МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ
БАШКИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
НИЛ "ГАММЕТТ"УФИМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО
АВИАЦИОННОГО ТЕХНИЧЕСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

В.Э. Адлер, И.Т. Хабибуллин, И.Ю. Черданцев

ГРУППОВОЙ АНАЛИЗ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Учебное пособие

Уфа 2013

УДК 517.9

Издание осуществлено при финансовой поддержке РФФИ (проект 12-01-06819-моб-г), при поддержке гранта правительства РФ по договору №11.G34.31.0042 и за счет внебюджетных средств БашГУ.

Рецензенты: Отдел дифференциальных уравнений, Институт математики УНЦ РАН;

д-р физ.-мат. наук Р.Р. Гадыльшин, Башкирский государственный педагогический институт

Адлер В.Э., Хабибуллин И.Т., Черданцев И.Ю. Приложения групп Ли в математической физике : Учебное пособие / Баш. гос. ун-т. — Уфа, 2013. — 72 с.

Излагаются основы классического группового анализа дифференциальных уравнений. Даются понятия групп точечных и контактных преобразований, допускаемых уравнением, и приводятся алгоритмы вычисления соответствующих алгебр симметрий, их дифференциальных инвариантов и понижения порядка уравнения. Рассматриваются также понятие высших симметрий и некоторые их приложения к граничным задачам. Изложение ведется на понятном уровне, доступном для студентов старших курсов, и сопровождается большим числом примеров и упражнений. В некоторых местах желательно знакомство с теорией непрерывных групп и алгебр Ли.

Настоящее издание составлено на основе цикла лекций, прочитанных авторами на международной школе-конференции для студентов, аспирантов и молодых ученых "Фундаментальная математика и ее приложения в естествознании". Том 7.

Содержание

Введение

При исследовании дифференциальных уравнений значительная часть работы заключается в поиске упрощающих преобразований. Групповой анализ предоставляет некоторые алгоритмы, облегчающие эту задачу. Первый шаг алгоритма заключается в вычислении так называемой *группы симметрий* данного уравнения. Грубо говоря, симметрия — это замена переменных, не меняющая вида уравнения. Чем больше уравнение имеет симметрий, тем легче оно решается. Пусть, например, дано обыкновенное дифференциальное уравнение порядка k. Если размерность группы симметрий равна r, а сама группа *разрешима*, то порядок можно понизить до $k - r$. Иногда размерность группы может равняться порядку уравнения или даже превосходить его; в этом случае можно найти явное решение уравнения.

Точно так же при изучении уравнения в частных производных знание группы симметрий позволяет редуцировать это уравнение к уравнению с меньшим числом независимых переменных (может быть, даже к обыкновенному); правда, при этом мы получаем не все решения исходного уравнения, а только *решения, инвариантные относительно группы.* Заметим, что в физических приложениях очень часто общее решение и не требуется, а ищется решение некоторой краевой задачи. В том случае, когда краевые условия инвариантны относительно какой-то подгруппы симметрий, естественно искать и решение в инвариантном относительно этой подгруппы виде.

Предлагаемое пособие предназначено для первоначального ознакомления с предметом. Групповой анализ — слишком разветвленная дисциплина, и поэтому огромное число вопросов и приложений остались совершенно неосвещенными, например, теория размерностей (П-теорема), вариационные симметрии и теорема Нётер, групповая классификация уравнений, разделение перемен-

ных, проблема эквивалентности и так далее. Доказательства некоторых утверждений отсутствуют или заменены псевдодоказательствами. В основном это касается утверждений, основанных на теории групп и алгебр Ли, выходящих за рамки излагаемого курса.

Разделы 1 и 2 посвящены классическому групповому анализу. Сначала мы подробно изучим случай обыкновенных уравнений, а потом перенесем развитую технику на случай уравнений в частных производных. Такое разделение не обязательно и делается только для облегчения восприятия. Также для простоты изложение ведется исключительно для скалярного случая, то есть системы уравнений не рассматриваются. В разделе 3 дается понятие об обобщенных, или высших, симметриях.

Групповой подход к дифференциальным уравнениям был разработан в прошлом веке великим норвежским математиком Софусом Ли (1842 – 1899). О его жизни и творчестве можно прочитать в отличной книге [1]. Группы и алгебры Ли, введенные для целей группового анализа, впоследствии под влиянием работ самого Ли и его последователей нашли столько приложений в математике, что их первоначальное предназначение слегка подзабылось. Возрождение интереса к групповому анализу началось в середине нашего века в связи с возросшими запросами со стороны физики (см., напр., [2]). Современное изложение теории и дальнейшие приложения можно найти в [3] – [6], см. также [7] – [11]. Подробное изложение теории групп и алгебр Ли см., напр., в [12] – [15]. О высших симметриях и солитонных уравнениях см., напр., в [5], [16] – [20].

1. Обыкновенные дифференциальные уравнения

Выше говорилось, что симметрия — это замена переменных, не меняющая вида уравнения. Ясно, что прежде чем двигаться даль-

ше, следует уточнить, что понимается под термином “замена переменных” вообще, и научиться эти замены осуществлять. В нашем курсе мы будем использовать только так называемые *точечные и контактные преобразования.* Существуют и другие типы замен, например дифференциальные подстановки и преобразования Бэклунда, но они применимы не к любому уравнению и их слишком мало, чтобы они представляли интерес для группового анализа (см. тем не менее [7]).

1.1. Точечные преобразования

Рассмотрим обыкновенное дифференциальное уравнение k-го порядка, записанное в переменных $\tilde{x}, \tilde{u}$:

$$\widetilde{F}(\tilde{x}, \tilde{u}, \tilde{u}_1, \ldots, \tilde{u}_k) = 0, \quad \widetilde{F}_{\tilde{u}_k} \neq 0. \tag{1.1}$$

Здесь использованы обозначения: $\tilde{u}_j = d^j\tilde{u}/d\tilde{x}^j$ и $\widetilde{F}_{\tilde{u}_k} = \partial\widetilde{F}/\partial\tilde{u}_k$.

Определение 1. *Точечным преобразованием называется произвольная невырожденная замена*

$$\tilde{x} = P(x, u), \quad \tilde{u} = Q(x, u), \quad \det\frac{\partial(P, Q)}{\partial(x, u)} \neq 0. \tag{1.2}$$

Чтобы переписать уравнение (1.1) в новых переменных x, u, нам нужно сначала найти выражения для $\tilde{u}_1, \ldots, \tilde{u}_k$, или, как говорят, построить для преобразования (1.2) *продолжение k-го порядка.* Считая u функцией от x, а $\tilde{u}$ — функцией от $\tilde{x}$, запишем тождество

$$\tilde{u}(P(x, u(x))) = Q(x, u(x)).$$

Дифференцируя его по x, получаем

$$(P_x + P_u u_1)\tilde{u}_1 = Q_x + Q_u u_1,$$

откуда находим выражение для $\tilde{u}_1$:

$$\tilde{u}_1 = Q^1(x, u, u_1) = \frac{Q_x + Q_u u_1}{P_x + P_u u_1}. \tag{1.3}$$

Заметим, что P_x и P_u не обращаются одновременно в ноль в силу невырожденности замены. Считая $\widetilde{u}_1$ функцией от $\widetilde{x} = P(x, u)$ и дифференцируя по x формулу (1.3), получаем выражение для $\widetilde{u}_2$:

$$\widetilde{u}_2 = Q^2(x, u, u_1, u_2) = \frac{Q^1_x + Q^1_u u_1 + Q^1_{u_1} u_2}{P_x + P_u u_1}.$$

Формулу для производной любого порядка удобно записать при помощи *оператора полного дифференцирования*

$$D_x = \frac{d}{dx} = \frac{\partial}{\partial x} + u_1 \frac{\partial}{\partial u} + u_2 \frac{\partial}{\partial u_1} + \ldots + u_{j+1} \frac{\partial}{\partial u_j} + \ldots. \tag{1.4}$$

Теорема 1. *Продолжение k-го порядка преобразований (1.2) задается формулами*

$$\widetilde{u}_j = Q^j(x, u, \ldots, u_j) = \left(\frac{1}{D_x(P)} D_x \right)^j (Q), \quad j = 1, \ldots, k. \tag{1.5}$$

Иными словами, при точечном преобразовании оператор полного дифференцирования преобразуется по правилу

$$D_{\widetilde{x}} = \frac{1}{D_x(P)} D_x. \tag{1.6}$$

Пример 1. Самое простое точечное преобразование — это *сдвиг*

$$\widetilde{x} = x + a, \quad \widetilde{u} = u + b.$$

Из формулы (1.5) немедленно получаем $\widetilde{u}_j = u_j,\ j \geq 1$.

Пример 2. Другой простой пример — *растяжение*

$$\widetilde{x} = ax, \quad \widetilde{u} = bu.$$

Из формулы (1.5) имеем $\widetilde{u}_j = a^{-j} b u_j,\ j \geq 1$.

Для более сложных преобразований явно выписать продолжение сколь угодно высокого порядка удается не всегда, но этого и не требуется, так как для осуществления замены в уравнении (1.1) нам нужно вычислить лишь первые k производных $\widetilde{u}_1, \ldots, \widetilde{u}_k$.

Пример 3. Рассмотрим уравнение Бесселя

$$\tilde{u}_2 + \frac{\tilde{u}_1}{\tilde{x}} + (1 - \frac{\nu^2}{\tilde{x}^2})\tilde{u} = 0 \tag{1.7}$$

и проделаем в нем замену

$$\tilde{x} = ax^b, \quad \tilde{u} = x^c u.$$

Применяя формулу (1.5), последовательно вычисляем

$$\tilde{u}_1 = \frac{1}{abx^{b-1}} D_x(x^c u) = \frac{x^{c-b}}{ab}(cu + xu_1),$$
$$\tilde{u}_2 = \frac{x^{c-2b}}{a^2b^2}(c(c-b)u + (2c-b+1)xu_1 + x^2u_2).$$

Подставляя найденные значения в уравнение (1.7) получаем после сокращений уравнение Ломмеля

$$u_2 + (2c+1)\frac{u_1}{x} + \left((abx^{b-1})^2 + \frac{c^2 - \nu^2 b^2}{x^2}\right) u = 0.$$

Задача 1. Проделать *преобразование годографа* $\tilde{x} = u$, $\tilde{u} = x$ в уравнении $\tilde{u}_3 = \frac{3}{2}\tilde{u}_2^2/\tilde{u}_1 + f(\tilde{x})\tilde{u}_1$.

