delta}_{kq}^{ip} \tilde{\Delta}_{js}^{kr} = \delta_s^r \tilde{\Delta}_{jq}^{ir},$$

то аффинор Δ_{jb}^{ia} ($\tilde{\Delta}_{jq}^{ip}$) определяет в касательном пространстве к $P_{n,k}$ структуру правого (левого) модуля над алгеброй матриц $(k+1)$ -го $((n-k)$ -го) порядка. Каждой матрице $H = \|h_a^b\|$ соответствует аффинор

$$\Delta_j^i(H) = \Delta_{jb}^{ia} h_a^b,$$

причем

$$\Delta_k^i(H) \Delta_j^k(K) = \Delta_j^i(KH).$$

Из (1.8) следует, что

$$D_k^1 \Delta_{jq}^{ia} = 0, \quad D_k^1 \tilde{\Delta}_{jq}^{ip} = 0,$$

т. е. структурные аффиноры (2.1) ковариантно постоянны в обобщенном смысле.

Рассмотрим теперь тензор с матричными координатами

$$P_{ij} = \|p_{ijb}^a\|, \quad p_{ijb}^a = n_{ip}^a m_{jb}^p. \quad (2.2)$$

Двойное отношение W ([3], с. 384) плоскостей $P_k(\bar{x}_a)$, $P_{n-k-1}(\bar{y}_p)$ и бесконечно близких к ним плоскостей равно с точностью до бесконечно малых 2-порядка $W = E + P_{ij} du^i u^j$. Из (1.10) и (2.2) следует, что

$$R_{kij}^1 = 2tr(P_{[k]i} \Delta_j^i + P_{[k]j} \Delta_i^i), \quad \Delta_i^i = \|\Delta_{jb}^{ia}\|. \quad (2.3)$$

При $k=0$ это будет тензором кривизны проективно-евклидовой связности ([2], с. 215).

Так как касательное пространство обладает структурой правого модуля, то каждому вектору v^i соответствует при $k \leq n-k-1$ и $\text{rang} \|m_{iq}^p v^i\| = k+1$, $(k+1)^2$ -мерное *присоединенное* подпространство, линейная оболочка векторов $\Delta_{jb}^{ia} v^j$.

Вектор v^i переносится вдоль кривой $\gamma \subset P_{n,k}$ *субпараллельно*, если его абсолютный дифференциал принадлежит присоединенному подпространству для всех точек кривой, т. е. $\delta v^i = \Delta_j^i(F) v^j dt$, где $F = \|f_a^b\|$ — произвольная матричная функция параметра кривой.

В пространстве P_n вектору v^i соответствует система $k+1$ точек

$$\bar{v}_a = m_{ia}^p \bar{y}_p v^i, \quad (2.4)$$

независимых в общем случае и определяющих нормальную k -плоскость $P_k(\bar{v}_a) \subset P_{n-k-1}(\bar{y}_p)$. При субпараллельном перенесении вектора v^i вдоль кривой точки (2.4) испытывают смещение

$$\begin{aligned} d\bar{v}_a &= \psi_a^c \bar{v}_c + \varphi_a^c \bar{x}_c, \\ \psi_a^c &= l_{ia}^c du^i + f_a^c dt, \quad \varphi_a^c = p_{ija}^c du^i v^j. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Следовательно, смещенная нормальная плоскость принадлежит

$$P_{2k+1} = P_k(\bar{x}_a) \oplus P_k(\bar{v}_a). \quad (2.6)$$

Кривую $\gamma \subset P_{n,k}$, касательный вектор которой переносится субпараллельно, назовем *субгеодезической*. Очевидно, что геодезические линии являются частным случаем субгеодезических.

Из (2.5) следует, что всякая субгеодезическая, проходящая через данную точку $P_{n,k}$ в направлении вектора v^i , определяет в P_n однопараметрическое семейство k -плоскостей, содержащее $P_x(\bar{x}_a)$ и целиком лежащее в плоскости (2.6). Так как множество всех P_k в P_{2k+1} образует матричную прямую на $P_{n,k}$ (само $P_{n,k}$ при $n = km + k + m$ является m -мерным проективным пространством над алгеброй матриц $(k+1)$ -го порядка [4]), то любая субгеодезическая, проходящая через данную точку в данном направлении, принадлежит матричной прямой, проходящей через $P_k(\bar{x}_a)$ и ее нормальную плоскость $P_k(\bar{v}_a)$. Обратно, если однопараметрическое семейство принадлежит некоторой $(2k+1)$ -плоскости, то ему соответствует на $P_{n,k}$ субгеодезическая линия.

При преобразовании нормализации

$$\bar{y}_p = \bar{y}_p + P_p^a \bar{x}_a, \quad P_p^a = P_p^a(u^i)$$

тензор m_{ia}^p , а следовательно, и структурные аффиноры (2.1), не меняются. Коэффициенты связностей преобразуются по закону

$$\begin{aligned} {}'l_{ia}^b &= l_{ia}^b - P_p^b m_{ia}^q, \\ {}'l_{ip}^q &= l_{ip}^q + P_p^a m_{ia}^q \end{aligned} \quad (2.7)$$

и

$${}'\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ij}^k + 2tr P_i \Delta_j^k, \quad P_i = \|P_{ib}^a\|, \quad P_{ib}^a = m_{ib}^q P_q^a. \quad (2.8)$$

Из (2.7) следует, что при преобразовании нормализации субгеодезические линии переходят в субгеодезические. Поэтому преобразование (2.8) назовем субгеодезическим преобразованием связности.

Если в P_n всем k -плоскостям соответствует одна и та же плоскость $P_{n-k-1}(\bar{y}_p)$, то тензоры n_{ia}^p из (2.2) равны нулю. Следовательно, связность 1-го рода имеет нулевую кривизну. Так как

любая связность на нормализованном многообразии k -плоскостей может быть получена субгеодезическим преобразованием связности нулевой кривизны и при этом сохраняются матричные прямые, то связность 1-го рода будет проективно-евклидовой над алгеброй матриц $(k+1)$ -го порядка.

§ 3. Нормализация поверхности Грассмана

При перенесении Грассмана ([5], с. 341) многообразию $P_{n,k}$ взаимно однозначно отображается на поверхность Грассмана в $P_{(k+1)-1}^{(n+1)}$, точки которой определяются простым $(k+1)$ -псевдовекторами

$$\bar{X} = \frac{1}{(k+1)!} e^{a_0 \dots a_k} \bar{x}_{a_0} \wedge \dots \wedge \bar{x}_{a_k}, \quad (3.1)$$

где x_a — базисные точки P_k .

Многообразию $P_{n, n-k-1}$ соответствует в $P_{(k+1)-1}^{(n+1)}$ семейство гиперплоскостей, определенное простыми $(k+1)$ -псевдовекторами

$$\bar{\Xi} = \frac{1}{(k+1)!} e^{a_0 \dots a_k} \bar{\xi}^{a_0} \wedge \dots \wedge \bar{\xi}^{a_k}$$

(гиперплоскости $\bar{\xi}^a$ образуют k -связку с характеристическим многообразием $P_{n-k-1}(\bar{y}_p)$. Здесь $e_{a_0 \dots a_k}$ и $e^{a_0 \dots a_k}$ — пара произвольных, отличных от нуля взаимных $(k+1)$ -вектора пространства V_{k+1} .

Вершины x_a, y_p проективного репера в P_n определяют вершины проективного репера в $P_{(k+1)-1}^{(n+1)}$, соответствующие $(k+1)$ -псевдовекторам

$$\bar{X}_{p_1 \dots p_j}^{a_1 \dots a_j} = \frac{1}{(k-s+1)!} e^{c_0 \dots c_{k-s} a_1 \dots a_s} \bar{x}_{c_0} \wedge \dots \wedge \bar{x}_{c_{k-s}} \wedge \bar{y}_{p_1} \wedge \dots \wedge \bar{y}_{p_j}, \quad (3.2)$$

$$s = 0, 1, \dots, k+1,$$

из которых все, кроме первой, лежат в гиперплоскости $\bar{\Xi}$ [6].

Покажем, что задание соответствия (1.2) определяет нормализацию поверхности Грассмана в смысле А. П. Нордена ([2], с. 198). Касательная плоскость в точке $\bar{X}$ пересекает гиперплоскость его нормали 2-го рода.

Дифференцируя обе части равенства (3.1), получим в силу (3.2) и (1.5) $\partial_i \bar{X} = l_i \bar{X} + \bar{Y}_i$, где

$$l_i = l_{ia}^a, \quad \bar{Y}_i = m_{ia}^p \bar{X}_p^a.$$

Таким образом, $(k+1)$ -псевдовекторы $\bar{X}_p^a$ являются опорными точками нормали 2-го рода, а l_i есть нормализатор ([2], с. 200). Нормаль 1-го рода проходит через точки $\bar{X}$ и $\bar{X}_{p_1 \dots p_s}^{a_1 \dots a_j}$ ($s=2, \dots, k+1$).

Дифференцируя обе части равенств (3.2), получим

$$D_i \bar{X}_{p_1 \dots p_j}^{a_1 \dots a_j} = l_i \bar{X}_{p_1 \dots p_j}^{a_1 \dots a_j} + s^2 n_{i[p_1}^{[a_1} X_{p_2 \dots p_s]}^{a_2 \dots a_s]} + m_{ia}^p \bar{X}_{pp_1 \dots p_j}^{aa_1 \dots a_j} \quad (s=1, \dots, k),$$

$$D_i \bar{X}_{p_0 \dots p_n}^{a_0 \dots a_n} = l_i X_{p_0 \dots p_k}^{a_0 \dots a_k} + (k+1)^2 n_{i|p_0}^{[a_0} X_{p_1 \dots p_s]}^{a_1 \dots a_s]} \quad (3.3)$$

Из (3.3) и (1.7) следует

$$\nabla_i^1 \bar{Y}_j = l_i \bar{Y}_j + p_{ij} \bar{X} + \gamma_{ij}^{pq} \bar{X}_{pq}^{ab} \quad (3.4)$$

где ∇_i^1 есть символ ковариантной производной относительно связности 1-го рода,

$$p_{ij} = p_{ija}^a, \quad \gamma_{ij}^{pq} = m_i^{[p} m_j^{q]} \quad (3.5)$$

Следовательно, связность 1-го рода совпадает с внутренней связностью ([2], с. 198) нормализованной поверхности Грассмана. В силу (3.4) нормальная точка в $P_{\binom{n+1}{k+1}-1}$

$$\bar{V} = v^i \bar{Y}_i$$

направления v^i , переносимого параллельно вдоль некоторой кривой поверхности Грассмана, смещается в плоскости, пересекающей нормаль 1-го рода ([2], с. 202) и принадлежащей соприкасающейся плоскости 2-го порядка поверхности Грассмана [6], переходящей через точки $\bar{X}$, $\bar{X}_p^a$, $\bar{X}_{pq}^{ab}$.

§ 4. Полярная нормализация

Если плоскость $P_{n-k-1}(\bar{y}_p)$, определенная соответствием (1.2), так же зависит от $(k+1)(n-k)$ существенных параметров, то тензор n_{ip}^a невырожден и на нормализованном $P_{n,k}$ определяется аффинная связность 2-го рода, коэффициенты которой однозначно находятся из уравнения

$$D_i^2 n_{jp}^a = 0.$$

Легко видеть, что связности 1-го и 2-го рода обобщенно сопряжены ([2], с. 218) относительно тензора p_{ij}

$$\nabla_k p_{(i)j} = 0, \quad (4.1)$$

кроме этого выполняется еще одно условие типа сопряженности

$$D_k p_{(i)j}^a = 0. \quad (4.2)$$

Покажем теперь, что в случае полярно нормализованного многообразия k -плоскостей связности 1-го и 2-го родов совпадают.

Полярная нормализация $P_{n,k}$ определяется заданием в P_n невырожденного поляритета, определенного с помощью псевдотензора $a_{\alpha\beta} = \sigma a_{\beta\alpha}$, $\sigma = \pm 1$, $\det \|a_{\alpha\beta}\| \neq 0$.

Если $\sigma = 1$, то поляритет определен гиперквадрикой

$$a_{\alpha\beta} x^\alpha x^\beta = 0; \quad (4.3)$$

при $\sigma = -1$ поляритет косо́й и определяется заданием линейного комплекса прямых

$$a_{\alpha\beta} p^{\alpha\beta} = 0, \quad (4.4)$$

где $p^{\alpha\beta}$ — грассмановы координаты прямой. В последнем случае необходимо, в силу невырожденности, чтобы размерность пространства была нечетной.

Если плоскость $P_k(\bar{x}_a)$ не касается гиперквадрики (4.3) ($\sigma = 1$) или не содержит прямых комплекса (4.4) ($\sigma = -1$), то она не пересекает свою полярю $P_{n-k-1}(\bar{y}_p)$. В последнем случае необходимо также, чтобы k было нечетным. В этом случае тензоры $a_{ab} = a_{\alpha\beta} x_a^\alpha x_b^\beta$, $a_{pq} = a_{\alpha\beta} y_p^\alpha y_q^\beta$ невырождены и $a_{\alpha\beta} x_a^\alpha y_p^\beta = 0$. Дифференцируя обе части последних равенств получим $D_i a_{ab} = 0$, $D_i a_{pq} = 0$, и $m_{ia}^r a_{rp} + n_{ip}^b a_{ab} = 0$. Отсюда, дифференцируя получим

$$\Gamma_{ij}^k m_{ka}^r a_{rp} + \Gamma_{ij}^k n_{kp}^b a_{ab} = 0, \quad \Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ij}^k.$$

Из (4.1) следует, что связность полярно нормализованного $P_{n,k}$ будет римановой с метрическим тензором

$$g_{ij} = -p_{ij} = a_{pq} a^{ab} m_{ia}^p m_{jb}^q, \quad (a^{ab} a_{ac} = \delta_c^b).$$

Тензор с матричными координатами

$$G_{ij} = -P_{ij} \quad (4.5)$$

определяет матричную квадратичную форму

$$d\Phi^2 = G_{ij} du^i du^j,$$

которая в силу (2.6) определяет инвариант двух бесконечно-близких k -плоскостей полярно-нормализованного пространства. Легко видеть, что в случае $\sigma = 1$ собственные значения формы $d\Phi$ будут стационарными расстояниями между этими плоскостями ([7], с. с.67, 148, 219). Тензор (4.5) удовлетворяет также условию $G_{ji}^* = G_{ji}$, или в координатах $G_{ij}^{*a} = G_{jib}^a$, $\check{G}_{ijb}^a = a^{ac} a_{bd} G_{ijc}^d$.

Из (4.2) следует $D_k G_{ij}^a = 0$, или $\nabla_k G_{ij} = G_{ij} L_k - L_k G_{ij}$, $L_k = \|l_{kb}^a\|$.

Таким образом, связность на полярно нормализованном многообразии k -плоскостей можно рассматривать как матричную связность Вейля, в которой G_{ij} — основной, а L_k — дополнительный тензор.

В случае, когда $k = 1$ и форма (4.3) положительно определена, т. е. для прямых эллиптического пространства, определяя пару мнимо-сопряженных точек $\vec{X}$ и $\bar{X}$ на абсолюте, получим, что уравнения (1.5) примут вид $\partial_i \vec{X} = l_i \vec{X} + m_i^p \bar{y}_p$, где $l_i = l_{i0}^0$, $m_i^p = m_{i0}^p$. Заметим, что l_i и m_i^p комплекснозначные функции параметров.

Тензор (4.5) определяет два комплексных тензора

$$C_{ij} = G_{ij}^0 = \bar{G}_{ij}^1, \quad G_{ij}^1 = \bar{G}_{ij}^0.$$

Первый из этих тензоров есть ковариантно постоянный тензор теории А. П. Нордена, второй является основным тензором комплексной связности Вейля [8].

ЛИТЕРАТУРА

1. Хьюзмоллер Д. Расслоенные пространства. М., „Мир“, 1970.
2. Норден А. П. Пространства аффинной связности. М.-Л., ГИТТЛ, 1950.
3. Розенфельд Б. А. Многомерные пространства. М., „Наука“, 1966.
4. Розенфельд Б. А. Геометрия многообразия плоскостей проективного пространства как точечная проективная геометрия. Тр. Семина. по векторн. и тензорн. анализу, вып. 9, 1952, с. 213—222.
5. Ходж. В., Пидо Д. Методы алгебраической геометрии, т. II. М., ИИЛ, 1954.
6. Нейфельд Э. Г. Геометрия многообразия k -плоскостей обобщенного бипланарного пространства. Учен. зап. Башкирск. ун-та, вып. 31, 1968, с. 240—249.
7. Розенфельд Б. А. Неевклидовы пространства. М., „Наука“, 1969.
8. Норден А. П. О структуре связности на многообразии прямых неевклидова пространства. Изв. вузов. Матем., 1972, № 12, с. 84—94.

г. Уфа

Поступила
14 VI 1976**В. А. Дербенев. Асимптотика решения неустойчивого уравнения восстановления***(аннотация статьи, депонированной в ВИНТИ, № 2460-76 Деп.)*

В статье рассматривается уравнение

$$x(t) = \int_0^t K(t-s)x(s)ds + f(t), \quad t \geq 0, \quad (1)$$

где $K(t) \in C[0, \infty)$, при условии, что уравнение $1 - q(\omega) = 0$, $q(\omega) = \int_0^\infty e^{-\omega s} K(s)ds$ имеет в правой полуплоскости конечное число корней ω_j кратности n_j соответственно.

Для резольвенты $R(t-s)$ ядра $K(t-s)$ справедлива следующаяТеорема. Пусть $m \geq 0$ — произвольное целое число. Если

$$R^*(t) = \sum_j \sum_{k=1}^{n_j} c_{jk} \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} e^{-\omega_j t},$$

где c_{jk} — коэффициенты при отрицательных степенях $\omega - \omega_j$ в лорановском разложении функции $q(\omega) [1 - q(\omega)]^{-1}$ в окрестности точки ω_j и $\int_0^\infty s^{M(m+1)+M_1} |K(s)|ds < \infty$, где

$$M = \sum_{\operatorname{Re} \omega_j = 0} n_j, \quad M_1 = \max_{\operatorname{Re} \omega_j = 0} \{m, \max \{n_j\}\}, \quad \text{то} \quad \int_0^\infty s^m |R(s) - R^*(s)| ds < \infty.$$

Используя данную теорему, получен ряд результатов об асимптотическом поведении решения уравнения (1) в случае, когда $f(t) = \sum_{n=0}^k f_n \cdot (t+1)^{-n} + o((t+1)^{-k})$.

(Работа поступила в журнал „Математика“ 24 XII 1974.)

2. Мартакова А. С. Конгруэнции прямых трехмерного галилеева и псевдогалилеева пространств. - Труды геометрического семинара, вып.9. Казань, 1976, 54-59.

3. Розенфельд Б.А., Антонова Л. В., Вольховская А. Т. Комплексы прямых квазиэллиптического, квазигиперболического и квазисимплектического 3-пространств. - Труды геометрического семинара, вып.14. Казань, 1982.

4. Широков П. А., Широков А. П. Аффинная дифференциальная геометрия. М., Физматгиз, 1959.

5. Щербаков Р. Н. Основы метода внешних форм и линейчатой дифференциальной геометрии. Томск., Изд-во Томск. ун-та, 1973.

Э.Г.Нейфельд

О ВНУТРЕННИХ ГЕОМЕТРИЯХ МНОГООБРАЗИЯ НУЛЬ-ПЛОСКОСТЕЙ
МАКСИМАЛЬНОЙ РАЗМЕРНОСТИ ПОЛЯРИТЕТОВ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Как известно, корреляция в проективном пространстве P_n есть поляритет, если ее тензор обладает симметрией

$$a_{\alpha\beta} = \sigma a_{\beta\alpha}, \quad \sigma^2 = 1, \quad \alpha, \beta, \gamma, \dots = \overline{0, n}. \quad (1)$$

При $\sigma = I$ имеем обычный поляритет, при $\sigma = -I$ - косой. Плоскость $P_k(\vec{x}_a)$ с базисными точками $\vec{x}_a(x_a^a)$ есть нуль-плоскость поляритета, если она принадлежит своей поляре [1, с.251]. Необходимым и достаточным условием этого есть условие

$$\vec{x}_a \vec{x}_b \stackrel{\text{def}}{=} a_{\alpha\beta} x_a^\alpha x_b^\beta = 0, \quad a, b, c = \overline{0, k}. \quad (2)$$

Нуль-плоскость $P_k(\vec{x}_a)$ есть нуль-плоскость максимальной размерности, если она совпадает со своей полярной. В этом случае необходимо, чтобы $n = 2k + 1$ и в случае $\sigma = I$ квадратика Q_{2k} $\vec{x}^2 = 0$ имела нулевую сигнатуру.

Множество всех нуль-плоскостей максимальной размерности или $Q_{2k,k}$ образует многообразие размерности $m = \frac{(k+1)(k+1+6)}{2}$. Заметим, что в случае квадратики это многообразие двусвязно и есть объединение двух семейств той же размерности [I, с.256]. Многообразие $Q_{2k,k}$ является базой векторного расслоения ξ , слои которого $(k+1)$ -мерные векторные пространства, соответствующие нуль-плоскостям поляритета.

Многообразие $Q_{2k,k}$ назовем нормализованным, если определено дифференцируемое соответствие между его нуль-плоскостями, такое, что каждой плоскости $P_k(\vec{x}_a)$ из некоторой области $D \subset Q_{2k,k}$ соответствует нуль-плоскость $P_k(\vec{y}^a)$, не пересекающая первую. Для базисных точек этой нормализующей плоскости можно ввести относительное нормирование

$$\vec{x}_a \vec{y}^b = \delta_a^b, \quad \vec{y}^a \vec{y}^b = 0. \quad (3)$$

Определим на $Q_{2k,k}$ локальные координаты u^i . Дифференцируя по этим координатам векторы $\vec{x}_a$ и $\vec{y}^a$, получим

$$\nabla_i \vec{x}_a = m_{i\alpha a} \vec{y}^\alpha, \quad \nabla_i \vec{y}^a = n_i^{ab} \vec{x}_b, \quad i, j, k, l = \overline{1, m}. \quad (4)$$

Ковариантные производные здесь содержат коэффициенты связности в векторном расслоении ξ . Дифференцируя обе части равенств (2) и (3), получим, что тензоры $m_{i\alpha b}$ и n_i^{ab} удовлетворяют условиям симметрии

$$m_{i\alpha b} = -\sigma m_{i\alpha b}, \quad n_i^{ab} = -\sigma n_i^{ba}. \quad (5)$$

Координаты опорного тензора $m_{i\alpha b}$ образуют невырожденную матрицу (i - номер строки, парный индекс α, b - номер столбца), что следует из того, что точки $\vec{x}_a$ зависят от m существенных параметров - координат u^i . Следовательно, опорный тензор определяет изоморфизм касательного пространства многообразия $Q_{2k,k}$ на пространство бивекторов ($\sigma=1$) или симметрических тензоров ($\sigma=-1$) расслоения ξ . Отсюда так же следует существование контравариантного опорного тензора, координаты $m^{i\alpha b}$ которого однозначно определяются из равносильных систем:

$$m^{i\alpha b} m_{i\alpha d} = \delta_c^{\omega} \delta_d^b - \sigma \delta_c^b \delta_d^a \Leftrightarrow \frac{1}{2} m^{i\alpha b} m_{j\alpha b} = \delta_j^i. \quad (6)$$

Связность I-го рода на многообразии нуль-плоскостей определяется с помощью уравнения:

$$\nabla_i m_{jab} = 0. \quad (7)$$

Из условий интегрируемости уравнений (4) и (7) следует, что связность первого рода не имеет кручения, а тензор кривизны связности в ξ равен :

$$R_{kia}{}^b = -2\rho_{[k|l|} \Delta_{i]b}{}^{ma}, \quad (8)$$

где

$$\rho_{ij} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2} n_i{}^{ab} m_{jab} - \quad (9)$$

тензор Нордена нормализованного многообразия нуль-плоскостей, а $\Delta_{j\bar{b}}{}^{ia}$ - структурные аффиноры этого многообразия [2] :

$$\Delta_{j\bar{b}}{}^{ia} = m^{iac} m_{j\bar{b}c}. \quad (10)$$

Тензор кривизны связности I-го рода равен

$$R_{kij}{}^l = 2\rho_{[k|l|} T_{i]j}{}^{ml}, \quad T_{ij}{}^{kl} \stackrel{\text{def}}{=} \Delta_{i\bar{b}}{}^{ka} \Delta_{j\bar{a}}{}^{lb}. \quad (11)$$

Заметим, что тензор $T_{ij}{}^{kl}$ ковариантно-постоянен и, кроме того, удовлетворяет уравнению:

$$T_{ij}{}^{mn} T_{mn}{}^{kl} = 2\delta_i^k \delta_j^l + (k+3)T_{ij}{}^{kl}. \quad (12)$$

Преобразование нормализации определяется изменением нормализующей плоскости и задается уравнениями:

$$\check{x}_a = \bar{x}_a; \quad \check{y}^a = \bar{y}^a + \rho^{ab} \bar{x}_b. \quad (13)$$

Из (3) и (6) следует :

$$\rho^{ab} = -\sigma \rho^{ba}, \quad \rho^{ab} = m^{iab} \rho_i.$$

Таким образом, преобразование нормализации в $Q_{2k,k}$ определяется заданием ковектора

$$\rho_i = \frac{1}{2} m_{iab} \rho^{ab}. \quad (14)$$

Легко видеть, что опорный тензор m_{iav} инвариантен при преобразовании нормализации, а коэффициенты связности в ξ и связности I-го рода преобразуются по закону

$$\check{\Gamma}_{ia}^b = \Gamma_{ia}^b - p_k \Delta_{ia}^{kb}, \quad \check{\Gamma}_{ij}^k = \Gamma_{ij}^k + 2p_m T_{(ij)}^{mk}. \quad (15)$$

В случае, если нормализующая плоскость также зависит от m существенных параметров, то на $Q_{2k,k}$ существует также связность 2-го рода, коэффициенты которой однозначно определяются из уравнения

$$\nabla_i n_j^{ab} = 0. \quad (16)$$

Связности 2-го и I-го рода сопряжены [3, с.176] относительно тензора Нордена.

В случае, когда нормализующая плоскость одна и та же для всех нуль-плоскостей многообразия, связность I-го рода евклидова, т.е. нулевой кривизны. Таким образом, любая связность нормализованного многообразия $Q_{2k,k}$ получается из евклидовой связности с помощью преобразования (15).

Остановимся на некоторых частных случаях.

I. $\sigma = 1$. Если $k = 2$, то $Q_{4,2}$ есть пара семейств плоских образующих квадрики Q_4 в P_5 , внутренние геометрии нормализованного многообразия $Q_{4,2}$ будут проективно-евклидовы, что соответствует внутренним геометриям трехмерного нормализованного пространства Нордена [3, с.210].

Если $k = 3$, то связность I-го рода будет конформно-евклидовой связностью Вейля с метрическим тензором *

$$g_{ij} = \frac{1}{4} e^{abcd} m_{iav} m_{jcd}, \quad (17)$$

где e^{abcd} — произвольный квадриквектор 4-мерного пространства. Этот факт представляет собой иллюстрацию известного принципа тройственности Эли Картана [4, с.534], из которого следует, что каждое семейство 3-плоских образующих квадрики Q_6 в P_7 изоморфно самой квадрике.

При $k = 2S - 1$ геометрия I-го рода будет геометрией типа Вейля с метрическими тензорами валентности S :

$$g_{i_1 \dots i_s} = \frac{1}{2^s} e^{a_1 b_1 \dots a_s b_s} m_{i_1 a_1 b_1} \dots m_{i_s a_s b_s},$$

$$g^{i_1 \dots i_s} = \frac{1}{2^s} e_{a_1 b_1 \dots a_s b_s} m^{i_1 a_1 b_1} \dots m^{i_s a_s b_s},$$

определяющие в пространстве направлений касательного пространства пару двойственных поляритетов порядка S , которые характеризуются тем, что I-полус первой поляры точки общего положения совпадает с этой точкой.

2. $\sigma = -I$. В этом случае геометрия I-го рода также будет геометрией типа Вейля порядка $k+1$ с метрическими тензорами

$$g_{i_0 \dots i_k} = \frac{1}{(k+1)!} e^{a_0 \dots a_k} e^{b_0 \dots b_k} m_{i_0 a_0 b_0} \dots m_{i_k a_k b_k},$$

$$g^{i_0 \dots i_k} = \frac{1}{(k+1)!} e_{a_0 \dots a_k} e_{b_0 \dots b_k} m^{i_0 a_0 b_0} \dots m^{i_k a_k b_k},$$

которые также определяют двойственные поляритеты пространства направлений.

Л и т е р а т у р а

1. Х о ц ж В., П и ц о Д. Методы алгебраической геометрии, т.2. М., ИЛ, 1954.

2. Н е й ф е л ь д Э. Г. Аффинные связности на нормализованном многообразии плоскостей проективного пространства. - Изв. вузов. Матем., 1976, № II, с.48-55.

3. Н о р д е н А. П. Пространства аффинной связности. М., "Наука", 1976.

4. Р о з е н ф е л ь д Б.А. Неевклидовы геометрии. М., ГИТТИ, 1955.

При четном n система деривационных уравнений канонического репера линейчатой поверхности в E_n состоит из уравнений (I4), (I5), (9) при $2k \leq n-2$, (I2) и (II), при нечетном n - из уравнений (I4), (I5), (9) при $2k \leq n-1$, (IO).

Таким образом, доказана

Т е о р е м а 2. Линейчатая поверхность в пространстве E_n определяется с точностью до движения этого пространства заданием $2n-3$ функций $d\alpha/ds, d\beta/ds, \rho; ds_i/ds, \alpha_i, d\beta_i/ds, \varphi_i$ ($i=1, \frac{n-3}{2}$) при нечетном n и $d\alpha/ds, d\beta/ds, \rho; ds_i/ds, \alpha_i, \frac{d\beta_i}{ds}, \varphi_i$ ($i=1, \dots, \frac{n-4}{2}$); $ds_{\frac{n-2}{2}}/ds, \alpha_{\frac{n-2}{2}}$ при четном n .

Л и т е р а т у р а

1. Blaschke W. *Differentialgeometrie der geradlinigen Flächen im elliptischen Raum.* - *Math. Zeit.*, 1922, 15, 309-320.

2. М а ш а н о в В. И. К дифференциальной геометрии линейчатых поверхностей пространства Римана. - Труды Томского ун-та, Геометрический сборник, т. I6I, вып. 2. 1962, с. I54-I63.

3. Р о з е н ф е л ь д Б. А. Неевклидовы пространства. - М., 1969.

4. Б а р а н о в а В. А., У з д е н о в О. М. Комплексные, двойные и дуальные норденовы координаты в многообразиях прямых трехмерных неевклидовых и евклидова пространств. - Труды геометрического семинара, вып. 9. Казань, 1976, с. II-I7.

5. К а р т а н Э. Теория конечных непрерывных групп и дифференциальная геометрия, изложенные методом подвижного репера. - М., 1963.

6. Щ е р б а к о в Р. Н. Основы метода внешних форм и линейчатой дифференциальной геометрии. - Томск, 1973.

Бурцаков В.М., Нейфельд Э. Г.

О ГЕОМЕТРИИ ПОВЕРХНОСТЕЙ СИМПЛЕКТИЧЕСКОГО И КВАЗИСИМПЛЕКТИЧЕСКОГО ПРОСТРАНСТВ

I. Задание точки $\vec{X}$ симплектического пространства Sp_{2n+1} , соответствующей точке $\vec{x}$ поверхности

$X_{2s} \subset Sp_{2n+1}$, так что выполняется условие

$$\langle \vec{x} \vec{X} \rangle = a_{\alpha\beta} x^\alpha X^\beta = 1 \quad (\alpha, \beta = 1, 2n+2), \quad (1)$$

где $a_{\alpha\beta} = -a_{\beta\alpha}$ - бивектор абсолютного поляритета, определяет в случае, когда ее касательная плоскость не принадлежит полярной точке касания, нормализацию этой поверхности в смысле А.П. Нордена [1]. Нормаль 2-го рода есть пересечение касательной плоскости с полярной точкой $\vec{X}$, а нормаль 1-го рода содержит точки $\vec{x}$, $\vec{X}$, $\vec{X}_s$, причем последние сопряжены первым двум и нормали 2-го рода.

Произведения вершин полученного проективного репера определяются следующей таблицей

	$\vec{x}$	$\vec{y}_i$	$\vec{X}$	$\vec{X}_s$
$\vec{x}$	0	$-p_i$	1	0
$\vec{y}_i$	p_i	g_{ij}	0	0
$\vec{X}$	-1	0	0	0
$\vec{X}_s$	0	0	0	g_{st}

(2)

Деривационные уравнения нормализованной поверхности имеют вид

$$\nabla_i^1 \vec{x} = \vec{y}_i, \quad \nabla_{ii} \vec{X} = -m_i^k p_k \vec{X} + m_i \vec{x} + m_i^k \vec{y}_k + \Gamma_i^s \vec{X}_s, \quad (3)$$

$$\nabla_j^1 \vec{y}_i = p_{ji} \vec{x} + b_{ij} \vec{X} + b_{ij}^s \vec{X}_s, \quad \nabla_i \vec{X}_s = m_{is}^k \vec{y}_k + m_{is} \vec{x} + \Gamma_{is} \vec{X}.$$

Внутренняя связность 1-го рода характеризуется условиями

$$\nabla_i^2 p_j = g_{ij} - b_{ij} \iff \nabla_{[i} p_{j]} = g_{ij}, \quad \nabla_{(i} p_{j)} = -b_{ij}, \quad (4)$$

$$\nabla_k^2 g_{ij} = 2p_{k[i} p_{j]}, \quad \nabla_k g_{st} = 0.$$

2. Под квазисимплектическим пространством $\tilde{S}p_{2n+1}^{2s+1}$ будем понимать проективное пространство, в котором заданы поляритеты, определенные тензорами $a_{\alpha\beta} = -a_{\beta\alpha}$ и $b^{\alpha\beta} = \sigma b^{\beta\alpha}$, где и второй тензор определяет при $\sigma = I$ в нулевой области первого тензора невырожденную квадратичку, а при $\sigma = -I$ нуль-систему, как и в [2].

Поверхность X_{2s} нормализуется заданием ее отображения в собственную область пространства $\tilde{S}p_{2s+1}^{2s+1}$. Нормаль 2-го рода определяется аналогично, а точки $\vec{X}_s$ являются базисными точками нулевой области пространства. Таблица произведений вершин репера совпадает с (2) при условии $g_{st} = 0$. Первые три деривационные уравнения поверхности совпадают с соответствующими уравнениями (3), а последнее имеет вид

$$\partial_i \vec{X}_s = 0.$$

Поляры ε, η, Ξ точек $\vec{x}, \vec{X}, \vec{y}_i$ относительно косоугольного поляритета и гиперплоскости Ξ_s , определенные соотношениями

$$X_s^\alpha = \beta^{\alpha\beta} \Xi_{\beta s}, \quad (5)$$

при $\beta^{\alpha\beta} = \beta^{\beta\alpha}$ определяют грани 2-го проективного репера, связанного с поверхностью, причем имеем :

	ε	η_j	Ξ	Ξ^t
$\vec{x}$	0	$-P_j$	1	0
$\vec{y}_i$	P_i	g_{ij}	0	0
$\vec{X}$	-1	0	0	0
$\vec{X}_s$	0	0	0	δ_s^t

(6)

Это позволяет также определить деривационные уравнения поверхности и геометрию 2-го рода, которая, однако, совпадает с геометрией первого рода.

Л и т е р а т у р а

1. Н о р д е н А. П. Пространства аффинной связности. - М.: Наука, 1976.

2. Р о з е н ф е л ь д Б.А. Неевклидовы пространства. - М.: Наука, 1969.

Вишневский В. В.

К ВОПРОСУ О ТЕНЗОРЕ ГОЛОМОРФНО ПРОЕКТИВНОЙ КРИВИЗНЫ

В работах [1] - [3], [6] - [10] изучаются голоморфно геодезические преобразования связностей, сохраняющих некоторую по-

3. Розенфельд Б. А. Неевклидовы геометрии. - М.: Гостехиздат, 1955.

4. Розенфельд Б. А. Неевклидовы пространства. - М.: Наука, 1969.

5. Розенфельд Б. А., Могоалькова (Любышева) С. Н. Применение спинорных представлений групп движений 3-пространств к линейчатой геометрии. - Труды семинара кафедры геометрии Казанского гос.ун-та, 1974, вып.7, с. 118 - 127.

6. Бляшке В. Дифференциальная геометрия и геометрические основы теории относительности Эйнштейна. М.-Л.: ОНТИ, 1935.

7. Розенфельд Б. А., Бахолдина Т.Н., Любышева Л. В., Могоалькова С. Н. Риманова кривизна квадратичных, комплексных, двойных и дуальных эллиптических пространств. - Изв.вузов (Математика), 1971, № 5 (108), с.82-91.

Нейфельд Э. Г.

О ГЕОМЕТРИЯХ, ОПРЕДЕЛЯЕМЫХ ПОЛЯРИТЕТОМ В ПРОЕКТИВНОМ ПРОСТРАНСТВЕ НАД АЛГЕБРОЙ

1. Проективным пространством $P(E, A)$ над унитарной и ассоциативной алгеброй A с модулем-носителем E назовем многообразие присоединенных подпространств этого модуля, изоморфных алгебре A .

Корреляцию в $P(E, A)$ определим заданием билинейного отображения E в сопряженный модуль E^* , при котором присоединенные подпространства произвольного вектора $\vec{x} \in E$ отображаются в присоединенные подпространства ковектора $\vec{\xi} \in E^*$ образа вектора $\vec{x}$ при этом отображении.

Необходимым и достаточным условием того, что отображение, заданное тензором $a_{\alpha\beta}$, определяло корреляцию в правом $P(E, A)$ есть условие

$$c_{\alpha\lambda}^{\lambda} a_{\lambda\beta} = \rho_a^{\beta} a_{\alpha\lambda} c_{\beta\gamma}^{\lambda}, \quad (\alpha, \beta = \overline{1, n} = \dim E, \quad (I)$$

$$a, \gamma = \overline{1, r} = \dim A),$$

где ρ_a^{β} образуют антиавтоморфизм ρ алгебры A , а $c_{\alpha\lambda}^{\lambda}$ определяют структуру правого модуля.

В случае $a_{\alpha\beta} = \sigma a_{\beta\alpha}$ ($\sigma^2 = 1$) корреляцию назовем поляритетом. Для этого необходимо, чтобы антиавтоморфизм ρ был инволютивным. Если алгебра A фробениусова, то задание невырожденного поляритета в $P(E, A)$ равносильно заданию эрмитово-симметрической формы $f(\vec{x}, \vec{y}) = A_{\alpha\beta}^a x^{\alpha} y^{\beta} e_a$:

$$\rho f(\vec{x}, \vec{y}) = f(\vec{y}, \vec{x}), \quad f(\vec{x}a, \vec{y}b) = \rho(a)f(\vec{x}\vec{y})b, \quad a, b \in A. \quad (2)$$

Кроме того, $a_{\alpha\beta} = A_{\alpha\beta}^a \varphi_a$ и

$$A_{\alpha\beta}^a = \varphi^{ab} a_{\alpha\lambda} c_{\beta\gamma}^{\lambda}, \quad \varphi_{ab} = \gamma_{ab}^c \varphi_c, \quad \varphi^{ac} \varphi_{ab} = \delta_b^c. \quad (3)$$

где φ_a - некоторый неособый ковектор алгебры A .

2. Пространство $P(E, A)$ назовем нормализованным в смысле [1], если определено дифференцируемое отображение некоторой области этого пространства в пространство его гиперплоскостей $P(E^*, A)$.

В нормализованном пространстве деривационные уравнения

$$\partial_i \vec{x} = \vec{x} L_i + \vec{y}_i, \quad \nabla_i \vec{y}_j = \vec{y}_j L_i + \vec{x} P_{ij} \quad (4)$$

$$(L_i, P_{ij} \in A, \quad i, j, k = \overline{1, n-r})$$

определяют аффинную связность без кручения, которое будет проективно-евклидовым над этой алгеброй в том смысле, что ее геодезические лежат на проективных прямых над A , определенных данной точкой $\vec{x}$ и ее нормальной точкой $\vec{y}_i du^i$. Структурные аффиноры нормализованного $P(E, A)$ определяются соотношениями

$$\vec{y}_i e_a = \Delta_{ia}^k \vec{y}_k, \quad \Delta_{ia}^k = \Delta_i^k(e_a) \quad (5)$$

и удовлетворяют уравнениям

$$\nabla_k \Delta_{ia}^l = \Delta_i^l ([L_k e_a]), \quad P_{ij} e_a = P_{il} \Delta_{ja}^l. \quad (6)$$

В случае полярной нормализации, рассматриваемая область определяется условием $f(\vec{x}, \vec{x}) = e$. Так как $f(\vec{x}, \vec{y}_i) = 0$, то $\rho L_i = -L_i$ и $G_{ij} \stackrel{\text{def}}{=} f(\vec{y}_i, \vec{y}_j) = -P_{ij}$, $\rho G_{ij} = G_{ji}$ есть основной тензор пространства, удовлетворяющий уравнению типа Вейля

$$\nabla_k G_{ij} = [G_{ij} L_k]. \quad (7)$$

Внутренняя связность полярной нормализации будет симметрической в смысле Картана и, когда ковектор $\gamma_a \stackrel{\text{def}}{=} \gamma_{ab}^b = \Delta_{ea}^e$ неособый, римановой с метрическим тензором

$$g_{ij} \stackrel{\text{def}}{=} \Delta_e^e (G_{ij}) = \Delta_i^e (G_{je}). \quad (8)$$

Л и т е р а т у р а

И. Нейфельд Э. Г. Аффинные связности на нормализованном многообразии плоскостей проективного пространства. - Изв. вузов. Математика, 1976, № II (174), с. 48-55.

Норден А. П., Харисова Н. Х.

К ТЕОРИИ МНОГОМЕРНЫХ КОНГРУЭНЦИИ

§ I. Гиперповерхность и ее сферическое отображение

Рассмотрим гиперповерхность $S(n+1)$ - мерного евклидова пространства и каждой точке M этой гиперповерхности, определенной радиусом-вектором

$$r = r(u^i), \quad i = \overline{1, n}$$

поставим в соответствие точку M_0 гиперсферы, определенную радиусом-вектором

$$n = n(u^i), \quad i = \overline{1, n},$$

который является единичным вектором нормали S .

В заключение рассмотрим случай конформно-евклидова пространства.

У т в е р ж д е н и е 7. $S_{ij} = 4(Pg_{ij} - P_{ij})$,
 где P_i - вектор конформного преобразования,

$$P_{ij} = \nabla_i P_j - \frac{1}{2} T^s{}_{ij} P_s P_k,$$

$$P = g^{ij} P_{ij}.$$

Это сразу получается как следствие из формул [1, § 45]

Л и т е р а т у р а

1. Н о р д е н А. П. Пространства аффинной связности. М., "Наука", 1979.
2. Н о р д е н А. П. Теория поверхностей. М., Гостехиздат, 1956.
3. О л о н и ч е в П. М. Казанский геометр Ф.М.Суворов. - Историко-математические исследования. Вып. 1X. М., Гостехиздат, 1956.

Э.Г.Нейфельд

НОРМАЛИЗОВАННОЕ СЕМЕЙСТВО ПЛОСКОСТЕЙ И ГЕОМЕТРИЯ ВТОРОГО РОДА ПОВЕРХНОСТИ

1. Построение нормализации семейства плоскостей.

Семейство $\mathcal{X}_m$ k -плоскостей $P_k(\vec{x}_a)$ проективного пространства P_n , определенное параметрическими уравнениями

$$\vec{x}_a = \vec{x}_a(u^i) \quad (a, b, c, d = \overline{1, k+1}, i, j, k, l = \overline{1, m})^{(1.1)}$$

назовем поляризованным, если каждой плоскости семейства соответствует поляризующая плоскость $P_{n-k-1}(\vec{x}_{\bar{a}})$ дополнительной размерности, не пересекающая первую, базисные

точки которой определены с помощью уравнений

$$\vec{x}_{\bar{a}} = \vec{x}_{\bar{a}}(\mathcal{U}^i) \quad (\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \bar{d} = \overline{1, n-k}). \quad (1.2)$$

Тем самым в проективном пространстве определяется композиция [1], дериационные уравнения которой

$$\nabla_i \vec{x}_{\bar{a}} = m_{i\bar{a}}^{\bar{c}} \vec{x}_{\bar{c}}, \quad \nabla_i \vec{x}_{\bar{c}} = m_{i\bar{c}}^{\bar{a}} \vec{x}_{\bar{a}} \quad (1.3)$$

определяют горизонтальную и вертикальную связность композиции с объектами $\Gamma_{i\bar{a}}^i$ и $\Gamma_{i\bar{a}}^{\bar{c}}$ соответственно. Тензор $m_{i\bar{a}}^{\bar{c}}$, удовлетворяющий условию

$$\text{rang} \| m_{i\bar{a}}^{\bar{c}} \| = m$$

(здесь i — номер строки, а парный индекс $\bar{a}, \bar{c}$ определяет столбец). определяет вложение касательного пространства T семейства в касательное пространство грассманова многообразия, изоморфного тензорному произведению $V_{k+1}^* \otimes V_{n-k}$ [2].

Поляризованное семейство плоскостей назовем нормализованным, если задано нормальное подрасслоение касательного расслоения грассманова многообразия, слои которого $\mathcal{N}$ оснащают в $V_{k+1}^* \otimes V_{n-k}$ касательное пространство T семейства, т.е.

$$V_{k+1}^* \otimes V_{n-k} = T \oplus \mathcal{N}.$$

Нормальное подрасслоение может быть определено заданием поля связующего тензора

$$n_{p\bar{a}}^{\bar{c}} = n_{p\bar{a}}^{\bar{c}}(\mathcal{U}^i) \quad (p, q, z = \overline{1, \bar{m}}, \quad (1.4) \\ \bar{m} = (k+1)(n-k) - m),$$

координаты которого вместе с координатами тензора $m_{i\bar{a}}^{\bar{c}}$ удовлетворяют условию

$$\text{rang} \| m_{i\bar{a}}^{\bar{c}}, n_{p\bar{a}}^{\bar{c}} \| = (k+1)(n-k).$$

Отсюда следует, что тензорные поля $m_{ia}^{\bar{c}}$ и $m_{ra}^{\bar{c}}$ определяют композицию грассманова многообразия $P_{n,k}$. Дифференциальные уравнения этой композиции имеют вид

$$\nabla_i m_{ja}^{\bar{c}} = B_{ij}^p n_{ra}^{\bar{c}}, \quad \nabla_i n_{ra}^{\bar{c}} = C_{ip}^k m_{ka}^{\bar{c}} \quad (1.5)$$

и определяют связности в касательном и нормальном подпространствах, первую из которых естественно назвать внутренней связностью нормализованного семейства. Из условий интегрируемости уравнений (1.3) и (1.5) следует, что внутренняя связность семейства не имеет кручения, ее асимптотический тензор B_{ij}^p симметричен по нижним индексам и удовлетворяет обобщенному уравнению Кодацци

$$\begin{aligned} \nabla_{[k} B_{i]j}^p = n_{-d}^{pa} (m_{[k|c|}^{\bar{b}} m_{i]a}^{\bar{c}} m_{j\bar{b}}^{\bar{d}} + \\ + m_{[k|c}^{\bar{b}} m_{j\bar{a}}^{\bar{c}} m_{i]b}^{\bar{d}}), \end{aligned} \quad (1.6)$$

а тензор кривизны

$$\begin{aligned} R_{kij}^{\ell} = 2m_{-d}^{\ell a} (m_{[k|c|}^{\bar{b}} m_{i]a}^{\bar{c}} m_{j\bar{b}}^{\bar{d}} + m_{[k|c}^{\bar{b}} m_{j\bar{a}}^{\bar{c}} m_{i]b}^{\bar{d}}) - \\ - 2C_{[k|p|}^{\ell} B_{i]j}^p. \end{aligned} \quad (1.7)$$

Преобразование поляризации определяется заданием поля связующего тензора $\rho_{\bar{a}}^c$ и имеет вид

$$\vec{x}_{\bar{a}}^* = \vec{x}_{\bar{a}} + \rho_{\bar{a}}^c \vec{x}_c. \quad (1.8)$$

При этом преобразовании тензор $m_{ia}^{\bar{c}}$ остается инвариантным, а коэффициенты горизонтальной и вертикальной связности композиции в P_n преобразуются по закону

$$\Gamma_{ia}^{*c} = \Gamma_{ia}^c - \rho_{\bar{b}}^c m_{ia}^{\bar{b}}, \quad \Gamma_{i\bar{a}}^{*\bar{c}} = \Gamma_{i\bar{a}}^{\bar{c}} + \rho_{\bar{a}}^{\bar{b}} m_{i\bar{b}}^{\bar{c}}. \quad (1.9)$$

Преобразование нормального подрасслоения определяется уравнением

$$\overset{*}{N}_{pa}^{\bar{c}} = n_{pa}^{\bar{c}} + q_p^k m_{ka}^{\bar{c}}. \quad (1.10)$$

При этих преобразованиях коэффициенты внутренней связности семейства и ее асимптотический тензор преобразуются следующим образом:

$$\begin{aligned} \overset{*}{\Gamma}_{ij}^k + \overset{*}{B}_{ij}^p q_p^k &= \Gamma_{ij}^k + 2 m_{\bar{c}}^{ka} m_{(i|\bar{b}|}^{\bar{c}} m_{j)a}^{\bar{d}} P_{\bar{d}}^{\bar{b}}, \\ \overset{*}{B}_{ij}^p &= B_{ij}^p + 2 n_{\bar{c}}^{pa} m_{(i|\bar{b}|}^{\bar{c}} m_{j)a}^{\bar{d}} P_{\bar{d}}^{\bar{b}}, \end{aligned} \quad (1.11)$$

где тензоры $m_{\bar{c}}^{ka}$ и $n_{\bar{c}}^{pa}$ взаимны тензорам $m_{ia}^{\bar{c}}$ и $n_{pa}^{\bar{c}}$, т.е. удовлетворяют уравнениям

$$m_{\bar{c}}^{ka} m_{ia}^{\bar{c}} = \delta_i^k, \quad m_{\bar{c}}^{ka} n_{pa}^{\bar{c}} = 0, \quad n_{\bar{c}}^{pa} n_{qa}^{\bar{c}} = \delta_q^p, \quad n_{\bar{c}}^{pa} m_{ia}^{\bar{c}} = 0.$$

Если поляризация невыврожденная, т.е. если множество всех поляризующих плоскостей зависит от m существенных параметров и, следовательно,

$$\text{rang} \parallel m_{i\bar{a}}^{\bar{c}} \parallel = m,$$

то поляризация вполне определяет нормализацию: координаты тензора $n_{pa}^{\bar{c}}$ могут быть определены как фундаментальные решения системы

$$m_{i\bar{a}}^{\bar{c}} x_{\bar{c}}^{\bar{a}} = 0.$$

Примером нормализации семейства плоскостей служит полярная нормализация этого семейства относительно некоторого невырожденного поляритета в проективном пространстве, при которой плоскости общего вида $P_k(\vec{X}_a)$ соответствует ее поляр $P_{n-k-1}(\vec{X}_{\bar{a}})$. Тогда тензоры

$$a_{ab} = \vec{X}_a \vec{X}_b, \quad a_{\bar{a}\bar{b}} = \vec{X}_{\bar{a}} \vec{X}_{\bar{b}}$$

будут ковариантно-постоянны в соответствующих связностях, а тензор (1.4), определяющий нормальное подрасщепление, определяется из уравнения

$$m_{i\bar{a}}^{\bar{c}} n_{p\bar{c}}^{\bar{a}} = -\alpha_{\bar{a}\bar{b}} \alpha^{cd} m_{id}^{\bar{b}} n_{p\bar{c}}^{\bar{a}} = 0.$$

Легко видеть, что внутренняя геометрия полярно нормализованного семейства будет римановой с метрическим тензором

$$g_{ij} = \alpha_{\bar{a}\bar{b}} \alpha^{cd} m_{ic}^{\bar{a}} m_{jd}^{\bar{b}}. \quad (1.12)$$

При $K=0$, т.е. когда семейство есть m -поверхность в проективном пространстве, построенная нормализация совпадает с нормализацией поверхности в смысле А.П.Нордена [3, с. 197]: поляризующая гиперплоскость $P_{n-1}(\vec{x}_{\bar{a}})$ пройдет через вершины $\vec{x}_p = n_{p\bar{a}}^{\bar{a}} \vec{x}_{\bar{a}}$ нормали 1-го и опорные точки $\vec{y}_i = m_{i\bar{a}}^{\bar{a}} \vec{x}_{\bar{a}}$ нормали 2-го рода.

2. Геометрия 2-го рода поверхности

Как известно [3, с. 219], на нормализованной гиперповерхности проективного пространства определяются две внутренние геометрии аффинных связностей - геометрии 1-го и 2-го рода, сопряженные относительно асимптотического тензора. При построении геометрии 2-го рода гиперповерхность рассматривается как огибающая своих касательных гиперплоскостей. Поэтому вполне естественно определить геометрию 2-го рода поверхности произвольного числа измерений $m < n-1$ как внутреннюю геометрию семейства ее касательных m -плоскостей $P_m(\vec{x}_{\bar{a}})$, нормализованного в указанном выше смысле.

В самом деле, пусть m -поверхность $\mathcal{X}_m$ в P_n задана уравнением

$$\vec{x} = \vec{x}(u^i). \quad (2.1)$$

Нормализуем ее в смысле А.П.Нордена [3, с. 197] и запишем ее деривационные уравнения в виде

$$\begin{aligned} \partial_i \vec{x} &= l_i \vec{x} + \vec{y}_i, \\ \nabla_i \vec{y}_j &= l_i \vec{y}_j + p_{ij} \vec{x} + b_{ij}^{\bar{a}} \vec{x}_{\bar{a}}, \\ \nabla_i \vec{x}_{\bar{a}} &= n_{i\bar{a}} \vec{x} + c_{i\bar{a}}^{\kappa} \vec{y}_{\kappa}. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Второе из этих уравнений, как известно, определяет внутреннюю связность 1-го рода.

Касательную m -плоскость поверхности определим точками

$$\vec{x}_{\bar{a}} = u_{\bar{a}} \vec{x} + v_{\bar{a}}^i \vec{y}_i, \quad (2.3)$$

а вершину $P_{n-m-1}(\vec{x}_{\bar{a}})$ нормали 1-го рода примем за поляризующую плоскость касательной плоскости. Дифференцируя обе части равенства (2.3) и используя деривационные уравнения (1.3) и (2.2), получим

$$\nabla_i u_{\bar{a}} = -l_i u_{\bar{a}} - p_{ik} v_{\bar{a}}^k, \quad \nabla_i v_{\bar{a}}^k = -l_i v_{\bar{a}}^k - \delta_i^k u_{\bar{a}} \quad (2.4)$$

и

$$m_{i\bar{a}}^{\bar{c}} = b_{ij}^{\bar{c}} v_{\bar{a}}^j. \quad (2.5)$$

Исключим из рассмотрения аналоги развертывающихся поверхностей, для которых асимптотический тензор $b_{ij}^{\bar{a}}$ поверхности вырожден, т.е. $\text{rang} \| b_{ij}^{\bar{a}} \| < m$. Тогда асимптотический тензор определит вложение касательного пространства T семейства, рассматриваемого как m -мерное многообразие, в подпространство $T^* \otimes V_{n-m}$ касательного пространства $V_{m+1}^* \otimes V_{n-m}$ грасманова многообразия $P_{n,m}$. Нормализующее подпространство N , определенное заданием тензора (1.4), определится заданием тензора $c_{i\bar{a}}^{\bar{c}}$,

такого, что

$$\text{rang} \| v_{ij}^{\bar{a}}, c_{ij}^{\bar{a}} \| = m(n-m)(u, v=1, m(n-m)-m),$$

определяющего оснащение N' касательного пространства T в $T^* \otimes \bar{V}_{n-m}$, так что

$$T^* \otimes \bar{V}_{n-m} = T \oplus N'.$$

Этот тензор будет равен

$$n_{ra}^{\bar{c}} = -a_r^{\bar{c}} \chi_a + c_{ij}^{\bar{c}} v_r^u v_a^j. \quad (2.6)$$

Здесь ковекторы $a_r^{\bar{c}}, v_r^u$ образуют кобазис базиса $\{a_a^p, v_u^p\}$ в N , векторы которого однозначно определяются формулами

$$a_a^p = -n^p_a \chi_a, \quad v_u^p = c_{ui}^{\bar{c}} n^p_a v_a^i. \quad (2.7)$$

не зависящими от выбора нормализующих подпространств N' и N . Дифференцируя обе части равенства (2.5), получим в силу (1.5), (2.4) и (2.7)

$$\nabla_k v_{ij}^{\bar{a}} = l_k v_{ij}^{\bar{a}} + v_{ki}^u c_{ij}^{\bar{a}}, \quad (2.8)$$

где круглые скобки, заключающие индекс i , означают ковариантное дифференцирование в связности 2-го рода, т.е. внутренней связности касательного семейства. Асимптотический тензор касательного семейства полностью определяется своей главной частью v_{ij}^u и равен

$$v_{ij}^p = v_{ij}^{\bar{a}} a_a^p + v_{ij}^u v_u^p. \quad (2.9)$$

В случае гиперповерхности тензор $C_{ui}^{\bar{a}}$ тождественно равен нулю и условие (2.8) совпадает с условием сопряженности связностей 1-го и 2-го рода [3, с. 172].

Тензор $C_{ui}^{\bar{a}}$ определяется с точностью до преобразования

$$C_{ui}^{\bar{a}*} = C_{ui}^{\bar{a}} + S_u^k v_{ki}^{\bar{a}}. \quad (2.10)$$

Ему и асимптотическому тензору поверхности, $v_{ij}^{\bar{a}}$ соответствуют взаимные тензоры $C_{\bar{a}}^{ui}$ и $v_{\bar{a}}^{ij}$, координаты которых находятся из уравнений

$$\begin{aligned} C_{\bar{a}}^{uj} C_{vj}^{\bar{a}} &= \delta_v^u, & C_{\bar{a}}^{uj} v_{kj}^{\bar{a}} &= 0; \\ v_{\bar{a}}^{ij} C_{vj}^{\bar{a}} &= 0, & v_{\bar{a}}^{ij} v_{kj}^{\bar{a}} &= \delta_k^i. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Заметим, что тензор $v_{\bar{a}}^{ij}$, вообще говоря, не симметричен по верхним индексам, а тензор $C_{\bar{a}}^{uj}$ не зависит от преобразования (2.6). Введем еще тензор Кодацци

$$v_{ij}^{\bar{a}*} = \nabla_k v_{ij}^{\bar{a}} - \Gamma_k v_{ij}^{\bar{a}}, \quad (2.12)$$

который в силу уравнения Кодацци будет симметричен по всем нижним индексам.

Из (2.8) следует, что тензор деформации связности 2-го рода в связность 1-го рода равен

$$T_{ij}^k = 2\Gamma_{ij}^k - \Gamma_{ij}^k = v_{\bar{a}}^{km} v_{ij}^{\bar{a}}, \quad (2.13).$$

а тензор V_{ij}^n определяется формулой

$$V_{ij}^n = C_{\bar{a}}^{nm} v_{ij}^{\bar{a}*}. \quad (2.14)$$

Определенная таким образом связность 2-го рода существенно зависит от выбора нормализующего подрасслоения касательного семейства, т.е. от преобразования (2.6). Этот произвол устраним для поверхностей, для которых инвариантным образом определен тензор $v_{ij}^{\bar{a}}$, удовлетворяющий условию

$$v_{ij}^{\bar{a}} v_{k\bar{j}}^{\bar{a}} = \delta_{ik}^{\bar{a}}$$

В этом случае тензор $C_{ij}^{\bar{a}}$ определяется с помощью уравнения

$$v_{ij}^{\bar{a}} C_{ij}^{\bar{a}} = 0,$$

и, следовательно, нормализация касательного семейства полностью определяется нормализацией поверхности. При преобразовании последней связности 1-го и 2-го рода преобразуются по закону

$$* \Gamma_{ij}^{\bar{a}k} = \Gamma_{ij}^{\bar{a}k} + 2 \delta_{(i}^{\bar{a}k} P_{j)} - v_{ij}^{\bar{a}} P_{\bar{a}}^k,$$

$$* \Gamma_{ij}^{\bar{a}k} = \Gamma_{ij}^{\bar{a}k} + 2 v_{\bar{a}}^{\bar{a}k} v_{(i|n}^{\bar{a}} v_{j)n}^{\bar{a}} P_{\bar{a}}^n - v_{ij}^{\bar{a}} v_{\bar{a}}^{\bar{a}k} P_{\bar{a}}^n. \quad (2.15)$$

Это преобразование является обобщением составного преобразования А.П.Нордена ([3], с. 178) на случай поверхности произвольного числа измерений в R_n . (Преобразование нормализации поверхности определяется уравнениями

$$\vec{y}_i^* = \vec{y}_i + \rho_i \vec{x}, \quad \vec{x}_{\bar{a}}^* = \vec{x}_{\bar{a}} + \rho_{\bar{a}} \vec{x} + \rho_{\bar{a}}^k \vec{y}_k).$$

3. Пересечение квадратик или Q -поверхность.

Гиперповерхность, на которой геометрии 1-го и 2-го рода совпадают, есть гиперквадрика, нормализованная автополярно [3, с. 266]. Случай m -поверхности значительно сложнее. Поэтому здесь в качестве примера рассмотрим некоторые свойства поверхности, образованной пересечением связки квадратик

$$a^A(\vec{x}^2) = a_{\alpha\beta}^A x^\alpha x^\beta = 0 \quad (3.1)$$

$$(A = \overline{1, S}, \alpha, \beta = \overline{1, n+1}),$$

тензоры которых $a_{\alpha\beta}^A$ будем считать линейно независимыми.

Для того, чтобы система (3.1) определяла в P_n по-
верхность размерности m или Q -поверхность, не-
обходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие

$$\text{rang} \parallel a_{\alpha\beta}^A x^\beta \parallel = p = n - m \quad (3.2)$$

для точек некоторой окрестности точки $\vec{x}$, координаты ко-
торой удовлетворяют системе (3.1). В общем случае Q -по-
верхность может иметь и особые точки, для которых $p < n - m$,
но их мы исключим из рассмотрения. Отметим также, что если
для любых точек проективного пространства выполняется усло-
вие

$$\text{rang} \parallel a_{\alpha\beta}^A x^\beta \parallel \leq q$$

и существует хотя бы одна точка пространства, для которой
этот ранг в точности равен q , то, как показал Г.Б.Гуревич
[4], между S и q есть зависимость вида

$$q \leq S \leq \frac{1}{2} q (q + 1).$$

Отсюда следует, что в P_n существует открытое под-
множество, точкам которого соответствует связка гиперплоско-
стей

$$\begin{cases} A \\ \alpha \end{cases} = a_{\alpha\beta}^A x^\beta$$

ранга q , определяющих $(n - q)$ -плоскость -
 q -полю этой точки. Q -поверхность может и не
принадлежать этому подмножеству и тогда $p < q$. Так, на-
пример, норм-кривая 3-го порядка $\vec{x} = (1, t, t^2, t^3)$ оп-
ределяется пересечением $S = 3$ квадрик в P_3 и $p = 2$,

$$q = S = 3.$$

Система тензоров $a_{\alpha\beta}^A$ определяет в пространстве сим-
метрических тензоров 2-й валентности S -мерное под -

пространство V_S , с помощью которого можно определить расслоение-произведение в смысле [5, с. 22] с базой Q -поверхностью и слоем V_S .

Подрасслоение этого расслоения, определенное с помощью связующего тензора

$$a_{\bar{a}}^A = a^A(\vec{x}, \vec{x}_{\bar{a}}), \quad (3.3)$$

назовем главным расслоением Q -поверхности. Легко видеть, что матрица, составленная из координат этого тензора, имеет в некоторой окрестности точки $\vec{x}$ Q -поверхности ранг $p = n - m$ и что этот тензор не зависит от выбора нормализации. Дифференцируя обе части равенства (3.1) по криволинейным координатам, получим в силу (2.2)

$$a^A(\vec{x}, \vec{y}_i) = 0$$

и

$$a^A(\vec{y}_i, \vec{y}_j) + b_{ij}^{\bar{a}} a_{\bar{a}}^A = 0. \quad (3.4)$$

Отсюда следует, что основной тензор Q -поверхности

$$g_{ij}^A = a^A(\vec{y}_i, \vec{y}_j) \quad (3.5)$$

принадлежит индексом A главному расслоению и вполне определяется асимптотическим тензором Q -поверхности. Его ковариантная производная равна

$$\nabla_k g_{ij}^A = 2 l_k g_{ij}^A + 2 b_{k(i}^{\bar{a}} a_{j)\bar{a}}^A, \quad (3.6)$$

где

$$a_{i\bar{a}}^A = a^A(\vec{y}_i, \vec{x}_{\bar{a}}) = \nabla_i a_{\bar{a}}^A - l_i a_{\bar{a}}^A. \quad (3.7)$$

Тензоры (3.3) и (3.7) определяют второе главное подрасслоение расслоения-произведения, базис слоя которого может быть определен тензорами $a_{\bar{a}}^A$ и $b_{\bar{a}}^A$, рассматриваемыми как векторы в V_S , так что

$$a_{i\bar{a}}^A = a_{i\bar{a}}^{\bar{c}} a_{\bar{c}}^A + a_{i\bar{a}}^{\bar{c}} b_{\bar{c}}^A \quad (\bar{c} = \overline{1, p'}, p' \leq s-p). \quad (3.8)$$

Тензор $a_{i\bar{a}}^{\bar{c}}$ не зависит от выбора нормализации, а тензор $a_{i\bar{a}}^{\bar{c}}$ преобразуется по закону

$$a_{i\bar{a}}^{*\bar{c}} = a_{i\bar{a}}^{\bar{c}} + \rho_i \delta_{\bar{a}}^{\bar{c}} - b_{\kappa i}^{\bar{c}} \rho_{\bar{a}}^{\kappa}. \quad (3.9)$$

Дифференцируя обе части равенства (3.4), получим, что асимптотический тензор Q -поверхности удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\nabla_{\kappa} v_{ij}^{\bar{a}} = \rho_{\kappa} v_{ij}^{\bar{a}} - 3 a_{(\kappa i \bar{c}}^{\bar{a}} v_{j)}^{\bar{c}} \quad (3.10)$$

и системе линейных однородных уравнений вида

$$v_{ij}^{\bar{c}} a_{\kappa) \bar{c}}^{\bar{a}} = 0. \quad (3.11)$$

Из (3.10) следует, что нулевые линии асимптотического тензора (если они существуют)

$$v_{ij}^{\bar{a}} du^i du^j = 0$$

будут геодезическими ее внутренней геометрии 1-го рода, что является обобщением свойств асимптотических линий «квадрики».

Определим на поверхности поле тензора $C_{ij}^{\bar{a}}$ и тем самым определим нормализацию ее семейства касательных плоскостей, а, следовательно, и ее геометрию 2-го рода. За счет выбора вершин нормали $\frac{1}{2}$ -го рода, т.е. за счет поляризации семейства, тензор $a_{i\bar{a}}^{\bar{c}}$ всегда можно привести к виду

$$a_{i\bar{a}}^{\bar{c}} = g_{\bar{a}}^u C_{oi}^{\bar{c}}. \quad (3.12)$$

Q -поверхности, для которых $g_{\bar{a}}^n = 0$, характеризуются тем, что при соответствующем выборе нормализации их внутренние геометрии 1-го и 2-го рода совпадают. Примером таких поверхностей могут служить поверхности Грассмана, нормализованные в смысле [2]. Асимптотический тензор поверхности Грассмана определяется заданием тензора m_{ia}^p (в обозначениях статьи [2]) и равен

$$b_{ijab}^{pq} = 4 m_{i[a}^{[p} m_{j]b]}^{q]} \quad (3.13)$$

Его взаимный тензор $b_{pq}^{ijab} = 4 m_{[a}^{i[p} m_{b]}^{j]q]}$ однозначно определяет нормализацию касательных плоскостей поверхности Грассмана.

Л и т е р а т у р а

1. Н о р д е н А.П. Композиции проективного пространства. - "Изв.вузов.Математика" 1978, № 6, с. 98 - 101.
2. Н е й ф е л ь д Э. Г. Аффинные связности на нормализованном многообразии плоскостей проективного пространства. - "Изв. вузов. Математика", 1976, № 11, с. 48 - 55.
3. Н о р д е н А. П. Пространства аффинной связности. М., "Наука", 1976.
4. Г у р е в и ч Г. Б. Алгебра тривектора, ч. 11. - Труды семинара по векторному и тензорному анализу, вып.У1. М. - Л., ОГИЗ, 1948.
5. Х ь ю з м о л л е р Д.Расслоенные пространства. М., "Мир", 1970.

Поэтому $\bar{\theta}(p, v(p)) = \theta(\pi(p), w(\pi(p)))$.
 Теперь $x \rightarrow \theta(x, w(x))$ — сечение расслоения $T^*M \otimes T^*M$,
 и по условию $\exists x_0: \theta(x_0, w(x_0))(X) = \lambda X, \forall X \in T_{x_0}M$. Тогда

$$\forall p \in \pi^{-1}(x_0) \quad \bar{\theta}(p, v(p))(X) = \lambda X, \forall X \in T_{\pi(p)}M,$$

и по определению $\bar{\theta} : \pi_* (\nabla_X \delta(v(p))) = \pi_* (\nabla_X Z) = \lambda X$,
 что и доказывает теорему.

В заключение автор приносит благодарность своему научному руководителю А. П. Нордену за помощь в процессе работы над этой статьей, а также Б. Н. Шапукову за обсуждение некоторых вопросов, связанных с результатами этой работы.

Литература

1. Шапуков Б. Н. Связности на дифференцируемых расслоениях. — Проблемы геометрии, 1983, т. 15, с. 61 — 94.
2. Кобаяси Ш., Номидзу К. Основы дифференциальной геометрии. М., 1981. — 344 с.
3. Егизарян К. М. О проектировании инвариантных связностей на главных расслоенных пространствах. — Изв. вузов. Матем., 1978, № 7, с. 97 — 101.
4. Егизарян К. М. Спроектированные инвариантные аффинные связности. — Тр. геометр. семинара, 1980, вып. 12, с. 29 — 55.
5. Мищенко А. С. Векторные расслоения и их применения. М., 1984, — 206 с.
6. Бурбаки Н. Группы и алгебры Ли. М., 1978.

Э. Г. Нейфельд

КОНФОРМНЫЕ ПРОСТРАНСТВА НАД АЛГЕБРАМИ

1. Эрмиквадрики в проективном пространстве над алгеброй

В [1] было определено правое проективное пространство $\mathcal{P}(E, A)$ над ассоциативной, унитарной алгеброй A с правым модулем-носителем E как многообразие всех его регулярных присоединенных пространств, т. е. подпространств, изоморфных самой алгебре A . Многообразие всех регулярных присоединен-

ных подпространств дуального модуля E^* есть левое проективное пространство $\Pi(E^*A)$ — пространство гиперплоскостей пространства $\mathcal{P}(E, A)$. Таким образом, точке $X \in \mathcal{P}(E, A)$ соответствует A -псевдовектор, т. е. класс A — коллинеарных между собой векторов

$$X^* = Xa, \quad \forall a \in A', \quad (1.1)$$

где A' — множество всех обратимых элементов алгебры A , при условии, что присоединенные векторы

$$X_a = X\ell_a, \quad a, b, c = \overline{1, n} = \dim A \quad (1.2)$$

линейно независимы.

Аналогично гиперплоскость E определяется A -псевдовектором

$$E^* = \ell E, \quad \forall \ell \in A' \quad (1.3)$$

или, что то же, присоединенными ковекторами

$$E_\alpha = \ell_\alpha E. \quad (1.4)$$

Гиперплоскость E и точка X q инцидентны, если

$$rank \parallel E_\alpha X_\beta \parallel = q < n, \quad (1.5)$$

и просто инцидентны при $q = 0$. Из тождества

$$\vec{E}_\beta X_\alpha = \gamma_{ab}^c E_\alpha X_c, \quad (\ell_\alpha \ell_\beta = \gamma_{ab}^c \ell_c) \quad (1.6)$$

следует, что неинцидентные точки и гиперплоскости существуют тогда и только тогда, когда алгебра A фробениусова. В дальнейшем будет рассмотрен только этот случай.

Алгебра A будет алгеброй с инволюцией, если существует инволютивный антиавтоморфизм ρ , $\bar{a} \stackrel{\text{def}}{=} \rho a$ [2, с. 436.] В этом случае в A всегда можно выбрать базис единиц $\{\ell_\alpha\}$ так, что

$$\bar{\ell}_{\alpha_1} = \ell_{\alpha_1}, \bar{\ell}_{\alpha_2} = -\ell_{\alpha_2} \quad (\alpha_1, \beta_1 = 1, S, \alpha_2, \beta_2 = S+1, \tau) \quad (1.7)$$

Заметим, что S есть арифметический вариант алгебры, причем случай $S = \tau$ возможен тогда и только тогда, когда алгебра A коммутативна. В дальнейшем будем рассматривать только алгебры с инволюцией.

Билинейную форму $A(X, Y)$ со значением в A назовем эрмитово-симметрической, если она удовлетворяет условиям

$$\overline{A(X, Y)} = A(Y, X) \quad (1.8)$$

и

$$A(X, Y\alpha) = A(X, Y). \quad (1.9)$$

Выберем в модуле E базис $\{E_\alpha\} (\alpha, \beta, \dots = 1, n = \dim E)$. Тогда

$$A_{\alpha\beta} \stackrel{\text{def}}{=} A(E_\alpha, E_\beta) = a_{\alpha\beta} \ell_\alpha, \quad (1.10)$$

а условия (1.8) и (1.9) равносильны условиям

$$\overline{A_{\alpha\beta}} = A_{\beta\alpha}, \quad A_{\alpha\lambda} c_{\beta\alpha}^\lambda = A_{\alpha\beta} \ell_\alpha, \quad (1.11)$$

где $c_{\alpha\beta}^\lambda$ - структурные коэффициенты модуля, определенные раз-

ложениями

$$E_{\alpha} \varrho_{\alpha} = C_{\alpha}^{\lambda} E_{\lambda}.$$

Тензор

$$a_{\alpha\beta}(\psi) \stackrel{\text{def}}{=} a_{\alpha\beta} \psi_{\alpha}, \quad (1.12)$$

где ψ_{α} — неособенный ковектор алгебры $\mathcal{A}$, назовем подчиненным тензором тензора $A_{\alpha\beta}$. Из (1.11) следует, что любой подчиненный тензор определяет тензор $A_{\alpha\beta}$

$$a_{\alpha\beta}^{\alpha} = a_{\alpha\lambda}(\psi) C_{\beta\sigma}^{\lambda} \psi^{\sigma}; \quad \psi_{\alpha} \psi_{\beta}^{\alpha} = \delta_{\beta}^{\alpha}. \quad (1.13)$$

Тензор $A_{\alpha\beta}$ назовем невырожденным, если невырожден какой-нибудь его подчиненный тензор. Очевидно, что это условие не зависит от выбора подчиненного тензора, так как для двух подчиненных тензоров имеет место формула перехода

$$a_{\alpha\beta}(\psi) = a_{\alpha\lambda}(\psi) C_{\beta\sigma}^{\lambda} \psi^{\sigma} \psi_{\alpha}^{\sigma}. \quad (1.14)$$

Эрмитова симметрическая форма определяет в E конус коразмерности

$$A(X, X) = 0. \quad (1.15)$$

Из (1.9) следует, что это уравнение равносильно уравнению

$$A(X_{\alpha}, X_{\beta}) = 0.$$

Отсюда следует, что уравнение (1.15) определяет в проективном пространстве над алгеброй $\mathcal{P}(E, \mathcal{A})$ $(n-r-s)$ -мерную

поверхность, которую назовем эрмиквадрикой и обозначим $Q(E, A, \rho)$. В дальнейшем мы будем рассматривать только эрмиквадрики без особых точек, что равносильно невырожденности тензора H_{ρ} . Задание эрмиквадрики $Q(E, A, \rho)$ в $P(E, A)$ определяет в этом пространстве поляризацию в смысле [1], внутренняя геометрия которой рассматривалась в [3].

Если алгебра A коммутативна, то ρ есть ее автоморфизм. В этом случае возможен и случай, когда $\rho - \varepsilon$ есть тождественный автоморфизм и $Q(E, A, \varepsilon)$ будет квадрикой, т. е. гиперповерхностью второго порядка над алгеброй A коразмерности r .

2. Определение конформного пространства над алгеброй и его поляризации

Под конформным пространством над алгеброй A с инволюцией ρ будем понимать пространство, образом точки которого есть точка невырожденной эрмиквадрики $Q(E, A, \rho) \subset P(E, A)$, а фундаментальной группой служит группа автоморфизмов этой эрмиквадрики. В конформном пространстве над алгеброй, которое будем для краткости обозначать $Q(E, A, \rho)$, так же, как и в вещественном случае [4, с. 278], можно определить, во-обще говоря, локально класс геометрий, которые можно рассматривать как естественное обобщение конформно-евклидовой геометрии Вейля.

Все эти внутренние геометрии конформного пространства будем определять с помощью поляризации этого пространства, задаваемой дифференцируемым отображением

$$\pi : \mathcal{D} \rightarrow Q(E, A, \rho),$$

где область определения поляризации $\mathcal{D}$ есть открытое подмножество в $Q(E, A, \rho)$.

Точка $X \in \mathcal{D}$ есть особая точка поляризации, если она связана со своей поляризующей точкой $Z = \pi(X)$ в том смысле, что $A(X, Z)$ есть делитель нуля алгебры A . Множество всех таких точек назовем абсолютном поляризации $\Omega(\pi)$. Поляризация эффективна, если множество

$$\mathcal{N}(Q, \mathcal{D}, \pi) \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{D} \setminus \Omega(\pi)$$

открыто в $\mathcal{D}$. Это множество назовем нормализованным конформным пространством над алгеброй A . В случае $A = \mathbb{R}$ пространство $\mathcal{N}(Q, \mathcal{D}, \mathcal{K})$ есть, очевидно, нормализованное конформное пространство А. П. Нордена [4, с. 278].

Поляризацию $\mathcal{N}$ в локальных координатах определим уравнениями

$$X = X(u^{\alpha}), \mathcal{Z} = \mathcal{Z}(u^{\alpha}) \text{ (теперь } \alpha, \beta, \delta, \dots = 1, n-2-s) \quad (2.1)$$

представляющими собой параметризацию соответствия $\mathcal{Z} = \mathcal{N}(X)$. Функции (2.1) определены с точностью до произвольного функционального множителя со значением в A . Произвол одного из этих множителей можно устранить, вводя относительное нормирование

$$A(X, \mathcal{Z}) = \ell. \quad (2.2)$$

Тогда при перенормировании

$$X^* = X \alpha \quad (2.3)$$

имеем

$$\mathcal{Z}^* = \mathcal{Z} \bar{\alpha}^{-1}. \quad (2.4)$$

Проективную прямую над алгеброй A , определенную точками X и $\mathcal{Z}$, примем за нормаль 1-го рода, а ее поляру относительно эрмиквадрики — за нормаль 2-го рода. Последняя определяется базисными векторами своего носителя, удовлетворяющими уравнениям

$$A(X, Y_i) = A(\mathcal{Z}, Y_i) = 0 \quad (i, j, k = 1, n-2). \quad (2.5)$$

Из того, что носитель есть подмодуль в E , следует

$$y_i \ell_a = \Delta_{ia}^{\kappa} y_{\kappa}, \quad (2.6)$$

и Δ_{ia}^{κ} будут его структурными аффинорами.

Базис $\{y_i\}$ назовем согласованным с перенормированием (2.3), если при этом перенормировании векторы базиса преобразуются по закону

$$y_i^* = y_i \alpha = \Delta_{ia}^{\kappa}(\alpha) y_{\kappa}, \quad \Delta_{ia}^{\kappa}(\alpha) \stackrel{\text{def}}{=} \Delta_{ia}^{\kappa} \alpha, \quad (2.7)$$

что будем предполагать в дальнейшем. Тогда структурные аффиноры (2.6) преобразуются по закону

$$\Delta_{ia}^{\kappa} \stackrel{*}{=} \Delta_{ia}^{\kappa}(\alpha \ell_a \alpha^{-1}), \quad (2.8)$$

т. е. определяются с точностью до внутреннего автоморфизма алгебры A .

Векторы $X_a = X \ell_a$, $Z = Z \ell_a$ и y_i образуют базис в E . Поэтому деривационные уравнения 1-го порядка поля ризованного конформного пространства над алгеброй примут вид

$$\begin{aligned} \partial_{\alpha} X &= X L_{\alpha} + Z M_{\alpha} + v_{\alpha}^i y_i, \\ \partial_{\alpha} Z &= -Z \bar{L}_{\alpha} + X N_{\alpha} + c_{\alpha}^i y_i \end{aligned} \quad (2.9)$$

$$\nabla_{\alpha} y_i \stackrel{\text{def}}{=} \partial_{\alpha} y_i - \Gamma_{\alpha i}^{\kappa} y_{\kappa} = y_i L_{\alpha} - c_{\alpha}^{\kappa} X G_{\kappa i} - v_{\alpha}^{\kappa} Z G_{\kappa i},$$

где все коэффициенты, стоящие справа, принимают значение в алгебре A . Опорные тензоры M_{α} и N_{α} удовлетворяют условиям

$$\bar{M}_\alpha = -M_\alpha, \quad \bar{N}_\alpha = -N_\alpha \quad (2.10)$$

и при перенормировании (2.3) преобразуются по закону

$$* M_\alpha = \bar{a} M_\alpha a, \quad * N_\alpha = a^{-1} N_\alpha \bar{a}^{-1}. \quad (2.11)$$

Легко видеть, что L_α есть нормализатор со значением в алгебре $\mathcal{A}$, определяющий связность в радиальном расщеплении [1].