1.2. Контактные преобразования

Определение 2. *Контактным преобразованием называется замена вида*

$$\tilde{x} = P(x, u, u_1), \quad \tilde{u} = Q(x, u, u_1), \quad \tilde{u}_1 = Q^1(x, u, u_1), \tag{1.8}$$

где функции P, Q, Q^1 *удовлетворяют соотношениям*

$$Q_{u_1} = Q^1 P_{u_1}, \quad Q_x + Q_u u_1 = Q^1(P_x + P_u u_1) \tag{1.9}$$

и условию невырожденности $\det \frac{\partial(P,Q,Q^1)}{\partial(x,u,u_1)} \neq 0$.

Ограничение (1.9) возникает из требования сохранения формулы $u_1 = \frac{du}{dx}$ в новых переменных. Действительно, из равенства $\tilde{u}_1 = \frac{d\tilde{u}}{d\tilde{x}}$ имеем (как и в случае точечных преобразований) $Q^1 = \frac{D_x(Q)}{D_x(P)}$ и, так как функции P, Q, Q^1 не зависят от u_2, то, приравнивая 0 коэффициент при u_2 в равенстве $Q^1(P_x + P_u u_1 + P_{u_1} u_2) = Q_x + Q_u u_1 + Q_{u_1} u_2$, получаем (1.9).

Заметим, что если $Q_{u_1} = 0$, то $P_{u_1} = 0$, и наоборот, причем вторая формула (1.9) совпадает с формулой (1.3). Таким образом, в этом случае контактное преобразование есть просто первое продолжение точечного преобразования (1.2). В случае собственно контактного преобразования, исключая Q^1 из (1.9), находим, что P и Q являются функционально независимыми решениями уравнения

$$R_x + R_u u_1 + \varphi R_{u_1} = 0,$$

где $\varphi(x, u, u_1)$ — произвольная функция.

Продолжение контактного преобразования на старшие производные дается в точности той же формулой (1.5), что и в случае точечного преобразования.

Пример 4. Рассмотрим преобразование

$$\tilde{x} = x + a u_1, \quad \tilde{u} = u + \frac{a}{2} u_1^2, \quad \tilde{u}_1 = u_1. \tag{1.10}$$

Невырожденность очевидна, условие контактности легко проверяется:

$$Q_{u_1} = a u_1 = Q^1 P_{u_1}, \quad Q_x + Q_u u_1 = u_1 = Q^1 (P_x + P_u u_1).$$

Применяя оператор $D_{\tilde{x}} = \frac{1}{1+au_2} D_x$, последовательно находим продолжения преобразования

$$\tilde{u}_2 = \frac{u_2}{1 + a u_2}, \quad \tilde{u}_3 = \frac{u_3}{(1 + a u_2)^3}, \quad \tilde{u}_4 = \frac{u_4 + a(u_2 u_4 - 3u_3^2)}{(1 + a u_2)^5}, \quad \ldots$$

Задача 2. Классическим примером контактного преобразования является преобразование Лежандра

$$\tilde{x} = u_1, \quad \tilde{u} = xu_1 - u, \quad \tilde{u}_1 = x. \tag{1.11}$$

Проверьте, что это действительно контактное преобразование, и найдите для него несколько первых продолжений.

1.3. Однопараметрические группы преобразований

Группой Ли называется гладкое многообразие, на котором введена структура группы, причем групповое умножение и взятие обратного элемента должны быть гладкими отображениями. Очень часто группы Ли реализуются как группы преобразований. Например, все вращения 3-мерного пространства образуют группу Ли. Для целей группового анализа достаточно рассматривать только преобразования, близкие к тождественному, что приводит к понятию локальных групп Ли, несколько обобщающих обычные группы Ли. Наиболее важным является понятие локальной однопараметрической группы преобразований.

Пусть G есть семейство гладких отображений $T_a : M \to M$, где M некоторое n-мерное многообразие, или, для простоты, область в $\mathbb{R}^n$, а параметр a принадлежит некоторому интервалу $\Delta = (-A, A) \in \mathbb{R}$.

Определение 3. *G называется локальной однопараметрической группой Ли, если*

1. *Для всех $a \in \Delta$ отображение T_a невырожденно;*
2. *$T_0 = \mathrm{id}$ и наоборот: если $T_a = \mathrm{id}$ для некоторого $a \in \Delta$, то $a = 0$;*
3. *$T_a T_b = T_{a+b}$ для всех a и b таких, что все три преобразования определены.*

Пример 5. Пусть M — окружность, T_a — поворот на угол a, $-\pi < a < \pi$. Множество всех таких поворотов образует локальную однопараметрическую группу Ли.

Пример 6. Преобразования из примера 4 образуют (глобальную) однопараметрическую группу Ли отображений из $\mathbb{R}^3$ в $\mathbb{R}^3$. Преобразование Лежандра (1.11) дает пример дискретной группы (его квадрат — тождественное преобразование), но однопараметрической группы не образует, поскольку не содержит параметра. Сдвиги и растяжения из примеров 1, 2 также образуют группы Ли преобразований из $\mathbb{R}^2$ в $\mathbb{R}^2$, но уже размерности 2. Заметим, что если связать как-нибудь параметры a и b в этих примерах (например, положив $a = b$), то пример 1 даст нам однопараметрическую группу Ли, а пример 2 — нет. В последнем случае нужно еще дополнительно сделать замену параметра $a \to e^a$. Таким образом, однопараметрические группы сдвигов и растяжений имеют соответственно вид

$$\tilde{x} = x + a\alpha; \quad \tilde{u} = u + a\beta;$$
$$\tilde{x} = e^{a\alpha}x; \quad \tilde{u} = e^{a\beta}u.$$

На практике оказывается удобнее работать не с самой группой Ли, а с ее *алгеброй Ли*. Это объясняется тем, что переход от группы к алгебре заключается в линеаризации групповых операций, что существенно облегчает вычисления. В случае однопараметрических групп мы приходим к следующему определению.

Определение 4. *Пусть G локальная однопараметрическая группа Ли, действующая на многообразии M, и в некоторых локальных координатах преобразования T_a из G задаются формулами*

$$\tilde{\xi}^j = F^j(a, \xi^1, \ldots, \xi^n), \quad j = 1, \ldots, n. \tag{1.12}$$

Инфинитезимальным оператором группы G называется вектор-

ное поле на M

$$X = f^1\partial_{\xi^1} + \ldots + f^n\partial_{\xi^n}, \quad f^j(\xi^1, \ldots, \xi^n) = \left(\frac{\partial F^j}{\partial a}\right)\Big|_{a=0}. \tag{1.13}$$

Вместо термина “инфинитезимальный оператор группы” используется также термин “генератор группы”.

Теорема 2. (Ли) *Группа G однозначно восстанавливается по своему инфинитезимальному оператору как решение задачи Коши*

$$\begin{array}{l} \frac{dF^1}{da} = f^1(F^1, \ldots, F^n), \ \ldots, \ \frac{dF^n}{da} = f^n(F^1, \ldots, F^n), \\ F^1(0) = \xi^1, \ \ldots, \ F^n(0) = \xi^n. \end{array} \tag{1.14}$$

1.4. Группы, допускаемые уравнением

Начиная с этого момента будем считать, что G есть локальная однопараметрическая группа Ли контактных (или, в частном случае, точечных) преобразований:

$$\tilde{x} = P(a, x, u, u_1); \quad \tilde{u} = Q(a, x, u, u_1); \quad \tilde{u}_1 = Q^1(a, x, u, u_1). \tag{1.15}$$

Определение 5. *Говорят, что уравнение*

$$F(x, u, u_1, \ldots, u_k) = 0 \tag{1.16}$$

инвариантно относительно группы G (или допускает группу G), если все преобразования T_a из G переводят решения этого уравнения в решения.

Очевидно, эквивалентная формулировка заключается в том, что уравнение, переписанное в новых переменных, должно иметь тот же вид, что и прежде: $F(\tilde{x}, \tilde{u}, \tilde{u}_1, \ldots, \tilde{u}_k) = 0$.

Пример 7. Уравнение вида $F(u, xu_1, x^2u_2, \ldots, x^ku_k) = 0$ инвариантно относительно растяжений $\tilde{x} = e^a x$, $\tilde{u} = u$. Действительно, при такой замене $\tilde{u}_j = e^{-aj}u_j$, так что $\tilde{x}^j\tilde{u}_j = x^ju_j$ и уравнение не меняется. Точно так же уравнение $F(\frac{u}{x}, u_1, xu_2, \ldots, x^{k-1}u_k) = 0$ допускает группу растяжений $\tilde{x} = e^a x$, $\tilde{u} = e^a u$. Уравнения, не содержащие явно x и u, инвариантны относительно сдвигов из примера 1, как показывают приведенные там формулы продолжения.

Как уже говорилось, при практических вычислениях удобно работать не с самой группой, а ее инфинитезимальным оператором. Для него мы будем использовать обозначение

$$X^1 = p\partial_x + q\partial_u + q^1\partial_{u_1}, \tag{1.17}$$

где $p = P_a|_{a=0},\ q = Q_a|_{a=0},\ q^1 = Q^1_a|_{a=0}$.

Заметим, что требование контактности (1.9) накладывает на коэффициенты p, q, q^1 определенные ограничения. Действительно, дифференцируя равенства (1.9) и полагая $a = 0$, получаем

$$q_{u_1} = u_1 p_{u_1}; \tag{1.18}$$

$$q_x + u_1 q_u = q^1 + u_1(p_x + u_1 p_u). \tag{1.19}$$

Отсюда мы видим, что q^1 однозначно вычисляется через p, q и поэтому вместо записи (1.17) можно использовать сокращенную запись

$$X^0 = p\partial_x + q\partial_u. \tag{1.20}$$

На самом деле нас, конечно, интересует не то, как можно сократить запись оператора X^1, а наоборот, как найти его продолжение на переменные $u_2, u_3, \ldots$. Под k-м продолжением X^k оператора X^1 понимается инфинитезимальный оператор G_k k-го продолжения группы G. Это определение корректно, так как следующая теорема показывает, что операция продолжения сохраняет структуру группы.

Теорема 3. *Для любого k продолжения k-го порядка преобразований (1.15) образуют локальную однопараметрическую группу Ли G_k преобразований из $\mathbb{R}^{k+2}$ в $\mathbb{R}^{k+2}$.*

Для простоты мы будем также рассматривать *бесконечные* продолжения G_∞ и $X = X^\infty$, полагая

$$\tilde{x} = P(a, x, u, u_1);\ \tilde{u} = Q(a, x, u, u_1), \ldots;$$
$$\tilde{u}_j = Q^j(a, x, u, u_1, \ldots, u_j), \ldots;$$
$$X = p\partial_x + q\partial_u + q^1\partial_{u_1} + \ldots + q^j\partial_{u_j} + \ldots,$$

разумеется, явно выписывая всегда ровно столько членов, сколько нужно в данной задаче. Кроме того, для единообразия формул иногда выгодно обозначать $Q = Q^0,\ q = q^0$.