Опорный тензор M_α определяет полярное распределение, плоскости которого имеют размерность $n-2\ell$, а базисные векторы находятся из уравнений

$$M_\alpha v_i^\alpha = 0, \quad v_i^\alpha v_\alpha^j = \delta_i^j. \quad (2.12)$$

Связность с коэффициентами $\Gamma_{\alpha i}^{\kappa}$ относительно нормирования (2.3) связность в этом распределении, аналог конформно-евклидовой связности Вейля вещественного случая, а тензор

$$G_{ij} \stackrel{\text{def}}{=} A(y_i, y_j) \quad (2.13)$$

играет роль основного тензора возникающей в полярном распределении геометрии. Он удовлетворяет условиям эрмитовой симметрии, т. е.

$$G_{ij} = G_{ji}, \quad G_{i\kappa} \Delta_{j\alpha}^{\kappa} = G_{ij} \ell_\alpha, \quad (2.14)$$

а при перенормировании преобразуется по закону

$$* G_{ij} = \bar{a} G_{ij} a. \quad (2.15)$$

Далее

$$\nabla_{\alpha} G_{ij} = \bar{L}_{\alpha} G_{ij} + G_{ij} L_{\alpha}, \quad (2.16)$$

что позволяет говорить о геометрии типа Вейля над алгеброй в полярном распределении.

Угол между двумя векторами полярного распределения

$$v^{\alpha} = \theta_i^{\alpha} v^i, \quad w^{\alpha} = \theta_i^{\alpha} w^i$$

может быть определен по формуле

$$\cos^2 \varphi = (v, v)^{-1} (v, w) (w, w)^{-1} (w, v), \quad (2.17)$$

где

$$(v, w) \stackrel{\text{def}}{=} G_{ij} v^i w^j,$$

и аргумент $\varphi = \varphi_{\alpha}^{\alpha}$ определяется с точностью до внутреннего автоморфизма алгебры. Заметим, что его координаты φ^{α} могут принимать и мнимые значения. Угловое мероопределение (2.17) не зависит от перенормирования основного тензора (2.15) и от перенормирования самих векторов

$$v^{*i} = \Delta_{\kappa}^i(\alpha) v^{\kappa}, \quad w^{*i} = \Delta_{\kappa}^i(\beta) w^{\kappa}.$$

Отсюда следует, что формула (2.17) определяет угол между двумя $\mathcal{A}$ -псевдовекторами или $\mathcal{A}$ -направлениями этого распределения. $\mathcal{A}$ -направления ортогональны, если

$$(v, w) = 0.$$

В силу (2.16) это отношение ортогональности сохраняется при $\mathcal{A}$ -планарных перенесениях этих $\mathcal{A}$ -направлений в смысле [5]

$$\partial v^i = \Delta_{\kappa}^i(\varphi) v^{\kappa}, \quad \partial w^i = \Delta_{\kappa}^i(\varphi) w^{\kappa}.$$

Условия интегрируемости уравнений (2.9) имеют вид:

$$\partial_{[\alpha \beta]} L_{\kappa} + L_{[\alpha \beta]} L_{\kappa} + N_{[\alpha \beta]} M_{\kappa} - C_{[\alpha \beta]}^{\kappa} v^i G_{\kappa i} = 0, \quad (2.18)$$

$$\partial_{[\alpha \beta]} M_{\kappa} + M_{[\alpha \beta]} L_{\kappa} - \bar{L}_{[\alpha \beta]} M_{\kappa} - v^{\kappa} v^i G_{\kappa i} = 0, \quad (2.19)$$

$$\partial_{[\alpha \beta]} N_{\kappa} - N_{[\alpha \beta]} \bar{L}_{\kappa} + L_{[\alpha \beta]} N_{\kappa} - C_{[\alpha \beta]}^{\kappa} c^i G_{\kappa i} = 0, \quad (2.20)$$

$$\partial_{[\alpha \beta]} v^i + \Gamma_{[\alpha \kappa] \beta}^i v^{\kappa} + C_{[\alpha \kappa] \beta}^{\kappa} \Delta_{\kappa}^i(M_{\beta}) = 0, \quad (2.21)$$

$$\partial_{[\alpha \beta]} c^i + \Gamma_{[\alpha \kappa] \beta}^i c^{\kappa} - C_{[\alpha \kappa] \beta}^{\kappa} \Delta_{\kappa}^i(L_{\beta} + \bar{L}_{\beta}) + \\ + v^{\kappa} \Delta_{\kappa}^i(N_{\beta}) = 0 \quad (2.22)$$

и

$$R_{\alpha \beta i}^{\kappa} = 2 \Delta_{i \kappa}^{\kappa} (N_{\beta}) - 2 C_{[\alpha \beta]}^{\kappa} v^i (\Delta_{i \kappa}^{\kappa} (G_{m n}) + \\ + \Delta_{n \kappa}^{\kappa} (G_{m i}) - \Delta_{m \kappa}^{\kappa} (G_{n i})). \quad (2.23)$$

3. Связности на самом конформном пространстве $Q(E, A, \rho)$

Поляризация конформного пространства $Q(E, A, \rho)$ определяет нормализацию эрмиквადрики в смысле [1]. Нормальное подпространство 2-го рода строится как линейная оболочка векторов

$$y_{\alpha} = \mathcal{L} M_{\alpha} + v_{\alpha}^i y_i, \quad (3.1)$$

а нормальное подпространство 1-го рода - как линейная оболочка векторов

$$X_p = \mathcal{Z} S_p \quad (p, q, \dots = \overline{1, s}), \quad (3.2)$$

где S_p удовлетворяют условиям

$$S_p = S_p^{a_1} l_{a_1}, \quad \text{def} \| S_p^{a_1} \| \neq 0, \quad (3.3)$$

а в остальном произвольны. Поэтому всегда можно положить

$$S_p^{a_1} = \delta_p^{a_1}. \quad (3.4)$$

Дифференцируя обе части равенств (3.1) и (3.2) и используя дериационные уравнения 2-го порядка [1]

$$\nabla_\alpha y_\beta = y_\beta L_\alpha + X_{\alpha\beta}^D + v_{\alpha\beta}^p X_p, \quad (3.5)$$

$$\nabla_\alpha X_p = X_p L_\alpha + X_{\alpha p}^N + c_{\alpha p}^k y_k,$$

получим

$$\nabla_\alpha M_\beta = M_\beta L_\alpha + \bar{L}_\alpha M_\beta + v_\alpha^i v_\beta^j G_{ij} + v_{\alpha\beta}^p S_p, \quad (3.6)$$

$$\nabla_\alpha v_\beta^i = -c_\alpha^k \Delta_k^i (M_\beta). \quad (3.7)$$

Первое из этих равенств распадается на два:

$$\nabla_{\alpha} M_{\beta} = M_{\beta} L_{\alpha} + \overline{L}_{\alpha} M_{\beta} + v_{[\alpha}^i v_{\beta]}^j G_{ij} \quad (3.8)$$

и

$$v_{\alpha\beta}^{\rho} S_{\rho} = -v_{(\alpha}^i v_{\beta)}^j G_{ij}. \quad (3.9)$$

Уравнения (3.7) и (3.8) определяют на конформном пространстве над алгеброй аффинную связность, которая в силу (2.19) не будет иметь кручения. Это внутренняя связность 1-го рода поляризованного конформного пространства над алгеброй. Далее, уравнения (3.8) и (3.7) можно рассматривать как деривационные уравнения полярного распределения и нормального распределения, определенного ковекторами v_{α}^i . Отметим также формулы

$$\nabla_{\alpha} S_{\rho} = S_{\rho} L_{\alpha} + \overline{L}_{\alpha} S_{\rho}, \quad c_{\alpha\rho}^{\beta} M_{\beta} = 0, \quad c_{\alpha\rho}^{\beta} v_{\beta}^i = c_{\alpha}^{\kappa} \Delta_{\kappa\rho}^i(S),$$

которые следуют из второго деривационного уравнения (3.5).

Если поляризующая точка $\mathcal{Z}$ зависит от $n - \tau - S$ существенных параметров, то на $Q(E, A, \rho)$ возникает связность 2-го рода без кручения, коэффициенты которой находятся из деривационных уравнений распределений $\mathcal{N}_{\alpha}^i$ и c_{α}^i

$$\nabla_{(\alpha)} \mathcal{N}_{\beta)}^i = -L_{\alpha} \mathcal{N}_{\beta}^i - \mathcal{N}_{\beta}^i \overline{L}_{\alpha} + c_{[\alpha}^{\kappa} c_{\beta]}^i G_{\kappa i}$$

$$\nabla_{(\alpha)} c_{\beta)}^i = c_{\alpha}^{\kappa} \Delta_{\kappa\beta}^i (L_{\beta} + \overline{L}_{\beta}) - v_{\alpha}^{\kappa} \Delta_{\kappa\beta}^i (\mathcal{N}_{\beta}^i).$$

Преобразование поляризации на $Q(E, A, \rho)$ определяется заданием векторного поля P_{α} , инвариантного относительно перенормирования (2.3), которое задает преобразование поляризующей точки

$$\overset{\vee}{\mathcal{L}} = \mathcal{L} - \chi(R - \frac{1}{2}(p, p)) + p^i y_i, \quad (3.10)$$

где

$$R = \overset{\vee}{N}_\alpha P^\alpha, \quad p^i = C_\alpha^i P^\alpha,$$

что влечет за собой преобразование

$$\overset{\vee}{y}_i = y_i - p^\kappa \chi G_{\kappa i}. \quad (3.11)$$

Отсюда следует, что

$$\overset{\vee}{M}_\alpha = M_\alpha, \quad (3.12)$$

и, следовательно, полярное распределение инвариантно. Базисные ковекторы нормального распределения преобразуются по закону

$$\overset{\vee}{v}_\alpha^i = v_\alpha^i - \Delta_\kappa^i(M_\alpha) p^\kappa. \quad (3.13)$$

Основной тензор G_{ij} также не зависит от выбора поляризации, а преобразование нормализатора определяется формулой

$$\overset{\vee}{L}_\alpha = L_\alpha - (R + \frac{1}{2}(p, p)) M_\alpha + G_{ij} p^i v_\alpha^j. \quad (3.14)$$

Преобразование связности в полярном распределении имеет вид

$$\begin{aligned} \Gamma_{\alpha i}^{\nu \kappa} = & \Gamma_{\alpha i}^{\kappa} - \rho \delta_{\alpha}^{m n} \left\{ \Delta_i^{\kappa}(G_{mn}) + \Delta_n^{\kappa}(G_{mi}) - \Delta_m^{\kappa}(G_{ni}) \right\} + \\ & + \Delta_i^{\kappa}(R M_{\alpha}) + \frac{1}{2} \Delta_i^{\kappa}((\rho, \rho) M_{\alpha}) + \Delta_m^{\kappa}(M_{\alpha} G_{ni}) \rho \rho \end{aligned} \quad (3.15)$$

и будет обобщением конформного преобразования связности Вейля над алгеброй.

Любая поляризация пространства $Q(E, A, \rho)$ может быть получена преобразованием (3.10) из поляризации, определенной постоянной точкой

$$\mathcal{L} = c.$$

Выбрав точку $X_0 = A$ так, что $A(A, c) = c$, получим уравнение эрмиквдрики в виде

$$X = A + t^i B_i + c \left(u - \frac{1}{2} (t, t) \right), \quad (3.16)$$

отнесенное к параметрам t^i , определяющим точку $A + t^i B_i$ на поляре точки A , и $u = -\bar{u} = \rho u^{\rho}$. При такой параметризации

$$y_i = B_i - t^{\kappa} c G_{\kappa i}, \quad (3.17)$$

а опорный тензор M_{α} имеет координаты.

$$M_i = G_{[\kappa i]} t^{\kappa}, \quad M_{\rho} = c_{\rho}. \quad (3.18)$$

Далее

$$L_{\alpha} = \mathcal{N}_{\alpha} = 0, \quad c_{\alpha}^i = 0, \quad \delta_{\alpha}^i = \delta_{\alpha}^i,$$

и связность в полярном распределении, как и связность 1-го рода, нулевой кривизны.

Поляризация типа инверсии относительно гиперсферы конформного пространства над алгеброй, соответствующей точке пространства $C \in P(E, A)$ в случае $A(C, C) \in A$, приводит к геометрии, определенной поляритетом в проективном пространстве $P(E, A)$, где $\dim E = n - 2$ [3].

Если алгебра коммутативна, то, как уже говорилось, существуют пространства, для которых ρ — тождественный автоморфизм. В этом случае полярное распределение совпадает с касательным расслоением, и $M_\alpha = N_\alpha = 0$.

Литература

1. Нейфельд Э. Г. Геометрия поверхности в проективном пространстве над алгеброй. — Геометрия обобщенных пространств. Уфа, 1982, с. 32 — 51.

2. Розенфельд Б. А. Неевклидовы геометрии. М., 1955.

3. Нейфельд Э. Г. О геометриях, определяемых поляритетом в проективном пространстве над алгеброй. — Тр. геометр. семинара, 1983, вып. 15, с. 64 — 66.

4. Норден А. П. Пространства аффинной связности. М., 1976.

5. Талапин В. С. A -планарные преобразования связности в вещественных реализациях многообразий над алгебрами. — Изв. вузов. Математ., 1979, № 12, с. 72 — 76.

В. А. Пилипосян

О ГЕОДЕЗИЧЕСКОМ ОТОБРАЖЕНИИ КАСАТЕЛЬНЫХ РАССЛОЕНИЙ

В работе рассматривается отображение касательных расслоений, которое сохраняет касательную структуру. Найден вид ковектора геодезического отображения и определена связность, геодезические линии которой проектируются с помощью естественной проекции на геодезические линии базы, и которая допускает геодезическое отображение на связность полного лифта.

Э.Г.Нейфельд

ОБ ИНВОЛЮЦИЯХ В КОМПЛЕКСНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

§ I. Вещественная реализация и комплексификация векторных пространств

Векторное пространство V_{2n} над полем вещественных чисел $\mathcal{R}$ есть вещественная реализация комплексного векторного пространства $V_n(\mathcal{C})$, если задано линейное отображение

$$m: V_{2n} \rightarrow V_n(\mathcal{C}),$$

соответствующее аффинору m_α^A , координаты которого определяются из разложений

$$m e_\alpha = m_\alpha^A E_A, \quad (\alpha, \beta, \gamma, \dots = \overline{1, 2n}, \quad A, B, C, \dots = \overline{1, n}), \quad (1.1)$$

где $\{e_\alpha\}, \{E_A\}$ - базисы пространств V_{2n} и $V_n(\mathcal{C})$, причем матрица $\begin{pmatrix} m_\alpha^A \\ \bar{m}_\alpha^A \end{pmatrix}$ должна быть невырожденной.

Каждому вектору $x = e_\alpha x^\alpha \in V_{2n}$ соответствует комплексный вектор $X = E_A X^A$,

$$X^A = m_\alpha^A x^\alpha. \quad (1.2)$$

Определим взаимный аффинор m_A^α , удовлетворяющий условиям

$$m_A^\alpha m_\alpha^B = \delta_A^B, \quad m_A^\alpha \bar{m}_\alpha^B = 0. \quad (1.3)$$

Тогда

$$x^\alpha = m_A^\alpha X^A + \text{conj } j. \quad (1.4)$$

Здесь conj означает члены, сопряженные предшествующим. Легко видеть, что

$$\Delta_{\beta}^{\alpha} \stackrel{\text{def}}{=} m_A^{\alpha} m_{\beta}^A = \frac{1}{2} (\delta_{\beta}^{\alpha} + i f_{\beta}^{\alpha}) \quad (I.5)$$

есть комплексный единичный аффино́р А.П.Нордена [1], а f_{α}^{β} — аффино́р комплексной структуры, причем

$$f_{\lambda}^{\alpha} m_A^{\lambda} = -i m_A^{\alpha}, \quad (I.6)$$

откуда следует, что аффино́ры f_{λ}^{α} и m_A^{α} взаимно определяют друг друга. Пространство вещественной реализации в дальнейшем будем обозначать через $V_{2n}(f)$. Заметим, что это векторное бипланарное пространство.

Аффино́ры m_{α}^A и m_A^{α} позволяют более просто осуществлять вещественную реализацию комплексных тензоров и находить соответствующие комплексные тензорные и эрмитовы образы вещественных тензоров. Например, если

$$A_{AB} = m_A^{\alpha} m_B^{\beta} \alpha_{\alpha\beta}, \quad A_{A\bar{B}} = m_A^{\alpha} \bar{m}_B^{\beta} \alpha_{\alpha\beta} \quad (I.7)$$

тензорный и эрмитов образы (тензор и эрмитиан [2]) тензора $\alpha_{\alpha\beta}$, то

$$\alpha_{\alpha\beta} = m_{\alpha}^A m_{\beta}^B A_{AB} + m_{\alpha}^A \bar{m}_{\beta}^B A_{A\bar{B}} + \text{conj}. \quad (I.8)$$

Векторное пространство $V_n(\mathbb{C})$ есть комплексификация вещественного пространства V_n , если задано вложение

$$\delta^n: V_n \rightarrow V_n(\mathbb{C})$$

такое, что

$$V_{2n}(f) = V_n \oplus \tilde{V}_n,$$

где $\tilde{V}_n$ образовано всеми присоединенными векторами

$$\tilde{x} = fx \iff \tilde{x}^{\alpha} = f_{\lambda}^{\alpha} x^{\lambda}, \quad V_x \in V_n. \quad (I.9)$$

Поэтому, если $a_\alpha = e_\alpha a_\alpha^\alpha$ - базисные векторы подпространства

$V_n(a, b, c=1, n)$ и a_α^α :

$$a_\alpha^\alpha a_\beta^\alpha = \delta_{\beta\alpha}^\alpha, \quad a_\alpha^\alpha \tilde{a}_\beta^\alpha = 0, \quad (I.10)$$

то вложению соответствует инволютивный аффинор гиперболического типа

$$S_\beta^\alpha = a_\alpha^\alpha a_\beta^\alpha + \tilde{a}_\alpha^\alpha \tilde{a}_\beta^\alpha, \quad (I.11)$$

определенный с точностью до знака и удовлетворяющий условиям

$$S_\lambda^\alpha S_\beta^\lambda = \delta_{\beta\alpha}^\alpha, \quad S_\alpha^\alpha = 0. \quad (I.12)$$

Условие

$$f_\lambda^\alpha S_\beta^\lambda = -S_\lambda^\alpha f_\beta^\lambda \quad (I.13)$$

есть необходимое и достаточное условие того, что аффинор, удовлетворяющий условиям (I.12), определял вложение V_n в $V_{2n}(f)$, т.е. комплексификацию пространства V_n . Из (I.13) следует, что тензорный образ аффинора S_β^α равен нулю и ему взаимно однозначно соответствует эрмитов инволютивный аффинор

$$S_{\bar{B}}^A = m_\alpha^A \bar{m}_B^\alpha S_\beta^\alpha. \quad (I.14)$$

Условия (I.12) равносильны условиям

$$S_{\bar{B}}^A S_C^{\bar{B}} = \delta_C^A, \quad S_A^{\bar{C}} \stackrel{\text{def}}{=} \bar{S}_{\bar{A}}^C. \quad (I.15)$$

Заметим, что всегда можно в $V_n(\mathbb{C})$ выбрать базис так, что

$$S_{\bar{B}}^A = \delta_{\bar{B}}^A. \quad (I.16)$$

§ 2. Самосопряженные тензоры инволюции в комплексном векторном пространстве

Рассмотрим теперь в $V_n(\mathbb{C})$ инволюцию более общего вида, определенную аффинором S_B^A , удовлетворяющим условию

$$S_B^A S_C^{\bar{B}} = \sigma \delta_C^A, \quad \sigma^2 = 1. \quad (2.1)$$

Случай $\sigma = 1$ соответствует инволюция гиперболического типа, рассмотренная выше. Случай $\sigma = -1$ соответствует инволюция эллиптического типа, существующая только при четном n , так как из (2.1) следует

$$|\det \| S_C^A \| |^2 = \sigma^n.$$

Комплексному тензору A_{AB} будет соответствовать сопряженный (в смысле инволюции (2.1)) тензор

$$\tilde{A}_{AB} \stackrel{\text{def}}{=} S_A^{\bar{C}} S_B^{\bar{D}} \bar{A}_{CD}. \quad (2.2)$$

Тензор A_{AB} назовем по аналогии с [3] самосопряженным, если

$$S_A^{\bar{C}} S_B^{\bar{D}} \bar{A}_{CD} = \lambda A_{AB}. \quad (2.3)$$

Так как $\tilde{\tilde{A}}_{AB} = A_{AB}$, то $\lambda \bar{\lambda} = 1$. Множитель $\lambda = e^{i\varphi}$ назовем фазовым множителем самосопряженного тензора, а φ - его фазой.

Самосопряженному тензору A_{AB} соответствует присоединенный эрмитиан

$$B_{A\bar{B}} \stackrel{\text{def}}{=} A_{AC} S_B^{\bar{C}}, \quad (2.4)$$

который будет самосопряжен с той же фазой.

Если тензор A_{AB} удовлетворяет симметрии ρ :

$$A_{AB} = \rho A_{BA}, \quad (2.5)$$

то его присоединенный эрмитиан обладает симметрией вида

$$\bar{B}_{A\bar{B}} = \sigma \rho e^{i\varphi} B_{B\bar{A}}. \quad (2.6)$$

В случае $\sigma=1$ самосопряженный тензор с фазовым множителем 1 будут комплексифицированными вещественными тензорами. Для доказательства этого утверждения введем связующие аффиноры

$$A_a^A \stackrel{\text{def}}{=} m_a^A a_a^\alpha, \quad A_A^a \stackrel{\text{def}}{=} m_A^\alpha a_\alpha^a. \quad (2.7)$$

Тогда

$$A_a^A A_B^a = \frac{1}{2} \delta_B^A, \quad A_a^A A_A^b = \frac{1}{2} \delta_a^b$$

и для самосопряженного тензора

$$S_{\bar{c}_1}^{A_1} \dots S_{\bar{c}_q}^{A_q} S_{B_1}^{\bar{D}_1} \dots S_{B_p}^{\bar{D}_p} T_{D_1 \dots D_p}^{C_1 \dots C_q} = T_{B_1 \dots B_p}^{A_1 \dots A_q} \quad (2.8)$$

имеем

$$t_{a_1 \dots a_p}^{b_1 \dots b_q} \stackrel{\text{def}}{=} A_{A_1}^{b_1} \dots A_{A_q}^{b_q} A_{a_1}^{A_1} \dots A_{a_p}^{A_p} T_{B_1 \dots B_p}^{A_1 \dots A_q} \in \mathbb{R}. \quad (2.9)$$

Обратно, из (2.9) в силу (2.7) следует, что комплексный тензор

$$T_{A_1 \dots A_p}^{B_1 \dots B_q} = 2^{p+q} A_{B_1}^{b_1} \dots A_{B_q}^{b_q} A_{a_1}^{A_1} \dots A_{a_p}^{A_p} t_{a_1 \dots a_p}^{b_1 \dots b_q} \quad (2.10)$$

самосопряжен типа (2.8).

Далее самосопряженный тензор с фазой φ только множителем $e^{\frac{\varphi + \frac{\pi}{2}k}{i}}$ отличается от самосопряженного тензора типа (2.8) и, следовательно, определяется заданием этого множителя и вещественного тензора пространства $V_n \subset V_{2n}(f)$.

Заметим, что аффиноры $f_\beta^\alpha, s_\rho^\alpha$ и $f_\beta^\alpha, s_\beta^j$ определяют на V_{2n} антикватернионную ($\sigma=1$) или кватернионную ($\sigma=-1$) структуру.

§ 3. Инволюции в комплексном проективном пространстве

Как известно, комплексное проективное пространство $P^n(\mathbb{C})$ ранга n (вещественной размерности $2(n-1)$) есть фактор-пространство $V_n(\mathbb{C})/\mathbb{C}$, где штрих означает отсутствие нулевого

Элемента. Отсюда следует, что образом точки пространства $P^n(\mathbb{C})$ будет класс коллинеарных между собой векторов

$$X^* = \lambda X, \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}, \quad (3.1)$$

определяющих $\mathbb{C}$ -псевдотензор. Фундаментальная группа пространства $P^n(\mathbb{C})$ определена коллинеациями I-го рода

$$\lambda Y = P X \Leftrightarrow \lambda Y^A = P_B^A X^B. \quad (3.2)$$

и 2-го рода

$$\lambda Y = Q \bar{X} \Leftrightarrow \lambda Y^A = Q_B^A \bar{X}^B. \quad (3.3)$$

Коллинеации, совпадающие со своими обратными, будут, естественно, инволюциями пространства $P^n(\mathbb{C})$. Инволюция I-го рода задается аффинором S_B^A

$$S_B^A S_C^B = \delta_C^A \quad (3.4)$$

и определяет в пространстве пару плоскостей дополнительных рангов. Инволюция 2-го рода определяется заданием аффинора S_B^A , удовлетворяющего условию (2.1), который, как легко видеть, будет определен с точностью до преобразования

$$S_B^{*A} = e^{i\alpha} S_B^A. \quad (3.5)$$

При $\sigma=1$ соответствует вещественное подмногообразие самосопряженных (неподвижных) точек этой инволюции

$$S_B^A \bar{X}^B = e^{i\varphi} X^A, \quad (3.6)$$

которое назовем H -поверхностью размерности $n-1$, или H_{n-1} в $P^n(\mathbb{C})$. Исключая произвольный фазовый множитель $e^{i\varphi}$, получим

$$X^{[A} S_{\sigma}^{B]} \bar{X}^C = 0, \quad (3.7)$$

т.е. H -поверхность образована пересечением эрмиквадрик определенного вида. Заметим, что при $n=2$ уравнения (3.7) сводятся к одному, и H_2 есть окружность на комплексной прямой $P^2(\mathbb{C})$.

Легко видеть, что H -поверхность H_{n-1} будет вложением вещественного проективного пространства P^n в комплексное. Такое вложение может быть определено заданием в $P^n(\mathbb{C})$ проективного репера с вершинами A_c^B и единичной точкой

$$E^A = \sum_{c=1}^n A_c^A,$$

относительно которого неоднородные координаты точек H -поверхности

$$X^A = A_1^A + \sum_{\rho=2}^n A_\rho^A z^\rho, \quad \bar{z}^\rho = z^\rho \quad (3.8)$$

вещественны. Отсюда следует, что через $n+1$ точек пространства $P^n(\mathbb{C})$, из которых каждые n независимы, проходит одна и только одна H -поверхность, соответствующая инволюции

$$S_B^A = \sum_{c=1}^n A_c^A \bar{A}_c^B, \quad A_c^A \bar{A}_c^B = \delta_c^B. \quad (3.9)$$

В дальнейшем под комплексным пространством с инволюцией $J^n(\mathbb{C})$ будем понимать проективное пространство $P^n(\mathbb{C})$, в котором определена некоторая инволюция 2-го рода. Группа преобразований пространства с инволюцией образована всеми коллинеациями пространства $P^n(\mathbb{C})$, преобразующими эту инволюцию в себя, и в случае $\sigma=1$ изоморфна группе вещественных коллинеаций.

Плоскость $P^k(X_\rho)$ ранга k , натянутой на точки X_ρ ($\rho, q, z=1, k$), будет собственной плоскостью этой инволюции, если она не пересекает свою сопряженную плоскость $P^k(\bar{X}_\rho)$

$$\bar{X}_\rho^A = S_B^A \bar{X}_\rho^B.$$

Самосопряженные плоскости инволюции, для которых

$$\bar{X}_\rho^A = S_\rho^A X_\rho^A, \quad S_\rho^A S_\rho^{\bar{A}} = \sigma \delta^A, \quad (3.10)$$

сами являются пространствами с инволюцией, определенной аффинором $S_{\bar{q}}^P$, и в случае $\sigma = 1$ пересекают абсолютную H -поверхность по H -поверхности размерности $k-1$.

Через каждую собственную точку пространства с инволюцией проходит одна и только одна самосопряженная или особая прямая. Многообразие особых прямых - линейная конгруэнция - имеет вещественную размерность $2(n-2)$ и может быть рассмотрено как модель проективного пространства ранга $\frac{n}{2}$ над алгеброй антикватернионов $\sigma = 1$ (или кватернионов $\sigma = -1$). Заметим, что в последнем случае необходимо, чтобы n было четным.

В случае $n=4$ комплексное пространство с инволюцией обладает свойствами, в какой-то степени аналогичными свойствам биаксиального пространства А.П.Нордена [4]: в каждой комплексной плоскости пространства лежит единственная особая прямая, а так как последняя пересекает абсолют по окружности (при $\sigma = -1$ эту окружность можно считать мнимой), то в комплексной плоскости определяется геометрия Эрмита соответствующего типа, для которой особая прямая будет несобственной.

Перейдем теперь к рассмотрению эрмиквадрик пространства с инволюцией $\mathcal{Y}^n(\mathbb{C})$.

Эрмиквадрику, заданную уравнением

$$G_{A\bar{B}} X^A \bar{X}^B = 0, \quad \bar{G}_{A\bar{B}} = G_{B\bar{A}},$$

назовем эрмисфероидом, если поляр произвольной точки X проходит через ее сопряженную точку $\bar{X}$. Отсюда следует, что присоединенный тензор эрмитова тензора

$$C_{AB} \stackrel{\text{def}}{=} G_{A\bar{C}} S_B^{\bar{C}} = -G_{B\bar{C}} S_A^{\bar{C}} \quad (3.11)$$

будет кососимметричен, и $G_{A\bar{B}}$ и C_{AB} самосопряжены с фазовым множителем $-\sigma$. При $n=4$ произвольная плоскость пересекает эрмисфероид по эрмисфере, уравнение которой можно привести к виду

$$x\bar{x} - \sigma y\bar{y} = \alpha, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Для этого достаточно привести уравнение секущей плоскости к виду

$$X = M + xP + y\bar{P},$$

где точки M и P полярно сопряжены между собой. При $\sigma = 1$ эрмитов тензор, определяющий эрмиквадрику, задается вещественным

бивектором $a_{ab} = -a_{ba}$

$$G_{A\bar{B}} = i A_A^a \bar{A}_B^b a_{ab}. \quad (3.12)$$

Легко также видеть, что абсолютная H -поверхность (3.7) принадлежит произвольному эрмисфероиду и обратно, любая эрмиквадрика, проходящая через абсолют, есть эрмисфероид.

Эрмиквадрику в $\mathcal{Y}^n(\mathcal{C})$ назовем эрмицилиндром, если присоединенный тензор

$$B_{AB} \stackrel{\text{def}}{=} G_{A\bar{C}} S_B^{\bar{C}} = G_{B\bar{C}} S_A^{\bar{C}} \quad (3.13)$$

симметричен. В этом случае тензоры $G_{A\bar{B}}$ и B_{AB} самосопряжены с фазовым множителем σ . Выбрав точку P на присоединенной квадрике эрмицилиндра, получим, что точки P и $\bar{P}$ будут полярно сопряжены относительно последнего. Отсюда следует, что произвольная плоскость пространства $\mathcal{Y}^n(\mathcal{C})$ пересекает эрмицилиндр по эрмиквадрике

$$x\bar{x} + \sigma y\bar{y} = a.$$

При $\sigma = 1$ эрмитов тензор (3.13) приводится к виду

$$G_{A\bar{B}} = A_A^a \bar{A}_B^b b_{ab}, \quad b_{ab} = b_{ba} \in \mathcal{R}. \quad (3.14)$$

Заметим, что эрмитовы тензоры, удовлетворяющие условиям (3.11) и (3.13), являются аналогами S - и B -тензоров [3]. Любой эрмитов симметрический тензор может быть представлен в виде суммы эрмитовых тензоров такого типа. Далее легко видеть, что в пространстве $\mathcal{Y}^n(\mathcal{C})$ нет аналогов комплексам абсолютного пучка [3], т.е. конгруэнция особых прямых пространства не может принадлежать ни одному из его линейных комплексов.

§ 4. Многообразие собственных плоскостей

Соответствие (3.5) определяет нормализацию в смысле [5] многообразия собственных плоскостей ранга k пространства $\mathcal{Y}^{2k}(\mathcal{C})$. Деривационные уравнения этого нормализованного грассмано-ва многообразия имеют вид

$$\nabla_{\alpha} X_{\alpha} = M_{\alpha\alpha}^{\bar{\beta}} \tilde{X}_{\bar{\beta}}, \quad \nabla_{\alpha} \tilde{X}_{\bar{\alpha}} = \sigma \bar{M}_{\alpha\alpha}^{\bar{\beta}} X_{\beta} \quad (4.1)$$

(здесь $\alpha, \beta, \gamma, \delta = \overline{1, \kappa}$, $\alpha, \beta, \gamma, \dots = \overline{1, \kappa^2}$) и определяют связность в расслоении, которое Д.И. Манин [6, с.15] называет тавтологическим. Тензор $M_{\alpha\alpha}^{\bar{\beta}}$ определяет отображение вещественной реализации комплексного касательного пространства грассманова многообразия на $V_{\kappa}(\mathbb{C}) \otimes V_{\kappa}^*(\mathbb{C})$, где $V_{\kappa}(\mathbb{C})$ - слой тавтологического расслоения, а $V_{\kappa}^*(\mathbb{C})$ - его двойственное пространство. Вещественная связность без кручения на многообразии однозначно определяется условием

$$\nabla_{\alpha} M_{\beta\alpha}^{\bar{\gamma}} = 0. \quad (4.2)$$

Эта связность риманова симметрического пространства с метрическим тензором

$$g_{\alpha\beta} \stackrel{\text{def}}{=} M_{(\alpha|\alpha}^{\bar{\gamma}} \bar{M}_{\beta)\alpha}^{\bar{\delta}}, \quad (4.3)$$

который будет S -тензором относительно аффинора комплексной структуры f_{β}^{α}

$$f_{\beta}^{\alpha} M_{\alpha\alpha}^{\bar{\gamma}} = -i M_{\beta\alpha}^{\bar{\gamma}}. \quad (4.4)$$

Тензор кривизны связности в тавтологическом расслоении имеет вид

$$R_{\gamma\alpha}^{\beta} = -2\sigma \bar{M}_{[\gamma|\alpha}^{\bar{\delta}} M_{\alpha]\alpha}^{\bar{\delta}} \quad (4.5)$$

и удовлетворяет условию

$$R_{\gamma\alpha}^{\alpha} = 2i\sigma h_{\gamma\alpha}, \quad h_{\gamma\alpha} \stackrel{\text{def}}{=} g_{\gamma\beta} f_{\alpha}^{\beta}. \quad (4.6)$$

Из (4.6) следует, что дополнительный вектор Ω_{α} , определенный с точностью до градиентного слагаемого из уравнения

$$\nabla_{\alpha} E_{\alpha_1 \dots \alpha_k} = \Omega_{\alpha} E_{\alpha_1 \dots \alpha_k}, \quad (4.8)$$

где $E_{\alpha_1 \dots \alpha_k}$ - произвольный k -вектор слоя $V_{\kappa}(\mathbb{C})$, а $E_{\alpha_1 \dots \alpha_k}$ - его взаимный, имеет ротор, равный

$$\nabla_{[\gamma} \Omega_{\alpha]} = -i\sigma h_{\gamma\alpha}. \quad (4.9)$$

Из (4.8) следует, что тензор

$$A_{\alpha_1 \dots \alpha_k} \stackrel{\text{def}}{=} E_{\alpha_1 \dots \alpha_k} \bar{E}_{\alpha_1 \dots \alpha_k} M_{\alpha_1 \alpha_1}^{\bar{\alpha}_1} \dots M_{\alpha_k \alpha_k}^{\bar{\alpha}_k} \quad (4.10)$$

рекуррентен относительно введенной связности

$$\nabla_{\gamma} A_{\alpha_1 \dots \alpha_k} = (\bar{\Omega}_{\gamma} - \Omega_{\gamma}) A_{\alpha_1 \dots \alpha_k} \quad (4.11)$$

и в случае $k=2$, т.е. многообразия собственных прямых пространства $\mathcal{Y}^4(\mathcal{C})$ будет определять комплексную геометрию Вейля в смысле [7]. Основной комплексный тензор этой геометрии задан с точностью до преобразования

$$A_{\alpha\beta}^* = e^{-2i\varphi} A_{\alpha\beta}, \quad \varphi = \alpha \operatorname{arg} E_{12 \dots k}$$

и определяет на многообразии прямых пару вещественных B -тензоров.

Выберем теперь в пространстве $\mathcal{Y}^{2k}(\mathcal{C})$ три непересекающиеся между собой особые плоскости $P^k(A_{\alpha})$, $P^k(B_{\alpha})$ и $P^k(E_{\alpha})$, базисные точки которых нормируем условием

$$E_{\alpha} = A_{\alpha} + B_{\alpha}.$$

Тогда произвольная плоскость ранга k $P^k(X_{\alpha})$, не пересекающая плоскость $P^k(B_{\alpha})$

$$X_{\alpha} = A_{\alpha} + B_{\alpha} z_{\alpha}^c, \quad (4.12)$$

определится матричной координатой $\bar{z} = \| z_{\alpha}^c \|$. Отнеся плоскости $P^k(X_{\alpha})$ плоскости $P^k(Y_{\alpha})$

$$Y_{\alpha} = B_{\alpha} + X_{\alpha} w_{\alpha}^c, \quad (4.13)$$

получим, что соответствие между плоскостями определится дифференцируемой функцией

$$W = \mathcal{F}(z, \bar{z}). \quad (4.14)$$

В случае соответствия (3.5) эта функция определяется элементами

$$W_{\alpha}^{-1b} = \sigma S_{\bar{a}}^b z_{\bar{c}}^d S_{\alpha}^{\bar{c}} - z_{\alpha}^b, \quad (4.15)$$

которые при $\sigma=1$ можно записать в матричном виде

$$W = (\bar{z} - z)^{-1}. \quad (4.16)$$

Тогда метрическому тензору (4.3) будет соответствовать линейный элемент

$$dS^2 = \operatorname{tr} [(\bar{z} - z)^{-1} d\bar{z} (\bar{z} - z)^{-1} dz], \quad (4.17)$$

который при $\kappa = 1$ будет линейным элементом плоскости Лобачевского в интерпретации Пуанкаре, а тензору (4.10) - линейный элемент

$$dS^n = \det [(\bar{Z} - Z)^{-1} dZ], \quad (4.16)$$

определенный, впрочем, с точностью до произвольного ненулевого комплексного множителя.

Л и т е р а т у р а

1. Н о р д е н А.П. О комплексном представлении тензоров пространства Лоренца. - Изв. вузов. Матем., 1959, № I, с. 156 - 163.
2. Н о р д е н А.П. О комплексном представлении тензоров бипланарного пространства. - Учен. зап. Казан. ун-та, 1954, т. II4, кн. 8, с. 45 - 53.
3. Н о р д е н А.П. О самосопряженных образах биаксиального пространства. - Учен. зап. Казан. ун-та, 1954, т. II4, кн. 2, с. 3 - 12.
4. Н о р д е н А.П. Пространство линейной конгруэнции. - Матем. сборник, 1949, т. 24 (66), № 3, с. 429 - 455.
5. Н е й ф е л ь д Э.Г. Аффинные связности на нормализованном многообразии плоскостей проективного пространства. - Изв. вузов. Матем., 1986, № II, с. 48 - 55.
6. М а н и н Д.И. Калибровочные поля и комплексная геометрия. - М.: Наука, 1984.
7. Н о р д е н А.П. О структуре связности на многообразии прямых неевклидова пространства. - Изв. вузов. Матем., 1972, № 12, с. 84 - 94.

А.П. Норден

СОПУТСТВУЮЩИЕ КОМПЛЕКСНЫЕ СТРУКТУРЫ ЛИНЕЙЧАТОГО ПРОСТРАНСТВА

Согласно принципу перенесения Котельникова - Штуди, всякая прямая трехмерного пространства постоянной кривизны $\mathcal{L}$ изображается единичным вектором $R = z + \epsilon s$ трехмерного комплексного пространства, где z и s - действительные векторы, а ϵ - мнимая единица, удовлетворяющая условию

Нейфельд Э.Г.

О ВНУТРЕННИХ ГЕОМЕТРИЯХ НОРМАЛИЗОВАННОГО ПЕНРОУЗИАНА

Как известно, пространство Минковского, дополненное бесконечно удаленным световым конусом, есть псевдоконформное пространство или, в силу принципа Дарбу, квадрака 2Q_4 сигнатуры $++--$ пространства $\mathcal{P}^6$ ранга 6 (размерности 5). Комплексификация этой квадраки есть $\mathbb{C}Q_4$ -квадрика Клейна линейчатого пространства пространства $\mathbb{C}P^4$, при этом точкам квадраки 2Q_4 соответствуют взаимно-однозначно нуль-прямые эрмиквадрики Пенроуза нулевой сигнатуры [1]. Множество всех этих нуль-прямых назовем пенроузианом $\mathcal{P}(2)$. Обобщая это понятие, получим, что пенроузиан $\mathcal{P}(k)$ есть k^2 -мерное вещественное многообразие нуль-плоскостей $\mathbb{C}P^k(X_a)$ эрмиквадрики нулевой сигнатуры проективного пространства $\mathbb{C}P^{2k}$, определенной эрмитовой формой $(\bar{X}, X)$, нормальному виду которой соответствует матрица

$$\begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & -E \end{pmatrix},$$

где E - единичная матрица k -го порядка. Таким образом, если $\mathbb{C}P^k(X_a) \in \mathcal{P}(k)$, то

$$(\bar{X}_a, X_b) = 0 \iff (x^* x) = 0, \quad x^* = \bar{x}^T, \quad (I)$$

где $x = \|X_a^A\|$ ($A, B, C = \overline{1, 2k}$, $a, b, c = \overline{1, k}$) - матричные координаты плоскости $\mathbb{C}P^k(X_a)$.