Очевидно, что для вычисления X можно построить продолжение G_∞ и затем воспользоваться определением 4. Есть и более короткий путь. Функции Q^j определяются рекуррентно по формуле

$$Q^j D_x(P) = D_x(Q^{j-1}), \quad j = 1, 2, \ldots.$$

Дифференцируя ее по a, получим

$$\frac{dQ^j}{da} D_x(P) + Q^j D_x(\frac{dP}{da}) = D_x(\frac{dQ^{j-1}}{da}).$$

Полагая $a = 0$ и учитывая, что $P|_{a=0} = x,\ Q^j|_{a=0} = u_j$, получаем рекуррентную формулу для вычисления коэффициентов $\bar{X}$

$$q^j = D_x(q^{j-1}) - u_j D_x(p), \quad j = 1, 2, \ldots. \tag{1.21}$$

Задача 3. Вычислите несколько коэффициентов для генераторов групп из примера 6.

Задача 4. Придумайте какую-нибудь однопараметрическую группу Ли контактных преобразований и вычислите несколько коэффициентов ее инфинитезимального оператора.

Инфинитезимальный критерий инвариантности заключается в том, что векторное поле X должно касаться подмногообразия $F = 0$, выделяемого уравнением (1.16) в пространстве переменных $x, u, u_1, \ldots, u_k$.

Теорема 4. *Уравнение (1.16) инвариантно относительно группы G тогда и только тогда, когда выполняется равенство*

$$X(F)|_{F=0} = 0. \tag{1.22}$$

Равенство (1.22), рассматриваемое как уравнение на векторное поле X, называется *определяющим уравнением* группы, допускаемой уравнением (1.16), а его решения — *классическими* симметриями. Когда хотят выразиться более точно, говорят также о *точечных* или *контактных* симметриях. Множество всех классических симметрий обозначается $\mathrm{Sym}_1(F)$, точечных — $\mathrm{Sym}_0(F)$.

Задача 5. Показать, что уравнение $u_3 - u_2^3(xu_1 - 2u) = 0$ допускает группу из примера 4.

1.5. Алгебра симметрий

В этом разделе мы изучим некоторые общие свойства решений определяющего уравнения. Прежде всего заметим, что уравнение (1.22) — линейное, поэтому симметрии можно складывать и умножать на число, то есть множество всех симметрий данного уравнения образует линейное пространство.

Чтобы выяснить, как устроены инфинитезимальные операторы, немного преобразуем формулу (1.21). Обозначим $\omega = u_1 p - q^0$ и покажем, что

$$q^j = u_{j+1} p - D_x^j(\omega). \tag{1.23}$$

Для $j = 0$ равенство очевидно. Пусть оно доказано для $j - 1$, тогда $q^j = D_x(u_j - D_x^{j-1}(\omega)) - u_j D_x(p) = u_{j+1} p - D_x^j(\omega)$ и шаг индукции обоснован.

Кроме того, заметим, что из условия (1.18) следует условие $\omega_{u_1} = p$. Собирая все вместе, получаем следующую теорему.

Теорема 5. *Бесконечное продолжение инфинитезимального оператора для произвольной однопараметрической группы контактных преобразований имеет вид*

$$X_\omega = \omega_{u_1} D_x - \sum_{j=0}^{\infty} D_x^j(\omega)\partial_{u_j}, \tag{1.24}$$

где ω произвольная функция от x, u, u_1, причем точечные группы характеризуются условием $\omega_{u_1 u_1} = 0$.

Величину ω называют *характеристикой* векторного поля X_ω. Векторное поле $\sum_{j=0}^{\infty} D_x^j(\omega)\partial_{u_j}$ называют *эволюционным дифференцированием.* Мы будем обозначать его ∇_ω. Сами операторы (1.24) будем называть *контактными векторными полями*, а в том случае, когда ω линейна по u_1 — *точечными векторными полями.* Множество всех контактных векторных полей обозначается K_3, точечных — K_2.

Замечательное свойство операторов (1.24) заключается в том, что множество всех таких векторных полей замкнуто относительно операции коммутирования, то есть K_3 образует алгебру Ли. То же самое относится к эволюционным дифференцированиям. В принципе, этот факт можно легко доказать, если учесть, что коммутатору двух операторов (1.24) соответствует групповой коммутатор соответствующих им контактных преобразований. Однако используемый нами уровень знакомства с теорией групп Ли не позволяет встать на этот путь (связь между группами и алгебрами Ли у нас установлена только в однопараметрическом случае). К счастью, формальное доказательство тоже достаточно простое.

Теорема 6. *При любых f, g выполняются соотношения*

$$[\nabla_f, D_x] = 0; \tag{1.25}$$

$$[\nabla_f, \nabla_g] = \nabla_{[f,g]}; \tag{1.26}$$
$$[X_f, X_g] = -X_{[f,g]}, \tag{1.27}$$

где скобка $[f, g]$ *определена по формуле*

$$[f, g] = \nabla_f(g) - \nabla_g(f). \tag{1.28}$$

Доказательство. Справедливость формулы (1.25) вытекает из соотношений

$$[\nabla_f, D_x](x) = \nabla_f(1) - D_x(0) = 0;$$

$$[\nabla_f, D_x](u_j) = \nabla_f(u_{j+1}) - D_x(D_x^j(f)) = 0.$$

Аналогично вычисляем

$$[\nabla_f, \nabla_g](x) = 0; \quad [\nabla_f, \nabla_g](u_j) = \nabla_f(D_x^j(g)) - \nabla_g(D_x^j(f))$$

и с учетом (1.25) имеем

$$[\nabla_f, \nabla_g](u_j) = D_x^j(\nabla_f(g) - \nabla_g(f)) = D_x^j([f, g]),$$

откуда следует (1.26).

Пользуясь доказанными свойствами и явным выражением

$$[f, g] = fg_u + D_x(f)g_{u_1} - gf_u - D_x(g)f_{u_1}$$

для скобки (1.28), легко показать, что

$$[X_f, X_g] = hD_x + \nabla_{[f,g]},$$

где

$$\begin{aligned} h &= X_f(g_{u_1}) - X_g(f_{u_1}) = f_{u_1}D_x(g_{u_1}) - g_{u_1}D_x(f_{u_1}) - \\ &\quad - fg_{uu_1} - D_x(f)g_{u_1u_1} + gf_{uu_1} + D_x(g)f_{u_1u_1}, \end{aligned}$$

и для завершения доказательства остается лишь проверить, что $h = -\partial_{u_1}([f, g])$. Это совсем просто, если учесть соотношение $\partial_{u_1}D_x = D_x\partial_{u_1} + \partial_u$. ∎

Заметим, что операция (1.28) превращает множество F_3 всех функций от x, u, u_1 в алгебру Ли. Это следует из свойства (1.26), которое, с одной стороны, показывает, что множество всех эволюционных дифференцирований есть алгебра Ли, а с другой - устанавливает изоморфизм этой алгебры с F_3. Из свойства (1.27) следует, что K_3 также изоморфна F_3. Далее, легко показать, что скобка двух функций, линейных по u_1, снова есть функция линейная, то есть K_2 является подалгеброй в K_3. И наконец, заметим, что формула (1.27) остается верной, если заменить операторы X на продолжения любого конечного порядка. Это следует из формулы

$$[X^k, Y^k] = [X^0, Y^0]^k.$$

Следствие 1. *Множество всех классических симметрий* $\mathrm{Sym}_1(F)$ *уравнения (1.16) образует алгебру Ли. Множество всех точечных симметрий* $\mathrm{Sym}_0(F)$ *есть подалгебра в* $\mathrm{Sym}_1(F)$.

Доказательство. То, что коммутатор двух решений уравнения (1.22) снова есть решение – очевидно. А то, что операция коммутирования сохраняет свойство контактности или точечности, мы только что показали. ∎

1.6. Вычисление алгебры симметрий

Решение определяющего уравнения является первым шагом в алгоритме группового анализа (что делать дальше с найденными решениями, мы увидим из следующих разделов). Возникает вопрос, насколько эффективно это можно сделать, и оказывается, что ответ зависит от порядка уравнения (1.16). Для уравнений первого порядка процедура неэффективна, а для второго — эффективна, если ограничиться только точечными симметриями. С уравнениями старших порядков проблем не возникает.

Уравнения первого порядка. Для уравнения первого порядка

$$u_1 = F(x, u) \tag{1.29}$$

определяющее уравнение имеет вид $pF_x + qF_u - q^1 = 0$. С учетом формул (1.18),(1.19) мы можем переписать его в виде

$$q_x + (q_u - p_x)F - p_u F^2 = pF_x + qF_u, \tag{1.30}$$

причем аргумент u_1 в функциях p, q следует заменить на F, и, кроме того, эти функции связаны еще соотношением $q_{u_1} = u_1 p_{u_1}$. Уравнение (1.30) имеет огромное количество решений, даже если ограничиться только точечными группами. Действительно, взяв в качестве p произвольную функцию от x, u, мы видим, что q определяется как решение линейного уравнения в частных производных первого порядка вида $q_x + Fq_u = F_u q + \varphi(x, u)$. Как известно, решение такого уравнения сводится к решению вспомогательной системы обыкновенных уравнений

$$\frac{dx}{1} = \frac{du}{F} = \frac{dq}{F_u q + \varphi},$$

причем первое равенство эквивалентно $\frac{du}{dx} = F$, то есть исходному уравнению! Итак, уравнение первого порядка допускает множество симметрий, но их нахождение — задача столь же трудная, как и решение самого уравнения.

Замечание 1. Одно решение определяющего уравнения (1.30) все же можно указать: $q = pF$, где $p(x, u)$- произвольная функция. Действительно, так как $\omega = u_1 p - q = 0$ на уравнении (1.29), то инфинитезимальный оператор $\bar{X}$ совпадает с pD_x и уравнение (1.22) удовлетворяется тривиальным образом. Соответствующая группа Ли есть группа сдвигов вдоль интегральных кривых исходного уравнения. Как мы увидим далее, от этого тривиального решения мало пользы, и мы не будем принимать его в расчет.

Отсюда можно сделать два вывода: один — малоутешительный, второй — многообещающий. Во-первых, по видимому нет никакого систематического способа вычисления симметрий для уравнений первого порядка. Во-вторых, если для данного уравнения нам посчастливится все же угадать из каких-либо соображений какую-нибудь симметрию, то, по видимому мы сможем проинтегрировать это уравнение. В справедливости этого мы убедимся в следующем разделе.

Уравнения второго порядка. Для уравнений второго порядка

$$u_2 = F(x, u, u_1) \tag{1.31}$$

определяющее уравнение имеет вид

$$pF_x + qF_u + q^1 F_{u_1} - q^2 = 0. \tag{1.32}$$

Коэффициенты q^1, q^2 находятся по формуле (1.21):

$$q^1 = D_x(q) - u_1 D_x(p); \quad q^2 = D_x^2(q) - u_1 D_x^2(p) - 2u_2 D_x(p),$$

причем производные u_2 исключаются в силу уравнения (1.31). Следовательно, для определения функций p, q мы имеем систему из двух линейных уравнений в частных производных: уравнения первого порядка (1.18) и уравнения второго порядка (1.32). (Впрочем, эту систему можно заменить одним уравнением на функцию ω, см. следующий пункт.) Как и в случае уравнений первого порядка, эта система имеет бесконечно много решений, но общего метода для их нахождения не существует.

Картина меняется, если мы ограничимся поиском точечных симметрий, то есть будем считать, что коэффициенты p, q зависят только от x, u. Вычисляя q^1, q^2 и подставляя в формулу (1.32), получаем уравнение

$$\begin{aligned} q_{xx} + (2q_{xu} - p_{xx})u_1 + (q_{uu} - 2p_{xu})u_1^2 - p_{uu}u_1^3 = (q_x + (q_u - \\ - p_x)u_1 - p_u u_1^2)F_{u_1} + qF_u + pF_x + (2p_x - q_u + 3p_u u_1)F. \end{aligned} \tag{1.33}$$

Как видим, определяющее уравнение содержит “лишнюю букву” u_1 и превратилось в переопределенную систему, решение которой, как правило, легко находится. Например, если производная u_1 входит в уравнение (1.31) полиномиально (что очень часто встречается на практике), то мы должны собрать отдельно все члены одинаковой степени по u_1 и приравнять их 0. В дальнейшем под вычислением алгебры симметрий для уравнения второго порядка мы будем понимать именно нахождение точечных симметрий. Впрочем, если удается найти какую-нибудь контактную симметрию, то ей не следует пренебрегать, так как для последующего интегрирования уравнения она столь же полезна, как и точечная.

Продемонстрируем процедуру решения уравнения (1.33) на простейшем примере.

Пример 8. Рассмотрим уравнение $u_2 = 0$. Очевидно, в этом случае определяющее уравнение (1.33) эквивалентно системе

$$q_{xx} = 0; \quad 2q_{xu} = p_{xx}; \quad q_{uu} = 2p_{xu}; \quad p_{uu} = 0.$$

Заметим, что она содержит в себе исходное уравнение, что объясняется его линейностью. Этот пример, может быть, показывает, что построить теорию интегрирования обыкновенных уравнений, основанную исключительно на групповом анализе, невозможно. Тем не менее в более сложных случаях определяющие уравнения для симметрий нелинейного уравнения обычно проще, чем оно само.

Дифференцируя второе уравнение по x, а третье - по u, получаем $p_{xxx} = q_{uuu} = 0$, так что функции p, q имеют вид

$$\begin{aligned} p &= (a_2x^2 + a_1x + a_0)u + b_2x^2 + b_1x + b_0; \\ q &= (c_2u^2 + c_1u + c_0)x + d_2u^2 + d_1u + d_0. \end{aligned}$$

Подставляя эти выражения опять во второе и третье уравнения,

Структурная таблица

	X_1	X_2	X_3	X_4	Y_1	Y_2	Y_3	Y_4
X_1	0	X_1	0	$2X_2+Y_2$	0	0	Y_1	X_3
X_2		0	$-X_3$	X_4	0	0	Y_3	0
X_3			0	Y_4	$-X_1$	$-X_3$	Y_2-X_2	0
X_4				0	$-Y_3$	0	0	0
Y_1					0	Y_1	0	$2Y_2+X_2$
Y_2						0	$-Y_3$	Y_4
Y_3							0	X_4
Y_4								0

убеждаемся, что параметры связаны соотношениями

$$a_2 = c_2 = 0; \quad b_2 = c_1; \quad d_2 = a_1.$$

Итак, наиболее общий вид точечных симметрий для нашего уравнения имеет вид

$$X^0 = ((a_1x+a_0)u+c_1x^2+b_1x+b_0)\partial_x+((c_1u+c_0)x+a_1u^2+d_1u+d_0)\partial_u,$$

то есть точечные симметрии образуют 8-мерное пространство. В качестве базиса можно выбрать векторные поля

$$X_1 = \partial_x; \quad X_2 = x\partial_x; \quad X_3 = u\partial_x; \quad X_4 = x^2\partial_x + xu\partial_u;$$
$$Y_1 = \partial_u; \quad Y_2 = u\partial_u; \quad Y_3 = x\partial_u; \quad Y_4 = xu\partial_x + u^2\partial_u.$$

Вычисляя их коммутаторы, получаем структурную таблицу для алгебры Ли симметрий (см. табл.).

Соответствующую группу Ли можно легко найти, решая уравнение Ли (1.14) для каждого из найденных инфинитезимальных операторов. Так, операторам X_1 и X_2 отвечают уже знакомые нам преобразования сдвига и растяжения переменной x :

$$\tilde{x} = x + a; \ \tilde{u} = u; \qquad \tilde{x} = e^a x; \ \tilde{u} = u.$$

Оператору X_3 соответствует преобразование Галилея

$$\tilde{x} = x + au; \ \tilde{u} = u$$

и оператору X_4 — преобразование

$$\tilde{x} = \frac{x}{1-ax}; \ \tilde{u} = \frac{u}{1-ax}.$$

Комбинируя эти и аналогичные преобразования, соответствующие операторам Y_j, можно построить группу проективных преобразований плоскости (x, u) :

$$\tilde{x} = \frac{ax+bu+c}{\alpha x+\beta u+\gamma}; \quad \tilde{u} = \frac{dx+eu+f}{\alpha x+\beta u+\gamma}.$$

Фактически мы показали, что множество всех прямых (то есть решений уравнения $u_2 = 0$) инвариантно относительно этой группы.

Уравнения порядка выше, чем 2. Так как $D_x(F)|_{F=0} = 0$, то из формулы (1.24) следует, что инфинитезимальный оператор $X = \omega_{u_1} D_x - \nabla_\omega$ в определяющем уравнении (1.22) можно заменить на эволюционное дифференцирование ∇_ω. После этого само определяющее уравнение переписывается в виде

$$F_*(\omega)|_{F=0} = 0,$$

где F_* обозначает *оператор линеаризации*

$$F_* = F_{u_k} D_x^k + \ldots + F_{u_1} D_x + F_u.$$

Чтобы сразу учесть дифференциальные следствия уравнения (1.16), разрешим его относительно старшей производной $u_k =$
$= f(x, u, \ldots, u_{k-1})$ и будем считать, что D_x есть оператор полной производной в силу уравнения $D_x = \partial_x + u_1 \partial_u + \ldots + f \partial_{u_{k-1}}$. Тогда определяющее уравнение примет вид

$$(D_x^k - f_*)(\omega) = 0, \tag{1.34}$$

наиболее удобный для практического вычисления симметрий. После того как характеристика ω найдена, коэффициенты p, q и оператор X восстанавливаются по формулам $p = \omega_{u_1}$; $q = u_1 p - \omega$; $X = pD_x - \nabla_\omega$.

Задача 6. Докажите, что уравнение (1.34) есть не что иное, как условие совместности $u_{x\ldots x,\tau} = u_{\tau,x\ldots x}$ пары уравнений $u_k = f$ и $u_\tau = \omega$.

Так как ω зависит только от x, u, u_1, то в уравнении (1.34) происходит расщепление по переменным $u_2, \ldots, u_{k-1}$. Исследование возникающей при этом переопределенной системы на функцию ω может быть достаточно утомительным, но обычно не вызывает принципиальных трудностей. Неоценимую помощь в этом деле предоставляют языки символьных вычислений. Существуют даже пакеты программ, позволяющие находить симметрии совершенно автоматически, но в приводимом ниже вычислении мы обходимся только стандартными средствами языка REDUCE [21].

Пример 9. Вычислим алгебру симметрий уравнения $u_3 + 6uu_1 = 0$. В приводимых ниже строчках программы определяется оператор дифференцирования в силу уравнения и вычисляется выражение $z = (D_x^3 + 6uD_x + 6u_1)(\omega)$, которое должно занулиться.

```
depend w,x,u,u1;
operator d;
for all f let d(f)= df(f,x) + u1*df(f,u)
                    + u2*df(f,u1) - 6*u*u1*df(f,u2);
z:= d(d(d(w))) + 6*u*d(w) + 6*u1*w;
coeff(z,u2,z2);
z23; z22;
```

Последние две команды выдают коэффициенты при u_2^3 и u_2^2 в этом выражении:

```
df(w,u1,3)
3*(df(w,u,u1,2)*u1 + df(w,u,u1) + df(w,x,u1,2)),
```

то есть мы получаем равенства

$$\omega_{u_1u_1u_1} = 0, \quad \omega_{uu_1u_1}u_1 + \omega_{uu_1} + \omega_{xu_1u_1} = 0.$$

Отсюда легко получить, что ω имеет вид

$$\omega = a(x)u_1^2 + (b(x) - 2a'(x)u)u_1 + c(x,u).$$

Допишем эту информацию в программу и запустим ее еще раз:

```
depend a,x; depend b,x; depend c,x,u;
w:= a*u1^2 + (b-2*df(a,x)*u)*u1 +c;
coeff(z,u1,z1);
df(z21,u1);  z13;
```

При этом выводятся коэффициенты при u_2u_1 и u_1^3 :

```
3*( - 4*df(a,x,2) + df(c,u,2) - 12*a*u)
df(c,u,3) - 6*a
```

Приравняв их нулю, легко получить, что $a = c_{uu} = 0$. Дополним программу этими данными и опять прогоним ее:

```
a:=0; depend p,x; depend q,x; c:=p*u+q;
z21; z11;
```

Зануляя коэффициенты при u_2 и u_1, а именно

```
 3*(df(b,x,2) + df(p,x)),    df(b,x,3) -
 - 12*df(b,x)*u + 3*df(p,x,2) + 6*p*u + 6*q,
```

мы находим, что $b = b_1x + b_0$, $p = 2b_1$ и $q = 0$, где b_0, b_1 — произвольные константы. Еще одна прогонка убеждает, что при этом выражение z обращается в ноль. Итак, найдено всего два решения определяющего уравнения (1.34): $\omega_0 = u_1$; $\omega_1 = xu_1 + 2u$. Соответствующие им векторные поля имеют вид

$$X_0 = \partial_x, \quad X_1 = x\partial_x - 2u\partial_u$$

и отвечают группе сдвигов и растяжений.