Если U, L, x, y матричные координаты четырех плоскостей и

$$x = UL + LM, \quad y = UL' + LM',$$

то ангармоническое отношение этих плоскостей ([2], с. 34) будет матрица k -го порядка

$$W = (U, L, x, y) = (ML^{-1})(M'L'^{-1})^{-1}, \quad (2)$$

определенная с точностью до подобного преобразования

$$\overset{V}{W} = C^{-1}WC \iff \overset{V}{W} \sim W,$$

где матрица C определяет преобразование базисных точек плоскости $\mathbb{C}P^k(L)$

$$\mathcal{L}^{\vee} = \mathcal{L}C.$$

Выберем теперь три плоскости ранга K общего положения $\mathcal{A}$, $\mathcal{L}$, $\mathcal{F}$ и нормируем их базисы так, что

$$\mathcal{F} = \mathcal{A} + \mathcal{L},$$

т.е. примем эти плоскости за вершины и единичный элемент репера проективной прямой $P^2(\mathbb{C}M_K)$ над алгеброй комплексных матриц. Тогда множество всех плоскостей $\mathbb{C}P^K(X_a)$, для которых

$$Z = (\mathcal{A}, \mathcal{L}, \mathcal{X}, \mathcal{F}), \quad Z \sim Z^*,$$

есть пенроузиан, проходящий через плоскости $\mathcal{A}$, $\mathcal{L}$, $\mathcal{F}$.

В самом деле, условие $Z \sim Z^*$ равносильно условию

$$CZ = Z^*C, \quad (3)$$

определяющее уравнение искомого пенроузиана. Так как

$$(\mathcal{A}^*, \mathcal{A}) = (\mathcal{L}^*, \mathcal{L}) = (\mathcal{F}^*, \mathcal{F}) = 0,$$

то

$$(\mathcal{A}^*, \mathcal{L}) + (\mathcal{L}^*, \mathcal{A}) = 0$$

и

$$\begin{pmatrix} 0 & C \\ C & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \frac{1}{i} (\mathcal{A}^*, \mathcal{L}) = C^*$$

есть матрица эрмитовой формы, определяющей пенроузиан, в базисе $\{A_a, B_a\}$ $\mathbb{C}P^K(\mathcal{L})$. Если теперь нормировать базисные точки плоскости так, что

$$(\mathcal{A}^*, \mathcal{L}^{\vee}) = iE, \quad (4)$$

тогда уравнение пенроузиана примет вид

$$Z^* = Z.$$

Нормализацию пенроузиана определим заданием дифференцируемого соответствия между его нуль-плоскостями, базисные точки которых нормируем условием типа (4), что равносильно условию $(\bar{X}_a, Y^{\bar{b}}) = i\delta_a^{\bar{b}}$. Тогда деривационные уравнения нормализованного пенроузиана примут вид

$$\nabla_i X_a = \theta_{ia\bar{b}} Y^{\bar{b}}, \quad \nabla_i Y^{\bar{b}} = \psi_i^{a\bar{b}} X_a \quad (i, j = \overline{1, K^2}), \quad (5)$$

где связующие аффиноры $\theta_{ia\bar{b}}$ и $\psi_i^{a\bar{b}}$ будут эрмитово-симмет-

ричны по индексам $a, \bar{b}$. Внутренние связности I-го и 2-го рода определяются соответственно условиями

$$\overset{1}{\nabla}_i \theta_{j a \bar{b}} = 0, \quad \overset{2}{\nabla}_i \psi_j^{a \bar{b}} = 0. \quad (6)$$

Они не имеют кручения и будут вещественными связностями типа Вейля относительно угловой метрики K -го порядка, которая в случае геометрии I-го рода определится тензором

$$g_{i_1 \dots i_k} = E^{a_1 \dots a_k} \bar{E}^{b_1 \dots b_k} \theta_{i_1 a_1 \bar{b}_1} \dots \theta_{i_k a_k \bar{b}_k}, \quad (7)$$

соответствующему двойственному поляритету K -го порядка [3] в касательном расслоении пенроузиана. Легко видеть, что связности эти будут конформно евклидовыми в смысле введенной угловой метрики. Заметим, что произвольная такая связность может быть получена из евклидовой, т.е. плоской, заменой нормализации

$$y^{\bar{a}} = y_0^{\bar{a}} + X_c u^{c \bar{a}}, \quad y_0^{\bar{a}} = \text{const} \quad (8)$$

и, следовательно, определяется заданием $\mathbb{R}$ -дифференцируемой функцией от эрмитово-симметрического матричного переменного

$$u = \mathcal{F}(Z), \quad Z^* = Z, \quad u^* = u.$$

Внутренняя связность будет эквивалентной, если

$$\partial^{a \bar{b}} u^{c \bar{d}} = \partial^{c \bar{d}} u^{a \bar{b}}, \quad \partial^{a \bar{b}} = \frac{\partial}{\partial Z_{a \bar{b}}}. \quad (9)$$

В случае $k=2$ внутренние связности будут связностями Вейля сигнатуры Лоренца, конформные плоскому пространству Минковского.

Таким образом, вся территория конформно-евклидовых пространств общей теории относительности может быть сведена к теории функции от эрмитовых матриц 2-го порядка, удовлетворяющих условию (9). Это позволяет все конформно-евклидовы пространства ОТО включить в твисторную программу Пенроуза [1], причем средствами плоского пространства твисторов, т.е. $\mathbb{C}P^4$ с заданным пенроузианом $\mathcal{P}(2)$. В частности пространству де Ситтера постоянной кривизны соответствует нормализация пенроузиана с помощью косоугольного поляритета, т.е. линейного комплекса прямых в $\mathbb{C}P^4$ - абсолюта нормализации.

Л и т е р а т у р а

1. П е н р о у з Р. Твисторная программа // Твисторы и калибровочные поля. - М.: Мир, 1983. С. 13 - 24.
2. Р о з ё н ф е л ь д Б.А. Многомерные пространства.- М.: Наука, 1966.
3. Н е й ф е л ь д Э.Г. О внутренних геометриях многообразия нуль-плоскостей максимальной размерности поляритетов второго порядка. // Тр. геометр.семинара. Казань, 1982. Вып. 14. С.50 - 54.

Н.Н.Переломова, А.П.Широков

КАСАТЕЛЬНОЕ РАССЛОЕНИЕ ВТОРОГО ПОРЯДКА ПРОЕКТИВНОЙ ПРЯМОЙ И ГЕОМЕТРИЯ ЛОБАЧЕВСКОГО

В статье [1] было показано, что геометрия касательного расслоения $T^2(P_1)$ вещественной проективной прямой P_1 находится в тесной связи с геометрией плоскости $\mathbb{L}_2$. Эта связь возникает после наделения некоторой области касательного расслоения структурой группы движений плоскости $\mathbb{L}_2$ или структурой расслоения ортореперов этой плоскости. В настоящей статье указанная связь подвергается дальнейшему исследованию. Кроме того, аналогичные взаимоотношения устанавливаются для касательного расслоения комплексной проективной прямой CP_1 и для расслоения ортореперов 3-мерного пространства Лобачевского $\mathbb{L}_3$.

§1 написан А.П.Широковым, §2 - Н.Н.Переломовой.

§1. Касательное расслоение $T^2(P_1)$ и расслоение ортореперев плоскости $\mathbb{L}_2$.

Пусть z^1 - локальная неоднородная координата на P_1 , дробно-линейными преобразованиями которой представлены проективные преобразования P_1 . Обозначим через (z^1, z^2, z^3) индуцированные локальные координаты в $T^2(P_1)$. Используя интерпретацию Пуанкаре плоскости $\mathbb{L}_2$ в евклидовой полуплоскости

8. К о б а я с и Ш., Н о м и д з у К. Основы дифференциальной геометрии. - М.:Наука, 1981. Т.1. - 344 с.
9. И б р а г и м о в а Р.Х. Однородные объекты на касательном расслоении.//Изв.вузов.Матем., 1984. № 2. С. 66 - 68.
10. Л а п т е в Б.Л. Производная Ли для объектов, являющихся функциями точки и направления// Изв.физ.-мат.общ. при КГУ. Казань, 1988. Т. 10, сер.3. С.3 - 38.

Э.Г.Нейфельд

НОРМАЛИЗАЦИЯ КОМПЛЕКСНЫХ ГРАССМАНИАНОВ И КВАДРИК

I. Нормализация комплексных грассманианов

Нормализация комплексного грассманиана $\mathbb{C}P^{n,k}$ k -мерных подпространств комплексного векторного пространства $\mathbb{C}^n$ есть $\mathbb{R}$ -дифференцируемое отображение N некоторой области $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}P^{n,k}$ в двойственный грассманиан $\mathbb{C}P^{n,n-k}$, такое, что нормализующее подпространство $\mathbb{C}^{n-k}(Y_p)$ подпространства $\mathbb{C}^k(X_a)$ не имеет с последним общих направлений или, что то же, соответствующие им в $\mathbb{C}P^n$ плоскости $\mathbb{C}P^k$ и $\mathbb{C}P^{n-k}$ не пересекаются. Здесь X_a, Y_p базисные элементы соответствующих подпространств; $a, \beta, c, d = \overline{1, k}$; $p, q, r, s = \overline{k+1, n}$. Соответствие N в локальных вещественных координатах может быть задано параметрическими уравнениями

$$X_a = X_a(u^\alpha), Y_p = Y_p(u^\alpha), \alpha, \beta, \gamma = \overline{1, 2k(n-k)}. \quad (I.1)$$

Граничные точки области $\mathcal{D}$, если они существуют, для которых плоскости $\mathbb{C}P^k(X_a)$ и $\mathbb{C}P^{n-k}(Y_p)$ пересекаются хотя бы в точке, образуют абсолют нормализации.

Деривационные уравнения нормализованного грассманиана имеют вид

$$\nabla_\alpha X_a = M_{\alpha a}^p Y_p, \quad \nabla_\alpha Y_p = N_{\alpha p}^a X_a. \quad (I.2)$$

Они, как и в вещественном случае [1], определяют связности в тавтологическом [2] и его двойственном расслоениях, которые назовем спин-связностями 1-го и 2-го рода. Структурный аффинор $M_{\alpha a}^p$ определяет биективное отображение вещественной реализации кас-

тельного пространства T грассманиана на тензорное произведе-
ние слоев тавтологических произведений, другими словами каждому ка-
сательному вектору с вещественными координатами v^α соответ-
ствует спин-тензор

$$V_a^p = M_{\alpha a}^p v^\alpha, \quad (1.3)$$

такой, что

$$v^\alpha = M_{\rho}^{\alpha a} V_a^p + \overline{M}_{\rho}^{\alpha a} \overline{V}_a^p = M_{\rho}^{\alpha a} V_a^p + \text{conj}, \quad (1.4)$$

где взаимный структурный аффинор $M_{\rho}^{\alpha a}$ однозначно определен ус-
ловиями

$$M_{\rho}^{\alpha a} M_{\alpha b}^{\rho} = \delta_b^a \delta_{\rho}^{\rho}, \quad M_{\rho}^{\alpha a} \overline{M}_{\alpha b}^{\rho} = 0. \quad (1.5)$$

Заметим, что аффинор $M_{\alpha a}^p$ определяет на $\mathbb{C}P^{n,k}$ интегрируемую
комплексную структуру f :

$$f_p^\alpha = \Delta_{\beta}^{\alpha} + \overline{\Delta}_{\beta}^{\alpha}, \quad (1.6)$$

где $\Delta_{\beta}^{\alpha} = M_{\rho}^{\alpha a} M_{\beta a}^{\rho}$ комплексный единичный аффинор А.П.Нордена
[3]. Далее на $\mathbb{C}P^{n,k}$ определяются комплексные операторные
структуры, порожденные аффинорами [1]

$$\Delta_{\beta\beta}^{\alpha a} = M_{\rho}^{\alpha a} M_{\beta\beta}^{\rho}, \quad \Delta_{\beta\beta}^{\alpha\rho} = M_{\rho}^{\alpha a} M_{\beta a}^{\rho}. \quad (1.7)$$

Наконец, существование комплексных спин-связностей определяет на
грассманиане, а точнее, в области $\mathcal{D}$ вещественную связность
без кручения, такую, что

$$\nabla_{\alpha} M_{\beta a}^p = 0, \quad (1.8)$$

где символ ∇_{α} обозначает обобщенную ковариантную производную.

Второй структурный аффинор $N_{\alpha\rho}^a$ определяет ангармони-
ческое отношение двух бесконечно-близких подпространств и их нор-
мализующих, как это имеет место для любого нормализованного про-
странства. Ему соответствуют спин-тензоры $P_{\rho\rho}^{ab}$ и $Q_{\bar{\rho}\bar{\rho}}^{\bar{a}\bar{b}}$, ко-
торые назовем спин-тензорами А.П.Нордена и определим разложения-
ми

$$N_{\alpha\rho}^a = P_{\bar{\rho}\bar{\rho}}^{ca} M_{\alpha c}^{\bar{\rho}} + Q_{\bar{\rho}\bar{\rho}}^{\bar{c}\bar{a}} \overline{M}_{\alpha c}^{\bar{\rho}}. \quad (1.9)$$

Если аффинор $N_{\alpha\rho}^a$ невырожден, то существует на $\mathbb{C}P^{n,k}$ связ-
ность 2-го рода, такая что

$$\nabla_{(\alpha)} N_{\beta\rho}^a = 0,$$

причем связности I-го и 2-го рода на грассманиане сопряжены в смысле А.П.Нордена ([4], с. 175) относительно тензора

$$P_{\alpha\beta} = N_{\alpha q}^b M_{\beta b}^q + \text{conj},$$

т.е.

$$\nabla_\gamma P_{(\alpha)\beta} = 0.$$

Из условий интегрируемости деривационных уравнений (I.2) следует, что тензоры кривизны спин-связностей соответственно равны

$$R_{\gamma\alpha\beta}^d = -2N_{[\gamma|\epsilon|}^d M_{\alpha]\beta}^{\epsilon}, \quad R_{\gamma\alpha\rho}^q = 2N_{[\gamma|\rho|}^c M_{\alpha]c}^q.$$

Первому из них соответствуют спин-тензоры

$$R_{z\rho\beta}^{ca d} = -P_{z\rho}^{cd} \delta_\beta^a + P_{\rho z}^{ad} \delta_\beta^c, \quad R_{\bar{z}\rho\beta}^{\bar{c}\bar{a} d} = -Q_{\bar{z}\rho}^{\bar{c}\bar{d}} \delta_\beta^a, \quad (I.10)$$

второму

$$R_{z\rho q}^{ca s} = P_{zq}^{ca} \delta_\rho^s - P_{\rho q}^{ac} \delta_z^s, \quad R_{\bar{z}\rho q}^{\bar{c}\bar{a} s} = Q_{\bar{z}\rho}^{\bar{c}\bar{a}} \delta_q^s. \quad (I.11)$$

Так как из (I.8) следует, что тензор кривизны $R_{\gamma\alpha\rho}^\lambda$ связности I-го рода удовлетворяет уравнению

$$R_{\gamma\alpha\beta}^\lambda M_{\lambda a}^\rho + R_{\gamma\alpha a}^c M_{\beta c}^\rho - R_{\gamma\alpha q}^p M_{\beta a}^q = 0,$$

то из (I.10) и (I.11) следует, что и его спин-тензоры определяются через спин-тензоры Нордена. Более того, последние однозначно определяются тензором Риччи связности I-го рода, спин-тензоры которого равны соответственно

$$R_{p q}^{ab} = M_{\cdot p}^{\alpha a} M_{\cdot q}^{\beta b} R_{\alpha\beta} = n P_{p q}^{ab} - P_{q p}^{ab} - P_{p q}^{ba} \quad (I.12)$$

и

$$R_{\bar{p}\bar{q}}^{\bar{a}\bar{b}} = \bar{M}_{\bar{p}}^{\alpha a} \bar{M}_{\bar{q}}^{\beta b} R_{\alpha\beta} = n Q_{\bar{p}\bar{q}}^{\bar{a}\bar{b}}. \quad (I.13)$$

Отсюда следует, что обращение тензора Риччи связности I-го рода в нуль означает, что она имеет нулевую кривизну и обратно.

Тождество Бианки есть следствие условия типа Кодаци

$$\nabla_{[\gamma} N_{\alpha]a}^p = 0, \quad (I.14)$$

что приводит к следующим уравнениям, которым удовлетворяют координаты спин-тензоров Нордена:

$$\begin{aligned}
\nabla_q^\beta \rho_{z\rho}^{ca} &= \nabla_z^c \rho_{q\rho}^{ba}, \\
\nabla_{\bar{q}}^{\bar{\beta}} \rho_{z\rho}^{ca} &= \nabla_z^c Q_{\bar{q}\rho}^{\bar{\beta}a}, \\
\nabla_{\bar{q}}^{\bar{\beta}} Q_{z\rho}^{\bar{\beta}a} &= \nabla_z^c Q_{\bar{q}\rho}^{\bar{\beta}a}.
\end{aligned}
\quad
\begin{aligned}
\nabla_q^\beta &= M_q^{\alpha\beta} \nabla_\alpha, \\
\nabla_{\bar{q}}^{\bar{\beta}} &= \bar{M}_q^{\alpha\beta} \nabla_\alpha.
\end{aligned}
\quad (I.15)$$

Спин-тензор ρ_{pq}^{ab} может быть разложен на суммы четырех неприводимых спин-тензоров

$$\rho_{pq}^{ab} = A_{pq}^{ab} + B_{pq}^{1ab} + B_{pq}^{2ab} + C_{pq}^{ab}, \quad (I.16)$$

где

$$A_{pq}^{ab} = \rho_{(pq)}^{(ab)}, \quad B_{pq}^{1ab} = \rho_{[pq]}^{(ab)}, \quad B_{pq}^{2ab} = \rho_{(pq)}^{[ab]}, \quad C_{pq}^{ab} = \rho_{[pq]}^{[ab]}.$$

Спин-тензор $Q_{\bar{p}q}^{\bar{a}b}$ разлагается на сумму двух неприводимых эрмитово-симметрических тензоров

$$Q_{\bar{p}q}^{\bar{a}b} = U_{\bar{p}q}^{\bar{a}b} + i V_{\bar{p}q}^{\bar{a}b},$$

так что

$$Q_{\bar{q}p}^{\bar{b}a} = U_{\bar{p}q}^{\bar{a}b} - i V_{\bar{p}q}^{\bar{a}b}.$$

Любому вещественному бивектору $V_{pq}^{\alpha\beta}$ соответствуют спин-тензоры $V_{pq}^{ab} = -V_{qp}^{ba}$ и $V_{\bar{p}q}^{\bar{a}b} = i A_{\bar{p}q}^{\bar{a}b}$, где $A_{\bar{p}q}^{\bar{a}b}$ эрмитово-симметрический тензор, что соответствует известному разложению бивектора бипланарного пространства на сумму A -тензора и S -тензора [5]. В свою очередь спин-тензор $V_{pq}^{\alpha\beta}$ может быть разложен на автодуальную

$$V_{pq}^{1ab} = V_{pq}^{(ab)}$$

и антиавтодуальную части

$$V_{pq}^{2ab} = V_{(pq)}^{ab},$$

что при $n=2k=4$ соответствует представлению комплексного бивектора двумя симметрическими комплексными тензорами валентности два.

Заметим, что автодуальная и антиавтодуальная части спин-тензора кривизны (I.10) будут равны соответственно

$$R_{[z\rho]b}^{(ca)d} = -2(B_{z\rho}^{1(c|d|} + C_{z\rho}^{(c|d|} \delta_b^a); \quad R_{(z\rho)b}^{[ca]d} = -2(B_{z\rho}^{2(c|d|} + A_{z\rho}^{(c|d|} \delta_b^a),$$

а спин-тензора (I.II)

$$R_{[z\rho]q}^{(cd) s} = 2(B_{[z\rho]q}^{cd} + A_{[z\rho]q}^{cd}) \delta_{\rho}^s, \quad R_{(z\rho)q}^{[cd] s} = 2(B_{(z\rho)q}^{cd} + C_{(z\rho)q}^{cd}) \delta_{\rho}^s.$$

Отсюда следует, что тензор кривизны внутренней связности I-го рода нормализованного грассманиана будет автодуален, если

$$A_{\rho q}^{ab} = B_{\rho q}^{ab} = C_{\rho q}^{ab} = 0, \quad Q_{\bar{\rho}q}^{\bar{a}b} = 0$$

и антиавтодуален, если

$$A_{\rho q}^{ab} = B_{\rho q}^{ab} = C_{\rho q}^{ab} = 0, \quad Q_{\bar{\rho}q}^{\bar{a}b} = 0.$$

Наконец, спин-тензоры тензора эквиаффинной кривизны $\mathcal{F}_{\alpha\beta} = R_{\alpha\beta\lambda}^{\lambda}$ будут равны соответственно

$$\mathcal{F}_{\rho q}^{ab} = B_{\rho q}^{1ab} + B_{\rho q}^{2ab}, \quad \mathcal{F}_{\bar{\rho}q}^{\bar{a}b} = i \mathcal{V}_{\bar{\rho}q}^{\bar{a}b}.$$

Отсюда следует, что связность I-го рода будет эквиаффинной тогда и только тогда, когда спин-тензор Нордена $R_{\rho q}^{ab}$ симметричен, а спин-тензор $Q_{\bar{\rho}q}^{\bar{a}b}$ - эрмитово-симметричен, т.е.

$$B_{\rho q}^{1ab} = B_{\rho q}^{2ab} = 0, \quad \mathcal{V}_{\bar{\rho}q}^{\bar{a}b} = 0.$$

2. Преобразование нормализации

Преобразование нормализации грассманиана определяется уравнением

$$\overset{v}{Y}_{\rho} = Y_{\rho} + X_a W_{\rho}^a, \quad (2.1)$$

т.е. определяется заданием поля спин-тензора W_{ρ}^a . При преобразовании (2.1) коэффициенты спин-связностей I-го и 2-го рода преобразуются по закону

$$\overset{v}{\Gamma}_{\alpha a}^c = \Gamma_{\alpha a}^c - W_{\alpha}^c M_{\alpha a}^{\alpha}, \quad \overset{v}{\Gamma}_{\alpha\rho}^q = \Gamma_{\alpha\rho}^q + M_{\alpha c}^q W_{\rho}^c \quad (2.2)$$

в то время, как связующий аффинор $M_{\alpha a}^{\rho}$ есть инвариант этого преобразования. Тензор деформации внутренней связности I-го рода при этом преобразовании равен:

$$T_{\alpha\beta}^{\delta} = \overset{v}{\Gamma}_{\alpha\beta}^{\delta} - \Gamma_{\alpha\beta}^{\delta} = 2 M_{(\alpha|a}^{\rho} W_{\rho}^a M_{\beta)}^q M_{\rho}^{\delta b}. \quad (2.3)$$

Кроме того,

$$\overset{\vee}{N}_{\alpha\rho}{}^a = N_{\alpha\rho}{}^a + \nabla_{\alpha} W_{\rho}^a - W_{\rho}^a M_{\alpha c}{}^q W_{\rho}^c, \quad (2.4)$$

так что

$$\overset{\vee}{P}_{\alpha\rho}{}^{ca} = P_{\alpha\rho}{}^{ca} + \nabla_{\alpha}^c W_{\rho}^a - W_{\alpha}^a W_{\rho}^c, \quad \overset{\vee}{Q}_{\bar{z}\rho}{}^a = Q_{\bar{z}\rho}{}^a + \nabla_{\bar{z}}^c W_{\rho}^a. \quad (2.5)$$

Если теперь на $\mathbb{C}P^{n,k}$ определены локальные координаты с помощью "большой клетки" [2] с.16), т.е. с помощью некоторого разложения $\mathbb{C}^k(A_k) \oplus \mathbb{C}^{n-k}(B_p)$, так что

$$X_a = A_a + B_p Z_a^p, \quad (2.6)$$

где $Z = \|Z_a^p\|$ комплексная матричная координата плоскости Хуа-логена - Розенфельда [6]. Полагая $Y_p = B_p = \text{const}$, т.е., отнеся всем плоскостям $\mathbb{C}P^k(X_a) \in \mathbb{C}P^{n,k}$ одну и ту же плоскость дополнительной размерности, получим, что коэффициенты всех связностей будут равны нулю, т.е. они нулевой кривизны или евклидовы, и

$$M_{\alpha a}{}^p = \partial_{\alpha} Z_a^p; \quad \partial_{\beta} M_{\alpha a}{}^p = 0.$$

Теперь произвольная связность нормализованного грассманиана будет определяться $\mathbb{R}$ -дифференцируемой функцией

$$W_{\rho}^a = W_{\rho}^a(Z, \bar{Z}) \quad (2.7)$$

от вещественных элементов матрицы Z , а спин-тензоры Нордена соответственно равны

$$P_{\rho q}{}^{ab} = \partial_{\rho}^a W_q^b - W_q^a W_{\rho}^b, \quad \partial_{\rho}^a = \frac{\partial}{\partial Z_a^p} \quad (2.8)$$

и

$$Q_{\bar{p}q}{}^{\bar{a}b} = \partial_{\bar{p}}^{\bar{a}} W_q^b, \quad \partial_{\bar{p}}^{\bar{a}} = \frac{\partial}{\partial \bar{Z}_a^p} \quad (2.9)$$

Из (2.9) следует, что для того чтобы нормализация комплексного грассманиана была аналитической необходимо и достаточно, чтобы спин-тензор (2.9) был равен нулю.

В случае $n=2k$ матрицы Z и W будут квадратными, а грассманиан может быть рассмотрен как проективная прямая над алгеброй комплексных матриц k -го порядка или $P^2(\mathbb{C}M_k)$. Заметим, что все результаты в этом случае, без труда могут быть обобщены на случай проективной прямой $P^2(A)$ над произвольной

ассоциативной, унитарной и фробениусовой алгеброй A над полем $\mathbb{R}$. (Случай алгебры A над полем $\mathbb{C}$ естественно сводится к алгебре $A \otimes \mathbb{C}$ над $\mathbb{R}$). Нормализация проективной прямой $P^2(A)$ будет частным случаем нормализации проективного пространства над алгеброй [7]. Определив на прямой $P^2(A)$ по аналогии с (2.6) координату точки

$$z = e_\alpha x^\alpha, \quad x^\alpha \in \mathbb{R}, \quad \alpha = \overline{1, z} = \dim A,$$

получим, что нормализация определится заданием дифференцируемой по x^α функции

$$w = f(z).$$

Из деривационных уравнений нормализованной прямой $P^2(A)$

$$\partial_\alpha X = X \Gamma_\alpha + Y M_\alpha, \quad \partial_\alpha Y = Y \tilde{\Gamma}_\alpha + X N_\alpha \quad (2.10)$$

следует, что структурный аффинор M_α в этом случае будет равен

$$M_\alpha = \partial_\alpha z = e_\alpha.$$

Коэффициенты связности I-го рода, определенные из уравнения

$$\nabla_\alpha M_\beta = M_\beta \Gamma_\alpha - \tilde{\Gamma}_\alpha M_\beta, \quad (2.11)$$

найдутся из разложения

$$e_\lambda \Gamma_{\alpha\beta}^\lambda = e_\alpha w e_\beta + e_\beta w e_\alpha, \quad (2.13)$$

а координаты ее тензора кривизны из

$$e_\lambda R_{\gamma\alpha\beta}^\lambda = e_\alpha \rho_\gamma e_\beta + e_\beta \rho_\gamma e_\alpha - e_\gamma \rho_\alpha e_\beta - e_\beta \rho_\alpha e_\gamma, \quad (2.14)$$

где

$$\rho_\gamma = \partial_\gamma w - w e_\gamma w.$$

Наконец, отметим, что внутренняя связность нормализованного комплексного грассманиана будет проективно-евклидовой над алгеброй CM_k в том смысле, что геодезической, проходящей через точку $CP^k(X_a) \in CP^{n,k}$ в направлении $t^\alpha = \frac{dx^\alpha}{dt}$, соответствующей точке $CP^k(T_a)$, $T_a = M_{\alpha a} z^\alpha Y_z$ - нормализующей плоскости в CP^n - принадлежит грассманиану $CP^{2k,k}$ плоскостей пространства $CP^{2k}(X_a, T_a)$, что следует из общей теории нормализованных проективных пространств над алгебрами [7].

3. Перенесение Грассмана-Плюккера

Любому элементу грассманиана $\mathbb{C}P^{n,k}$ соответствует подпространство $\mathbb{C}^k \subset \mathbb{C}^n$, которому в свою очередь соответствует особое подпространство $\mathbb{R}^{2k}(f) \subset \mathbb{R}^{2n}(f)$ вещественного векторного бипланарного пространства со структурным аффинором f [8], [9]. Поэтому для $\mathbb{C}P^{n,k}$ можно рассматривать два типа перенесений Грассмана-Плюккера. Первое из них есть отображение

$$CG: \mathbb{C}P^{n,k} \rightarrow \mathbb{C}P^{\binom{n}{k}},$$

которое каждой плоскости $\mathbb{C}P^k(X_a)$ ставит соответствие точку в $\mathbb{C}P^{\binom{n}{k}}$, определенную k -вектором

$$X = \frac{1}{k!} E^{a_1 \dots a_k} X_{a_1} \wedge \dots \wedge X_{a_k}, \quad (3.1)$$

где $E^{a_1 \dots a_k}$ - произвольный k -вектор пространства $\mathbb{C}^k$. Образ $\mathbb{C}P^{n,k}$ при этом отображении есть поверхность Грассмана $CG(n,k)$ в $\mathbb{C}P^{\binom{n}{k}}$. Нормализация грассманиана определяет нормализацию $CG(n,k)$ в смысле А.П.Нордена. Здесь переход в комплексную область не отличается по существу от вещественного случая [1]. Поэтому мы рассмотрим здесь вещественное перенесение Грассмана-Плюккера

$$IRG: \mathbb{C}P^{n,k} \rightarrow \mathbb{R}^{\binom{2k}{2n}},$$

которое по существу есть отображение всех особых подпространств вещественной размерности $2k$ бипланарного пространства $\mathbb{R}^{2n}(f)$ в $\mathbb{R}^{\binom{2k}{2n}}$, образом которого будет некоторая алгебраическая $2k(n-k)$ -мерная поверхность на $4k(n-k)$ -мерной поверхности Грассмана $G(2n, 2k)$. При этом вещественному $2k$ -вектору этого подпространства будет соответствовать тензорное произведение $X \otimes \bar{X}$ k -векторов (3.1).

При $k=2, n=4$ поверхность Грассмана будет квадратикой Плюккера $\mathbb{C}Q_4 \subset \mathbb{C}P^6$.

4. Нормализация комплексной квадратки и комплексная конформная геометрия

Под нормализацией комплексной квадратки $\mathbb{C}Q_n \subset \mathbb{C}P^{n+2}$, опре-

деленной уравнением

$$X^2 = 0, \quad (4.1)$$

где X^2 - квадратичная форма ранга $n+2$ над полем $\mathbb{C}$, будем понимать R -дифференцируемое отображение некоторого подмножества $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}Q_n$

$$N: \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{C}Q_n, \quad X \mapsto Y \in \mathbb{C}Q_n, \quad Y^2 = 0; \quad (4.2)$$

при этом множество всех $X \in \mathcal{D}$, для которых X и Y лежат на одной и той же прямолинейной образующей или совпадают, предполагается замкнутым в $\mathcal{D}$. Это абсолют нормализации. Исключая это подмножество, получим нормализованное комплексное конформное пространство. Само конформное пространство в силу известного перенесения Дарбу отождествляется с квадрикой (4.1). Общая теория нормализованного конформного пространства над алгеброй рассматривалась в [10]. В данном случае $A = \mathbb{C}$, а инволюция ρ есть тождественное преобразование. Соответствие (4.2) определяет сопутствующий репер $\{X, Y, Z_A\}$, такой, что

$$XY = 1, \quad XZ_A = YZ_A = 0, \quad Z_A Z_B = G_{AB} \quad (A, B = \overline{1, n}) \quad (4.3)$$

Из этих равенств первое есть условие относительного нормирования точек X и Y , а последнее определяет метрический тензор квадрики $\mathbb{C}Q_n$ и, следовательно, $\mathbb{C}$ -конформного пространства, определенного с точностью до произвольного комплексного множителя.

Деривационные уравнения нормализованного $\mathbb{C}$ -конформного пространства имеют вид

$$\begin{aligned} \partial_\alpha X &= X L_\alpha + Z_A M_\alpha^A, \\ \partial_\alpha Y &= -Y L_\alpha - Z_A N_\alpha^A, \quad (\alpha, \beta, \gamma = \overline{1, 2n}), \\ \nabla_\alpha Z_A &= N_{\alpha A} X - M_{\alpha A} Y, \end{aligned} \quad (4.4)$$

где $L_\alpha \in \mathbb{C}$ - аналог нормализатора А.П.Нордена ([4] с.192), определяющий связность в тавтологическом расслоении квадрики, M_α^A и N_α^A - аналоги связующих аффиноров $M_{\alpha a}^p$ и $N_{\alpha p}^a$ нормализованного грассманиана. Поднятие и опускание индексов осуществляется с помощью метрического тензора, который будет ковариантно-постоянным в полярной связности, определенной третьим уравнением (4.4). Вещественная связность нормализованного $\mathbb{C}$ -конфо-

многочленного пространства определяется условием

$$\nabla_{\alpha} M_{\beta}^A = L_{\alpha} M_{\beta}^A. \quad (4.5)$$

Легко видеть, что эта связность будет комплексной конформно-евклидовой связностью Вейля [II]. Метрическому тензору соответствует пара B -тензоров $g_{\alpha\beta}$ и $\tilde{g}_{\alpha\beta}$, таких, что

$$G_{\alpha\beta} = G_{AB} M_{\alpha}^A M_{\beta}^B = \frac{1}{2} (g_{\alpha\beta} + i \tilde{g}_{\alpha\beta}) \quad (4.6)$$

и

$$\nabla_{\gamma} G_{\alpha\beta} = 2L_{\gamma} G_{\alpha\beta}. \quad (4.7)$$

Аффинор M_{α}^A определяет на $\mathbb{C}Q_n$ интегрируемую комплексную структуру

$$f_{\lambda}^{\alpha} M_{\alpha}^A = -i M_{\lambda}^A.$$

Тензор кривизны внутренней связности равен

$$R_{\gamma\alpha\beta}^{\lambda} = R_{CAB}^D M_{\gamma}^C M_{\alpha}^A M_{\beta}^B M_D^{\lambda} + 2 R_{\bar{C}AB}^D \bar{M}_{[\gamma}^C M_{\alpha]}^A M_{\beta}^B M_D^{\lambda} + \text{conj},$$

где

$$R_{CAB}^D = 2P_{[CA]} \delta_B^D + 2P_{[C|B|} \delta_A^D - 2P_{[C}^D G_{A]B} \quad (4.8)$$

и

$$R_{\bar{C}AB}^D = Q_{\bar{C}A} \delta_B^D + Q_{\bar{C}B} \delta_A^D - Q_{\bar{C}}^D G_{AB}. \quad (4.9)$$

Тензоры Нордена P_{CA} и $Q_{\bar{C}A}$ определяются из разложения

$$N_{\alpha A} = P_{CA} M_{\alpha}^C + Q_{\bar{C}A} \bar{M}_{\alpha}^{\bar{C}}. \quad (4.10)$$

Так как всякая нормализация квадратики может быть получена из евклидовой нормализации $\forall X \in \mathbb{C}Q_n \mapsto Y_0 = \text{const}$, то задание произвольной нормализации равносильно заданию комплекснозначных функций

$$w^A = w^A(X) \quad (4.11)$$

$\mathbb{R}$ -дифференцируемых относительно координат точки X . Нормализующая точка Y определяется разложением

$$Y = Y_0 - \frac{1}{2} (\omega_A \omega^A) X + Z_A^0 \omega^A,$$

а базисные точки поляры прямой

$$Z_A = Z_A^0 + \omega_A X,$$

где Z_A^0 - базисные точки поляры прямой $X \wedge Y_0$. При этом преобразовании структурный аффинор M_α^A и метрический тензор остаются без изменений и, следовательно, это преобразование можно рассматривать как наиболее общее $\mathbb{C}$ -конформное преобразование. Комплексный нормализатор преобразуется по закону

$$L_\alpha = L_\alpha^0 - M_\alpha^A \omega_A,$$

а коэффициенты связности в полярном расслоении

$$\Gamma_{\alpha A}^B = \Gamma_{\alpha A}^{0B} - M_{\alpha A} \omega^B + \omega_A M_\alpha^B.$$

Выбрав за исходные координаты точки X декартовы координаты, получим, что $L_\alpha^0 = 0$, $\Gamma_{\alpha A}^{0B} = 0$ и

$$N_{\alpha A} = \partial_\alpha \omega_A + \frac{1}{2} M_{\alpha A} \omega^C \omega_C - M_\alpha^C \omega_C \omega_A. \quad (4.12)$$

Тем самым теория нормализованных $\mathbb{C}$ -конформных пространств может быть сведена к теории систем комплекснозначных функций, вообще говоря, не аналитических. Случаю аналитических функций соответствует обращение в нуль тензора Нордена

$$Q_{\bar{c}A} = \partial_{\bar{c}} W_A = 0.$$

Так как поверхность Грассмана грассманиана $\mathbb{C}P^{4,2}$ есть $\mathbb{C}Q_4$ - квадрика Клейна, то линейчатая геометрия $\mathbb{C}P^4$ есть $\mathbb{C}$ -конформная геометрия вещественной размерности 8. Метрический тензор в этом случае определяется спин-тензором $E^{ab} E_{pq}$, т.е. бивекторами соответствующих тавтологических расслоений, определенных с точностью до комплексного множителя. Если положить

$$\nabla_\gamma E^{ab} = -\Omega_\gamma E^{ab}, \quad \nabla_\gamma E_{pq} = \tilde{\Omega}_\gamma E_{pq},$$

то

$$2L_\gamma = -\Omega_\gamma + \tilde{\Omega}_\gamma.$$

Роторы дополнительных векторов Ω_γ и $\tilde{\Omega}_\gamma$ этой комплексной геометрии Вейля отличаются знаком и равны

$$2 \nabla_{[\gamma} \Omega_{\alpha]} = -2 \nabla_{[\gamma} \Omega_{\alpha]} = -R_{\gamma\alpha}{}^a = R_{\gamma\alpha\rho}{}^{\rho}$$

Л и т е р а т у р а

1. Н е й ф е л ь д Э.Г. Аффинные связности на нормализованном многообразии плоскостей проективного пространства// Изв. вузов. Матем., 1976. № II. С. 48 - 55.
2. М а н ' и н Ю.И. Калибровочные поля и комплексная геометрия. - М.: Наука, 1984.
3. Н о р д е н А.П. О комплексном представлении тензоров пространства Лоренца// Изв. вузов. Матем., 1959. № I. С. 156 - 163.
4. Н о р д е н А.П. Пространства аффинной связности. - М.: Наука, 1976.
5. Н о р д е н А.П. О самосопряженных образах биаксиального пространства// Уч. зап. Казан. ун-та, 1954. Т. II4. В. 2. С. 3 - 12.
6. Х у а Л о - г э н и Р о з е н ф е л ь д Б.А. Геометрия прямоугольных матриц и ее применение к вещественной проективной и неевклидовой геометрии// Изв. вузов. Матем., 1957. № I. С. 233 - 247.
7. Н е й ф е л ь д Э.Г. Геометрия поверхности в проективном пространстве над алгеброй// Геометрия обобщенных пространств. Уфа, 1982. С. 32 - 50.
8. Н о р д е н А.П. Пространство линейной конгруэнции. - Математ. сб., 1949. В.24 (66). С. 429 - 455.
9. Ш и р о к о в А.П. Геометрия обобщенных биаксиальных пространств// Уч. зап. Казан. ун-та, 1954. Т. II4. В. 2. С. 123 - 166.
10. Н е й ф е л ь д Э.Г. Конформные пространства над алгебрами//Тр.геометр.семинара. - Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1988. Вып. 18. С. 43 - 57.
11. Н о р д е н А.П. О структуре связности на многообразии прямых неевклидова пространства// Изв. вузов. Матем., 1972. № 12. С. 84 - 94.

Литература

1. А з а н о в Н. П. Об уравнениях Бельтрами - Митчелла в V_n . Казан. ун-т. - Казань, 1988. - 6 с. - Деп. в ВИНТИ 22.II.88, № 8236-В88.
2. К а г а н В. Ф. Основы теории поверхностей. - М. -Л. : Гостехиздат, 1947. - Ч. I. - 512 с.
3. С н е д д о н И. Н., Б е р р и Д. С. Классическая теория упругости. - М.: Физматгиз, 1961. - 220 с.
4. С т е п а н о в В. В. Курс дифференциальных уравнений. - М.-Л.: Гостехиздат, 1950. - 468 с.
5. У а н о К. The theory of Lie derivatives and its applications //Amsterdam: North-Holland Publishing Co., 1957. - 299 с.