1.7. Приложения к уравнениям первого порядка

Для обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка (1.29) знание однопараметрической группы симметрий позволяет свести это уравнение к уравнению в полных дифференциалах

$$Mdx + Ndu = 0, \quad M_u = N_x$$

и, таким образом, проинтегрировать его в квадратурах.

Теорема 7. (Ли) *Уравнение (1.29) допускает группу G с генератором $X = p\partial_x + q\partial_u + q^1\partial_{u_1}$ тогда и только тогда, когда $1/\omega$, где $\omega(x,u) = (u_1 p - q)|_{u_1=F}$, служит для него интегрирующим множителем.*

Доказательство. Нетрудно показать, что определяющее уравнение (1.22) сводится в данном случае к равенству

$$\omega F_u - \omega_u F - \omega_x = 0 \;\Leftrightarrow\; \left(\frac{1}{\omega}\right)_x + \left(\frac{F}{\omega}\right)_u = 0,$$

так что уравнение $\frac{1}{\omega}du - \frac{F}{\omega}dx = 0$ является уравнением в полных дифференциалах. ∎

В качестве примеров рассмотрим уравнения, обычно изучаемые в начале курса дифференциальных уравнений.

1) Уравнение с разделяющимися переменными $u_1 = f(x)g(u)$ допускает группу преобразований

$$\tilde{x} = F^{-1}(F(x) + a); \quad \tilde{u} = u, \quad \text{где } F(x) = \int f dx.$$

Это нетрудно проверить непосредственно. Имеем $F(\tilde{x}) = F(x) + a \;\Rightarrow\; f(\tilde{x})D_x(\tilde{x}) = f(x)$, следовательно, $\tilde{u}_1 = D_x(\tilde{u})/D_x(\tilde{x}) = u_1 f(\tilde{x})/f(x) = f(\tilde{x})g(\tilde{u})$. Инфинитезимальный оператор имеет вид

$$X^1 = \frac{1}{f}\partial_x + \frac{f'}{f^2}u_1\partial_{u_1},$$

и так как $\omega = (u_1/f(x)) = g(u)$, в силу уравнения, то интегрирующий множитель равен $1/g(u)$.

2) Однородное уравнение $u_1 = F(\frac{u}{x})$ инвариантно относительно группы растяжений $\tilde{x} = e^a x$; $\tilde{u} = e^a u$ с генератором $X^0 = x\partial_x + u\partial_u$. Имеем $\omega = xF - u$ и уравнение в полных дифференциалах

$$\frac{du}{xF - u} - \frac{Fdx}{xF - u} = 0.$$

3) Линейное уравнение $u_1 = A(x)u + B(x)$ инвариантно относительно группы $\tilde{x} = x$; $\tilde{u} = u + av$, где $v-$ решение однородного уравнения $v_1 = Av$. Инфинитезимальный оператор равен $X^0 = v\partial_u$, и интегрирующий множитель равен $1/v$.

В качестве более содержательного примера рассмотрим уравнение (1.29), где правая часть есть произвольное ненулевое решение уравнения Хопфа $2F_x + FF_u = 0$. Это уравнение допускает группу из примера 4. Действительно, инфинитезимальный оператор этой группы есть $X^1 = u_1\partial_x + \frac{u_1^2}{2}\partial_u$ и

$$X^1(u_1 - F)|_{u_1=F} = (u_1 F_x + \frac{u_1^2}{2}F_u)|_{u_1=F} = \frac{1}{2}F(2F_x + FF_u) = 0.$$

Интегрирующий множитель равен $1/F^2$.

1.8. Дифференциальные инварианты

Для уравнений порядка выше первого наличие симметрий позволяет понижать порядок уравнения. Удобнее всего это делать при помощи перехода от переменных x, u к некоторым новым переменным — так называемым *дифференциальным инвариантам* группы симметрий. Вообще, для произвольной группы Ли G преобразований некоторого многообразия M функция $h(y)$ от локальных координат на M называется инвариантом группы G (или G-инвариантной функцией), если $h(T(y)) = h(y)$ для всех $T \in G$. Эквивалентное инфинитезимальное определение заключается в

том, что производная функции h вдоль всех векторных полей из алгебры Ли g, соответствующей группе G, должна равняться нулю:

$$\forall X \in g \quad X(h) = 0.$$

Нас интересует случай, когда M — это пространство переменных $x, u, u_1, \ldots, u_k$, а G есть k-е продолжение группы контактных преобразований. Таким образом, мы приходим к следующему определению.

Определение 6. *Пусть $g \subset K_3$—некоторая подалгебра Ли контактных векторных полей. Функция $h(x, u, u_1, \ldots, u_k)$ называется ее дифференциальным инвариантом k-го порядка, если $X(h) = 0$ для всех X из g.*

Из определения следует, что нахождение дифференциальных инвариантов сводится к решению системы уравнений в частных производных

$$p_s h_x + q_s h_u + q_s^1 h_{u_1} + \ldots + q_s^k h_{u_k} = 0, \quad s = 1, \ldots, r,$$

где r — размерность алгебры g и векторные поля $X_s = p_s \partial_x + q_s \partial_u + q_s^1 \partial_{u_1} + \ldots$ образуют ее базис. Очевидно, произвольная функция от дифференциальных инвариантов есть дифференциальный инвариант, поэтому нам нужно найти не общее решение, а набор функционально независимых решений, по возможности полный. Иначе задачу можно сформулировать как нахождение общих первых интегралов для характеристических уравнений

$$\frac{dx}{p_s} = \frac{du}{q_s} = \frac{du_1}{q^1} = \ldots = \frac{du_k}{q^k}, \quad s = 1, \ldots, r. \tag{1.35}$$

Ясно, что для однопараметрических групп число N_k функционально независимых дифференциальных инвариантов порядка не выше k равно $k+1$. Исключение составляют инварианты нулевого порядка, которых может и не быть, то есть $N_0 \leq 1$. Увеличение

размерности алгебры на 1 может уменьшить N_k на 1, а может и не уменьшить. Таким образом, для алгебры размерности r имеем

$$N_0 \leq 1, \quad k+2-r \leq N_k \leq k+1. \tag{1.36}$$

Теорема 8. *Пусть h_1, h_2 — дифференциальные инварианты порядка k алгебры g. Тогда функция*

$$h = \frac{dh_1}{dh_2} = \frac{D_x(h_1)}{D_x(h_2)} \tag{1.37}$$

есть дифференциальный инвариант порядка $k+1$.

Доказательство. Напомним, что векторные поля из g имеют вид $X = pD_x - \nabla_\omega$, где $p = \omega_{u_1}$. Используя свойство (1.25), имеем $(j = 1, 2)$

$$\begin{aligned} &XD_x(h_j) = pD_x^2(h_j) - \nabla_\omega D_x(h_j) = \\ &= D_x(pD_x(h_j) - \nabla_\omega(h_j)) - D_x(p)D_x(h_j) = -D_x(p)D_x(h_j), \end{aligned}$$

откуда сразу следует $X(h) = 0$. ∎

Заметим, что из оценки (1.36) следует, что все дифференциальные инварианты могут быть построены из нескольких инвариантов низших порядков. В частности, при $r = 1$ имеем

Следствие 2. *Для однопараметрических групп все функционально независимые дифференциальные инварианты имеют вид*

$$y, \ v, \ v_1 = \frac{dv}{dy}, \ v_2 = \frac{d^2v}{dy^2}, \ \ldots, \ v_k = \frac{d^kv}{dy^k}, \ \ldots, \tag{1.38}$$

где y, v — независимые инварианты первого порядка.

Различные способы построения инвариантов иллюстрируются в следующих трех примерах.

Пример 10. В простейших случаях можно решать систему (1.35) в лоб. Найдем дифференциальные инварианты группы растяжений из примера 2. Соответствующая алгебра Ли двумерна и имеет базис

$$x\partial_x - u_1\partial_{u_1} - 2u_2\partial_{u_2} - \ldots - ku_k\partial_{u_k} - \ldots,$$
$$u\partial_u + u_1\partial_{u_1} + u_2\partial_{u_2} + \ldots + u_k\partial_{u_k} + \ldots,$$

так что характеристические уравнения имеют вид

$$-\frac{dx}{x} = \frac{du_1}{u_1} = \frac{du_2}{2u_2} = \ldots = \frac{du_k}{ku_k} = \ldots;$$
$$\frac{du}{u} = \frac{du_1}{u_1} = \frac{du_2}{u_2} = \ldots = \frac{du_k}{u_k} = \ldots$$

Первые интегралы каждой системы легко находятся. Для первой имеем последовательность дифференциальных инвариантов

$$u,\ xu_1,\ x^2u_2,\ \ldots,\ x^ku_k,\ \ldots$$

и для второй

$$x,\ u_1/u,\ u_2/u,\ \ldots,\ u_k/u,\ \ldots$$

Отметим, что эти инварианты не совпадают с инвариантами, построенными по формуле (1.38), но эквивалентны им. Дифференциальные инварианты всей алгебры Ли — это такие функции, которые можно одновременно записать как функции от инвариантов из любой последовательности. Очевидно, это функции

$$xu_1/u,\ x^2u_2/u,\ \ldots,\ x^ku_k/u,\ \ldots$$

Пример 11. В более сложных случаях выгодно систему (1.35) решать последовательно. На первом шаге находим инварианты $y, v, v_1, \ldots$ для одного из векторных полей X_s, скажем, X_1. Поскольку инварианты всей алгебры должны быть функциями от $y, v, v_1, \ldots$, то мы можем переписать оставшиеся векторные поля в этих переменных и тем самым понизить порядок системы (1.35). Заметим, что для переписывания векторного поля X_2 достаточно

вычислить величины $\bar{p}_2 = X_2(y)$; $\bar{q}_2 = X_2(v)$; $\bar{q}_2^i = X_2(v_i)$. Найдем этим способом дифференциальные инварианты 3-го порядка проективной группы прямой

$$\tilde{x} = \frac{ax+b}{cx+d}; \quad \tilde{u} = u; \quad ad - bc \neq 0.$$

Алгебра Ли порождена векторными полями

$$X_1^0 = \partial_x, \quad X_2^0 = x\partial_x, \quad X_3^0 = x^2\partial_x$$

с коммутационными соотношениями

$$[X_1, X_2] = X_1; \quad [X_3, X_2] = -X_3; \quad [X_1, X_3] = 2X_2.$$

(Эта алгебра изоморфна алгебре sl_2 всех матриц размера 2×2 с нулевым следом.) Продолжения векторных полей имеют вид

$$X_1^3 = \partial_x; \quad X_2^3 = x\partial_x - u_1\partial_{u_1} - 2u_2\partial_{u_2} - 3u_3\partial_{u_3};$$
$$X_3^3 = x^2\partial_x - 2xu_1\partial_{u_1} - (4xu_2 + 2u_1)\partial_{u_2} - 6(xu_3 + u_2)\partial_{u_3}.$$