Александров Н.Д., Нейфельд Э.Г., Александрова Е.В.

РАССЛОЕНИЯ НА ПРИСОЕДИНЕННЫЕ АЛГЕБРЫ К ГИПЕРПОВЕРХНОСТЯМ В ЦЕТРОАФИННОМ ПРОСТРАНСТВЕ. I

§ I. Расслоения на алгебры, имеющие постоянные структурные константы

Пусть A - алгебра ранга n . Расслоение на A - алгебры с базой M - это векторное расслоение $\xi(A) = (E(A), \pi, M)$, наделенное билинейным морфизмом $f: E \times E \rightarrow E$, т.е. каждый слой $B_x = \pi^{-1}(x), \forall x \in M$ наделяется структурой A - алгебры ([1], [13]).

Если для $x \in M$ алгебра $B_x = A_x$ имеет единичный элемент (главную единицу) $\mathcal{E}_x$, то отображение $s: x \rightarrow \mathcal{E}_x$ есть единичное сечение E .

Расслоение $\xi(A)$ на A - алгебры называется локально тривиальным, если для каждой точки $x \in M$ существует такая векторная карта $t = (U, \psi, R^n)$ на E , а также структура A - алгебры на R^n , что t_x^{-1} есть изоморфизм алгебры R^n на алгебру B_x для всякого $x \in U \subset M$.

В работе [2] изучены расслоения на алгебры, полученные в результате левого (правого) регулярного представления алгебры ранга n в типовом слое векторного расслоения $\xi = (E, \pi, M)$. При этом структурная группа $GL(n, R)$ расслоения ξ редуцируется к подгруппе G матриц, перестановочных с матрицами δ_β^α ($\alpha, \beta, \sigma = 1, \dots, m+n$) структурных аффиноров $\hat{\delta}_\sigma = (\delta_\beta^\alpha) = (C_{\sigma\beta}^\alpha)$ алгебры A , где $C_{\sigma\beta}^\alpha$ - структурные константы A .

Предполагается, что в присоединенном главном расслоении $D(M, G)$ допустимых реперов R_x матрицы δ_{σ}^{α} (следовательно и $C_{\sigma\beta}^{\alpha}$) постоянны, например, имеют нормальную жорданову форму.

Локальные формы инфинитезимальной связности ω_{β}^{α} в этом расслоении на алгебры будут со значениями в алгебре Ли группы G ,

т.е.

$$\omega_{\beta}^{\alpha} = \lambda^{\sigma}(x^s) R_{\sigma\beta}^{\alpha} = \lambda^{\sigma}(x^s) C_{\sigma\beta}^{\alpha}, \quad (R_{\sigma\beta}^{\alpha}) = (C_{\sigma\beta}^{\alpha}), \quad (I)$$

а коэффициенты связности равны

$$\gamma_{i\beta}^{\alpha} = \lambda_i^{\sigma}(x^s) C_{\sigma\beta}^{\alpha}, \quad (2)$$

где $\lambda^{\sigma}(x^s)$ - некоторые линейные формы на M , а $\lambda_i^{\sigma}(x^s)$ - функции точки базы M . В этой связности $\delta_{\sigma}^{\alpha} \delta_{\sigma}^{\alpha} = 0$. Величины

$$\lambda^{\sigma} = \omega_{\beta}^{\sigma} \varepsilon^{\beta}, \quad \text{а} \quad \lambda_i^{\sigma}(x^s) = \gamma_{i\beta}^{\sigma}(x^s) \varepsilon^{\beta} = \gamma_i^{\sigma}(x^s, \varepsilon^{\beta}). \quad (3)$$

При допустимых преобразованиях локальных координат (x^i, x^{α}) расслоения $\xi(A)$

$$\begin{cases} x^{i'} = f^{i'}(x^{\kappa}), \\ x^{\alpha'} = f_{\beta}^{\alpha'}(x^{\kappa}) x^{\beta}, \end{cases} \quad (4)$$

$$f^{i'}(x^{\kappa}) \in C^{\infty}, \quad \det(\partial_j f^{i'}) \neq 0, \quad \|f_{\beta}^{\alpha'}(x^{\kappa})\| \in GL(n, R),$$

закон преобразования λ_i^{σ} следующий

$$\lambda_{i'}^{\sigma'} = f_{i'}^j (f_{\nu}^{\sigma'} \lambda_j^{\nu} - \varepsilon^{\beta} \partial_j f_{\beta}^{\sigma'}) , \quad (5)$$

т.е. величины $\lambda_i^{\sigma}(x^j)$ определяют горизонтальное распределение в расслоении на алгебры $\xi(A)$ вдоль единичного сечения

$$s(x^{\kappa}) = (x^{\kappa}, \varepsilon^{\beta}).$$

При фиксированных σ величины $\lambda_i^{\sigma}(x^j)$ изменяются как ковекторы базы

$$\lambda_{i'}^{\sigma}(x^j) = f_{i'}^i \lambda_i^{\sigma}(x^j). \quad (6)$$

Выражение координат тензора кривизны следующее:

$$R_{ij\alpha}^{\beta} = \left\{ \partial_i \lambda_j^{\beta} - \partial_j \lambda_i^{\beta} + (\lambda_i^{\nu} \lambda_j^{\mu} - \lambda_j^{\nu} \lambda_i^{\mu}) C_{\mu\nu}^{\beta} \right\} C_{\beta\alpha}^{\sigma}. \quad (7)$$

Если алгебра A коммутативна, то оно принимает вид

$$R_{ij\alpha}^{\beta} = (\partial_i \lambda_j^{\beta} - \partial_j \lambda_i^{\beta}) C_{\beta\alpha}^{\sigma} \quad (8)$$

и поэтому связность будет плоской тогда и только тогда, когда величины λ_i^{σ} являются градиентами.

§ 2. Присоединенная алгебра к гиперповерхности
в центроаффинном пространстве

Пусть E_n - центроаффинное пространство. Преобразования центроаффинной группы имеют вид ($\alpha, \beta = 1, \dots, n$)

$$x^{\alpha'} = A_{\alpha}^{\alpha'} x^{\alpha}, \quad \Delta = \det(A_{\alpha}^{\alpha'}) \neq 0. \quad (9)$$

Точки, не совпадающие с центром O , и гиперплоскости, не проходящие через центр, будем называть собственными. Напомним, что в E_n имеет место принцип полной двойственности (П.П.Д.).

Рассмотрим гиперповерхность $X_{n-1}^1 \subset E_n$, заданную параметрическими уравнениями

$$x^{\alpha} = x^{\alpha}(u^1, \dots, u^{n-1}). \quad (10)$$

Будем предполагать, что она состоит из собственных точек, а ее касательные гиперплоскости собственные. Кроме того, предполагается, что семейство касательных гиперплоскостей зависит от $n-1$ существенных параметров и является дифференцируемым многообразием X_{n-1}^2 .

Аналитический аппарат центроаффинной теории гиперповерхностей использует 1) внутренние связности I-го и 2-го рода с коэффициентами $\Gamma_{ij}^{\kappa 1}$ и $\Gamma_{ij}^{\kappa 2}$ ([7],[8]); 2) среднюю связность $\Gamma_{ij}^{\kappa} = \frac{1}{2}(\Gamma_{ij}^{\kappa 1} + \Gamma_{ij}^{\kappa 2})$ ([7], [11], [14], [15]). Деривационные уравнения $X_{n-1}^1 \subset E_n$ имеют вид [7]

$$\nabla_i \vec{z}_j = B_{ij}^{\kappa} \vec{z}_{\kappa} - g_{ij} \vec{z}, \quad \vec{z}_i = \partial_i \vec{z}, \quad (11)$$

где $g_{ij}(u^{\kappa}) = \vec{\xi}_i \cdot \vec{z}_j$ - асимптотический или I-й фундаментальный тензор, $\vec{\xi}_i = \partial_i \vec{\xi}$, $\vec{\xi}$ - ковектор касательной гиперплоскости в точке $M \in X_{n-1}^1$, ∇_i - символ ковариантного дифференцирования относительно средней (римановой, т.к. $\nabla_{\kappa} g_{ij} = 0$) связности. Так как тангенциально-вырожденные гиперповерхности исключены из рассмотрения, то $\det(g_{ij}) \neq 0$. B_{ij}^{κ} - это 2-й фундаментальный тензор гиперповерхности.

Условия интегрируемости уравнений (11) дают

$$B_{ijk} = \text{sym.}, \quad -\frac{1}{2} R_{\kappa ij}^{\ell} = \nabla_{[\kappa} B_{i]j}^{\ell} - \delta_{[\kappa}^{\ell} g_{i]j} + B_{[\kappa i s]}^{\ell} B_{s]j}^s, \quad (12)$$

или в силу симметрии $\nabla_\kappa B_{ij}^\ell$ по j и ℓ примут вид

$$\nabla_\kappa B_{ij}^\ell = \text{sym.}, R_{\kappa ij}^\ell = 2(\delta_{[\kappa}^\ell g_{ij]} - B_{[\kappa | \ell | i] j}^\ell B_{i] j}^\ell), \quad (I3)$$

где $R_{\kappa ij}^\ell$ - тензор кривизны средней связности.

С каждой точкой $M \in X_{n-1}^1$ ассоциируется унитарная алгебра

$A_n(X_{n-1}^1)$ с базисом $\{e = e_0, e_1, \dots, e_{n-1}\}$ ранга n , определяемая следующей таблицей Кели

·	e	e_j	(I4)
e	e	e_j	
e_i	e_i	$B_{ij}^\kappa e_\kappa - g_{ij} e$	

Для любого элемента $a \in A_n(X_{n-1}^1)$ имеем единственное разложение.

$$a = a^A e_A = a^0 e + a^1 e_1 + \dots + a^{n-1} e_{n-1} \stackrel{df}{=} a^0 e + \xi,$$

$$a^0, a^1, \dots, a^{n-1} \in \mathbb{R} \quad (A, B, \dots = 0, 1, 2, \dots, n-1).$$

Назовем $a^0 e$ - скалярной частью элемента a , а $\xi = a^i e_i$ - векторной (или вектором ξ) (сравни с теорией кватернионов).

Для векторных частей элементов $a = a^0 e + a^i e_i = a^0 e + \xi$,

$$b = b^0 e + b^1 e_1 + \dots + b^{n-1} e_{n-1} = b^0 e + \eta, c = c^0 e + c^1 e_1 + \dots + c^{n-1} e_{n-1} = c^0 e + \zeta,$$

$b^0, c^0 \in \mathbb{R}$ можно ввести следующие умножения:

1) "скалярное произведение двух векторов", например,

$$(\xi, \eta) = g_{ij} \xi^i \eta^j; \quad (I5)$$

2) "векторное произведение двух векторов", например,

$$\{\eta, \xi\} = B_{ij}^\kappa \eta^i \xi^j e_\kappa; \quad (I6)$$

3) "смешанное произведение трех векторов"

$$(\xi, \eta, \zeta) = (\{\xi, \eta\}, \zeta) = B_{ijk} \xi^i \eta^j \zeta^k. \quad (I7)$$

Обычно в качестве главной единицы e алгебры $A_n(X_{n-1}^1)$ выступает 1; "векторное" и "смешанное" произведения коммутативны, так как B_{ij}^κ, B_{ijk} - симметрические тензоры. Тогда внутреннее умножение для любых двух элементов $a = a^0 + \xi, b = b^0 + \eta$ в ал-

гебре $A_n(X_{n-1}^1)$ можно определить следующим образом:

$$ab = a^0 b^0 + a^0 \eta + b^0 \xi - (\xi, \eta) + \{\xi, \eta\}. \quad (18)$$

Так как "векторное произведение" коммутативно, то для любых двух элементов a и b из $A_n(\overset{1}{X}_{n-1})$ их коммутатор $[a, b] = ab - ba = 0$, т.е. ([16]) присоединенная алгебра $A_n(\overset{1}{X}_{n-1})$ - коммутативная, (впрочем, это видно и из таблицы Кэли для $A_n(\overset{1}{X}_{n-1})$ с учетом симметричности тензоров g_{ij} и B_{ij}^k по индексам i и j).

Однако, в общем случае, алгебра $A_n(\overset{1}{X}_{n-1})$ не является ассоциативной. В самом деле, как известно, отклонение от ассоциативности определяется ассоциатором алгебры $\{abc\} = (ab)c - a(bc)$ для любых ее элементов a, b и c . Для нашей присоединенной алгебры имеем

$$\begin{aligned} \{abc\} &= (ab)c - a(bc) = -(\xi, \eta)\xi + (\xi, \eta)\xi - \\ &- \{\{\xi, \eta\}, \xi\} - \{\{\xi, \eta\}, \xi\}. \end{aligned} \quad (19)$$

Отсюда видно, что ассоциатор присоединенной алгебры $A_n(\overset{1}{X}_{n-1})$ не зависит от скалярных частей элементов a, b и c . Положив в (19) $a = e_i, b = e_j, c = e_k$, получаем

$$\begin{aligned} \{e_i e_j e_k\} &= (e_i e_j) e_k - e_i (e_j e_k) = (e_i e_j) e_k - (e_k e_j) e_i = \\ &= (-g_{ij} \delta_k^\ell + g_{kj} \delta_i^\ell + B_{km}^\ell B_{ij}^m - B_{im}^\ell B_{kj}^m) e_\ell = R_{kij}^\ell e_\ell, \\ \{e_i e_j e_k\} &= R_{kij}^\ell e_\ell, \end{aligned}$$

Следовательно, верна теорема.

Теорема. Ассоциатор присоединенной алгебры $A_n(\overset{1}{X}_{n-1})$ к тангенциально-невырожденной гиперповерхности $\overset{1}{X}_{n-1}$ в центроаффинном пространстве E_n равняется тензору кривизны этой гиперповерхности в средней связности.

В частности, если алгебра $A_n(\overset{1}{X}_{n-1})$ ассоциативная, то гиперповерхность $\overset{1}{X}_{n-1}$ нулевой кривизны ($R_{kij}^\ell = 0$), т.е. средняя связность Γ_{ij}^k евклидова.

§ 3. Конструкция расслоений на алгебры

1. Пусть $\overset{1}{X}_{n-1} : \vec{r} = \vec{r}(u^i)$ - тангенциально-невырожденная гиперповерхность в центроаффинном пространстве E_n . Сконструиру-

ем расслоение на алгебры, связанное с (присоединенное к) $\overset{1}{X}_{n-1}$ ([3] - [4], [6]). Базой расслоения выберем $\overset{1}{X}_{n-1} \stackrel{df}{=} B$, так что базовые локальные координаты $x^i \stackrel{df}{=} u^i$, $\forall x \in B$. Слои изоморфны присоединенной к гиперповерхности коммутативной, унитарной алгебре $A_n(\overset{1}{X}_{n-1})$. Обозначим это расслоение на алгебры через $\xi(A_n(\overset{1}{X}_{n-1})) = (E(A_n), \tilde{\pi}(A_n), \overset{1}{X}_{n-1})$. Проекция $\tilde{\pi}(A_n)$ - это некоторый морфизм, который удовлетворяет условию $\tilde{\pi}(A_n): E(A_n) \rightarrow \overset{1}{X}_{n-1}$.

Это расслоение можно представлять как объединение слоев $\tilde{\pi}^{-1}(A_n)(x) = A_{n,x}(\overset{1}{X}_{n-1})$, $\forall x \in \overset{1}{X}_{n-1}$, параметризованных $x^i = u^i$. Каждый слой векторного расслоения $\xi = (E, \tilde{\pi}, \overset{1}{X}_{n-1})$ присоединенного к расслоению $\xi(A_n(\overset{1}{X}_{n-1}))$, представляет собой линейную оболочку, натянутую на линейно независимую систему векторов $\vec{r}, \vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_{n-1}$, т.е. $\tilde{\pi}^{-1}(x) = L(\vec{r}, \vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_{n-1})$. Тогда при $\overset{1}{X}_{n-1}$ -морфизме расслоения ξ в расслоение $\xi(A_n(\overset{1}{X}_{n-1}))$ радиус-вектор $\vec{r}$ точки $M(u^i)$ можно поставить в соответствие главной единице $e_0(x^i) = e(x^i)$, а $\vec{r}_i(u^i)$ базисной единице $e_i(x^i)$.

2. Обозначим для удобства

$$\vec{r}_A = \begin{cases} \vec{r} & , \text{ если } A = 0 \\ \vec{r}_i & , \text{ если } A = i \end{cases} ; \quad (21)$$

$$e_A = \begin{cases} e_0 = e & , \text{ если } A = 0 \\ e_i & , \text{ если } A = i \end{cases} . \quad (22)$$

Если обозначим структурные константы присоединенной алгебры через C_{AB}^C , то они, являясь коэффициентами в разложениях

$$e_A e_B = C_{AB}^C e_C , \quad (23)$$

представляют собой также функции от параметров $x^i = u^i$ базы $\overset{1}{X}_{n-1}: C_{AB}^C = C_{AB}^C(x^i)$.

Следовательно, можно считать, что структура расслоения на алгебры $\xi(A_n(\overset{1}{X}_{n-1}))$ определяется заданием в каждом слое

$\pi^{-1}(x)$, $\forall x \in X_{n-1}^1$ векторного расслоения ξ ранга n тензорного поля типа $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ или по-другому заданием сечения тензорного расслоения $E_2^1(X_{n-1}^1)$ типа $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ над X_{n-1}^1 ([I6]), соответствующего векторному расслоению ξ .

Применяя обозначения (2I), деривационные уравнения (II) можно записать в "обобщенном" виде

$$\vec{r}_A = \partial_A \vec{r}, \quad \nabla_i \vec{r}_A = B_{ij}^0 \vec{r}_0 + B_{ij}^k \vec{r}_k = B_{iA}^B \vec{r}_B, \quad (II')$$

где $B_{ij}^0 = -g_{ij}$, $\partial_i \vec{r} = \nabla_i \vec{r}_0 = \delta_i^A \vec{r}_A$. Из последнего равенства следует, что $B_{i0}^A = \delta_i^A$. Тогда с учетом обозначений (22) таблица Кэли (I4) переписывается

	e_0	e_j
e_0	e_0	e_j
e_i	e_i	$B_{ij}^0 e_0 + B_{ij}^k e_k$

(I4')

Сравнивая разложения (23) и таблицу Кэли (I4'), получаем непосредственные выражения $C_{AB}^C(x^i)$ через $B_{AB}^C(x^i)$

$$C_{00}^0 = 1, \quad C_{0j}^k = C_{j0}^k = \delta_j^k, \quad C_{0j}^0 = 0, \quad (24)$$

$$C_{ij}^0 = -g_{ij}, \quad C_{ij}^k = B_{ij}^k.$$

§ 4. Инфинитезимальная связность расслоения на алгебры со структурными константами, являющимися функциями координат точек базы

I. Как видим из рассуждений § 3, возникает необходимость изучения расслоений на алгебры со структурными константами, являющимися функциями координат точек базы.

Пусть $\xi(A_n(x)) = (E(A_n), \pi, M)$ есть расслоение на алгебры $A_n(x)$ ранга n , с базисом $e_\alpha = e_\alpha(x)$ и со структурными константами $C_{\alpha\beta}^\gamma = C_{\alpha\beta}^\gamma(x)$, $\forall x \in M$ ($\alpha, \beta, \gamma, \dots = 1, 2, \dots, n$).

Алгебраическая структура унитарная, если существует сечение $e = e(x) = e^\alpha(x) e_\alpha(x)$ такое, что

$$C_{\alpha\beta}^\gamma e^\alpha = C_{\beta\alpha}^\gamma e^\alpha = \delta_\beta^\gamma; \quad (25)$$

коммутативна, если $K_{\alpha\beta}^\gamma = C_{\alpha\beta}^\gamma - C_{\beta\alpha}^\gamma = 0$, (26)

или ассоциативна, если

$$A_{\alpha\beta\gamma}^{\delta} = C_{\alpha\beta}^{\delta} C_{\delta\gamma}^{\delta} - C_{\alpha\delta}^{\delta} C_{\beta\gamma}^{\delta} = 0. \quad (27)$$

Тензоры $K_{\alpha\beta}^{\gamma}$ и $A_{\alpha\beta\gamma}^{\delta}$ назовем соответственно коммутатором и ассоциатором данной структуры.

Известно ([1]), что инфинитезимальная связность ∇ на расслоении $\xi(A_n)$ каждому векторному полю $\vec{u} \in \mathcal{X}(M)$ из модуля векторных полей на M и сечению $X \in \mathcal{X}_{\nu}(E(A_n))$ из модуля сечений пространства $E(A_n)$ ставит в соответствие сечение $\nabla_{\vec{u}} X$ из $\mathcal{X}_{\nu}(E(A_n))$, при этом выполняются соотношения

$$\begin{aligned} 1^{\circ} \nabla_{\vec{u}_1 + \vec{u}_2} X &= \nabla_{\vec{u}_1} X + \nabla_{\vec{u}_2} X; & 2^{\circ} \nabla_{f\vec{u}} X &= f \nabla_{\vec{u}} X; & 3^{\circ} \nabla_{\vec{u}}(X_1 + X_2) &= \\ &= \nabla_{\vec{u}} X_1 + \nabla_{\vec{u}} X_2; & 4^{\circ} \nabla_{\vec{u}}(fX) &= f \nabla_{\vec{u}} X + df(\vec{u})X, \end{aligned} \quad (28)$$

где $f \in \mathcal{F}(M)$, $\vec{u}, \vec{u}_1, \vec{u}_2 \in \mathcal{X}(M)$, $X, X_1, X_2 \in \mathcal{X}_{\nu}(E(A_n))$.

Разложения

$$\nabla_i e_{\alpha} = \nabla_{\partial_i} e_{\alpha}(x) = \Gamma_{i\alpha}^{\beta} e_{\beta} \quad (29)$$

определяют коэффициенты линейной связности $\Gamma_{i\alpha}^{\beta}(x)$ и, например,

$$\nabla_i x^{\alpha} = \partial_i x^{\alpha} + \Gamma_{i\beta}^{\alpha} x^{\beta} \quad (30)$$

есть ковариантная производная координат сечения $X = x^{\alpha} e_{\alpha}$.

В общем случае связность не зависит от структуры алгебры $A_n(x)$.

2. Если алгебра $A_n(x)$ унитарная, то для координат $c^{\alpha}(x)$ главной единицы $e = c^{\alpha}(x) e_{\alpha}$ имеем $\nabla_i c^{\alpha} = \partial_i c^{\alpha} + \Gamma_{i\beta}^{\alpha} c^{\beta}$. Нетрудно доказать, что условия $\nabla_i c^{\alpha} = 0$ и $\nabla_i e = 0$ равносильны.

Пусть $\nabla_i e = 0$. Тогда

$$\Gamma_{i\alpha}^{\alpha} = \Gamma_{i\alpha}^{\alpha}(x, c^{\beta}) = \Gamma_{i\beta}^{\alpha}(x^{\beta}) c^{\beta} = -\partial_i c^{\alpha},$$

т.е. $\Gamma_{i\alpha}^{\alpha}$ являются градиентами и связность является локально плоской.

3. Связность ∇ есть связность дифференцирования ([13]), если

$$(\forall X, Y \in \mathcal{X}_{\nu}(E)) [\nabla_{\vec{u}}(XY) = (\nabla_{\vec{u}} X)Y + X \nabla_{\vec{u}} Y] \quad (31)$$

Покажем, что связность дифференцирования удовлетворяет условию

$$\nabla_i C_{\alpha\beta}^{\gamma} = 0. \quad (32)$$

В самом деле, имеем

$$\nabla_i (e_{\alpha} e_{\beta}) = (\nabla_i e_{\alpha}) e_{\beta} + e_{\alpha} (\nabla_i e_{\beta}),$$

$$\nabla_i (e_\alpha e_\beta) = \nabla_i (C_{\alpha\beta}^\gamma e_\gamma) = (\partial_i C_{\alpha\beta}^\gamma) e_\gamma + C_{\alpha\beta}^\gamma \Gamma_{i\delta}^\gamma e_\delta,$$

$$(\nabla_i e_\alpha) e_\beta + e_\alpha (\nabla_i e_\beta) = (\Gamma_{i\alpha}^\delta e_\delta) e_\beta + e_\alpha \Gamma_{i\beta}^\delta e_\delta =$$

$$= \Gamma_{i\alpha}^\delta C_{\delta\beta}^\gamma e_\gamma + \Gamma_{i\beta}^\delta C_{\alpha\delta}^\gamma e_\gamma,$$

$$\partial_i C_{\alpha\beta}^\gamma + \Gamma_{i\delta}^\gamma C_{\alpha\beta}^\delta - \Gamma_{i\alpha}^\delta C_{\delta\beta}^\gamma - \Gamma_{i\beta}^\delta C_{\alpha\delta}^\gamma = \nabla_i C_{\alpha\beta}^\gamma = 0.$$

В общем случае связность ∇ не является связностью дифференцирования и $\nabla_i C_{\alpha\beta}^\gamma \neq 0$.

4. Отметим, что при изучении $\xi(A_n)$ возникают следующие проблемы:

1) при каких условиях алгебраическая структура в $\xi(A_n)$ сохраняется?;

2) как влияет ассоциативность алгебры $A_n(x)$ на алгебраическую структуру в $\xi(A_n)$?;

3) когда и в каком базисе $e_\alpha(x)$ можно рассматривать связности с коэффициентами вида $\Gamma_{i\beta}^\alpha = \Lambda_i^\beta(x^j) C_{\beta\delta}^\alpha(x)$? (сравни с (2));

4) что представляет собой выражение $\nabla_{\vec{u}} X Y - (\nabla_{\vec{u}} X) Y - X \nabla_{\vec{u}} Y$, зависящее от $\vec{u}$, X , Y ?;

5) какова роль коммутатора $K_{\alpha\beta}^\gamma$ и ассоциатора $A_{\alpha\beta\gamma}^\delta$ данной структуры?

Литература

1. Александров Н. Д. Некоторые расслоения над алгебрами. Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук. Казань, 1979.

2. Александров Н. Д. О G -структуре на векторном расслоении, определяемой регулярным представлением алгебры // Тр. геом. семинара. - Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1980. - Вып. 12. - С. 5 - 17.

3. Александров Н. Д., Нейфельд Э. Г. Расслоения на алгебры и некоторые гиперповерхности в центроаффинном пространстве. Тезисы докл. 2-й международной конф. по геометрии. Смолен, НРБ, 1986. - С. 3.

4. Александров Н. Д. Расслоения на алгебры, ассоциированные с гиперповерхностями в центроаффинном простран-

ве. Тезисы докл. IX Всесоюзной геом. конференции. Кишинев, 1988. - С. 8 - 9.

5. Нейфельд Э. Г. Об одном классе алгебраической гиперповерхности в центрально-аффинном пространстве // Ученые зап. Башк. ун-та. Уфа, 1968. - Вып. 31. - С. 228 - 230.

6. Бурдаков В. М., Нейфельд Э. Г. Об одном классе гиперповерхности в центрально-аффинном пространстве. Тезисы УП Всесоюзн. конф. по соврем. пробл. геом. Минск, 1979. - С.34.

7. Широков П. А., Широков А. П. Аффинная дифференциальная геометрия. - М.: ГИФМЛ, 1959.

8. Вагнер В. В. Геометрия Финслера, как теория поля локальных гиперповерхностей в X_n // Тр. сем. по вект. и тенз. анализу. М., 1949. - Вып. 7. - С. 65 - 166.

9. Вагнер В. В. Теория составного многообразия // Тр. сем. по вект. и тенз. анализу. М., 1950. - Вып. 8. - С. 9 - 72.

10. Вагнер В. В. Теория поля локальных гиперполос // Тр. сем. по вект. и тенз. анализу. М., 1950. - Вып. 8. - С. 197 - 272.

11. Жотиков Г. И. Применение метода Вагнера-Вайзе к построению теории поверхностей произвольного числа измерений в n -мерном Центрально-аффинном пространстве E_n // Тр. физ.-мат. фак-та Киргизского гос. ун-та, 1955. - Вып. 3. - С. 21 - 35.

12. Ходж В., Пидо Д. Методы алгебраической геометрии. - М.: ИИЛ, 1954, 1955. ТТ. I - 3.

13. Бурбаки Н. Дифференцируемые и аналитические многообразия // Сводка результатов. - М.: Мир, 1975.

14. Blaschke W. Affine Differentialgeometrie. Berlin, 1923.

15. Salikowski E. Affine Differentialgeometrie. Berlin und Leipzig, 1934.

16. Шапков Б. Н. Структура тензорных расслоений I // Изв. вузов. Матем. - 1979. - № 5. - С. 63 - 73.

Автор выражает благодарность В.В.Щурыгину за полезные обсуждения результатов данной работы.

Л и т е р а т у р а

1. Алексеевский Д.В., Виноградов А.М., Лычагин В.В. Основные идеи и понятия дифференциальной геометрии // Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. - М.: ВИНТИ, 1988. - Т.28. - С.5 - 297.

2. Вишневский В.В., Широков А.П., Щурыгин В.В. Пространства над алгебрами. - Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1985. - 264 с.

3. Кобаяси Ш., Номидзу К. Основы дифференциальной геометрии. - М.: Наука, 1981. - Т.1. - 344 с.

4. Широков А.П. Структуры на дифференцируемых многообразиях // Алгебра. Топология. Геометрия. 1967. М., 1969. - С.127 - 188.

5. Тамура И. Топология слоений. - М.: Мир, 1979. - 317 с.

Э.Г.Нейфельд

ДВОЙСТВЕННЫЕ КУБИЧЕСКИЕ ПОЛЯРИТЕТЫ И СВЯЗАННЫЕ С НИМИ ГЕОМЕТРИИ

I. Два поляритета, определенные алгебраической гиперповерхностью порядка p и ее коррелятивным образом в проективном пространстве P^n ранга n над полем K , назовем двойственными, если полюс во втором поляритее полярной точки общего положения в первом совпадает с этой точкой. Если

$$(x^p) = 0, \quad (\xi^p) = 0 \quad (I)$$

уравнения названной гиперповерхности и ее коррелятивного образа, соответствующие контраградиентным формам (x^p) и (ξ^p) , а (x^{p-1}) полярной точки x и (ξ^{p-1}) полюс гиперплоскости ξ , то условие двойственности поляритетов приводит к условию

$$((x^{p-1})^{p-1}) = \rho x.$$

Легко видеть, что ρ лишь постоянным множителем отличается от $\rho + 2$ степени формы (x^p) , так что всегда можно ввести относительное нормирование этих форм такое, что

$$((x^{p-1})^{p-1}) = (x^p)^{p-2} x. \quad (2)$$

Это основное тождество равносильно двойственному тождеству

$$((\xi^{p-1})^{p-1}) = (\xi^p)^{p-2} \xi. \quad (3)$$

Примером двойственных поляритетов могут служить поляритеты, формы которых соответствуют определителям матриц общего вида или симметрических над $\mathbb{R}$ и определителям эрмитово-симметрических матриц над алгеброй комплексных чисел $\mathbb{C}$, кватернионов $\mathbb{H}$ и чисел Келли $\mathbb{K}$ (в последнем случае порядок матрицы необходимо равен 3 [I]).

При $\rho = 2$ все сказанное тривиально. Соответствующие здесь геометрии — это неевклидовы, т.е. Лобачевского и Римана и их модификации, евклидовы (псевдоевклидовы) и конформные. Аналогичные геометрические образования можно связать и с двойственными поляритетами высших порядков, но уже случай $\rho = 3$ показывает, что эти обобщения нетривиальны и более разнообразны.

2. В этом случае существует поверхность особых точек $\mathcal{F}$: $(x^2) = 0$ и семейство особых гиперплоскостей Φ , для которых $(\xi^2) = 0$, причем касательные гиперплоскости гиперповерхности (I) суть элементы из Φ , а характеристические точки соответствующего коррелятивного образа есть точки поверхности $\mathcal{F}$.

В случае $(x^3) = \det x$, где x — эрмитово-симметрическая матрица над $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{H}$ и $\mathbb{K}$ на поверхности $\mathcal{F}$, определяется структура проективной плоскости над этими алгебрами [I]; элементы из $\mathcal{F}$ и Φ суть "точки" и "прямые" этих плоскостных геометрий, причем прямая (точка), инцидентная двум точкам (прямым), определяется соответственно гиперплоскостью и точкой в ρ^u

$$\zeta = (x y) \in \Phi, \quad z = (\xi \eta) \in \mathcal{F} \quad (4)$$

при условии $x, y \in \mathcal{F}; \xi, \eta \in \Phi$.

В общем случае, например, при $n = 15$, когда P^{15} порождено бивекторами пространства 6 измерений, а (α^3) — пфаффиан бивектора $\mathcal{X}$, на $\mathcal{F}$ могут существовать сопряженные пары точек (гиперплоскостей на Φ), для которых

$$(x \ y) = 0, \quad (\xi \ \eta) = 0.$$

Поэтому в общем случае геометрию на $\mathcal{F}$ будем называть геометрией почтипроективной плоскости, элементы из $\mathcal{F}$ ее точками, а из Φ — прямыми. Отношение инцидентности остается такое же, как и в P^n , т.е.

$$\xi x = 0.$$

Как показывает пример проективной плоскости над $\mathbb{K}$ [1] эта геометрия может быть недезарговой.

3. Нормализация поверхности $\mathcal{F}$ задается дифференцируемым соответствием между точками и прямыми этой почтипроективной плоскости. Такое соответствие определяет нормализацию этой поверхности в смысле А.П.Нордена, причем нормаль 2-го рода есть пересечение ξ как гиперплоскости в P^n с касательной плоскостью точки $x \in \mathcal{F}$, а вершины нормали 1-го рода

$$\chi_p = (\xi \ E_p), \quad (5)$$

где E_p — базисные гиперплоскости связки, содержащей касательную плоскость как характеристическое многообразие.

Внутренняя геометрия на $\mathcal{F}$, определенная этой нормализацией проективно-евклидова в том смысле, что геодезическая, проходящая через точку x в направлении, определенном точкой y на нормали 2-го рода, принадлежит двумерной плоскости, проходящей через эти точки и через инвариантно определяемую точку z пересечения нормали 1-го рода с $\mathcal{F}$, которая в свою очередь принадлежит прямой $\omega = (x \ z) \in \Phi$, причем $z = (\omega \ \xi)$.

4. Точки пространства двойственных кубических поляритетов или K_{n-1} играют роль квадратичных поляритетов в почтипроективной геометрии на $\mathcal{F}$, а гиперплоскости им взаимны. Если q — точка общего положения, то точке $x \in \mathcal{F}$ соответствует поляр $\xi \in \Phi$

$$\xi = 2(a^3)(ax) - 3(a^2x)(a^2) \quad (6)$$

Обратное преобразование (6) определяется кубической полярной точкой $0, d = (\alpha^2)$:

$$(\alpha^3)^4 x = 2(\alpha^3)(\alpha\xi) - 3(\alpha^2\xi)(\alpha^2). \quad (7)$$

Внутренняя геометрия на $\mathcal{F}$, определяемая этими соответствиями, будет римановой и симметрической в смысле Э.Картана; ее следует рассматривать как аналог геометрии Лобачевского на $\mathcal{F}$. Если $(\alpha^3) = 0$, $(\alpha^2) \neq 0$, то поляритет (6) будет вырожденным и $\xi = (\alpha^2)$. Соответствующая геометрия на $\mathcal{F}$ будет аналогом евклидовой.

5. Перейдем теперь к внутренним геометриям самого пространства K_{n-1} определенных на его многообразии точек общего положения, для которых можно ввести нормирование

$$(x^3) = 1 \iff (\xi^3) = 1, \xi = (x^2). \quad (8)$$

Уравнения (8) определяют в центроаффинном пространстве E_n гиперповерхность 3-го порядка и класса. Ее геометрии 1-го и 2-го рода будут, как известно, эквипроективными, а их средняя геометрия римановой и симметрической в смысле Э.Картана. Кроме метрического или 1-го фундаментального тензора

$$g_{ij} = 2(x x_i x_j) = 2(\xi \xi_i \xi_j), \quad i, j, k = \overline{1, n-1} \quad (9)$$

ковариантно-постоянным будет и 2-й фундаментальный тензор

$$A_{ijk} = (x_i x_j x_k) = -(\xi_i \xi_j \xi_k). \quad (10)$$

Эти тензоры связаны соотношением

$$A_{e(i} {}^m A_{j k) m} - \frac{1}{2} g_{e(i} g_{j k)} = 0 \quad (11)$$

и условием аполярности

$$g^{kr} A_{ki} = 0.$$

Из последнего следует, что гиперповерхность (8) есть центроаффинная гиперсфера 3-го порядка и класса или А-сфера в смысле [2], где рассматривался частный ее случай при $n = 3$.

Геодезические линии этой римановой геометрии, рассматриваемые в ее проективной интерпретации, т.е. в K_{n-1} , характеризуются

тем, что они лежат в двумерных плоскостях, каждая из которых проходит через точки x , x' и x'' . Они принадлежат к классу кривых, определяемых уравнением

$$x = c_1 l^{k_1} + c_2 l^{k_2} + c_3 l^{k_3}, \quad k_1 + k_2 + k_3 = 0, \quad (I2)$$

которое есть интеграл дифференциального продолжения уравнения геодезических

$$x''' + \frac{1}{2} \delta x' + ax = 0, \quad \delta = g_{ij} \frac{dx^i}{ds} \frac{dx^j}{ds},$$

$$a = A_{ijk} \frac{dx^i}{ds} \frac{dx^j}{ds} \frac{dx^k}{ds}.$$

Заметим, что плоскость точек c_1, c_2, c_3 вполне определяется геодезической I-го рода, т.е. прямой в K_{n-1} , проходящей через точки x и x' . Действительно, эта прямая пересекает гиперповерхность $(x^3) = 0$ — абсолют пространства K_{n-1} в трех различных точках, касательные гиперплоскости которых принадлежат Φ , т.е. будут прямыми почтипроективной плоскости $\mathcal{F}$. Они попарно инцидентны точкам c_1, c_2, c_3 , которые и будут базисными точками плоскости (I2). А так как всякая такая супергеодезическая плоскость содержит двупараметрическое семейство прямых и сама зависит от $3m$ параметров, то между размерностью $n = \dim \mathcal{F}$ почтипроективной плоскостью и рангом n самого пространства существует соотношение

$$2(n-2) = 3m + 2,$$

из чего следует, что ранг пространства двойственных кубических поляритетов необходимо кратен 3

$$n = 3, \quad m = 2(k-1), \quad m \neq 0.$$

Вопрос о том, существуют ли такие пространства при любом k мы не рассматриваем.

На супергеодезической плоскости могут быть определены угловые параметры Аппеля [2] φ и ψ , причем

$$x = c_1 l^{\varphi_1} + c_2 l^{\varphi_2} + c_3 l^{\varphi_3}, \quad \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 = 0 \quad (I3)$$

и

$$\varphi_1 = \varphi + \psi, \quad \varphi_2 = \varepsilon \varphi + \varepsilon^2 \psi, \quad \varphi_3 = \varepsilon^2 \varphi + \varepsilon \psi, \quad \varepsilon = \sqrt[3]{1} \neq 1.$$

Если характеристические числа k_2 и k_3 комплексно-сопряжены,

то точки C_2 и C_3 будут мнимо-сопряженными, а параметры Аппеля вещественны. Заметим, что они могут быть определены из уравнений

$$P(\varphi, \psi) = (x^2 y), \quad P(-\varphi, -\psi) = (x y^2)$$

при нормировании $(x^3) = (y^3) = 1$,
где

$$P(\varphi, \psi) = \frac{1}{3} (l^{\varphi_1} + l^{\varphi_2} + l^{\varphi_3})$$

первая функция Аппеля двух переменных.

Вдоль геодезических средней связности отношение угловых параметров Аппеля постоянно.

Наконец, отметим, что присоединенная алгебра [3] гиперповерхности (8), т.е. унитарная алгебра, структурные константы которой определяются фундаментальными тензорами (9) и (10),

$$l_i l_j = l_j l_i = l_i, \quad l_i l_j = A_{ij}^k l_k - g_{ij} l \quad (14)$$

будет йордановой, что следует из условия ковариантного постоянства тензора (10), из которого следует

$$R_{ij(k}^m A_{lk)m} = 0, \quad (15)$$

причем тензор кривизны $R_{ij,k}^l$ средней связности будет ассоциатором этой алгебры.

6. Аффинное пространство, в несобственной гиперплоскости которого определены двойственные кубические поляритеты, будет многомерным обобщением пространства Аппеля [2] или $A\rho_{3k}$. А-сфера (8) есть индикатриса его векторной и ковекторной метрик. А-сфера пространства $A\rho_{3k}$ с центром в точке x_0 радиуса $\mathcal{U}$ определяется уравнением

$$((x - x_0)^3) = \mathcal{U}^3. \quad (16)$$

Ей взаимно однозначно соответствует А-сфера противоположного радиуса $-\mathcal{U}$. Все А-сферы являются частными случаями обобщенных А-сфер, заданных уравнением

$$a^0 (x^3) - 3(a x^2) + 3(\alpha x) - \alpha_0 = 0, \quad (17)$$

которое в свою очередь определяется набором $A = (a^0, a, \alpha, \alpha_0)$, где $a^0, \alpha_0 \in \mathbb{R}$, a – вектор, α – ковектор пространства Ap_{3k} .