Очевидно, инварианты первого векторного поля — это u, u_1, u_2, u_3, так что переписыание X_2 в новых переменных сводится просто к отбрасыванию члена $x\partial_x$, и мы получаем векторное поле

$$\bar{X}_2 = u_1\partial_{u_1} + 2u_2\partial_{u_2} + 3u_3\partial_{u_3}.$$

Его инварианты равны $u, v = u_2/u_1^2; v_1 = u_3/u_1^3$. Перепишем X_3 в этих переменных. Имеем

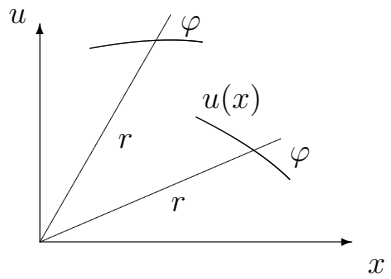
$$X_3^3(u) = 0; \quad X_3^3(v) = -\frac{2}{u_1}; \quad X_3^3(v_1) = -6\frac{u_2}{u_1^3}$$

и, следовательно, векторное поле принимает вид

$$\bar{X}_3 = -\frac{2}{u_1}(\partial_v + 3v\partial_{v_1}).$$

Очевидно, оно имеет инварианты u и $v_1 - \frac{3}{2}v^2$, и окончательно мы получаем, что функции

$$u, \quad \frac{u_3}{u_1^3} - \frac{3u_2^2}{u_1^4}$$



составляют полный набор функционально независимых инвариантов третьего порядка для проективной группы. Построение старших инвариантов может осуществляться по формуле (1.37). Заметим, что в этом примере $N_0 = N_1 = N_2 = 1,\ N_3 = 2,\ N_4 = 3,\ \ldots,$ то есть реализуется нижняя из оценок (1.36).

Пример 12. Иногда инварианты можно найти из геометрических соображений. Рассмотрим однопараметрическую группу вращений плоскости (x, u)

$$\begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{u} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos a & -\sin a \\ \sin a & \cos a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix}.$$

Очевидно, что эта группа допускает следующие инварианты (см. рис.): радиус $r = \sqrt{x^2 + u^2}$, угол

$$\varphi = \operatorname{arctg} u_1 - \arcsin \frac{u}{\sqrt{u^2 + x^2}} = \operatorname{arctg} u_1 - \operatorname{arctg} \frac{u}{x}$$

между радиус-вектором и касательной к графику $u = u(x)$ и кривизну этого графика, которая, как известно из аналитической геометрии, задается формулой

$$\kappa = \frac{u_2}{(1 + u_1^2)^{3/2}}.$$

Сравним эти инварианты с найденными стандартным методом. Инфинитезимальный оператор группы вращений есть

$$X = -u\partial_x + x\partial_u + (1 + u_1^2)\partial_{u_1} + 3u_1u_2\partial_{u_2} + (4u_1u_3 + 3u_2^2)\partial_{u_3} + \ldots,$$

следовательно, характеристическое уравнение для дифференциальных инвариантов первого порядка имеет вид

$$-\frac{dx}{u} = \frac{du}{x} = \frac{du_1}{1+u_1^2}.$$

Сначала из первого равенства находим первый интеграл x^2+u^2, совпадающий с r^2. После этого второе равенство принимает вид

$$\frac{du}{\sqrt{r^2-u^2}} = \frac{du_1}{1+u_1^2}$$

и интегрирование приводит к первому интегралу φ. Для удобства можно перейти к инварианту

$$v = \operatorname{tg}\varphi = \frac{xu_1-u}{x+uu_1}.$$

Дальнейшее построение инвариантов осуществляется согласно Следствию 10. Например, инвариант второго порядка равен

$$v_1 = \frac{dv}{dr} = \frac{\sqrt{x^2+u^2}}{(x+uu_1)^3}((x^2+u^2)u_2 - (1+u_1^2)(xu_1-u)).$$

Можно проверить, что он связан с кривизной κ соотношением

$$\kappa = \frac{v_1}{(1+v^2)^{3/2}} + \frac{v}{r(1+v^2)^{1/2}}.$$

1.9. Понижение порядка уравнения

Теорема 9. *Пусть $h_1,\dots,h_m$ полный набор функционально независимых инвариантов порядка k алгебры g. Тогда уравнение (1.16) имеет g своей алгеброй симметрий, если и только если оно может быть переписано в виде*

$$\widetilde{F}(h_1,\dots,h_m) = 0. \tag{1.39}$$

Доказательство. Уравнение (1.16) определяет некоторую гиперповерхность M в пространстве переменных $x, u, u_1, \ldots, u_k$. Из того, что векторные поля g касаются M, следует, что M состоит из общих поверхностей уровня $h_1 = c_1, \ldots, h_m = c_m$ дифференциальных инвариантов. Сделаем какую-нибудь невырожденную замену переменных $(x, u, u_1, \ldots, u_k) \mapsto (h_1, \ldots, h_m, \xi_{m+1}, \ldots, \xi_{k+2})$, тогда поверхность M будет задаваться уравнением вида $\bar{F}(h, \xi) = 0$. Проектируя M вдоль осей ξ, получим некоторую гиперповерхность вида (1.39) в пространстве переменных $h_1, \ldots, h_m$. ∎

Для однопараметрического случая из Теоремы 9 и Следствия 2 получаем

Следствие 3. *Если уравнение (1.16) допускает однопараметрическую группу G, то оно может быть записано в виде уравнения $(k-1)$-го порядка*

$$\widetilde{F}(y, v, v_1, \ldots, v_{k-1}) = 0, \tag{1.40}$$

где $y, v, v_j = \frac{d^j v}{dy^j}$- дифференциальные инварианты группы G.

Итак, переход к дифференциальным инвариантам однопараметрической группы позволяет понижать порядок уравнения на 1. Однако эта замена переменных необратима, и поэтому возникает вопрос: сможем ли мы восстановить решение исходного уравнения (1.16), после того как найдем решение редуцированного уравнения (1.40)? Ответ положительный. Действительно, пусть $v = f(y)$ — решение уравнения (1.40), тогда, чтобы найти зависимость u от x, мы должны решить вспомогательное уравнение первого порядка

$$v(x, u, u_1) = f(y(x, u, u_1)).$$

Но это уравнение содержит только инварианты y, v и следовательно допускает G в качестве группы симметрий. А отсюда следует, что оно может быть решено методом интегрирующего множителя из раздела 2.7.

Пример 13. Продолжая тему раздела 1.7, рассмотрим стандартные методы понижения порядка, изучаемые в университетском курсе обыкновенных дифференциальных уравнений.

1) Если в уравнение не входит явно неизвестная функция u, то есть оно имеет вид $F(x, u_1, \ldots, u_k) = 0$, то понижение порядка достигается за счет подстановки $v = u_1$. Эта очевидная подстановка есть следствие инвариантности уравнения относительно группы сдвигов $u \to u + a$.

2) Если уравнение не содержит независимой переменной, то есть имеет вид $F(u, u_1, \ldots, u_k) = 0$, то порядок можно понизить, приняв за независимую переменную $y = u$ и зависимую переменную $v = u_1$. Очевидно, это есть инварианты группы сдвигов $x \to x + a$. При этом если найдено решение $v = f(y)$ редуцированного уравнения, то, чтобы найти решение исходного, следует решить вспомогательное уравнение $u_1 = f(u)$ с разделенными переменными.

3) Порядок уравнения понижается, если оно является обобщенно-однородным, то есть не меняется при замене x на $\lambda^n x$ и u_j на $\lambda^{m-jn} u_j$. Инвариантами первого порядка данной группы растяжений являются $y = u^n/x^m$ и $v = xu_1/u$.

4) Простейшим примером обобщенно-однородных уравнений являются линейные однородные уравнения с переменными коэффициентами, инвариантные относительно растяжения $u \to \lambda u$. Инвариантами (эквивалентными указанным выше) служат x и $w = u_1/u$. В частности, эта замена сводит уравнение $u_2 = a(x)u_1 + b(x)$ к уравнению Риккати $w_1 = aw + b - w^2$.

Для r-параметрических групп симметрий ситуация становится сложнее. Первая трудность заключается в том, что инварианты h_i из Теоремы 9 могут уже не иметь такой простой структуры (1.38), как для однопараметрического случая. Проще всего редукция осуществляется, когда выполняется нижняя из оценок (1.36). При $k = r$ мы имеем $N_r = 2$ функционально независимых инварианта

y и v порядка r, а все остальные дифференциальные инварианты по-прежнему вычисляются по формуле (1.38), так что уравнение (1.16) принимает вид $\widetilde{F}(y, v, v_1, \ldots, v_{k-r}) = 0$.

Вторая, более существенная, трудность заключается в том, что для восстановления решения исходного уравнения по решениям редуцированного может оказаться недостаточно квадратур. Это зависит от того, является алгебра Ли симметрий разрешимой, или нет (см. напр. [5]). В частности, чтобы полностью решить в квадратурах уравнение (1.16) k-го порядка, достаточно знать разрешимую k-мерную алгебру симметрий этого уравнения.

2. Уравнения в частных производных

2.1. Основные определения

Пусть теперь число независимых переменных равно m. Пробежимся по основным понятиям из предыдущей главы и посмотрим, что в них надо подправить для этого случая. Для этого придется ввести мультииндексную запись: для обозначения смешанной производной s_1-го порядка по x_1, ..., s_m-го порядка по x_m, будем использовать *мультииндекс* $\sigma = (s_1, \ldots, s_m)$. Порядком мультииндекса называется число $|\sigma| = s_1 + \ldots + s_m$. Такая запись удобна в основном в теоретических выкладках. На практике, как правило, приходится иметь дело с производными не очень высокого порядка, и в этих случаях иногда выгоднее писать что-нибудь типа u_i, u_{ij}, u_{iij} или даже u_x, u_{xy}, u_{xxy}. Мы будем переходить от одной формы записи к другой без предупреждения.