Пространство обобщенных A -сфер или SAP_N будет проективным пространством ранга $N = 6k + 2$, где A -сферы нулевого радиуса образуют $3k$ -мерную поверхность CAp_{3k} , которую можно определить параметрическими уравнениями

$$x^0 = 1, \quad x^\alpha = t^\alpha, \quad \xi_\alpha = (t^2)_\alpha, \quad \xi_0 = (t^3) \quad (18)$$

и которую можно назвать конформно-апеллевым пространством. Пространство Апелля получается из CAp_{3k} путем удаления точки и соответствующей ей A -сферы нулевого радиуса (несобственные элементы пространства Ap_{3k}). Через каждую точку пространства SAP_N общего вида проходит единственная прямая – бисеканта поверхности CAp_{3k} , которая пересекает последнюю в двух точках – ее вершинах. Если одна из этих вершин – несобственная точка пространства Апелля, точки таких бисекант – его A -сферы, причем A -сферам противоположного радиуса соответствует пара точек бисеканты, которые гармонически разделяются ее вершинами.

Заметим, что сама поверхность CAp_{3k} есть пересечение гиперквадрик

$$\begin{aligned} f^\alpha &= \xi_0 x^\alpha - (\xi^2)^\alpha = 0, \quad f_\alpha = x^0 \xi_\alpha - (x^2)_\alpha = 0, \\ f_\beta^\alpha &= 4a^{\alpha\lambda\mu} a_{\beta\delta\mu} \xi_\lambda x^\delta - \delta_\beta^\alpha \xi_0 x^0 - 3x^\alpha \xi_\beta = 0. \end{aligned} \quad (19)$$

Ее касательные плоскости будут образующими гиперповерхности 4-го порядка, которая, в свою очередь, есть огибающая соприкасающихся гиперплоскостей поверхности CAp_{3k} . Последние будут полярами точек этой поверхности в нуль-системе, определенной инвариантно самой поверхностью. Последней соответствует матрица порядка

$$C = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -3E & 0 \\ 0 & 3E & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Заметим, что при $N = 3$ пространство SAP_N есть пространство норм-кривой А.П.Нордена [4]; одним из случаев пространства CAp_9 есть

Грассманиан двумерных плоскостей пятимерного проективного пространства; пространство SAp_{27} будет симплектическим пространством над алгеброй чисел Кели Фрейденталя [5].

Л и т е р а т у р а

1. Фрейденталь Г. Октавы, особые группы и октавная геометрия // Математика. - 1957. - Т.1. - №1. - С.117 - 153.
2. Нейфельд Э.Г. О геометрии пространства Аппеля. Казань, 1962. - С.148 - 157.
3. Бурдаков Б.М., Нейфельд Э.Г. Об одном классе гиперповерхности в центро-аффинном пространстве. VII конференция по современным проблемам геометрии. Минск, 1979. - С.34.
4. Норден А.П. Пространство норм-кривой // Труды геометрического семинара. Казань, 1975. - Вып.8. - С.57 - 71.
5. Freudenthal H. Beziehung der E_7 und E_8 zur Oktavenebene I. König. Nederlandse Akademie van wetenschappen. Proceed, 1954. - V.57. - N 3. - P.218 - 230.

А.А.Салимов

ПОЛНЫЕ ЛИСТЫ ТЕНЗОРНЫХ ПОЛЕЙ В ЧИСТОЕ ТЕНЗОРНОЕ ПОДРАСЛОЕНИЕ

1. На дифференцируемом многообразии M_n , $\dim M_n = n$, класса C^∞ рассмотрим полиаффинорную структуру $\Pi = \{\varphi_j^i\}$, т.е. определенную совокупность тензорных полей типа $(1, 1)$. Обозначим через $T_p^q(M_n) = \bigcup_{Q \in M_n} T_p^q(Q)$ тензорное расслоение типа (q, p) над многообразием M_n . Рассмотрим подрасслоение $t_p^q(M_n) = \bigcup_{Q \in M_n} t_p^q(Q) \subset T_p^q(M_n)$, где $t_p^q(Q)$ - пространство всех чистых тензоров типа (q, p) относительно Π -структуры, $t_p^q(Q) \subset T_p^q(Q)$, $\forall Q \in M_n$. Пусть (x^i) являются локальными координатами точки $Q \in U \subset M_n$. Введем в координатной окрестности $\mathfrak{R}^{-1}(U) \subset T_p^q(M_n)$ адаптированные к расслоению локальные координаты $(x^i, \xi_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_q})$, где $\mathfrak{R}: T_p^q(M_n) \rightarrow M_n$ - естественная проекция, $\xi_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_q}$ - координаты тензора $\xi \in T_p^q(Q)$ относительно натурального репера $\{\partial_i\}$. Адаптированные координаты определяются с точностью до преобразований

Э.Г. НЕЙФЕЛЬД

УДК 514.763

О ВНУТРЕННИХ ГЕОМЕТРИЯХ ПОЛЯРИЗОВАННЫХ КОМПЛЕКСНЫХ ГРАССМАНИАНОВ

Метод нормализации грассманианов [1], [2] является частным случаем более общего метода, предложенного в [3] для построения внутренних геометрий проективных пространств над алгебрами, который назовем поляризацией и примем здесь для комплексных грассманианов. При этом переход от комплексного векторного пространства к его вещественной реализации будет осуществлен с помощью соответствующих *M-операторов*, позволяющих каждому комплексному тензору однозначно сопоставить его вещественный образ, и, наоборот, для всякого вещественного тензора найти его комплексные тензорные и эрмитовы образы [4].

1. Поляризация комплексных грассманианов

Подпространство $\mathbb{C}^n(Z_a^A) \subset \mathbb{C}^N$, т.е. точку комплексного грассманиана $CP^{N,n}$, определим заданием его операторной координаты Z_a^A ранга n , определенной с точностью до преобразования

$$\check{Z}_a^A = Z_a^A \rho_a^c, \quad \forall \rho = \|\rho_a^c\| \in GL(n, \mathbb{C}), \tag{1.1}$$

$$A, B, C = \overline{1, N}; \quad a, b, c, d = \overline{1, n},$$

что позволяет взаимно однозначно отнести этому подпространству его *присоединенное* подпространство $\mathbb{C}^{n^2}$ в правом модуле $CH(N, n)$ прямоугольных операторов -- линейную оболочку всех операторов (1.1), базис которой определен операторами $S_a^c Z_b^A$. Обозначим через M_{ub}^c *M-оператор* [4], определяющий переход от $\mathbb{C}^{n^2}$ к его вещественной реализации $\mathbb{R}^{2n^2}$.

Тогда оператор

$$Z_{ua}^A = M_{ua}^c Z_c^A \quad (u, v, w = \overline{1, 2, n^2}) \tag{1.2}$$

определяет базис этого $\mathbb{R}^{2n^2}$ в $CH(N, n)$. Определив взаимный к M_{ua}^c оператор M_c^{ua} с помощью уравнений

$$M_c^{ua} M_{ud}^b = \delta_d^a \delta_c^b, \quad M_c^{ua} \overline{M_{ud}^b} = 0, \tag{1.3}$$

получим $Z_{ua}^A M_c^{ub} = \delta_c^b Z_a^A$.

Грассманиан $CP^{N,n}$ назовем поляризованным, если каждому $\mathbb{C}^n(Z_a^A) \in D$, где D - открытое на $CP^{N,n}$ подмножество, соответствует *поляризующее* вещественное подпространство $\mathbb{R}^{2n(N-n)}$ в $CH(N, n)$, не имеющее общих направлений с $\mathbb{R}^{2n^2}$ - вещественной реализацией присоединенного подпространства. Поляризующее подпространство определяется заданием его базисных элементов, которые всегда могут быть выбраны так, что

$$W_{\alpha a}^A = \partial_{\alpha} Z_a^A - Z_c^A \Gamma_{\alpha a}^c, \quad (1.4)$$

где $\partial_{\alpha} Z_a^A$ - частные производные координат оператора Z_a^A по вещественным локальным координатам, заданных на грассманиане, и $\alpha, \beta, \gamma \dots = \overline{1, 2n(N-n)}$.

Операторы Z_{ua}^A и $W_{\alpha a}^A$ образуют $\mathbb{R}$ -базис в $CH(N, n)$; что позволяет определить взаимный базис $\{Z_{uA}^{\alpha a} W_{\alpha A}^{\alpha a}\}$, элементы которого однозначно определяются уравнениями

$$\begin{cases} Z_{uA}^{\alpha a} Z_{ub}^B + W_{\alpha A}^{\alpha a} W_{\alpha b}^B = \delta_b^a \delta_A^B, \\ Z_{uA}^{\alpha a} \bar{Z}_{ub}^B + W_{\alpha A}^{\alpha a} \bar{W}_{\alpha b}^B = 0, \end{cases} \quad (1.5)$$

причем оператор $W_{\alpha A}^{\alpha a}$ аннулируется на присоединенном подпространстве $\mathbb{C}^{n^2}$ в $CH(N, n)$, так что

$$W_{\alpha A}^{\alpha c} Z_c^A = 0,$$

и, следовательно, существует оператор W_A^p , определяющий двойственную координату подпространства $\mathbb{C}^n(Z_a^A)$ в $\mathbb{C}^N$, такой что

$$W_A^p Z_a^A = 0 \quad \text{и} \quad W_A^{\alpha a} = Q_p^{\alpha a} W_A^p \quad (p, q = 1, N-n). \quad (1.6)$$

Последнее позволяет рассматривать грассманиан как базу двух тавтологических или спинорных расслоений. Тензорное произведение слоев этих расслоений изоморфно касательному пространству грассманиана. Изоморфизм определяется оператором $M_{\alpha a}^p$, который не зависит от выбора нормализации [2]. Кроме того, задание поляризации определяет полярное и присоединенное расслоения, слои которых изоморфны $\mathbb{R}^{2n(N-n)}$ и $\mathbb{R}^{2n^2}$ соответственно.

2. Операторные структуры на поляризованном грассманиане и преобразование поляризации

Неполные свертки элементов построенных базисов определяют операторы

$$\begin{aligned} \Delta_{\beta b}^{\alpha a} &= W_{\alpha A}^{\alpha a} W_{\beta b}^A, & \Delta_{vb}^{\alpha a} &= W_{\alpha A}^{\alpha a} Z_{vb}^A = 0; \\ \Delta_{\beta b}^{ua} &= Z_{uA}^{\alpha a} W_{\beta b}^A, & \Delta_{vb}^{ua} &= Z_{uA}^{\alpha a} Z_{vb}^A = 0, \end{aligned} \quad (2.1)$$

из которых первый $\Delta_{\beta b}^{\alpha a}$ и последний Δ_{vb}^{ua} задают в касательном и присоединенном расслоениях правую матричную структуру [1]:

$$\begin{aligned} \Delta_{\beta b}^{\lambda a} \Delta_{\lambda d}^{\alpha c} &= \delta_b^a \Delta_{\beta b}^{\alpha c}, & \Delta_{\beta b}^{\lambda a} \bar{\Delta}_{\lambda d}^{\alpha c} &= 0, \\ \Delta_{vb}^{wa} \Delta_{wd}^{uc} &= \delta_d^a \Delta_{vb}^{uc}, & \Delta_{vb}^{wa} \bar{\Delta}_{wd}^{uc} &= 0, \end{aligned} \quad (2.2)$$

причем операторы

$$\Delta_{\beta}^{\alpha} = \Delta_{\beta a}^{\alpha a}, \quad \Delta_v^u = \Delta_{va}^{ua} \quad (2.3)$$

суть единичные комплексные аффиноры Нордена в этих расслоениях ([5], с.15), определяющие операторы комплексных структур

$$f_{\beta}^{\alpha} = \frac{1}{i} (\Delta_{\beta}^{\alpha} - \bar{\Delta}_{\beta}^{\alpha}), \quad f_v^u = \frac{1}{i} (\Delta_v^u - \bar{\Delta}_v^u). \quad (2.4)$$

Оператор $\Delta_{\beta b}^{ua}$ принимает чисто мнимые значения и удовлетворяет условию

$$\Delta_{\alpha}^{\lambda} \Delta_{\lambda b}^{ua} = \Delta_{\nu}^u \Delta_{\lambda b}^{\nu a}. \quad (2.5)$$

Частным случаем поляризации грассманиана будет его нормализация [2], определенная дифференцируемым соответствием подпространств $\mathbb{C}^n(Z_a^A)$ и $\mathbb{C}^{N-n}(W_p^A)$ в $\mathbb{C}^N$. В этом случае поляризующее подпространство $\mathbb{R}^{2n(N-n)}(W_{\alpha a}^A)$ определяется с помощью оператора

$$W_{\alpha a}^A = M_{\alpha a}^p W_p^A. \quad (2.6)$$

В общем случае поляризация определяется из нормализации заданием четырех тензорных полей

$$U_{qa}^{cp}, \quad \bar{V}_{\bar{q}a}^{\bar{c}p}, \quad P_{qa}^{cb}, \quad \bar{V}_{\bar{q}a}^{\bar{c}b},$$

которые определяют операторные координаты поляризующего подпространства

$$W_{\alpha a}^A = (U_{qa}^{cp} W_p^A + P_{qa}^{cb} Z_b^A) M_{\alpha a}^q + (\bar{V}_{\bar{q}a}^{\bar{c}p} W_p^A + Q_{\bar{q}a}^{\bar{c}b} Z_b^A) \bar{M}_{\alpha c}^q. \quad (2.7)$$

Заметим, что при замене нормализации

$$\tilde{W}_p^A = W_p^A + Z_c^A \Pi_p^c \quad (2.8)$$

меняется только тензор P_{qa}^{cb} :

$$\tilde{P}_{qa}^{cb} = P_{qa}^{cb} - \delta_a^c \Pi_q^b,$$

а все остальные связывающие тензоры остаются инвариантными. Поэтому в общем случае преобразование поляризации нельзя свести к сдвигу

$$\hat{W}_{\alpha a}^A = W_{\alpha a}^A + Z_c^A \Pi_{\alpha a}^c, \quad (2.9)$$

что возможно тогда и только тогда, когда

$$\hat{U}_{qa}^{cp} = U_{qa}^{cp}, \quad \hat{\bar{V}}_{\bar{q}a}^{\bar{c}p} = \bar{V}_{\bar{q}a}^{\bar{c}p}.$$

3. Связности на поляризованных грассманианах

Задание поляризации определяет связность в первом тавтологическом расслоении грассманиана с коэффициентами Γ_{ac}^a (1.4), так что

$$\nabla_{\alpha} Z_a^A = W_{\alpha a}^A. \quad (3.1)$$

Связность на базе вместе с комплекснозначным тензором $\mathcal{P}_{\alpha\beta c}^c$ однозначно определяется уравнением

$$\nabla_{\alpha} W_{\beta a}^A = Z_c^A \mathcal{P}_{\alpha\beta a}^c. \quad (3.2)$$

Оба эти деривационные уравнения равносильны уравнениям

$$\nabla_{\alpha} Z_{ua}^A = q_{\alpha u}^{\lambda} W_{\lambda a}^A, \quad \nabla_{\alpha} W_{\beta a}^A = p_{\alpha\beta}^u Z_{ua}^A, \quad (3.3)$$

где тензор $p_{\alpha\beta}^u$ есть вещественная реализация тензора $\mathcal{P}_{\alpha\beta c}^a$:

$$p_{\alpha\beta}^u = \mathcal{P}_{\alpha\beta c}^a M_a^{uc} + \bar{\mathcal{P}}_{\alpha\beta c}^a \bar{M}_a^{uc}$$

и

$$q_{\alpha u}^{\lambda} = \Delta_{\alpha c}^{\lambda a} M_{ua}^c + \bar{\Delta}_{\alpha c}^{\lambda a} \bar{M}_{ua}^c.$$

Последний удовлетворяет алгебраическим соотношениям

$$f_{\alpha}^{\lambda} q_{\lambda u}^{\beta} = f_{\lambda}^{\beta} q_{\alpha u}^{\lambda} = f_u^{\nu} q_{\alpha\nu}^{\beta},$$

из которых следует, что комплексная структура, определенная оператором f_{α}^{λ} , интегрируема.

Условия интегрируемости уравнений (3.1), (3.2) показывают, что связность определенной таким образом внутренней геометрии не имеет кручения, тензор кривизны связности в первом тавтологическом расслоении равен

$$R_{\alpha\beta a}^c = -2\mathcal{P}_{[\alpha\beta]a}^c, \quad (3.4)$$

а тензор внутренней связности имеет вид

$$R_{\gamma\alpha\beta}^{\lambda} = 2\mathcal{P}_{[\gamma\alpha]a}^c \Delta_{\beta c}^{\lambda a} + 2\mathcal{P}_{[\gamma|\beta|a}^c \Delta_{\alpha]c}^{\lambda a} + 2\bar{\mathcal{P}}_{[\gamma\alpha]a}^c \bar{\Delta}_{\beta c}^{\lambda a} + 2\bar{\mathcal{P}}_{[\gamma|\beta|a}^c \bar{\Delta}_{\alpha]c}^{\lambda a}, \quad (3.5)$$

и, кроме того,

$$\nabla_{[\gamma} \mathcal{P}_{\alpha]\beta c}^a = 0.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Нейфельд Э.Г. *Аффинные связности на нормализованном многообразии плоскостей проективного пространства* // Изв. вузов. Математика. - 1976. - № 11. - С.48-55.
2. Нейфельд Э.Г. *Нормализация комплексных грассманианов и квадрик* // Тр. Геометрич. семин. - Казань, 1990, вып. 20. - С.58-69.
3. Нейфельд Э.Г. *Геометрия поверхности в проективном пространстве над алгеброй* // Геометрия обобщен. пространств. - Уфа, 1982. - С.32-51.
4. Нейфельд Э.Г. *Об инволюциях в комплексных пространствах* // Тр. Геометрич. семин. - Казань, 1989, вып. 19. - С.71-82.
5. Манин Ю.И. *Калибровочные поля и комплексная геометрия*. - М.: Наука, 1976. - 15 с.
6. Норден А.П. *О комплексном представлении тензоров пространства Лоренца* // Изв. вузов. Математика. - 1959. - № 1. - С.156-163.

Башкирский государственный
университет

Поступила
11.10.1994

УДК 514.7

НАСЛЕДИЕ Н.И.ЛОБАЧЕВСКОГО И ДЕЯТЕЛЬНОСТЬ КАЗАНСКИХ ГЕОМЕТРОВ

А. П. Норден, А. П. Широков

СОДЕРЖАНИЕ

Введение	47
§ 1 . Работа казанских математиков над сохранением наследия Лобачевского; роль А.В.Васильева, Ф.М.Суворова, А.П. Котельникова, Н.Н.Парфентьева и других профессоров	47
§ 2 . Исследования П.А.Широкова по геометрии пространств постоянной кривизны; преобразование винтовых интегралов в пространстве Лобачевского	50
§ 3 . Другие геометрические работы П.А.Широкова; геометрия в трудах Н.Г.Чеботарева	63
§ 4 . Деятельность А.П.Нордена и его учеников	65
§ 5 . Деятельность Б.Л.Лаптева, А.З.Петрова и других воспитанников Казанского университета	67
Список литературы	68

Введение

Николай Иванович Лобачевский оставил после себя ценнейшее наследие как в области математических идей, так и в сфере педагогической и общественной деятельности. Почетным долгом казанских ученых было и остается сохранение и приумножение этого наследия. Цель настоящей статьи, пишущейся в дни подготовки к международной конференции “Н.И.Лобачевский и современная геометрия”, – рассказать о тех инициативах, которые были проявлены казанскими геометрами в отношении наследия Лобачевского.

§1. Работа казанских математиков над сохранением наследия Лобачевского; роль А.В.Васильева, Ф.М.Суворова, А.П. Котельникова, Н.Н.Парфентьева и других профессоров

В первую очередь следует назвать известного профессора Александра Васильевича Васильева (1853–1929), о жизни и деятельности которого можно прочитать, например, в [1], [2] и в статье В.А.Бажанова и А.П.Юшкевича, помещенной в книге [7].

Он не был профессиональным геометром, но внес наиболее существенный вклад в дело увековечения памяти Н. И. Лобачевского. Став первым председателем Казанского физико-математического общества (КФМО), возникшего в 1890 г., А. В. Васильев развернул активную деятельность по подготовке к 100-летию со дня рождения Н. И. Лобачевского [3]. Еще в 1867 г. в Совете университета деканом М. А. Ковальским был поставлен вопрос об издании сочинений Н. И. Лобачевского. При участии А. В. Васильева в 1883 г. появился первый том Полного собрания сочинений по геометрии [4], а в 1886 г. – второй том [5], содержащий работы по геометрии, написанные Лобачевским на иностранных языках. В 1897 г. был издан первый выпуск сборника “In memorem N. I. Lobatschevskii” [6].

Хорошо известна и неоднократно описана выдающаяся роль А. В. Васильева в деле руководства Казанским физико-математическим обществом и создания денежного фонда Лобачевского. Им была проведена огромная работа по изучению жизни Лобачевского, написана его первая обстоятельная научная биография, многие десятилетия пролежавшая в виде корректуры и лишь сейчас публикуемая издательством “Наука” [7]. При нем была обнаружена и напечатана рукопись Лобачевского “Геометрия” [8]; благодаря его усилиям в Казани в 1896 г. был открыт памятник Лобачевскому, а с 1897 г. Казанским университетом на базе собранного денежного фонда производились Международные конкурсы на премию имени Лобачевского (сведения о восьми конкурсах, состоявшихся в период 1897–1937 гг., приведены в [9]).

Большой вклад в дело развития и популяризации научных идей Лобачевского внесли профессор Казанского университета Федор Матвеевич Суворов (1845–1911), Александр Петрович Котельников (1865–1944), Дмитрий Матвеевич Синцов (1867–1946), Дмитрий Николаевич Зейлигер (1864–1936), Николай Николаевич Парфентьев (1877–1943). Это были яркие личности, активные члены правления КФМО, принимавшие деятельное участие в организации международных конкурсов, писавшие отзывы о поступивших работах, имевшие собственные научные достижения и воспитавшие большое количество учеников. Так, Ф. М. Суворову принадлежат первые в России исследования по теории дифференциальных инвариантов римановых пространств (см. [10]). А. П. Котельников известен геометрам своими работами по теории винтов евклидова и неевклидовых пространств и геометрическому истолкованию принципа относительности (см. [11]). Д. Н. Зейлигер, выступавший оппонентом на защитах обеих диссертаций А. П. Котельникова, использовал принцип перенесения (получивший впоследствии название принципа перенесения Котельникова–Штуди) в линейчатой геометрии и кинематике (см. [12]). Д. М. Синцов, написавший в Казани работы по теории коннексов, после переезда в Харьков создал оригинальное научное направление в области неголомомной геометрии (см. [13]). Н. Н. Парфентьевым (о его жизни см. [14]) написаны интересные статьи о проблеме пространства и натурфилософии Лобачевского (см., например, [15]). При его активнейшем участии были проведены седьмое и восьмое присуждения международной премии Н. И. Лобачевского в 1927 и 1937 гг. [9], изданы книги [16], [17], [18].

С 1895 г., опубликовав на страницах журнала “Известия КФМО” свои работы по теории поверхностей постоянной отрицательной кривизны, вступил в тесный контакт с казанскими геометрами Вениамин Федорович Каган (1869–1953), впоследствии гла-

ва московской геометрической школы, посвятивший свою жизнь Лобачевскому и развитию его идей (см. [19]). По инициативе В.Ф.Кагана и под его главным редакторством было предпринято издание Полного собрания сочинений Лобачевского, в работе над которым приняли деятельнейшее участие многие ученые Казанского университета. В 1946 г. вышел первый том этого собрания [20]. В последующих томах [21], [22], [23], [24] отражена большая работа по переводу и комментированию трудов Лобачевского, выполненная казанскими учеными А.П.Норденом, Б.Л.Лаптевым, Н.Г.Чеботаревым, А.Н.Хованским, Г.Г.Тумашевым, А.Д.Дубяго.

Своего рода завершением Полного собрания сочинений явился том [25], в подготовке которого особенно большую роль сыграли Б.Л.Лаптев и московский математик И.Н.Бронштейн. В подготовке тома приняли также участие А.П.Норден и М.Т.Нужин; подробный анализ преподавания механики Н.И.Лобачевским произвел для этого тома В.В.Морозов.

Однако указанный том не подводит итог работе над наследием Лобачевского. О задачах в этой области хорошо сказано в докладе И.Н.Бронштейна [26].

Еще в 1914 г. в двадцатом томе “Известий КФМО” было сообщено о планах казанских математиков создать библиотеку “Lobatschevskiana” и музей Н.И.Лобачевского. Усилиями ряда поколений библиотека была создана и в настоящее время насчитывает свыше 3000 названий книг и оттисков научных статей. Что касается музея, то создать его оказалось значительно труднее. В 1943 г. П.А.Широков и Н.Г.Чеботарев составили докладную записку об организации в Казани музея имени Лобачевского (оригинал записки хранится в музее университета). В ней говорилось, что основной базой для создания материальной части музея Лобачевского послужит библиотека его имени, а также материалы, относящиеся к его жизни и творчеству. Музей должен производить систематический сбор материалов, характеризующих постановку научной и педагогической работы в Казанском университете эпохи Лобачевского, рукописи его учителей, современных ему казанских профессоров и его учеников, записи его лекций, переписку, характеризующую его деятельность и состояние Казанского университета того времени. Музей необходимо организовать в той квартире, в которой жил Лобачевский в эпоху создания неевклидовой геометрии. Наряду с изучением биографии Лобачевского и его научного творчества, музей должен включать в свою работу: 1) детальное изучение истории возникновения неевклидовой геометрии, 2) изучение постановки преподавания математических дисциплин в школах и университетах нашей страны в эпоху 18-го и первой половины 19-го века, 3) историю физико-математического факультета Казанского университета, 4) историю распространения идей неевклидовой геометрии в нашей стране и за границей и т.д.

В настоящее время руководство Казанского университета осуществляет новую попытку создать музей-квартиру Лобачевского.

Постараемся осветить далее индивидуальную научную деятельность казанских геометров, имеющую отношение к сохранению и развитию наследия Лобачевского. При этом ограничимся послереволюционным периодом.

§2. Исследования П. А. Широкова по геометрии пространств постоянной кривизны; преобразование винтовых интегралов в пространстве Лобачевского

О жизни ученика Н. Н. Парфентьева Петра Алексеевича Широкова (1895–1944) можно прочитать в [27]. За сравнительно небольшой срок он успел сделать много, в частности, в 1933 году основал и возглавил кафедру геометрии Казанского университета. Его первые работы были посвящены пространствам постоянной кривизны. Это – награжденное золотой медалью студенческое сочинение [28] и ряд работ по геометрии и механике неевклидовых пространств. Так, им изучена группа конформных преобразований неевклидовых пространств. Реализуя n -мерное эллиптическое пространство S_n на гиперсфере евклидова пространства E_{n+1} , он истолковывает инфинитезимальные конформные преобразования пространства S_n как линейные комбинации инфинитезимальных вращений T гиперсферы и векторных полей S на гиперсфере, образованных тангенциальными компонентами постоянных в E_{n+1} векторных полей на этой гиперсфере. Преобразования, порожденные векторными полями S , названы им лучистыми расширениями; их свойства исследованы как в эллиптическом (S_n), так и в гиперболическом (H_n) пространствах. С помощью группы лучистых расширений введены инверсии в неевклидовых пространствах – конформные преобразования, переводящие сферы в сферы [29]. Несколько позднее [30] установлен характерный геометрический признак инфинитезимального конформного преобразования общего риманова пространства V_n . Всякое векторное поле $\vec{v}$ пространства V_n определяет неголономный образ V_n^1 – распределение $(n-1)$ -мерных подпространств, ортогональных векторам поля $\vec{v}$. Вводя орт $\vec{n}$ вектора $\vec{v}$, можно построить второй фундаментальный тензор $h_{\alpha\beta}$ образа V_n^1 : $h_{\alpha\beta} = n_{\alpha,\beta} - n_\beta u_\alpha$, где $u_\alpha = n^\sigma n_{\alpha,\sigma}$ – вектор 1-й кривизны траектории поля $\vec{v}$. Оказалось, что инфинитезимальное конформное преобразование $\vec{v}$ пространства V_n характерно тем, что:

1. Точки неголономного образа V_n^1 омбиличны:

$$h_{(\alpha\beta)} = \lambda \bar{g}_{\alpha\beta},$$

где $\bar{g}_{\alpha\beta}$ – метрический тензор соответствующего $(n-1)$ -мерного подпространства распределения.

2. Выполняется условие $(u_{[\alpha} - \lambda n_{[\alpha}, \beta]) = 0$.

Неголономный образ V_n^1 детально исследован в [30] для евклидова пространства и для пространства постоянной кривизны.

В работе [31] предложен своеобразный прием для изучения линейчатой геометрии пространства Лобачевского L_3 . Выбрав фиксированную орисферу O_2 и отождествив ее с плоскостью комплексного переменного, можно каждую прямую пространства L_3 задать парой комплексных чисел (w_1, w_2) , отвечающих двум осям орисферы O_2 , параллельным данной прямой в обоих направлениях. Тогда движения пространства L_3 индуцируют однотипное дробно-линейное преобразование пары чисел w_1, w_2 :

$$w'_1 = \frac{aw_1 + b}{cw_1 + d}, \quad w'_2 = \frac{aw_2 + b}{cw_2 + d}.$$

Если две пары чисел (w_1, w_2) и (v_1, v_2) определяет пару прямых пространства L_3 , которые обладают общим перпендикуляром длины h и лежат в проходящих через этот перпендикуляр плоскостях, образующих угол φ , то для ангармонического отношения $D = (v_1, v_2; w_1, w_2)$ справедлива формула

$$\sqrt{-D} = \operatorname{tg} \frac{\varphi + i \frac{h}{k}}{2},$$

где k – радиус кривизны пространства L_3 [31]. (Как выяснилось, подобный подход был также осуществлен Г.Бекем [32].) П.А. Широковым показано, что на таком пути можно естественно прийти к “принципу перенесения” Котельникова–Штуди (см. [11], [33]) для пространства L_3 : прямая пространства интерпретируется точкой на комплексной сфере единичного радиуса, причем “щеткам” пространства отвечают большие круги на сфере. Здесь под “щеткой” понимается конгруэнция прямых, ортогонально пересекающих фиксированную прямую (ось щетки). Пары (w_1, w_2) , определяющие прямые щетки, характерны тем, что на комплексной проективной прямой CP_1 точки w_1, w_2 связаны друг с другом преобразованием одной и той же инволюции, двойные элементы которой образуют пару (α_1, α_2) , определяющую ось щетки.

Надо сказать, что пока еще подобные рассуждения представляются недостаточно полно использованными как в линейной геометрии пространства L_3 , так и в геометрической теории функций комплексного переменного. Правда, Г.Бек связывал свойства отображений $w_2 = f(w_1)$ со свойствами конгруенций прямых пространства L_3 , но достаточно полного изложения этих вопросов нет. До сих пор в этом направлении появляются новые исследования (например, в диссертации М.Попович [34], ученицы Б.А. Розенфельда). Кроме того, здесь может найти конкретное приложение теория автополярной нормализации А.П. Нордена, о чем будет сказано ниже.

Вопросами линейчатой геометрии трехмерных неевклидовых пространств П.А. Широков занимался в основном в связи с изучением свойств параллельного переноса вектора и “квазипоступательного” движения твердого тела вдоль кривой γ , а также в связи с изучением свойств кривых в этих пространствах [35]. Так, было показано, что линейчатая поверхность параллельного переноса, образованная прямыми, проходящими через точки кривой γ в направлении параллельно переносимого вектора, является разворачивающейся, т.е. семейством касательных к некоторой кривой $\bar{\gamma}$; при этом точка x образующей, принадлежащая кривой γ , и точка $\bar{x}$ прикосновения этой образующей к кривой $\bar{\gamma}$ полярно сопряжены относительно абсолюта (это можно объяснить и с позиций метода нормализации А.П. Нордена, где точке x неевклидова пространства ставится в соответствие ее полярная плоскость в качестве нормали второго рода).

Если вдоль кривой γ параллельно переносятся векторы двумерного подпространства и с этим подпространством неизменно связано твердое тело, то говорят о квазипоступательном движении твердого тела вдоль γ . Показано, что такое движение описывается качением без скольжения полярной точки x , пробегающей кривую γ , по полярной поверхности этой кривой.

В эллиптическом пространстве S_3 были установлены общие свойства линейчатых поверхностей, выделены частные типы таких поверхностей и связанных с ними кривых [36].

Для трехмерных пространств постоянной кривизны указаны формулы преобразования винтовых интегралов [37]. К этим результатам П. А. Широков пришел, изучая понятие векторной площади в пространствах S_3 и L_3 [38]. Так как изложены эти вопросы в цитированных работах довольно сжато и преимущественно для пространства S_3 , то представляется целесообразным воспроизвести их специально для пространства L_3 .

Пространство L_3 моделируется на гиперсфере 1S_3 четырехмерного псевдоевклидова пространства 1E_4 , задаваемой уравнением

$$(1) \quad \vec{r}^2 = k^2,$$

где в ортогональной системе координат с координатным ортоператором $\{\vec{e}_\alpha\}$

$$\vec{r}^2 = \overset{\circ}{G}_{\alpha\beta} x^\alpha x^\beta = (x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2.$$

Если $\vec{x}$ и $\vec{y}$ — радиусы-векторы двух точек на 1S_3 , то расстояние δ между этими точками в L_3 вычисляется из формулы

$$\operatorname{ch} \frac{\delta}{k} = \frac{\vec{x} \cdot \vec{y}}{k^2} = \frac{\overset{\circ}{G}_{\alpha\beta} x^\alpha y^\beta}{k^2}.$$

Координаты радиуса-вектора $\vec{r}$ можно рассматривать также как однородные координаты точки в проективном пространстве P_3 с абсолютном $\vec{r}^2 = 0$, а условие (1) истолковать как нормировку этих однородных координат. Для полноты картины следует привлекать к рассмотрению также идеальную область пространства L_3 , моделирующуюся на гиперсфере $\vec{r}^2 = -k^2$.

Наряду с метрическим тензором пространства 1E_4 , имеющим в орторепере $\{\vec{e}_\alpha\}$ координаты $\overset{\circ}{G}_{\alpha\beta}$, будет рассматриваться его дискриминантный 4-вектор $\overset{\circ}{E}_{\alpha\beta\gamma\delta}$, имеющий в орторепере существенную координату $\overset{\circ}{E}_{1234} = 1$.

Пара $\vec{x}, \vec{y}$ радиусов-векторов двух точек пространства 1E_4 позволяет построить простой бивектор $\mathfrak{M} = \vec{x} \wedge \vec{y}$ с координатами

$$m^{\alpha\beta} = x^\alpha y^\beta - x^\beta y^\alpha.$$

Если $\vec{x}$ и $\vec{y}$ истолковываются как точки проективного пространства P_3 , то бивектор $\mathfrak{M}$ определяет инцидентную им прямую.

Для двух (не обязательно простых) бивекторов $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ определяется их пюккерово произведение

$$(2) \quad \langle \mathfrak{M}, \mathfrak{N} \rangle = \frac{1}{4} \overset{\circ}{E}_{\sigma\tau\lambda\mu} m^{\sigma\tau} n^{\lambda\mu} \\ = m^{01} n^{23} + m^{02} n^{31} + m^{03} n^{12} + m^{23} n^{01} + m^{31} n^{02} + m^{12} n^{03}$$

и скалярное произведение

$$(3) \quad \mathfrak{M}\mathfrak{N} = -\frac{1}{2} \overset{\circ}{\mathcal{G}}_{\alpha\sigma} \overset{\circ}{\mathcal{G}}_{\beta\tau} m^{\alpha\beta} n^{\sigma\tau} \\ = m^{01} n^{01} + m^{02} n^{02} + m^{03} n^{03} - m^{12} n^{12} - m^{23} n^{23} - m^{31} n^{31}.$$

Вводится операция поляризации бивектора $\mathfrak{M} \rightarrow \overset{*}{\mathfrak{M}}$, где

$$(4) \quad \overset{*}{m}^{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \overset{\circ}{\mathcal{G}}^{\alpha\sigma} \overset{\circ}{\mathcal{G}}^{\beta\tau} \overset{\circ}{E}_{\sigma\tau\lambda\mu} m^{\lambda\mu}.$$

Имеем:

$$\langle \mathfrak{M}, \mathfrak{N} \rangle = -\overset{*}{\mathfrak{M}}\mathfrak{N} = -\overset{*}{\mathfrak{M}}\mathfrak{N}.$$

Операция поляризации обладает свойством

$$\overset{**}{\mathfrak{M}} = -\mathfrak{M}.$$

Поэтому в шестимерном пространстве бивекторов операция поляризации задает инволюцию эллиптического типа, позволяющую наделить это пространство комплексной структурой. Так как в используемом орторепере

$$(5) \quad \overset{*}{m}^{0i} = -m^{jk}, \quad \overset{*}{m}^{ij} = m^{0k},$$

где $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ i & j & k \end{pmatrix}$ – четная перестановка, то бивектору $\mathfrak{M}$ естественно поставить в соответствие вектор $\vec{M}$ трехмерного комплексного векторного пространства $\mathbb{C}\mathbb{R}_3$ с координатами

$$(6) \quad M^1 = m^{01} + im^{23}, \\ M^2 = m^{02} + im^{31}, \\ M^3 = m^{03} + im^{12}.$$

(здесь i – мнимая единица). Комплексные числа M^k естественно считать координатами вектора $\vec{M}$ в орторепере, так как согласно (2) и (3) при таком соглашении

$$(7) \quad \vec{M} \vec{N} = \mathfrak{M}\mathfrak{N} + i\langle \mathfrak{M}, \mathfrak{N} \rangle.$$

В частности, для простого бивектора

$$(8) \quad \vec{M}^2 = \mathfrak{M}\mathfrak{M},$$

что после надлежащей нормировки $\mathcal{M}$ приводит к отмечавшемуся выше принципу перенесения Котельникова–Штуди.

Поляризация бивектора $\mathcal{M}$ сводится к умножению вектора $\vec{M}$ на i .

Так как операция поляризации бивектора перестановочна с вращениями пространства 1E_4 , т.е. с движениями пространства $\mathbb{L}_3$, то движения $\mathbb{L}_3$ представляются вращениями пространства $\mathbb{CR}_3$.

Известно, что бивекторы псевдоевклидова векторного пространства можно отождествить с элементами алгебры Ли группы вращений этого пространства: инфинитезимальное вращение

$$\tilde{x}^\alpha = x^\alpha + ta_\sigma^\alpha x^\sigma,$$

где t – малый параметр, обладает свойством

$$\overset{\circ}{\mathcal{G}}_{\alpha\sigma} a_\beta^\sigma + \overset{\circ}{\mathcal{G}}_{\beta\sigma} a_\alpha^\sigma = 0$$

и однозначно определяется бивектором

$$a_{\alpha\beta} = \overset{\circ}{\mathcal{G}}_{\alpha\sigma} a_\beta^\sigma.$$

Поэтому бивекторы пространства 1E_4 задают инфинитезимальные (в общем случае винтовые) движения пространства $\mathbb{L}_3$ и называются *винтами*.

Если $a_{\alpha\beta}$ и $b_{\alpha\beta}$ – два бивектора пространства 1E_4 , то лиевское произведение двух соответствующих элементов алгебры Ли определяется по правилу

$$c_\beta^\alpha = -a_\beta^\sigma b_\sigma^\alpha + b_\beta^\sigma a_\sigma^\alpha,$$

т.е. соответствует бивектору $\mathcal{C}$ с ковариантными координатами

$$c_{\alpha\beta} = -a_{\alpha\sigma} \overset{\circ}{\mathcal{G}}^{\sigma\tau} b_{\beta\tau} + b_{\alpha\sigma} \overset{\circ}{\mathcal{G}}^{\sigma\tau} a_{\beta\tau},$$

или, после поднятия индексов с помощью метрического тензора, с контравариантными координатами

$$(9) \quad c^{\alpha\beta} = -a^{\alpha\sigma} \overset{\circ}{\mathcal{G}}_{\sigma\tau} b^{\beta\tau} + b^{\alpha\sigma} \overset{\circ}{\mathcal{G}}_{\sigma\tau} a^{\beta\tau}.$$

Алгебру Ли группы вращений пространства $\mathbb{CR}_3$ можно отождествить с самим этим пространством, снабженным операцией векторного произведения в качестве произведения Ли; поэтому формула (9), ставящая в соответствие винтам $\mathcal{A}(a^{\alpha\beta})$ и $\mathcal{B}(b^{\alpha\beta})$ винт $\mathcal{C}(c^{\alpha\beta})$, должна сопоставлять комплексным векторам $\vec{A}$ и $\vec{B}$, представляющим винты $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$, вектор $\vec{C}$, пропорциональный векторному произведению $[\vec{A}, \vec{B}]$. И

действительно, подвергая бивектор $\mathfrak{C}$ поляризации, получим бивектор $\mathfrak{C}^*(c^{*\alpha\beta})$ с координатами

$$\begin{aligned} c^{*01} = -c^{23} &= \begin{vmatrix} a^{02} & a^{03} \\ b^{02} & b^{03} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a^{31} & a^{12} \\ b^{31} & b^{12} \end{vmatrix}, \\ c^{*23} = c^{01} &= \begin{vmatrix} a^{02} & a^{12} \\ b^{02} & b^{12} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a^{31} & a^{03} \\ b^{31} & b^{03} \end{vmatrix}, \end{aligned} \quad (\text{цикл. } 1, 2, 3)$$

которому согласно (6) отвечает вектор

$$i\vec{C} = [\vec{A}, \vec{B}].$$

Итак, векторное произведение комплексных векторов $\vec{A}$ и $\vec{B}$, отвечающих винтам $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$, соответствует винту $\mathfrak{C}^*$, где винт $\mathfrak{C}$ строится по правилу (9).