Точечные преобразования. Определение точечного преобразования остается в точности тем же, если считать, что теперь x есть вектор $(x_1, \ldots, x_m)$ и соответственно функция P является векторнозначной: $P = (P_1, \ldots, P_m)$. Оказывается, что при этом и формулы (1.5) для продолжения остаются справедливыми, если

считать, что D_x есть вектор $D_x = (D_{x_1}, \ldots, D_{x_m})$, и j не число, а мультииндекс $j = (j_1, \ldots, j_m)$. Разумеется, формулу для полного дифференцирования тоже надо подправить:

$$D_{x_i} = \partial_{x_i} + \sum_{\sigma} u_{\sigma,i} \partial_{u_\sigma}.$$

Формулы для продолжений $\tilde{u}_\sigma = Q^\sigma$, где функции Q^σ зависят от $x_1, \ldots, x_m$, u и всех u_α таких, что $|\alpha| \le |\sigma|$, вычисляются рекуррентно из системы линейных уравнений

$$\sum_j D_{x_i}(P_j) Q^{\sigma,j} = D_{x_i}(Q^\sigma), \quad i = 1, \ldots, m, \tag{2.1}$$

где через σ, j обозначен мультииндекс $(s_1, \ldots, s_j + 1, \ldots, s_m)$. При этом приходится обращать матрицу $D_x(P)$ размера $m \times m$ с элементом

$$D_{x_i}(P_j) = \frac{\partial P_j}{\partial x_i} + \frac{\partial P_j}{\partial u} u_i$$

на пересечении i-й строки и j-го столбца, что приводит к формуле (1.6), в которой D_x и $D_{\tilde{x}}$ являются векторами-столбцами,

Задача 7. Доказать, что матрица $D_x(P)$ обратима.

Пример 14. В курсе УМФ для приведения к каноническому виду линейного уравнения второго порядка с двумя независимыми переменными

$$a(x,y)u_{xx} + 2b(x,y)u_{xy} + c(x,y)u_{yy} + f = 0$$

используются точечные преобразования вида

$$\tilde{x} = \varphi(x,y); \quad \tilde{y} = \psi(x,y); \quad \tilde{u} = u.$$

Связь между производными дается формулой

$$\begin{pmatrix} D_x \\ D_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi_x & \psi_x \\ \varphi_y & \psi_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D_{\tilde{x}} \\ D_{\tilde{y}} \end{pmatrix}.$$

Заметим, что в этой задаче нужна именно эта формула, а не обратная к ней (1.6).

Задача 8. Показать, что замена

$$\tilde{t} = \frac{4}{t^2}, \quad \tilde{x} = -2\frac{x}{t}, \quad \tilde{u} = \frac{t^2 u}{4} + \frac{xt}{24}$$

связывает цилиндрическое

$$\tilde{u}_{\tilde{t}} = \tilde{u}_{\tilde{x}\tilde{x}\tilde{x}} + 6\tilde{u}\tilde{u}_{\tilde{x}} - \frac{\tilde{u}}{2\tilde{t}} \tag{2.2}$$

и обычное уравнение Кортевега — де Вриза (KdV)

$$u_t = u_{xxx} + 6uu_x. \tag{2.3}$$

Контактные преобразования. Аналогично обобщается понятие контактного преобразования. Оно задается формулами

$$\tilde{x}_i = P_i, \quad \tilde{u} = Q, \quad \tilde{u}_i = Q^i, \quad i = 1, \ldots, m, \tag{2.4}$$

где функции P_i, Q, Q^i зависят от $x_1, \ldots, x_m, u, u_1, \ldots, u_m$ и удовлетворяют соотношениям

$$D_{x_i}(Q) = \sum_{s=1}^{m} Q^s D_{x_i}(P_s)$$

или, более подробно,

$$Q_{u_j} = \sum_{s=1}^{m} Q^s P_{s,u_j}, \quad Q_{x_i} + Q_u u_i = \sum_{s=1}^{m} Q^s (P_{s,x_i} + P_{s,u} u_i). \tag{2.5}$$

Пример 15. Преобразование Лежандра

$$\tilde{x}_i = u_i; \quad \tilde{u} = \sum x_i u_i - u; \quad \tilde{u}_i = x_i.$$

Пример 16. Преобразование из примера 4 также допускает многомерное обобщение:

$$\tilde{x}_i = x_i; \quad \tilde{u} = \frac{a}{2} \sum u_i^2; \quad \tilde{u}_i = t u_i.$$

Однопараметрические группы преобразований. Само это понятие в обобщении не нуждается. Единственное, что нам нужно, — научиться вычислять продолжения инфинитезимального оператора. Будем считать, что преобразования (2.4) образуют однопараметрическую группу, то есть функции P_i, Q, Q^i зависят от группового параметра a. Сам инфинитезимальный оператор имеет вид

$$X^1 = p_1\partial_{x_1} + \ldots + p_m\partial_{x_m} + q\partial_u + q^1\partial_{u_1} + \ldots + q^m\partial_{u_m},$$

где $p_i = (dP_i/da)|_{a=0}$ и так далее. Для вычисления продолженного оператора

$$X = p_1\partial_{x_1} + \ldots + p_m\partial_{x_m} + \sum_\sigma q^\sigma \partial_{u_\sigma} \tag{2.6}$$

дифференцируем формулу (2.1) и полагаем $a = 0$. В результате получаем

$$q^{\sigma,i} = D_{x_i}(q^\sigma) - \sum_j D_{x_i}(p_j)u_{\sigma,j}. \tag{2.7}$$

В отличие от формулы (2.1) эта формула — явная! Здесь еще наглядней, чем в одномерном случае, видно преимущество инфинитезимального подхода.

Задача 9. Найти несколько продолжений генератора группы из примера 16.

Можно доказать также аналоги теорем 5 и 6. Для этого прежде всего следует доказать по индукции аналог формулы (1.23):

$$q^\sigma = \sum_j u_{\sigma,j}p_j - D_x^\sigma(\omega), \tag{2.8}$$

где введены обозначения

$$\omega = \sum_j u_j p_j - q, \quad D_x^\sigma = D_{x_1}^{\sigma_1} \cdot \ldots \cdot D_{x_m}^{\sigma_m}.$$

Индукция ведется по порядку мультииндекса $|\sigma|$. Из формулы (2.5) можно получить соотношения

$$q_{u_i} = \sum_j u_j p_{j,u_i} \tag{2.9}$$

и доказать следующую теорему.

Теорема 10. *Бесконечное продолжение инфинитезимального оператора для произвольной однопараметрической группы контактных преобразований (2.4) имеет вид*

$$X_\omega = \sum_j \omega_{u_j} D_{x_j} - \nabla_\omega, \tag{2.10}$$

где эволюционное дифференцирование ∇_ω *задается формулой*

$$\nabla_\omega = \sum_\sigma D^\sigma(\omega)\partial_{u_\sigma},$$

а характеристика ω *есть произвольная функция от* x_i, u, u_i, *причем точечные группы характеризуются условием* $\omega_{u_i u_j} = 0$.

Теорема 6 вообще не нуждается в модификациях и доказывается совершенно аналогично одномерному случаю.

Задача 10. Проделайте аккуратное доказательство сформулированных теорем.

Алгебра симметрий уравнения. Это понятие также не претерпевает изменений. Основное во всей теории определяющее уравнение (1.22) годится на все случаи жизни.

Резюме. Итак, мы видим, что все базовые определения и понятия либо совсем не меняются, либо меняются совершенно естественным образом. Из следующего раздела мы увидим, что и сама процедура вычисления алгебры симметрий, по существу, не содержит ничего нового. Различия начинаются позже, при переходе к использованию симметрий. В случае обыкновенных уравнений симметрии позволяют понижать порядок, а в случае уравнений в частных производных с их помощью можно уменьшить число независимых переменных. Правда, при этом мы находим только частные решения.

2.2. Вычисление алгебры симметрий

При практическом вычислении алгебры симметрий удобнее пользоваться представлением оператора (2.6) в виде (2.10). Действительно, при этом мы следим всего лишь за одной функцией ω вместо $m+1$ функций $p_1, \ldots, p_m, q$. Кроме того, при решении определяющего уравнения (1.22) слагаемыми $\omega_{u_s} D_{x_s}$ можно пренебречь, так как $D_{x_s}(F)|_{F=0} \equiv 0$. Итак, все, что нам нужно, — это найти функцию $\omega(x_1, \ldots, x_m, u, u_1, \ldots, u_m)$ такую, что

$$\nabla_\omega(F)|_{F=0} = 0. \tag{2.11}$$

После этого при желании можно восстановить оператор X^0 по явным формулам

$$p_i = \omega_{u_i}; \quad q = \sum_j u_j p_j - \omega.$$

Разумеется, применение программ символьных вычислений существенно облегчает труд и в случае уравнений в частных производных.

Пример 17. Рассмотрим уравнение теплопроводности

$$u_t = u_{xx}. \tag{2.12}$$

Уравнение на искомую функцию ω, зависящую от t, x, u, u_x, u_t, имеет вид

$$D_t(\omega) = D_x^2(\omega),$$

причем мы должны помнить, что "сидим" на уравнении, то есть $u_t = u_{xx}; u_{xt} = u_{xxx}; u_{tt} = u_{xxxx}$ и так далее. В данном примере, как и вообще в случае *эволюционных уравнений*, то есть уравнений вида

$$u_t = f(t, x_2, \ldots, x_m, u, u_{x_2}, \ldots, u_{x_m}, \ldots),$$

удобно совсем избавиться от производных по t, заменяя их в силу уравнения. При этом если $m = 2$, то для производных по $x = x_2$

можно использовать те же удобные обозначения $u_j = \partial_x^j(u)$, что и в случае обыкновенных дифференциальных уравнений.

Итак, положим $a(t, x, u, u_1, u_2) = \omega(t, x, u, u_1, u_t)$ и распишем определяющее уравнение:

$$a_t + a_u u_2 + a_{u_1} u_3 + a_{u_2} u_4 = D_x(a_x + a_u u_1 + a_{u_1} u_2 + a_{u_2} u_3). \quad (2.13)$$

Функция a зависит от u и производных u_1, u_2, а в уравнении (2.13) содержатся также u_3 и u_4, то есть по ним происходит расщепление. Самая старшая буква — u_4, но видно, что на самом деле коэффициенты при ней сокращаются. Дальше, приравнивая нулю коэффициенты при u_3^2 и u_3, получаем первые результаты:

$$a_{u_2 u_2} = 0; \quad a_{u_1} = a_{x u_2} + a_{u u_2} u_1 + a_{u_1 u_2} u_2 + a_{u_1} + D_x(a_{u_2}).$$

Из первого уравнения имеем $a = \alpha u_2 + b$, где функции α и b могут зависеть от t, x, u, u_1 и тогда второе уравнение переписывается в виде $D_x(\alpha) = 0$. Итак,

$$a = \alpha(t) u_2 + b(t, x, u, u_1)$$

и подстановка этой формулы в (2.13) дает

$$\alpha_t u_2 + b_t + b_u u_2 = D_x(b_x + b_u u_1) + D_x(b_{u_1}) u_2. \quad (2.14)$$

Здесь происходит расщепление по u_2. Приравнивая нулю коэффициенты при u_2^2 и u_2, уточняем вид функции b :

$$b_{u_1 u_1} = 0; \quad \alpha_t = 2(b_{x u_1} + b_{u u_1} u_1).$$

Из первого уравнения имеем $b = \beta u_1 + c$, где β и c могут зависеть уже только от t, x, u, тогда второе уравнение принимает вид $\alpha_t = 2D_x(\beta)$. Следовательно,

$$b = (\frac{\alpha_t}{2} x + \gamma(t)) u_1 + c(t, x, u).$$

Подстановка в (2.14) дает нам формулу

$$(\frac{\alpha_{tt}}{2} x + \gamma_t) u_1 + c_t = D_x(c_x) + D_x(c_u) u_1,$$

в которой происходит расщепление по u_1. Приравнивая 0 коэффициенты при u_1^2, u_1, а также свободный член, получаем уравнения

$$c_{uu} = 0; \quad \frac{\alpha_{tt}}{2}x + \gamma_t = 2c_{xu}; \quad c_t = c_{xx}.$$

Полагая $c = \delta u + d$, где δ и d зависят от t, x, переписываем эти уравнения в виде

$$\frac{\alpha_{tt}}{2}x + \gamma_t = 2\delta_x; \quad \delta_t = \delta_{xx}; \quad d_t = d_{xx}.$$

Из первого уравнения имеем

$$\delta = \frac{\alpha_{tt}}{8}x^2 + \frac{\gamma_t}{2}x + \varepsilon(t),$$

и подстановка во второе дает

$$\alpha_{ttt} = 0; \quad \gamma_{tt} = 0; \quad \varepsilon = \frac{\alpha_t}{4} + \mathrm{const}\,.$$

Из третьего уравнения следует только, что d — произвольное решение уравнения (2.12). Больше никаких уравнений не осталось.