Винт $\mathfrak{C}^*$ называется *винтовым произведением* винтов $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$:

$$\mathfrak{C}^* = [\mathfrak{A}, \mathfrak{B}].$$

Простые бивекторы определяют винты частного вида, которым согласно (8) отвечают в $\mathbb{C}\mathbb{R}_3$ векторы с вещественными скалярными квадратами. Эти винты представляют инфинитезимальные сдвиги пространства L_3 вдоль собственных, идеальных и изотропных прямых (т.е. вращения вокруг соответствующих поляр указанных прямых). Инфинитезимальные сдвиги позволяют ввести понятие скользящих векторов пространства L_3 , теория которых была разработана А.П.Котельниковым. Это понятие находится в связи с понятием касательных векторов пространства L_3 как специального риманова многообразия.

Действительно, отнесем гиперсферу 1S_3 (1) к локальным внутренним координатам u^i ($i, j, k, \dots = 1, 2, 3$), обозначая через $\vec{r}_0$ радиус-вектор ее точки:

$$\vec{r}_0 = \vec{r}_0(u^1, u^2, u^3).$$

Тогда на ${}^1S^3$ возникает метрический тензор

$$(10) \quad g_{ij} = -\vec{r}_0^i \vec{r}_0^j,$$

определяющий геометрию пространства L_3 , и дериационные уравнения этой гиперсферы принимают вид

$$(11) \quad \nabla_j \vec{r}_0^i = \frac{1}{k^2} g_{ij} \vec{r}_0^i,$$

где ∇ – риманова связность, отвечающая метрическому тензору (10).

Касательному вектору v^i в точке $M(\vec{r}_0)$ пространства $\mathbb{L}_3$ отвечает его изображение $\vec{v}_0$ в 1E_4 – касательный вектор к гиперсфере 1S_3 :

$$\vec{v}_0 = v^i \vec{r}_0^i.$$

Векторы $\vec{r}_0$ и $\vec{v}_0$ позволяют построить простой бивектор $\mathfrak{V}$ пространства 1E_4 с координатами

$$(12) \quad v^{\alpha\beta} = \frac{1}{k} (x_0^\alpha x_0^\beta - x_0^\beta x_0^\alpha) v^p,$$

где $x_0^\alpha = \frac{\partial x^\alpha}{\partial u^p}$. Согласно (1), (3) и (10)

$$\mathfrak{V}\mathfrak{V} = -\frac{1}{2} \overset{\circ}{G}_{\alpha\sigma} \overset{\circ}{G}_{\beta\tau} v^{\alpha\beta} v^{\sigma\tau} = g_{pq} v^p v^q.$$

Бивектор (12) не меняется при выборе другой точки $\widetilde{M}(\vec{r}_0)$ на прямой пространства $\mathbb{L}_3$, моделируемой сечением гиперсферы 1S_3 двумерной плоскостью, определяемой этим бивектором: надо лишь потребовать, чтобы вектор $\vec{v}^i$ в новой точке $\widetilde{M}$ получался из первоначального параллельным переносом вдоль рассматриваемой прямой во внутренней геометрии пространства $\mathbb{L}_3$. Таким образом, бивектор (12) определяет скользящий вектор пространства $\mathbb{L}_3$.

Если в точке $M(\vec{r}_0)$ заданы два касательных вектора v^i, w^i , для которых построены соответствующие простые бивекторы $\mathfrak{V}$ и $\mathfrak{W}$ с координатами $v^{\alpha\beta}$ и $w^{\alpha\beta}$, имеющими вид (12), и $w^{\alpha\beta} = \frac{1}{k} (x_0^\alpha x_0^\beta - x_0^\beta x_0^\alpha) w^p$, то согласно (3), (1) и (10)

$$(13) \quad \mathfrak{V}\mathfrak{W} = -\frac{1}{2} \overset{\circ}{G}_{\alpha\sigma} \overset{\circ}{G}_{\beta\tau} v^{\alpha\beta} w^{\sigma\tau} = g_{pq} v^p w^q,$$

т.е. скалярное произведение простых бивекторов $\mathfrak{V}$ и $\mathfrak{W}$ равно скалярному произведению исходных касательных векторов.

Винтовое произведение $\mathfrak{U} = [\mathfrak{V}\mathfrak{W}]$ указанных простых бивекторов согласно (9) получается в результате поляризации бивектора с координатами

$$(14) \quad u^{\alpha\beta} = (-x_0^\alpha x_0^\beta + x_0^\beta x_0^\alpha) v^p w^q.$$

Следовательно, это винтовое произведение является бивектором $\mathfrak{U} = \mathfrak{U}^*$ с координатами

$$(15) \quad u^{\alpha\beta} = -\frac{1}{2} \overset{\circ}{G}^{\alpha\sigma} \overset{\circ}{G}^{\beta\tau} \overset{\circ}{E}_{\sigma\tau\lambda\mu} (x_0^\lambda x_0^\mu - x_0^\mu x_0^\lambda) v^p w^q.$$

Из (14) следует, что бивектор $\mathcal{U} = \overset{*}{\mathcal{U}}$ должен быть построен на векторах $\overset{\circ}{\vec{r}}$ и $\overset{\circ}{\vec{u}} = \overset{\circ}{\vec{r}} \cdot u^i$, где u^i – касательный вектор внутренней геометрии, ортогональный векторам v^i и w^i :

$$(16) \quad u^{\alpha\beta} = \frac{1}{k} (x_{\overset{\circ}{p}}^{\alpha} x_{\overset{\circ}{p}}^{\beta} - x_{\overset{\circ}{p}}^{\beta} x_{\overset{\circ}{p}}^{\alpha}) u^p.$$

Но, взяв в точке $M(\overset{\circ}{\vec{r}})$ произвольный касательный вектор z^i , построив соответствующий простой бивектор $\mathcal{Z}$ с координатами

$$z^{\alpha\beta} = \frac{1}{k} (x_{\overset{\circ}{p}}^{\alpha} x_{\overset{\circ}{p}}^{\beta} - x_{\overset{\circ}{p}}^{\beta} x_{\overset{\circ}{p}}^{\alpha}) z^p$$

и подсчитав скалярное произведение $\mathcal{U}\mathcal{Z}$, получим

$$\mathcal{U}\mathcal{Z} = -\frac{1}{2} \overset{\circ}{\mathcal{G}}_{\alpha\sigma} \overset{\circ}{\mathcal{G}}_{\beta\tau} u^{\alpha\beta} z^{\sigma\tau} = \frac{1}{k} E_{\sigma\tau\lambda\mu} x_{\overset{\circ}{r}}^{\sigma} x_{\overset{\circ}{r}}^{\tau} x_{\overset{\circ}{p}}^{\lambda} x_{\overset{\circ}{q}}^{\mu} v^p w^q z^r = \varepsilon_{pq\tau} v^p w^q z^r,$$

где

$$(17) \quad \varepsilon_{pq\tau} = \frac{1}{k} (\overset{\circ}{\vec{r}}_{\overset{\circ}{p}}, \overset{\circ}{\vec{r}}_{\overset{\circ}{q}}, \overset{\circ}{\vec{r}}_{\overset{\circ}{\tau}})$$

– дискриминантный 3-вектор пространства $\mathbb{L}_3$. Так как согласно (13) $\mathcal{U}\mathcal{Z} = g_{pq} u^p z^q$, то ясно, что вектор u^i является векторным произведением векторов v^i и w^i в пространстве $\mathbb{L}_3$:

$$(18) \quad u^i = \varepsilon^i_{pq} v^p w^q.$$

Итак, если в точке $M(\overset{\circ}{\vec{r}})$ построены простые бивекторы $\mathcal{V}$ и $\mathcal{W}$, отвечающие касательным векторам v^i и w^i , то их винтовое произведение $[\mathcal{V}\mathcal{W}]$ является простым бивектором, отвечающим векторному произведению $u^i = \varepsilon^i_{pq} v^p w^q$.

Таким образом, аппарат скользящих векторов и общих винтов пространства $\mathbb{L}_3$ включает алгебру касательных векторов этого пространства в фиксированной точке. Большим преимуществом такого аппарата является то, что в его рамках появляется возможность построения линейных комбинаций произвольных скользящих векторов как линейных комбинаций соответствующих простых бивекторов. В результате возникают, как правило, уже не простые бивекторы, определяющие винты пространства $\mathbb{L}_3$. Переход от суммирования винтов к интегрированию приводит к понятию винтовых интегралов.

В заключение следует отметить, что в силу произвольности векторов v^i и w^i из формул (15), (16) и (18) вытекает равенство

$$(19) \quad -\frac{1}{2} \overset{\circ}{\mathcal{G}}^{\alpha\sigma} \overset{\circ}{\mathcal{G}}^{\beta\tau} E_{\sigma\tau\lambda\mu} (x_{\overset{\circ}{p}}^{\lambda} x_{\overset{\circ}{q}}^{\mu} - x_{\overset{\circ}{p}}^{\mu} x_{\overset{\circ}{q}}^{\lambda}) = \frac{1}{k} (x_{\overset{\circ}{s}}^{\alpha} x_{\overset{\circ}{s}}^{\beta} - x_{\overset{\circ}{s}}^{\beta} x_{\overset{\circ}{s}}^{\alpha}) \varepsilon^s_{qr},$$

откуда

$$(20) \quad x_p^\alpha x_q^\beta - x_p^\beta x_q^\alpha = \frac{1}{2k} \overset{\circ}{G}^{\alpha\sigma} \overset{\circ}{G}^{\beta\tau} \overset{\circ}{E}_{\sigma\tau\lambda\mu} (x_\sigma^\lambda x_s^\mu - x_\sigma^\mu x_s^\lambda) \varepsilon_{.pq}^s.$$

Прежде чем рассмотреть винтовые интегралы, следует заметить, что в пространстве 1E_4 целесообразно ввести бивекторный элемент площади, истолковывающийся как бивекторная 2-форма

$$(21) \quad d\mathfrak{D} = -\frac{1}{2} d\vec{r} \wedge d\vec{r},$$

имеющая в исходной декартовой ортогональной системе координат бивекторные координаты

$$(22) \quad d\mathfrak{D}^{\alpha\beta} = -dx^\alpha \wedge dx^\beta.$$

Кроме того, в 1E_4 естественно возникает векторный элемент объема $d\vec{\mathfrak{V}}$, являющийся векторной 3-формой с координатами

$$(23) \quad d\mathfrak{V}^\alpha = \frac{1}{6} \overset{\circ}{G}^{\alpha\sigma} \overset{\circ}{E}_{\sigma\lambda\mu\nu} dx^\lambda \wedge dx^\mu \wedge dx^\nu.$$

Из (23) вытекает равенство

$$(24) \quad dx^\alpha \wedge dx^\beta \wedge dx^\gamma = \overset{\circ}{E}^{\sigma\alpha\beta\gamma} d\mathfrak{V}_\sigma.$$

Если рассматривается гладкая двумерная поверхность на гиперсфере 1S_3 , то наряду с бивекторным элементом площади $d\mathfrak{D} = -\frac{1}{2} d\vec{r}_\circ \wedge d\vec{r}_\circ$ для этой поверхности можно определить векторный элемент площади в $\mathbb{L}_3$ как векторно-внешнее произведение $[d\vec{r}_\circ \wedge d\vec{r}_\circ]$ в геометрии пространства $\mathbb{L}_3$. Если u^i ($i = 1, 2, 3$) – локальные координаты на 1S_3 , то $d\vec{r}_\circ = \vec{r}_\circ^i du^i$, и указанный векторный элемент площади определяется как векторная 2-форма в $\mathbb{L}_3$ с координатами

$$d\sigma^i = \frac{1}{2} \varepsilon_{.pq}^i du^p \wedge du^q.$$

Этой векторной 2-форме отвечает по правилу (12) бивекторная 2-форма на 1S_3 с координатами

$$(25) \quad d\mathfrak{S}^{\alpha\beta} = \frac{1}{2k} (x_\circ^\alpha x_\circ^\beta - x_\circ^\beta x_\circ^\alpha) \varepsilon_{.pq}^s du^p \wedge du^q.$$

Поскольку для двумерной поверхности на 1S_3 был введен также бивекторный элемент площади с координатами

$$d\mathfrak{D}^{\alpha\beta} = -dx_{\circ}^{\alpha} \wedge dx_{\circ}^{\beta} = -\frac{1}{2}(x_{\circ p}^{\alpha} x_{\circ q}^{\beta} - x_{\circ p}^{\beta} x_{\circ q}^{\alpha}) du^p \wedge du^q,$$

то из (19) и (25) следует

$$(26) \quad d\mathfrak{G}^{\alpha\beta} \stackrel{(\circ)}{=} d\mathfrak{D}^{\alpha\beta},$$

где значок $(\circ)$ над знаком равенства напоминает, что рассмотрения ведутся для поверхности на гиперсфере 1S_3 .

Аналогично, для самой гиперсферы 1S_3 можно определить как векторный элемент объема $d\vec{\mathfrak{V}}$ по правилу (23), так и скалярный элемент объема $d\tau$ в $\mathbb{L}_3$:

$$(27) \quad d\tau = \frac{1}{6} \varepsilon_{pqr} du^p \wedge du^q \wedge du^r.$$

Учитывая (22), имеем

$$d\mathfrak{V}^{\alpha} = \frac{1}{2} \overset{\circ}{\mathcal{G}}^{\alpha\sigma} \overset{\circ}{E}_{\sigma\lambda\mu\nu} x_{\circ p}^{\lambda} x_{\circ q}^{\mu} x_{\circ r}^{\nu} du^p \wedge du^q \wedge du^r,$$

т. е. $d\mathfrak{V}^{\alpha} \stackrel{(\circ)}{=} \varkappa x_{\circ}^{\alpha}$, и свертывание с $x_{\circ\alpha}$ дает при учете (17) $\varkappa k^2 = k d\tau$, т. е.

$$(28) \quad d\vec{\mathfrak{V}} \stackrel{(\circ)}{=} \frac{1}{k} \vec{r}_{\circ} d\tau.$$

Наконец, для сокращения записи формул целесообразно в пространстве 1E_4 , отнесенном к декартовой ортогональной системе координат x^{α} с координатным орторепером $\{\vec{e}_{\alpha}\}$, использовать векторный дифференциальный оператор

$$(29) \quad \vec{D} \stackrel{(\circ)}{=} \vec{e}_{\alpha} \overset{\circ}{\mathcal{G}}^{\alpha\sigma} \frac{\partial}{\partial x^{\sigma}}.$$

Обозначая, как и выше, для двух векторов $\vec{v} = v^{\alpha} \vec{e}_{\alpha}$, $\vec{w} = w^{\alpha} \vec{e}_{\alpha}$ через $\vec{v} \wedge \vec{w}$ простой бивектор с координатами

$$(\vec{v} \wedge \vec{w})^{\alpha\beta} = v^{\alpha} w^{\beta} - v^{\beta} w^{\alpha},$$

можно с помощью оператора (29) построить для векторного поля $\vec{v}$ в 1E_4 бивекторное поле $\vec{D} \wedge \vec{v}$ с координатами

$$(30) \quad (\vec{D} \wedge \vec{v})^{\alpha\beta} = \overset{\circ}{\mathcal{G}}^{\alpha\sigma} \frac{\partial v^{\beta}}{\partial x^{\sigma}} - \overset{\circ}{\mathcal{G}}^{\beta\sigma} \frac{\partial v^{\alpha}}{\partial x^{\sigma}}.$$

Истолковывая внутреннее произведение $\mathfrak{A} \lrcorner \vec{v}$ бивектора $\mathfrak{A}(a^{\alpha\beta})$ и вектора $\vec{v}(v^\alpha)$ как вектор с координатами

$$(31) \quad (\mathfrak{A} \lrcorner \vec{v})^\alpha = a^{\alpha\sigma} v_\sigma,$$

целесообразно с помощью оператора (29) определить для бивекторного поля $\mathfrak{A}(a^{\alpha\beta})$ в 1E_4 как новый векторный дифференциальный оператор $\vec{D} \lrcorner \vec{D} = \vec{e}_\alpha a^{\alpha\sigma} \frac{\partial}{\partial x^\sigma}$, так и векторное поле

$$(32) \quad \vec{D} \lrcorner \mathfrak{A} = \partial_\sigma a^{\alpha\sigma} \vec{e}_\alpha.$$

Целесообразно также использовать символ $d\mathfrak{A} \lrcorner \vec{D}$ для бивекторного элемента площади $d\mathfrak{A}$, где согласно (22)

$$d\mathfrak{A} \lrcorner \vec{D} = -dx^\alpha \wedge dx^\sigma \frac{\partial}{\partial x^\sigma}.$$

Переходя к винтовым интегралам в пространстве 1E_4 , следует начать со “скалярной” формулы Стокса

$$(33) \quad \oint_\gamma \vec{w} d\vec{r} = \iint_S (\vec{D} \lrcorner \vec{w}) d\mathfrak{A},$$

где S – двумерная поверхность, ограниченная контуром γ , $\vec{w}$ – векторное поле, а справа под знаком интеграла стоит скалярное произведение бивекторов $\vec{D} \lrcorner \vec{w}$ и $d\mathfrak{A}$. Эта формула, конкретизирующая известную общую формулу $\oint_\gamma \omega = \iint_S d\omega$, выводится непосредственно с учетом (3), (22) и (30).

Аналогично получается формула, использующая винты:

$$\oint_\gamma \vec{w} \wedge d\vec{r} = - \iint_S (d\mathfrak{A} \lrcorner \vec{D}) \wedge \vec{w}.$$

При $\vec{w} = \vec{r}$ эта формула принимает вид

$$\oint_\gamma \vec{r} \wedge d\vec{r} = -2 \iint_S d\mathfrak{A}.$$

В частности, если контур γ и поверхность S принадлежат гиперсфере 1S_3 , то в силу (26) возникает формула

$$\oint_\gamma \vec{r}_o \wedge d\vec{r}_o \stackrel{(0)}{=} \mathfrak{F},$$

где $\mathfrak{F} = \iint_S d\mathfrak{S}$ – “винт векторной площади” контура γ .

Обращаясь к замкнутой поверхности S , ограничивающей область Ω на трехмерной гиперповерхности, отметим формулу

$$\iint_S \varphi d\mathfrak{D} = \iiint_{\Omega} (d\vec{\mathfrak{D}} \wedge \vec{D}\varphi),$$

где φ – скалярное поле в 1E_4 . Эта формула эквивалентна следующей:

$$(34) \quad \iint_S \varphi d\mathfrak{D}^* = - \iiint_{\Omega} d\vec{\mathfrak{D}} \wedge \vec{D}\varphi,$$

которая проверяется непосредственно.

Наконец, положив в (9) $a^{\alpha\beta} = do^{\alpha\beta} = -dx^\alpha \wedge dx^\beta$, $b^{\alpha\beta} = n^{\alpha\beta}$, где $n^{\alpha\beta}$ – координаты произвольного винта, получим

$$c^{\alpha\beta} = dx^\alpha \wedge dx^\sigma \overset{\circ}{\mathcal{G}}_{\sigma\tau} n^{\beta\tau} - n^{\alpha\sigma} \overset{\circ}{\mathcal{G}}_{\sigma\tau} dx^\beta \wedge dx^\tau.$$

Согласно (4) винтовое произведение $[d\mathfrak{D}, \mathfrak{N}]$ имеет координаты

$${}^*c^{\alpha\beta} = \overset{\circ}{\mathcal{G}}^{\alpha\sigma} \overset{\circ}{\mathcal{G}}^{\beta\tau} \overset{\circ}{E}_{\sigma\tau\lambda\rho} \overset{\circ}{\mathcal{G}}_{\kappa\mu} n^{\rho\kappa} dx^\lambda \wedge dx^\mu.$$

Поэтому с учетом (23) получается интегральная формула для поля винта $\mathfrak{N}$:

$$\begin{aligned} \iint_S [d\mathfrak{D}, \mathfrak{N}]^{\alpha\beta} &= \iiint_{\Omega} \overset{\circ}{\mathcal{G}}^{\alpha\sigma} \overset{\circ}{\mathcal{G}}^{\beta\tau} \overset{\circ}{\mathcal{G}}_{\kappa\mu} \overset{\circ}{E}_{\sigma\tau\lambda\rho} \overset{\circ}{E}^{\delta\lambda\mu\nu} \partial_\nu n^{\rho\kappa} d\mathfrak{V}_\delta \\ &= \iiint_{\Omega} \overset{\circ}{\mathcal{G}}^{\alpha\sigma} \overset{\circ}{\mathcal{G}}^{\beta\tau} \overset{\circ}{\mathcal{G}}_{\kappa\mu} \delta_{\sigma\tau\lambda\rho}^{\delta\mu\lambda\nu} \partial_\nu n^{\rho\kappa} d\mathfrak{V}_\delta \\ &= \iiint_{\Omega} \overset{\circ}{\mathcal{G}}^{\alpha\sigma} \overset{\circ}{\mathcal{G}}^{\beta\tau} \overset{\circ}{\mathcal{G}}_{\kappa\mu} \delta_{\sigma\tau\rho}^{\delta\mu\nu} \partial_\nu n^{\rho\kappa} d\mathfrak{V}_\delta \\ &= - \iiint_{\Omega} (\overset{\circ}{\mathcal{G}}^{\alpha\nu} \partial_\nu n^{\beta\rho} - \overset{\circ}{\mathcal{G}}^{\beta\nu} \partial_\nu n^{\alpha\rho}) d\mathfrak{V}_\rho \\ &\quad - \iiint_{\Omega} (\partial_\rho n^{\alpha\rho} d\mathfrak{V}^\beta - \partial_\rho n^{\beta\rho} d\mathfrak{V}^\alpha), \end{aligned}$$

которую с использованием обозначений (31) и (29) можно записать в виде

$$(35) \quad \iint_S [d\mathfrak{D}, \mathfrak{N}] = \iiint_{\Omega} d\vec{\mathfrak{D}} \wedge (\vec{D} \lrcorner \mathfrak{N}) - \iiint_{\Omega} \vec{D} \wedge (\mathfrak{N}) \lrcorner d\vec{\mathfrak{D}},$$

где скобки в выражении $(\mathfrak{N}) \lrcorner d\vec{\mathfrak{D}}$ означают, что при вычислении воздействия оператора $\vec{D}$ на векторное поле $\mathfrak{N} \lrcorner d\vec{\mathfrak{D}}$ учитывается лишь зависимость этого вектора от бивектора $\mathfrak{N}$.

Формулы типа (33), (34) и (35) выведены для скалярных, векторных и бивекторных полей, заданных в некоторой области пространства 1E_4 , а не только на гиперсфере 1S_3 . Для их приложения к пространству $\mathbb{L}_3$ можно надлежащим образом продолжить соответствующие поля с гиперсферы 1S_3 в ее окрестность, применить формулы к продолженным полям и затем ограничить результат на 1S_3 . Однако в ряде случаев можно обойтись и без продолжения в пространство 1E_4 , преобразуя интегралы непосредственно на 1S_3 . Это совершенно естественно для формулы Стокса (33):

$$\begin{aligned} \oint_{\gamma} \vec{w} d\vec{r} &= \oint_{\gamma} w_i du^i = \iint_S \partial_p w_q du^p \wedge du^q \\ &= \iint_S \partial_p w_q \varepsilon^{pq s} d\sigma_s = \iint_S \nabla_p w_q \varepsilon^{pq s} d\sigma_s \\ &= \iint_S (\text{rot } \vec{w})_s d\sigma^s. \end{aligned}$$

Левая часть формулы (31) с учетом (25), (26), (27) преобразуется на 1S_3 так:

$$\begin{aligned} \iint_S \varphi d\mathfrak{S}^{\alpha\beta} &= \frac{1}{k} \iint_S \varphi (x_{\circ}^{\alpha} x_{\circ}^{\beta} - x_{\circ}^{\beta} x_{\circ}^{\alpha}) d\sigma^s \\ &= \frac{1}{2k} \iint_S \varphi (x_{\circ}^{\alpha} x_{\circ}^{\beta} - x_{\circ}^{\beta} x_{\circ}^{\alpha}) \varepsilon_{\cdot pq}^s du^p \wedge du^q \\ &= \frac{1}{2k} \iiint_{\Omega} \partial_r \varphi (x_{\circ}^{\alpha} x_{\circ}^{\beta} - x_{\circ}^{\beta} x_{\circ}^{\alpha}) \varepsilon_{\cdot pq}^s du^p \wedge du^q \wedge du^r \\ &= \frac{1}{2k} \iiint_{\Omega} \partial_r \varphi (x_{\circ}^{\alpha} x_{\circ}^{\beta} - x_{\circ}^{\beta} x_{\circ}^{\alpha}) g^{sl} \delta_{lpq}^r d\tau \\ &= \frac{1}{k} \iiint_{\Omega} (x_{\circ}^{\alpha} x_{\circ}^{\beta} - x_{\circ}^{\beta} x_{\circ}^{\alpha}) g^{sr} \partial_r \varphi d\tau. \end{aligned}$$

Здесь члены, содержащие производные от $x_{\circ}^{\alpha}$, $x_{\circ}^{\beta}$, $\varepsilon_{pq r}$, обратятся в нуль благодаря (11), (20) и равенству $\nabla_k \varepsilon_{pqr} = 0$.

Наконец, поляризуя левую часть формулы (35) и считая, что $\mathfrak{N}$ – простой бивектор с координатами $n^{\alpha\beta} = \frac{1}{k} (x_{\circ}^{\alpha} x_{\circ}^{\beta} - x_{\circ}^{\beta} x_{\circ}^{\alpha}) v^p$, где v^i – векторное поле на 1S_3 , имеем:

$$\begin{aligned} \iint_S [d\mathfrak{S}, \mathfrak{N}]^{\alpha\beta} &= \iint_S [d\mathfrak{S}, \mathfrak{N}]^{\alpha\beta} \\ &= \frac{1}{k^2} \iint_S (x_{\circ}^{\alpha} x_{\circ}^{\beta} - x_{\circ}^{\beta} x_{\circ}^{\alpha}) \varepsilon_{\cdot pq}^s d\sigma^p v^q \\ &= \frac{1}{2k^2} \iint_S (x_{\circ}^{\alpha} x_{\circ}^{\beta} - x_{\circ}^{\beta} x_{\circ}^{\alpha}) \varepsilon_{\cdot lm}^s \varepsilon_{\cdot pq}^l v^m du^p \wedge du^q \\ &= \frac{1}{2k^2} \iint_S (x_{\circ}^{\alpha} x_{\circ}^{\beta} - x_{\circ}^{\beta} x_{\circ}^{\alpha}) \delta_{lpq}^{slm} v_m du^p \wedge du^q \\ &= \frac{1}{k^2} \iint_S (x_{\circ}^{\alpha} x_{\circ}^{\beta} - x_{\circ}^{\beta} x_{\circ}^{\alpha}) v_p du^p \wedge du^s \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{k^2} \iiint_{\Omega} (x_{\circ}^{\alpha} x_{\circ}^{\beta} - x_{\circ}^{\beta} x_{\circ}^{\alpha}) \nabla_r v_p du^p \wedge du^q \wedge du^r \\
 &\quad + \frac{1}{k^2} \iiint_{\Omega} (x_{\circ}^{\alpha} x_{\circ}^{\beta} - x_{\circ}^{\beta} x_{\circ}^{\alpha}) v_p du^p \wedge du^q \wedge du^r \\
 &= \frac{1}{k^2} \iiint_{\Omega} (x_{\circ}^{\alpha} x_{\circ}^{\beta} - x_{\circ}^{\beta} x_{\circ}^{\alpha}) \nabla_r v_p \varepsilon^{qrp} d\tau \\
 &\quad + \frac{1}{k^2} \iiint_{\Omega} (x_{\circ}^{\alpha} x_{\circ}^{\beta} - x_{\circ}^{\beta} x_{\circ}^{\alpha}) v_p \varepsilon^{pqr} d\tau.
 \end{aligned}$$

Используя (20), получаем для указанного простого бивектора $\mathfrak{N}$, определяемого векторным полем v^i в $\mathbb{L}_3$, формулу

$$\begin{aligned}
 \iint_S [d\mathfrak{S}, \mathfrak{N}]^{\alpha\beta} &= \frac{1}{k^2} \iiint_{\Omega} (x_{\circ}^{\alpha} x_{\circ}^{\beta} - x_{\circ}^{\beta} x_{\circ}^{\alpha}) \nabla_r v_p \varepsilon^{qrp} d\tau \\
 &\quad - \frac{1}{2k^3} \iiint_{\Omega} \overset{\circ}{\mathcal{G}}^{\alpha\sigma} \overset{\circ}{\mathcal{G}}^{\beta\tau} \overset{\circ}{E}_{\sigma\tau\lambda\mu} (x_{\circ}^{\lambda} x_{\circ}^{\mu} - x_{\circ}^{\mu} x_{\circ}^{\lambda}) g^{sm} \delta_{m\tau q} v_p d\tau \\
 &= \frac{1}{k^2} \iiint_{\Omega} (x_{\circ}^{\alpha} x_{\circ}^{\beta} - x_{\circ}^{\beta} x_{\circ}^{\alpha}) \nabla_r v_p \varepsilon^{qrp} d\tau \\
 &\quad + \frac{1}{k^3} \iiint_{\Omega} \overset{\circ}{\mathcal{G}}^{\alpha\sigma} \overset{\circ}{\mathcal{G}}^{\beta\tau} \overset{\circ}{E}_{\sigma\tau\lambda\mu} (x_{\circ}^{\lambda} x_{\circ}^{\mu} - x_{\circ}^{\mu} x_{\circ}^{\lambda}) v^s d\tau,
 \end{aligned}$$

или, в сокращенной записи, следующее соотношение между винтовыми интегралами:

$$\begin{aligned}
 \iint_S [\vec{r}_{\circ} \wedge d\vec{\sigma}, \vec{r}_{\circ} \wedge \vec{v}] &= \iiint_{\Omega} \vec{r}_{\circ} \wedge \text{rot } \vec{v} d\tau \\
 &\quad + \frac{2}{k} \iiint_{\Omega} (\vec{r}_{\circ} \wedge^* \vec{v}) d\tau.
 \end{aligned}$$

Подобные формулы указаны в статье [37] и, как представляется, могут оказаться полезными во многих вопросах геометрии и механики неевклидовых пространств, а также в области физических приложений. Они допускают многомерные обобщения, а также обобщения иного сорта (например, когда вместо винтов используются элементы произвольной алгебры Ли).

§3. Другие геометрические работы П.А.Широкова; геометрия в трудах Н.Г.Чеботарева

Для ряда работ П.А.Широкова по римановой геометрии характерна тенденция исследовать классы пространств, обладающих свойствами, аналогичными тем или иным свойствам пространств постоянной кривизны. Вводятся также пространства, в силу определенных причин резко отличающиеся от пространств постоянной кривизны.

В статье [39], опубликованной в 1925 г., получен ряд основополагающих результатов. Во-первых, выделен класс римановых пространств, допускающих ковариантно

постоянные симметрические тензоры, второй валентности, отличных от метрического (ламеллярные или приводимые пространства). Эти пространства нашли многочисленные приложения как в работах самого П.А.Широкова [40], [41], [42], так и в последующих исследованиях других авторов, в частности при рассмотрении аффинных и проективных преобразований псевдоримановых пространств [43], причем первый шаг в этом направлении тоже был сделан П.А.Широковым в статье о геодезическом отображении поверхностей с неопределенным мероопределением [44]. Во-вторых, в статье [39] выделен класс римановых A -пространств четного числа измерений с ковариантно постоянным антисимметрическим тензором, по существу совпадающий с классом келеровых пространств, введенных Э.Келером в 1933 г. и нашедших важнейшие приложения во многих областях математики. В-третьих, там поставлена проблема определения римановых пространств с ковариантно постоянным тензором кривизны. Этот класс пространств получил в дальнейшем название класса симметрических пространств и стал тоже одним из важнейших объектов современной математики. Свойства симметрических пространств были вскоре особенно глубоко изучены Э.Картаном в связи с проблемами теории групп Ли (см. [45]). П.А.Широков внимательно следил за исследованиями Э.Картана и тоже включился в активную разработку теории симметрических пространств. Им были определены симметрические конформно-евклидовы пространства [46], симметрические римановы пространства первого класса [47], проективно-евклидовы симметрические пространства аффинной связности [48] и симметрические A -пространства [49], в которых детально изучено поведение геодезических линий и введено понятие "угла наклона" двумерной площадки, получившее в последние годы дальнейшее развитие в работах Б.А.Розенфельда и его учеников ([50], [51]).

Необходимо также отметить большую учебную и методическую работу, проделанную П.А.Широковым: его книгу "Тензорный анализ" [52], переводы работ Э.Картана [18], [53], [54], проводившийся им семинар по теории дифференциальных инвариантов и прочитанный цикл лекций по теории аффинной дифференциальной геометрии, положенный в основу книги [55]; неоднократно переиздававшееся популярное изложение основ геометрии Лобачевского [56].

Находившийся в большой дружбе с П.А.Широковым Николай Григорьевич Чеботарев (1894–1947) (см. [57]) был не только крупнейшим алгебраистом, но и математиком широкого профиля, имевшим работы и в области геометрии. Не говоря уже о достижениях в теории групп и алгебр Ли, принадлежащих ему и его ученикам (И.Д.Адо, В.В.Морозов) и нашедших многочисленные применения в геометрии однородных пространств и в теории групп движений обобщенных пространств, следует отметить, что им было введено понятие обобщенных поверхностей переноса, оказавших существенное влияние на творчество харьковского геометра Я.П.Бланка, ученика Д.М.Синцова (см. [58]). Как уже говорилось, Н.Г.Чеботарев принял деятельное участие в издании трудов Лобачевского, а в 1943 г., когда в Казани отмечалась дата 150-летия со дня рождения Лобачевского, опубликовал статью [59], посвященную неевклидовой геометрии и ее приложениям.

§4. Деятельность А.П.Нордена и его учеников

После смерти П.А.Широкова в Казань в 1945 г. для заведования кафедрой геометрии был приглашен один из талантливейших московских геометров, ученик В.Ф.Кагана и С.П.Финикова, Александр Петрович Норден. Он развернул активную научную и педагогическую деятельность, возглавил общегородской геометрический семинар. Ученики П.А.Широкова Иван Петрович Егоров (1915–1990), Вениамин Григорьевич Кош, Борис Лукич Лаптев (1905–1989), Алексей Зиновьевич Петров (1910–1972), Петр Иванович Петров (1916–1974) в то время работали над темами своих кандидатских и докторских диссертаций (И.П.Егоров находился вне Казани). В Казанском университете А.П.Норден продолжал развивать свой метод нормализации в проективно-дифференциальной геометрии и работал над монографией, посвященной этому методу. Монография вышла в 1950 г. и была затем переработана и переиздана [60]. Метод нормализации позволяет осуществить новый подход к неевклидовым геометриям, так как полярное соответствие, определяемое невырожденной гиперквადрикой Q в проективном пространстве P_n , осуществляет ту самую нормализацию пространства P_n , которая порождает неевклидову геометрию, строящуюся в P_n по методу Кели–Клейна с помощью абсолюта Q . Различные выражения гиперквადрики Q приводят к симметрическим (в смысле Картана) проективно-евклидовым связностям, которые были найдены П.А.Широковым в работе [48].

Точечное соответствие в плоскости комплексного переменного, будучи перенесено с помощью стереографической проекции на сферу S_2 , позволяет осуществить автополярную нормализацию этой сферы и получить связность Вейля, порождаемую данным точечным соответствием. Одновременно в гиперболическом пространстве H_3 , определяемом сферой S_2 как абсолютом, возникает пара полярно сопряженных прямолинейных конгруэнций, и появляется та ситуация, которую рассматривал Г.Бек в работе [32]. В монографии [60] А.П.Норденом построена общая теория автополярной нормализации гиперквадрики в P_n .

Особое внимание А.П.Нордена привлекла нормализация поверхностей биаксиального пространства эллиптического типа, осуществляемая с помощью прямых абсолютной линейной конгруэнции. В общем случае эта нормализация приводит к возникновению квазиевклидовой связности на нормализованной поверхности, причем выделяется класс поверхностей нулевой кривизны, на которых возникает евклидова связность. А.П.Норден развил оригинальную геометрию биаксиального пространства [61], построил теорию биаффинного пространства B_4 , несобственная гиперплоскость которого является биаксиальным пространством ([62],[63]), рассмотрел многомерные обобщения [64] и привлек к изучению этих вопросов ряд своих учеников. Таким образом, А.П.Норденом в те годы была правильно уловлена тенденция изучать многообразия с почти комплексными и родственными им структурами (см. [65]). В статьях [66], [67] им и В.В.Вишневым даны приложения результатов работы [64] к теории дифференциальных инвариантов четырехмерного риманова пространства, использованные А.З.Петровым в его монографиях [110], [111].

В статье [68] А. П. Норденом обнаружены сопутствующие структуры в линейчатой геометрии и показано, что в одной из этих структур многообразие прямых трехмерного евклидова (или неевклидова) пространства является четырехмерным A -пространством П. А. Широкова. Эти рассуждения были обобщены в статье [69] на многомерный случай.

Начиная с 1963 г. А. П. Норден большое внимание уделял теории композиций. Основные положения построенной теории были им подытожены в статье [70]. Его подходы к изучению комплексных многообразий в связи с теорией композиций и приложений метода нормализации были использованы и развиты Э. Г. Нейфельдом в ряде интересных работ (см. [71]–[75]).

Другое развитие указанные рассуждения А. П. Нордена получили в геометрии пространств над алгебрами, разрабатывавшейся рядом его учеников, о чем имеются данные в обзорной статье [76].

Из казанских учеников А. П. Нордена, защитивших докторские диссертации и уже ушедших из жизни, отметим Валентина Ивановича Шуликовского (1922–1973) и Василия Ивановича Ведерникова (1919–1991). Оба участника Отечественной войны, они сумели достойно проявить себя в науке. В. И. Шуликовский получил новые результаты в теории сетей и опубликовал оригинальную монографию [77], а В. И. Ведерников обобщил метод нормализации А. П. Нордена (в частности, его теорию сопряженных связностей) на случай расслоенных пространств и (совместно с А. С. Феденко и рядом своих учеников) развил обширную теорию обобщенных симметрических и родственных им однородных пространств ([78], [79], [80]).

В настоящее время ученик А. П. Нордена Вадим Васильевич Шурыгин завершает работу над темой своей докторской диссертации, посвященной применениям локальных алгебр в теории расслоений струй отображений. Некоторые из аспектов этой темы отражены в статье [81] и в статье, представленной в данном номере УМН.

Учебно-методическая деятельность А. П. Нордена тоже была плодотворной: хорошо известен его учебник по дифференциальной геометрии, книга “Теория поверхностей”, написанное вместе с Г. В. Бушмановой учебное пособие “Элементы конформной геометрии”.

Очень большая работа была им проделана в области популяризации трудов Лобачевского и анализа его творческой деятельности. Это оригинальное изложение основ неевклидовой геометрии [82], сравнительный анализ творчества Гаусса и Лобачевского ([83], [84], [85]), вопросы обоснования геометрии в работах Лобачевского [86], анализ рукописи Лобачевского “Начальные основания логики” [87].

При подготовке к юбилейным датам, связанным с Лобачевским и неевклидовой геометрией, проведении соответствующих конференций были подготовлены и изданы книги [88], [89], [90]. (Сборник [89] значительно расширяет и дополняет аналогичный сборник, изданный в 1893 г. к столетнему юбилею Н. И. Лобачевского.) Эту работу А. П. Норден проводил в тесном содружестве с Б. Л. Лаптевым. О его выдающейся деятельности следует сказать особо (см. [91], [92]).

§5. Деятельность Б.Л.Лаптева, А.З.Петрова и других воспитанников Казанского университета

Начав с геометрии финслеровых пространств и построив аппарат дифференцирования Ли в этих пространствах [93], Б.Л.Лаптев затем значительно расширил сферу своих исследований и ввел общее понятие пространства опорных элементов. Для этого пространства он развил теорию дифференцирования Ли [94], а для пространства тензорных опорных элементов разработал теорию ковариантного дифференцирования, автоморфизмов, аффинных нормальных тензоров и дифференциальных инвариантов [95]. К указанным вопросам Б.Л.Лаптев привлек внимание ряда своих учеников, один из которых, Борис Никитович Шапуков, недавно защитил докторскую диссертацию “Структура векторных расслоений и проблемы редукции”; по ее материалу подготовлена статья [96].

Наряду со специальными геометрическими исследованиями Б.Л.Лаптев вел систематическую работу над наследием Н.И.Лобачевского. Начиная со своего доклада в 1943 г. о биографии Лобачевского [97], [98], он до последних дней своей жизни не прекращал активной деятельности в этой области. Здесь необходимо вспомнить отмечавшееся выше комментирование работы Лобачевского “Применение воображаемой геометрии . . . ” в третьем томе сочинений [22] с детальным проведением всех расчетов, относящихся к вычислению объемов тел, комментарии к избранным трудам Лобачевского [99], а также подготовку и редактирование книги [25]. Наряду с этим нужно отметить анализ ранних работ Лобачевского [100],[101], прочитанных им книг и журналов [102], [103], его взглядов на математический метод исследования природы [104]. Б.Л.Лаптевым опубликован ряд статей и брошюр о Лобачевском и его геометрии (см., например, [105], [106]); написана книга о жизни и творчестве Лобачевского [107].

Отметим кратко результаты деятельности других выпускников Казанского университета (учеников П.А.Широкова).

А.З.Петров был избран в 1969 г. академиком АН УССР и в 1972 г. награжден за свои труды Ленинской премией. Его биография и список работ содержатся в статьях [112], [113]. Кандидатская диссертация А.З.Петрова, по материалу которой написана статья [108], обобщала на многомерный случай методику, использованную П.А.Широковым в работе [44], и полностью решала вопрос о геодезическом отображении трехмерных римановых пространств неопределенной метрики. В 1957 г. он защитил докторскую диссертацию, в которой установил свои получившие всемирную известность три типа четырехмерных пространств Эйнштейна и разработал инвариантно-групповые методы изучения полей тяготения. К выделению трех типов пространств Эйнштейна, а затем и трех типов общих полей тяготения он пришел в итоге многолетних размышлений (см., например, статью [109]); геометрическая основа выделения этих трех типов очень прозрачно обрисована А.П.Норденом в статье [67]. Подобрал коллектив увлеченной наукой молодежи, А.З.Петров в 1960 г. основал кафедру теории относительности и гравитации, при которой систематически и плодотворно ра-

ботал научный семинар. Вскоре появились известные монографии [110], [111], переведенные на ряд иностранных языков.

С 1975 г. кафедрой теории относительности и гравитации заведует ученик А.З.Петрова, профессор Владимир Романович Кайгородов.

Недавно сотрудница этой кафедры Ася Васильевна Аминова защитила докторскую диссертацию “Инвариантно-групповые методы в теории проективных отображений пространственно-временных многообразий”.

П.И.Петров, участник организованного П.А.Широковым аспирантского семинара по теории дифференциальных инвариантов обобщенных пространств, избрал темой своих исследований дифференциальные инварианты римановых и аффинносвязных пространств. В своей кандидатской диссертации (1946 г.) он дополнил результаты Ф.М.Суворова, указав наипростейший базис полной системы метрическо-скалярных дифференциальных инвариантов третьего порядка трехмерного риманова пространства [114]. Его докторская диссертация “Дифференциальные квадратичные формы, их инварианты и классификация” (представлена в 1965 г.) была посвящена римановым пространствам высших размерностей, в основном четырехмерным [115].

И.П.Егоров, начавший заниматься движениями в пространствах аффинной связности, плодотворно развивал эту тематику на протяжении всей своей жизни. Он защитил докторскую диссертацию (1956 г.) и основал известную Пензенскую школу геометров, изучающих автоморфизмы обобщенных пространств. Его работы получили мировое признание и были весьма близки Б.Л.Лаптеву, ученики которого нередко использовали их в своих исследованиях. Б.Л.Лаптевым совместно с учениками И.П.Егорова опубликована статья [116] о достижениях Пензенской геометрической школы. Самому И.П.Егорову принадлежит ряд проблемных статей и обзоров по теории автоморфизмов обобщенных пространств, опубликованных в изданиях ВИНТИ.

В.Г.Копп со студенческих лет заинтересовался теорией винтов псевдоевклидова пространства – темой, ждавшей своих исследователей со времен А.П.Котельникова. Он получил полную классификацию винтов и их пучков в трехмерном псевдоевклидовом пространстве [117] и произвел аналогичные рассмотрения для четырехмерного пространства Лоренца [118], а также для псевдоевклидовых пространств других размерностей и сигнатур, отмечая геометрические и скалярные инварианты подгрупп движений.

Из сказанного видно, что казанские геометры на протяжении жизни нескольких поколений внесли определенный вклад в дело сохранения и развития наследия Н.И.Лобачевского. Можно надеяться, что предстоящая конференция, посвященная 200-летию со дня рождения великого геометра, раскроет перед ними новые горизонты и будет способствовать дальнейшему развитию геометрии в Казанском университете.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Болгарский Б.В. Казанская школа математического образования. Казань: Татполиграф, 1966.

2. Парфентьев Н.Н. А.В.Васильев как математик и философ // Изв. Казан. физ.-мат. об-ва. Сер 3. 1929–1930. Т. 4. С. 92–104.
3. Празднование Императорским Казанским университетом столетней годовщины со дня рождения Н.И.Лобачевского. Казань: Типо-лит. ун-та, 1894.
4. Полное собрание сочинений по геометрии Н.И.Лобачевского. Сочинения на русском языке. Т. 1. Казань: Тип. Имп. Казан. ун-та, 1883.
5. Avec le portrait de l'auteur // Collection comléte des ouvres géométriques de N.I.Lobatcheffsky. Tome second. Ouvrages en langues française et allemande. Казань: Тип. Имп. Казан. ун-та. 1886. С. 551–680.
6. In memoriam N.I.Lobatschevskij. Казань: Тип. Имп. Казан. ун-та, 1897.
7. Васильев А.В. Лобачевский Н.И. (1792–1856). М.: Наука, 1992.
8. Лобачевский Н.И. Геометрия. Казань: Тип. Имп. Казан. ун-та, 1909.
9. Герасимова В.М. Указатель литературы по геометрии Лобачевского и развитию ее идей. Геометрия Лобачевского и развитие ее идей. М.: ГИТТЛ, 1952.
10. Олоничев П.М. Казанский геометр Федор Матвеевич Суворов // Ист.-мат. исследования. №9. М.: ГИТТЛ. 1956. С. 271–316.
11. Путята Т.В., Лаптев Б.Л., Розенфельд Б.А., Фрадлин Б.Н. Александр Петрович Котельников (1865–1944). М.: Наука, 1968.
12. Зейлигер Д.Н. Комплексная линейная геометрия. М.-Л.: ОНТИ, 1934.
13. Синцов Д.М. Работы по неголономной геометрии. Киев: Виша школа, 1972.
14. Лаптев Б.Л. Николай Николаевич Парфентьев // Рассказы о казанских ученых. Казань: Тат. кн. изд-во. 1983. С. 20–27.
15. Парфентьев Н.Н. Натурфилософия Н.И.Лобачевского // Уч. зап. Казан. ун-та 1930. Т. 90. №3–4. С. 303–312.
16. Столетие неевклидовой геометрии Н.И.Лобачевского. Казань: Изд. Казан. физ.-мат. об-ва при Казан. ун-те, 1927.
17. In memoriam N.I.Lobatschevskii. II: М.: Главнаука, 1927.
18. Международный конкурс на соискание премии имени Николая Ивановича Лобачевского (1937). Отчет: Казань: изд. Казан. физ.-мат. об-ва при Казан. ун-те, 1937 Приложение к отчету: Э.Картан. Группы голономии обобщенных пространств. 61–110. Э.Картан. Теория групп и геометрия 111–141. Э.Картан. Метрические пространства, основанные на понятии площади 143–194. В.Вагнер. Дифференциальная геометрия неголономных многообразий 195–262.
19. Лопшиц А.М., Рашевский П.К. Вениамин Федорович Каган. М.: Изд-во МГУ, 1969.
20. Лобачевский Н.И. Полное собрание сочинений. Под общей ред. В.Ф.Кагана, А.П.Котельникова, В.В.Степанова, Н.Г.Чеботарева, П.А.Широкова. Т. 1. Сочинения по геометрии. М.-Л.: ГИТТЛ, 1946.
21. Лобачевский Н.И. Полное собрание сочинений. Под общей ред. В.Ф.Кагана, А.П.Котельникова, А.П.Нордена, В.В.Степанова, Н.Г.Чеботарева, П.А.Широкова. Т. 2. Сочинения по геометрии. М.-Л.: ГИТТЛ, 1949.
22. Лобачевский Н.И. Полное собрание сочинений. Под общей ред. В.Ф.Кагана, А.П.Котельникова, А.П.Нордена, В.В.Степанова, Н.Г.Чеботарева, П.А.Широкова. Т. 3. Сочинения по геометрии. М.-Л. ГИТТЛ, 1951.
23. Лобачевский Н.И. Полное собрание сочинений. Под общей ред. В.Ф.Кагана, А.П.Котельникова, В.В.Степанова, Н.Г.Чеботарева, П.А.Широкова. Т. 4. Сочинения по алгебре. М.-Л.: ГИТТЛ, 1948.
24. Лобачевский Н.И. Полное собрание сочинений. Под общей ред. В.Ф.Кагана, А.П.Котельникова, А.П.Нордена, В.В.Степанова, Н.Г.Чеботарева, П.А.Широкова. Т. 5. Сочинения по математическому анализу, теории вероятностей, механике и астрономии. М.-Л.:

- ГИТТЛ, 1951.
25. Лобачевский Н.И. Научно-педагогическое наследие. Руководство университетом. Фрагменты. Письма. Под общей ред. П.С.Александрова, И.Н.Бронштейна, Б.Л.Лаптева, А.И.Маркушевича, В.В.Морозова, А.П.Нордена. Отв. редакторы П.С.Александров и Б.Л.Лаптев. М.: Наука, 1976.
 26. Бронштейн И.Н. Выявление наследия Н.И.Лобачевского и материалов его биографии // Сто двадцать пять лет неевклидовой геометрии Лобачевского (1826-1951). М.-Л.: ГИТТЛ. 1952. С. 61-74.
 27. Лаптев Б.Л. П.А.Широков (1895-1944) // П.А.Широков. Избранные работы по геометрии. Казань: Изд-во Казан. ун-та. 1966. С. 5-9.
 28. Широков П.А. Интерпретация и метрика квадратичных геометрий // П.А.Широков. Избранные работы по геометрии. Казань: Изд-во Казан. ун-та. 1966. С. 15-179.
 29. Широков П.А. О группе конформных преобразований неевклидовых пространств эллиптического и гиперболического типа // П.А.Широков. Избранные работы по геометрии. Казань: Изд-во Казан. ун-та. 1966. С. 180-202.
 30. Широков П.А. Об отличительном свойстве поля скоростей группы конформных преобразований в римановых пространствах // П.А.Широков. Избранные работы по геометрии. Казань: Изд-во Казан. ун-та. 1966. С. 362-364.
 31. Широков П.А. Об одном способе вывода основных формул геометрии Лобачевского // П.А.Широков. Избранные работы по геометрии. Казань: Изд-во Казан. ун-та. 1966. С. 221-228.
 32. Beck H. Kummers Theorie der geradlinigen Strachsysteme im Nicht-Euklidischen Raume // Sitzungsberichte der Berliner Math. Gesellschaft. 1910. S.59-70
 33. Study E. Geometrie der Dynamen: Leipzig, 1903.
 34. Попович М. Циклографические методы начертательной геометрии гиперболического пространства // Памяти Лобачевского посвящается. Казань: Изд-во Казан. ун-та. 1992. С. 20-67.
 35. Широков П.А. О параллельном переносе векторов в неевклидовых пространствах постоянной кривизны // П.А.Широков. Избранные работы по геометрии. Казань: Изд-во Казан. ун-та. 1966. С. 292-301.
 36. Широков П.А. Кривые в пространстве постоянной положительной кривизны // П.А.Широков. Избранные работы по геометрии. Казань: Изд-во Казан. ун-та. 1966. С. 235-244.
 37. Широков П.А. Преобразование винтовых интегралов в пространствах постоянной кривизны // In memoriam N.I.Lobatschevskii. Т. 2. М.: Главная наука. 1927. С. 119-134 ; // П.А.Широков. Избранные работы по геометрии. Казань: Изд-во Казан. ун-та. 1966. С. 302-314.
 38. Широков П.А. О векторной площади // П.А.Широков. Избранные работы по геометрии. Казань: Изд-во Казан. ун-та. 1966. С. 209-220.
 39. Широков П.А. Постоянные поля векторов и тензоров 2-го порядка в римановых пространствах // П.А.Широков. Избранные работы по геометрии. Казань: Изд-во Казан. ун-та. 1966. С. 256-280.
 40. Широков П.А. Исследование тензорного дифференциального уравнения $D_i D_j D_k \varphi = 0$ для римановых пространств // П.А.Широков. Избранные работы по геометрии. Казань: Изд-во Казан. ун-та. 1966. С. 332-342.
 41. Широков П.А. О пространстве Шура // П.А.Широков. Избранные работы по геометрии. Казань: Изд-во Казан. ун-та. 1966. С. 332-342.
 42. Широков П.А. О сходящихся направлениях в римановых пространствах // П.А.Широков. Избранные работы по геометрии. Казань: Изд-во Казан. ун-та. 1966. С. 343-352.
 43. Аминова А.В. Об уравнении Эйзенхарта и первых интегралах уравнений геодезических на римановых многообразиях лоренцевой сигнатуры // Изв. вузов. Математика. 1983. № 1.

С. 12-26.

44. Широков П.А. Геодезические отображения поверхностей с неопределенным мероопределением // П.А.Широков. Избранные работы по геометрии. Казань: Изд-во Казан. ун-та. 1966. С. 383-388.
45. Картан Э. Геометрия групп Ли и симметрические пространства (сборник статей). М.: Изд-во иностр. лит-ры, 1949.
46. Широков П.А. Симметрические конформно-евклидовы пространства // П.А.Широков. Избранные работы по геометрии. Казань: Изд-во Казан. ун-та. 1966. С. 366-482.
47. Широков П.А. Симметрические пространства 1-го класса // П.А.Широков. Избранные работы по геометрии. Казань: Изд-во Казан. ун-та. 1966. С. 389-400.
48. Широков П.А. Проективно-евклидовы симметрические пространства // П.А.Широков. Избранные работы по геометрии. Казань: Изд-во Казан. ун-та. 1966. С. 401-407.
49. Широков П.А. Об одном типе симметрических пространств // П.А.Широков. Избранные работы по геометрии. Казань: Изд-во Казан. ун-та. 1966. С. 408-418.
50. Розенфельд Б.А., Власова Л.А., Юхтина Т.М. Применение угла наклона 2-площадки в эрмитовых пространствах к дифференциальной геометрии этих пространств // Изв. вузов. Математика. 1984. №7. С. 64-70.
51. Розенфельд Б.А., Выплавина Р.П. Углы и орты наклонов вещественных 2-площадок в эрмитовых пространствах над тензорными произведениями тел // Изв. вузов. Математика. 1984. №7. С. 70-74.
52. Широков П.А. Тензорный анализ. Ч. 1. Алгебра тензоров. Л.-М.: ОНТИ, 1934.
53. Картан Э. Пространства аффинной, проективной и конформной связности. Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1962.
54. Картан Э. Теория спиноров. Пер. и ред. П.А.Широкова. М.: ГИИЛ, 1947.
55. Широков П.А., Широков А.П. Аффинная дифференциальная геометрия. С приложением статьи А.П.Нордена "О внутренней геометрии 2-го рода на гиперповерхности аффинного пространства". М.: Физматгиз, 1959.
56. Широков П.А. Краткий очерк геометрии Лобачевского. 2-е изд. М.: Наука, 1983.
57. Дороднов А.В. Николай Григорьевич Чеботарев // Рассказы о казанских ученых. Казань: Тат. кн. изд-во. 1983. С. 28-36.
58. Бланк Я.П. Поверхности переноса в неевклидовых пространствах // Итоги науки и техники. Проблемы геометрии. Т. 8. М.: ВИНТИ. 1977. С. 183-196.
59. Чеботарев Н.Г. Геометрия Лобачевского и ее значение в современной науке // Николай Иванович Лобачевский (1793-1856). М.-Л.: Изд-во АН СССР. 1943. С. 56-82.
60. Норден А.П. Пространства аффинной связности. М.-Л.: Физматгиз, 1950 ; 2-е изд. М.: Наука, 1976.
61. Норден А.П. Пространство линейной конгруенции // Матем. сборник 1949. Т. 24 (66). С. 429-455.
62. Норден А.П. Биаффинное пространство и его отображение на себя // Уч. зап. Казан. ун-та 1952. Т. 112. №10. С. 3-11.
63. Норден А.П. Теория поверхностей биаффинного пространства // Уч. зап. Казан. ун-та 1954. Т. 114. №2. С. 3-12.
64. Норден А.П. О комплексном представлении тензоров бипланарного пространства // Уч. зап. Казан. ун-та 1954. Т. 114. №8. С. 45-53.
65. Беклемишев Д.В. Дифференциальная геометрия пространств с почти комплексной структурой // Итоги науки и техники. Геометрия. М.: ВИНТИ. 1965. С. 165-212.
66. Норден А.П., Вишневский В.В. О комплексном представлении инвариантов четырехмерного риманова пространства // Изв. вузов. Математика. 1959. №2. С. 176-182.
67. Норден А.П. О комплексном представлении тензоров пространства Лоренца // Изв. вузов. Математика. 1959. №1. С. 156-163.

68. Норден А. П. Об одном классе четырехмерных A -пространств // Изв. вузов. Математика. 1960. №4. С. 145-157.
69. Норден А. П. О структуре связности на многообразии прямых неевклидова пространства // Изв. вузов. Математика. 1972. №12. С. 84-94.
70. Норден А. П. Теория композиций // Итоги науки и техники. Проблемы геометрии. Т. 10. М.: ВИНТИ. 1978. С. 117-145.
71. Нейфельд Э. Г. Аффинные связности на нормализованном многообразии плоскостей проективного пространства // Изв. вузов. Математика. 1976. №11. С. 48-55.
72. Нейфельд Э. Г. Нормализованное семейство плоскостей и геометрия второго рода поверхности // Труды геом. семинара Казан. ун-та 1984. №16. С. 69-81.
73. Нейфельд Э. Г. Конформные пространства над алгебрами // Труды геом. семинара Казан. ун-та 1988. №17. С. 43-57.
74. Нейфельд Э. Г. Об инволюциях в комплексных пространствах // Труды геом. семинара Казан. ун-та 1989. №19. С. 71-82.
75. Нейфельд Э. Г. О внутренних геометриях нормализованного пенроузиана // Труды геом. семинара Казан. ун-та 1990. №20. С. 70-73.
76. Вишневский В. В., Розенфельд Б. А., Широков А. П. О развитии геометрии пространств над алгебрами // Изв. вузов. Математика. 1984. №7. С. 38-44.
77. Шуликовский В. И. Классическая дифференциальная геометрия в тензорном изложении. М.: Физматгиз, 1963.
78. Ведерников В. И. Обобщение метода нормализации А. П. Нордена на случай расслоенного пространства // Уч. зап. Казан. ун-та 1963. Т. 123. №1. С. 3-23.
79. Ведерников В. И., Феденко А. С. Симметрические пространства и их обобщения // Итоги науки техники. Алгебра. Топология. Геометрия. Т. 14. М.: ВИНТИ. 1976. С. 249-280.
80. Ведерников В. И., Ведерников С. В. Геометрия однородных пространств, порожденная морфизмами $\mathcal{G}$ -пространств // Итоги науки и техники. Проблемы геометрии. Т. 19. М.: ВИНТИ. 1987. С. 155-185.
81. Шурыгин В. В. Применение теории многообразий над алгебрами в трансверсальной геометрии слоев // Памяти Лобачевского посвящается. Т. 2. Казань: Изд-во Казан. ун-та. 1992. С. 119-140.
82. Норден А. П. Элементарное введение в геометрию Лобачевского. М.: Гостехиздат, 1953.
83. Норден А. П. Гаусс и Лобачевский // Историко-матем. исследования. 1956. №9. С. 145-168.
84. Норден А. П. Геометрические работы Гаусса // К. Ф. Гаусс. М.: Гостехиздат. 1956. С. 113-144.
85. Норден А. П. Геометрические идеи Лобачевского. Вводная статья // Н. И. Лобачевский. Три сочинения по геометрии. М.: Гостехиздат. 1956. С. 10-29.
86. Норден А. П. Вопросы обоснования геометрии в работах Н. И. Лобачевского // Историко-матем. исследования. 1958. №11. С. 97-132.
87. Норден А. П. Вводная статья к фрагменту "Начальные основания логики" // Лобачевский Н. И. Научно-педагогическое наследие. Руководство Казанским университетом. Фрагменты. Письма. М.: Наука. 1976. С. 576-580.
88. Сто двадцать пять лет неевклидовой геометрии Лобачевского (1826-1951). Празднование Казанским гос. университетом им. В. И. Ульянова-Ленина и Казанским физико-математическим обществом 125-летия открытия Н. И. Лобачевским неевклидовой геометрии. М.-Л.: ГИТТЛ, 1952.
89. Об основаниях геометрии. Сборник классических работ. М.: Гостехиздат, 1956.
90. 150 лет геометрии Лобачевского. Пленарные доклады. Всесоюз. научная конф. по неевклидовой геометрии. 30 июня-2 июля 1976. М.: ВИНТИ, 1977.

91. Близникас В.И., Норден А.П., Шалуков Б.Н., Широков А.П. Научное наследие Бориса Лукича Лаптева (23.04.1905-15.01.1989) // Итоги науки и техники. Проблемы геометрии. Т. 21. М.: ВИНТИ. 1989. С. 27-42.
92. Норден А.П., Шалуков Б.Н. Очерк научных исследований Бориса Лукича Лаптева // Труды геом. семинара Казан. ун-та. 1990. №21. С. 5-17.
93. Лаптев Б.Л. Производная Ли для объектов, являющихся функцией точки и направления // Изв. физ.-матем. об-ва. Сер. 3. Казань. 1938. Т. 10. С. 3-38.
94. Лаптев Б.Л. Производная Ли в пространстве опорных элементов // Тр. семин. по векторн. и тензорн. анализу. Т. 10. М.: Изд-во Московск. ун-та. 1956. С. 227-248.
95. Лаптев Б.Л. Ковариантный дифференциал и тесрия дифференциальных инвариантов в пространстве тензорных опорных элементов // Уч. зап. Казан. ун-та 1958. Т. 114. №4. С. 75-147.
96. Шалуков Б.Н. Тензорные расслоения // Памяти Лобачевского посвящается. Т. 1. Казань: Изд-во Казан. ун-та. 1992. С. 104-125.
97. Лаптев Б.Л. Н.И.Лобачевский // Н.И.Лобачевский. М.-Л. 1943. С. 5-18.
98. Лаптев Б.Л. Юбилей великого геометра. (Празднование 150-летия со дня рождения Н.И.Лобачевского) // Во имя отчизны. Казанский университет в годы Великой Отечественной войны. Казань: Изд-во Казан. ун-та. 1975. С. 64-72.
99. Лаптев Б.Л. Комментарии к вступлению и первым шести главам "Новых начал..." Лобачевского // Избранные труды по геометрии. М.: Гостехиздат. 1956. С. 502-524.
100. Лаптев Б.Л. Теория параллельных прямых в ранних работах Н.И.Лобачевского // Сто двадцать пять лет неевклидовой геометрии Лобачевского. М.-Л.: ГИТТЛ. 1952. С. 99-116.
101. Лаптев Б.Л. Баргельс и формирование геометрических идей Лобачевского // Памяти Лобачевского посвящается. Т. 1. Казань: Изд-во Казан. ун-та. 1992. С. 35-40.
102. Лаптев Б.Л. О библиотечных записях книг и журналов, выданных Н.И.Лобачевскому // УМН. 1959. Т. 14. №5. С. 153-155.
103. Лаптев Б.Л. Что читал Н.И.Лобачевский? (Записи книг и журналов, выданных Н.И.Лобачевскому из библиотеки Казанского университета). Совместно с А.Г.Каримуллин. Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1979.
104. Лаптев Б.Л. Лобачевский о математическом методе исследования природы // Философские вопросы естествознания. Казань. 1969. С. 3-10.
105. Лаптев Б.Л. Жизнь и деятельность Н.И.Лобачевского // УМН. 1951. Т. 6. (43). С. 10-17.
106. Лаптев Б.Л. Николай Иванович Лобачевский // Рассказы о казанских ученых. Казань: Тат. кн. изд-во. 1983. С. 5-19.
107. Лаптев Б.Л. Николай Иванович Лобачевский. Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1976.
108. Петров А.З. О геодезическом отображении римановых пространств неопределенной метрики // Уч. зап. Казан. ун-та. 1949. Т. 109. Кн. 4.С. 7-36.
109. Петров А.З. О полях тяготения // Сто двадцать пять лет неевклидовой геометрии Лобачевского. М.-Л.: ГИТТЛ. 1952. С. 179-186.
110. Петров А.З. Пространства Эйнштейна. М.: Физматгиз, 1961.
111. Петров А.З. Новые методы в общей теории относительности. М.: Наука, 1966.
112. Аминова А.В. Алексей Зиновьевич Петров // Рассказы о казанских ученых. Казань: Тат. кн. изд-во. 1983. С. 53-64.
113. Аминова А.В., Билялов Р.Ф., Кайгородов В.Р., Широков А.П. Алексей Зиновьевич Петров // Гравитация и теория относительности. Вып. 9.1973. С. 127-135.
114. Петров П.И. Дифференциальные инварианты пространств Римана // ДАН СССР. 1947. Т. 58. С. 1273-1274.

115. Петров П. И. Инварианты и классификация дифференциальных квадратичных форм от четырех переменных // Известия АН СССР. Сер. матем. 1959. Т. 23. №3. С. 387-420.
116. Лаптев Б. Л., Липатов Н. С., Ловков А. А., Султанов А. Я. О развитии теории движений в обобщенных пространствах (в работах И. П. Егорова и его школы) // Движения в обобщенных пространствах. Рязань. 1985. С. 13-25.
117. Копп В. Г. Линейные комплексы и их пучки в трехмерном псевдоевклидовом пространстве // Уч. зап. Елабужского гос. пединститута. 1958. Т. 3. С. 35-71.
118. Копп В. Г. Классификация бесконечно малых движений и их пучков в четырехмерном пространстве Лоренца // Уч. зап. Казан. ун-та 1963. Т. 123. Кн. 1. С. 59-77.

Казанский государственный ун-т

Поступила в редакцию

13.08.1992

АВТОКОМПОЗИЦИЯ ГИПЕРКВАДРИКИ И НОРМАЛИЗАЦИЯ НЕЙФЕЛЬДА МНОГООБРАЗИЯ ПРЯМЫХ

§ 1. Связность Э. Г. Нейфельда

В пространстве P_{n+1} с абсолют Q_n рассматривается $2n$ -мерное множество прямых. Пусть прямая определяется точками X_a , $a = 1, 2$, а ее поляр — X_α , $\alpha = 1, 2, \dots, n - 1$. Условие полярно сопряженности

$$X_a X_\alpha = 0. \quad (1.1)$$

Если выбрана некоторая система криволинейных координат x^i , $i = 1, 2, \dots, 2n$, то

$$\partial_i X_a = \Gamma_{ia}^b X_b + b_{ia}^c X_c, \quad \partial_i X_\alpha = \Gamma_{i\alpha}^\beta X_\beta + b_{i\alpha}^c X_c.$$

Вводя объекты Γ_{ia}^b и $\Gamma_{i\alpha}^\beta$ в качестве коэффициентов связности, имеем

$$\nabla_i X_a = b_{ia}^c X_c, \quad \nabla_i X_\alpha = b_{i\alpha}^c X_c. \quad (1.2)$$

Э. Г. Нейфельд определяет связность на базе с объектом Γ_{ij}^k условиями

$$\nabla_i b_{j\alpha}^a = \partial_i b_{j\alpha}^a - \Gamma_{ia}^\beta b_{j\beta}^a + \Gamma_{i\beta}^a b_{j\alpha}^b - \Gamma_{ij}^k b_{k\alpha}^a = 0. \quad (1.3)$$

В случае полярного соответствия одновременно имеет место условие

$$\nabla_i b_{j\alpha}^a = 0. \quad (1.3')$$

Вводя обозначения

$$X_a X_b = G_{ab}, \quad X_\alpha X_\beta = G_{\alpha\beta}, \quad (1.4)$$

будем использовать эти тензоры для перебрасывания индексов.

Дифференцируя соотношения (1.4), а также уравнения (1.1), получим $\nabla_i G_{ab} = 0$, $\nabla_i G_{\alpha\beta} = 0$, $b_{iaa} + b_{iaa} = 0$. Отсюда следует симметрия тензора [1]:

$g_{ij} = b_{ia}^a b_{ja}^a$. Вследствие условий (1.3) и (1.3'), имеем $\nabla_k g_{ij} = 0$. Таким образом, связность, введенная Э. Г. Нейфельдом, риманова. Более подробная характеристика этой связности будет дана в данной работе.

§ 2. Основные уравнения теории автокомпозиции

Всякая прямая пересекает абсолют Q_n в двух точках Y и Z . Введем *адаптированную* систему координат: x^i ($i = 1, 2, \dots, n$), $\bar{x}^i$ ($\bar{i} = 1, 2, \dots, n$) так, чтобы $Y = Y(x^i)$, $Z = Z(\bar{x}^i)$.

Рассмотрим представление

$$X_a = s_a Y + t_a Z. \quad (2.1)$$

Вводя обозначение $YZ = e^\theta$, получим

$$G_{ab} = (s_a t_b + s_b t_a) e^\theta. \quad (2.2)$$

Отсюда следует, что $G_{ab} G^{ab} = 2s_a t^a e^\theta$, или

$$s_a t^a = e^{-\theta}. \quad (2.3)$$

Точки Y и Z определяют точку пространства автокомпозиции квадрики Q_n [2], [3], основные уравнения которой имеют вид

$$Y^2 = 0, \quad (A) \quad Z^2 = 0, \quad (\bar{A})$$

$$Y_i = V_i + \theta_i Y, \quad (B) \quad Z_{\bar{i}} = W_{\bar{i}} + \theta_{\bar{i}} Z, \quad (\bar{B})$$

$$\begin{aligned}
\check{\nabla}_j V_i &= \theta_j V_i + b_{ij} Z, & (C) & & \check{\nabla}_{\bar{j}} W_{\bar{i}} &= \theta_{\bar{j}} W_{\bar{i}} + b_{\bar{i}\bar{j}} Y, & (\bar{C}) \\
\check{\nabla}_{\bar{j}} V_i &= -\theta_{i\bar{j}} Y, & (D) & & \check{\nabla}_j W_{\bar{i}} &= -\theta_{i\bar{j}} Z, & (\bar{D}) \\
\check{\nabla}_j Z &= 0, & (E) & & \check{\nabla}_{\bar{j}} Y &= 0, & (\bar{E}) \\
\theta_{i\bar{j}} &= e^{-\theta} (V_i W_{\bar{j}}). & (F) & & & &
\end{aligned} \tag{2.4}$$

В этих уравнениях присутствуют два тензора — метрический тензор автокомпозиции, матрица которого имеет вид

$$\left(\begin{array}{c|c} 0 & \theta_{i\bar{j}} \\ \hline \theta_{i\bar{j}} & 0 \end{array} \right), \tag{2.5}$$

и второй тензор с матрицей

$$\left(\begin{array}{c|c} b_{ij} & 0 \\ \hline 0 & b_{\bar{i}\bar{j}} \end{array} \right).$$

Первый из этих тензоров ковариантно-постоянен, так что

$$\check{\nabla}_k \theta_{i\bar{j}} = 0, \quad \check{\nabla}_{\bar{k}} \theta_{i\bar{j}} = 0$$

по отношению к связности пространства автокомпозиции.

§ 3. Совпадение связностей Нейфельда и автокомпозиции

Дифференцируя уравнение (2.1) в связности Нейфельда и учитывая (1.2) и (2.4), получим

$$b_{ia}^{\alpha} X_{\alpha} = \nabla_i s_a Y + \nabla_i t_a Z + s_a (V_i + \theta Y).$$

Отсюда следует

$$b_{ia}^{\alpha} X_{\alpha} = s_a V_i, \tag{3.1}$$

$$\nabla_i s_a + \theta_i s_a = 0, \quad \nabla_i t_a = 0.$$

Дифференцируя (3.1) по j с учетом (1.3) и (2.4), получим

$$b_{ia}^{\alpha} b_{ja}^{\beta} X_{\beta} = \nabla_j s_a V_i + s_a \nabla_j V_i = \nabla_j s_a V_i + s_a \check{\nabla}_j V_i + s_a T_{ji}^k V_k,$$

где T_{ji}^k — координаты тензора аффинной деформации перехода от связности Нейфельда к связности автокомпозиции.

Подставляя выражения $\check{\nabla}_j V_i$ и X_c из уравнений (2.4) и (2.1), получим

$$T_{ji}^k = 0, \quad b_{ia}^{\alpha} b_{ja}^{\beta} s_c = 0, \quad b_{ia}^{\alpha} b_{ja}^{\beta} t_c = s_a b_{i\bar{j}}. \tag{3.2}$$

Дифференцируя снова уравнения (3.1) по индексу $\bar{j}$, получим

$$T_{\bar{j}i}^k = 0, \tag{3.3}$$

$$b_{ia}^{\alpha} b_{\bar{j}a}^{\beta} t_c = 0, \tag{3.4}$$

$$b_{ia}^{\alpha} b_{\bar{j}a}^{\beta} s_c = -s_a \theta_{i\bar{j}}. \tag{3.5}$$

Вполне аналогично мы можем получить систему уравнений, подобных уравнениям (3.2)—(3.5), заменяя индексы j, i, k на $\bar{j}, \bar{i}, \bar{k}$.

Таким образом, в частности, отсюда вытекает, что *связность Нейфельда совпадает со связностью автокомпозиции*.

Однако известно, что последняя является связностью Келера гиперболического типа, следовательно, мы приходим к результату, который до сих пор не был отмечен:

Связность Нейфельда для прямых и их поляр является келеровой связностью.

Из уравнений (3.4)—(3.5), свертывая соответственно на s^a и на t^a , получим

$$s^a b_{ia}^a b_{\bar{j}a}^c t_c + t^a b_{ia}^a b_{\bar{j}a}^c s_c = -t^a s_a \theta_{i\bar{j}}.$$

Перебрасывая индексы, имеем

$$s_a b_i^{aa} b_{\bar{j}a}^c t_c + t_a b_i^{aa} b_{\bar{j}a}^c s_c = -t^a s_a \theta_{i\bar{j}},$$

или

$$b_i^{aa} b_{\bar{j}a}^c (s_a t_c + t_a s_c) = -t^a s_a \theta_{i\bar{j}}.$$

Учитывая (2.2)—(2.3), имеем $b_i^{aa} b_{\bar{j}a}^c G_{ac} = -\theta_{i\bar{j}}$, или $g_{i\bar{j}} = -\theta_{i\bar{j}}$.

С другой стороны, многообразия $dx^i = 0$ и $dx^{\bar{i}} = 0$ каждое является изотропным для метрики Нейфельда, так что $g_{ij} = 0$ и $g_{\bar{i}\bar{j}} = 0$. Следовательно, матрица тензора Нейфельда имеет вид

$$\left(\begin{array}{c|c} 0 & g_{i\bar{j}} \\ \hline g_{\bar{i}j} & 0 \end{array} \right)$$

и только знаком отличается от матрицы (2.6) метрики пространства автокомпозиции.

ЛИТЕРАТУРА

1. Нейфельд Э. Г. Аффинные связности на нормализованном многообразии плоскостей проективного пространства. Изв. вузов, Матем., 1976, № 11, с. 48—55.
2. Норден А. П. Пространства декартовой композиции. Изв. вузов, Матем., 1963, № 4, с. 117—128.
3. Колян В. В. К теории кривых пространства композиции. Изв. вузов, Матем., 1968, № 3, с. 43—55.

г. Ереван
г. Казань

Поступила
27.06.1986

Б.А. РОЗЕНФЕЛЬД

ТЕОРЕТИКО-ГРУППОВОЙ СМЫСЛ ПРОСТРАНСТВ НЕЙФЕЛЬДА

В работе [1] Э.Г. Нейфельдом были рассмотрены многообразия плоских образующих максимальной размерности вещественной квадрики проективного пространства P^{2n-1} и нуль-плоскостей максимальной размерности линейного комплекса того же пространства, а в [2] — многообразия плоских образующих максимальной размерности эрмитовой квадрики (“эрмиквадрики”) комплексного проективного пространства CP^{2n-1} (в [2] это многообразие называется “пенроузианом” на том основании, что Р. Пенроуз в своей “Твисторной программе” [3] рассматривал частный случай этого многообразия для $n = 2$; заметим, это многообразие можно рассматривать так же, как многообразие нуль-плоскостей максимальной размерности эрмитова линейного комплекса того же пространства). Заметив большое сходство этих многообразий с проективным пространством P^n и с многообразиями m -мерных плоскостей этого пространства (“грассмано-вым многообразием” или “грассманианом”), Э.Г. Нейфельд обобщает на эти многообразия метод нормализации А.П. Нордена и строит дифференциальную геометрию этих многообразий. Так как согласно “Твисторной программе” Р. Пенроуза прямолинейные образующие эрмитовой квадрики пространства CP^3 изображают точки псевдоконформного пространства C_1^4 и точки абсолюта пространства S_2^5 (а точки эрмитовой квадрики изображают прямолинейные образующие этого абсолюта), аналогичный метод применим и к псевдоконформным (а также к конформным) пространствам.

Суть подмеченной Э.Г. Нейфельдом аналогии состоит в том, что рассматриваемые им многообразия являются *параболическими пространствами* [4], и такими, что касательные алгебры Ли $\mathfrak{G}$ фундаментальных групп G этих пространств допускают разложение в прямую сумму $\mathfrak{G} = \mathfrak{G}_{-1} \oplus \mathfrak{G}_0 \oplus \mathfrak{G}_1$ (в общем случае касательные алгебры Ли $\mathfrak{G}$ фундаментальных групп G параболических пространств допускают разложение в прямую сумму $\mathfrak{G} = \mathfrak{G}_{-k} \oplus \dots \oplus \mathfrak{G}_{-1} \oplus \mathfrak{G}_0 \oplus \mathfrak{G}_1 \oplus \dots \oplus \mathfrak{G}_k$, причем прямая сумма $\mathfrak{G}_0 \oplus \mathfrak{G}_1 \oplus \dots \oplus \mathfrak{G}_k$ является касательной алгеброй Ли параболической подгруппы H группы G , а прямую сумму $\mathfrak{G}_{-k} \oplus \dots \oplus \mathfrak{G}_{-1}$ можно рассматривать как касательное многообразие параболического пространства G/H см. [5]). Заметим, что в случае $k = 1$ касательное подпространство $\mathfrak{G}_{-1}$ обладает структурой йордановой алгебры, в случае многообразий, рассматриваемых в [1], это йордановы алгебры кососимметричных и симметричных квадратных вещественных матриц n -го порядка, а в случае многообразий, рассматриваемых в [2], это йордановы алгебры косоэрмитовых и эрмитово-симметричных квадратных комплексных матриц n -го порядка. Аналогичная теория может быть построена для многообразия плоских образующих максимальной размерности эрмитовой квадрики кватернионного проективного пространства HP^{2n-1} и для многообразия нуль-плоскостей максимальной размерности эрмитова линейного комплекса того же пространства. В случае этих многообразий йордановы алгебры состоят из соответственно косоэрмитовых и эрмитово-симметричных квадратных кватернионных матриц n -го порядка.

Дифференциальная геометрия параболических пространств указанного типа рассматривалась М.А. Акивисом и В.В. Гольдбергом в [6] (проективное пространство) и [7] (конформное и

псевдоконформные пространства и грассманы многообразия). Заметим, что для конформного и псевдоконформных пространств соответственные йордановы алгебры были найдены И.И. Колокольцевой [8].

Литература

1. Нейфельд Э.Г. *О внутренних геометриях многообразия нуль-плоскостей максимальной размерности поляритетов второго порядка* // Тр. Геометрич. семина. – Казань. – 1982. – Вып. 14. – С. 50–54.
2. Нейфельд Э.Г. *О внутренних геометриях нормализованного пенроузиана* // Тр. Геометрич. семина. – Казань. – 1990. – Вып. 22. – С. 70–73.
3. Пенроуз Р. *Твисторная программа* // Твисторы и калибровочные поля. – М.: Мир, 1983. – С. 13–24.
4. Розенфельд Б.А., Замаховский М.П., Тимошенко Т.А. *Параболические пространства* // Итоги науки и техн. ВИНТИ. Алгебра. Топология. Геометрия. – 1988. – Вып. 26. – С. 125–160.
5. Розенфельд Б.А., Степашко Т.А. *Топологическое строение многообразий образов простоты* // Тр. Геометрич. семина. – Казань. – 1982. – Вып. 14. – С. 62–69.
6. Akivis M.A., Goldberg V.V. *Projective differential geometry of submanifolds*. – Amsterdam: North Holland, 1993. – 362 с.
7. Akivis M.A., Goldberg V.V. *Conformal differential geometry and its generalizations*. – New York–Toronto: Wiley Interscience Publ., 1996.
8. Розенфельд Б.А., Выплавина Р.П., Колокольцева И.И., Малютин В.В. *Дробно-линейные преобразования йордановых алгебр* // Изв. вузов. Математика. – 1974. – № 5. – С. 169–184.

Пенсильванский университет
(США)

Поступила
14.01.1997