Начнем собирать все вместе. Заменяя u_2 на u_t, имеем

$$\begin{aligned}\omega &= \alpha u_t + b = \alpha u_t + (\frac{\alpha_t}{2}x + \gamma)u_x + c = \alpha u_t + (\frac{\alpha_t}{2}x + \gamma)u_x + \\ &+ \delta u + d = \alpha u_t + (\frac{\alpha_t}{2}x + \gamma)u_x + (\frac{\alpha_{tt}}{8}x^2 + \frac{\gamma_t}{2}x + \varepsilon)u + d,\end{aligned}$$

где $\alpha = 4C_1t^2 + 2C_2t + C_3$; $\gamma = 2C_4t + C_5$; $\varepsilon = 2C_1t + C_6$; $d_t = d_{xx}$. Зануляя по очереди все коэффициенты, кроме одного, получаем, что общее решение ω есть линейная комбинация следующих частных решений:

$$\omega_1 = 4t^2u_t + 4txu_x + (x^2 + 2t)u; \quad \omega_2 = 2tu_t + xu_x; \quad \omega_3 = u_t;$$
$$\omega_4 = 2tu_x + xu; \quad \omega_5 = u_x; \quad \omega_6 = u; \quad \omega_d = d.$$

Заметим, что все эти решения линейны по производным, то есть собственно контактных симметрий не нашлось. Легко вычислить соответствующие операторы X^0 :

$$X_1 = 4t^2\partial_t + 4tx\partial_x - (x^2 + 2t)u\partial_u; \quad X_2 = 2t\partial_t + x\partial_x; \quad X_3 = \partial_t;$$
$$X_4 = 2t\partial_x - xu\partial_u; \quad X_5 = \partial_x; \quad X_6 = u\partial_u; \quad X_d = d\partial_u.$$

Алгебра симметрий в данном примере бесконечномерна из-за наличия симметрий вида X_d, где d — произвольное решение уравнения теплопроводности. Бесконечномерность алгебры симметрий характерна для линейных уравнений и отражает просто принцип линейной суперпозиции. Действительно, соответствующее групповое преобразование задается формулами $\tilde{x} = x; \tilde{t} = t; \tilde{u} = u + ad$.

Задача 11. Интегрируя уравнения (1.14), найдите групповые преобразования для остальных векторных полей. Постройте коммутационную таблицу, как в примере 8.

Пример 18. Вновь рассмотрим уравнение KdV (2.3). Будем придерживаться тех же обозначений, что и в предыдущем примере, и положим $a(t, x, u, u_1, u_3) = \omega(t, x, u, u_x, u_t)$. Определяющее уравнение на функцию a имеет вид

$$D_t(a) = D_x^3(a) + 6uD_x(a) + 6u_1 a.$$

Расписав его, получим, после некоторых сокращений, уравнение

$$\begin{aligned} a_t + a_u u_3 + a_{u_1}(u_4 + 6u_1^2) + a_{u_3}(u_6 + 24u_1u_3 + 18u_2^2) = \\ = D_x^2(a_x + a_u u_1 + a_{u_1}u_2 + a_{u_3}u_4) + 6ua_x + 6u_1 a. \end{aligned} \tag{2.15}$$

Вычисляя коэффициент при u_5, получаем соотношение $D_x(a_{u_3}) = 0$, откуда следует

$$a = \alpha(t)u_3 + b(t, x, u, u_1).$$

Подставляя в (2.15), получаем

$$\begin{aligned} \alpha_t u_3 + b_t + b_u u_3 + b_{u_1}(u_4 + 6u_1^2) + 18\alpha(u_1u_3 + u_2^2) = \\ = D_x^2(b_x + b_u u_1 + b_{u_1}u_2) + 6ub_x + 6u_1 b. \end{aligned} \tag{2.16}$$

Коэффициент при u_3 дает уравнение

$$\alpha_t + 18\alpha u_1 = 3(b_{xu_1} + b_{uu_1}u_1 + b_{u_1u_1}u_2),$$

которое, в свою очередь, расщепляется по u_2. Полагая сначала $b = \beta u_1 + c$, получаем уравнения $\alpha_t = 3\beta_x; 6\alpha = \beta_u$, из которых следует, что b имеет вид

$$b = (6\alpha u + \frac{\alpha_t}{3}x + \gamma(t))u_1 + c(t, x, u).$$

Подстановка в (2.16) дает

$$(4\alpha_t u + \frac{\alpha_{tt}}{3}x + \gamma_t)u_1 + c_t =$$

$$= D_x^2(c_x) + D_x^2(c_u)u_1 + 2D_x(c_u)u_2 + 6uc_x + 6u_1c. \qquad (2.17)$$

Коэффициент при u_2 дает $D_x(c_u) = 0$, откуда $c = \delta(t)u + d(t, x)$, и подставляя это выражение в (2.17), имеем

$$(4\alpha_t u + \frac{\alpha_{tt}}{3}x + \gamma_t)u_1 + \delta_t u + d_t = d_{xxx} + 6ud_x + 6u_1(\delta u + d).$$

Приравнивая нулю коэффициенты при uu_1, u_1 и u, получаем систему уравнений

$$\delta = \frac{2}{3}\alpha_t; \quad \delta_t = 6d_x; \quad 6d = \frac{\alpha_{tt}}{3}x + \gamma_t; \quad d_t = d_{xxx}$$

которая легко решается:

$$\alpha = 3C_1t + C_2; \quad \gamma = 6C_3t + C_4; \quad \delta = 2C_1; \quad d = C_3.$$

Осталось собрать все воедино. Имеем

$$a = \alpha u_3 + (6\alpha u + \frac{\alpha_t}{3}x + \gamma)u_1 + \delta u + d,$$

или, возвращаясь к ω,

$$\begin{aligned} \omega &= \alpha u_t + (\frac{\alpha_t}{3}x + \gamma)u_1 + \delta u + d = \\ &= (3C_1t + C_2)u_t + (C_1x + 6C_3t + C_4)u_x + 2C_1u + C_3. \end{aligned}$$

В этом примере, как и в предыдущем, все симметрии точечные. Алгебра симметрий 4-мерна, в качестве базиса можно принять векторные поля (выписаны X^0)

$$X_1 = 3t\partial_t + x\partial_x - 2u\partial_u; \quad X_2 = \partial_t; \quad X_3 = 6t\partial_x - \partial_u; \quad X_4 = \partial_x$$

со следующими коммутационными соотношениями:

	X_1	X_2	X_3	X_4
X_1	0	$-3X_2$	$2X_3$	$-X_4$
X_2		0	$6X_4$	0
X_3			0	0
X_4				0

Легко найти и соответствующие групповые преобразования:

$$
\begin{array}{llll}
X_1: & \tilde{t} = e^{3a}t; & \tilde{x} = e^{a}x; & \tilde{u} = e^{-2a}u; \quad \text{(растяжение)}; \\
X_2: & \tilde{t} = t + a; & \tilde{x} = x; & \tilde{u} = u; \quad \text{(сдвиг по } t\text{)}; \\
X_3: & \tilde{t} = t; & \tilde{x} = x + 6at; & \tilde{u} = u - a; \quad \text{(преобразование} \\
 & & & \quad \text{Галилея)}; \\
X_4: & \tilde{t} = t; & \tilde{x} = x + a; & \tilde{u} = u \quad \text{(сдвиг по } x\text{)}.
\end{array}
$$

2.3. Инвариантные решения

Универсальный путь решения краевой задачи для уравнения в частных производных состоит в том, чтобы сначала найти общее решение уравнения, а затем уточнить его вид, подставив в граничные и начальные условия. Недостатком этого метода является то, что нахождение общего решения часто является очень трудной, а иногда и неразрешимой задачей. В некоторых случаях оказывается достаточным искать решение в какой-то частной форме. Это происходит, когда краевые условия имеют специальный вид.

Решения некоторых типов встречаются настолько часто, что им присваиваются особые названия: стационарные, 2- или 1-мерные, радиально- или аксиально-симметрические, автомодельные, решения типа бегущей волны и так далее. Употребляются и более специфические (то есть применимые к отдельным уравнениям или типам уравнений) названия, например, цилиндрическая волна, плоская волна, солитон. Все эти решения можно рассматривать как частные случаи общего понятия *инвариантного реше-*

ния. Прежде чем давать общее определение, рассмотрим простой пример.

Пример 19. (Сферическая волна) Дано волновое уравнение

$$u_{tt} = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} \tag{2.18}$$

с начальными условиями $u|_{t=0} = \varphi(r); u_t|_{t=0} = \psi(r)$, зависящими только от радиуса $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Интуитивно ясно, что решение будет зависеть только от r в любой момент времени, что позволяет ограничиться поиском решений частного вида $u = v(t, r)$. Чтобы записать уравнение на функцию v, мы должны выразить производные u по t, x, y, z через производные v по t, r. Например, имеем $r_x = x/r$, откуда

$$u_x = \frac{x}{r} v_r; \quad u_{xx} = \left(\frac{1}{r} - \frac{x^2}{r^3}\right) v_r + \frac{x^2}{r^2} v_{rr}.$$

Подставляя в уравнение, получаем

$$v_{tt} = \left(\frac{3}{r} - \frac{x^2 + y^2 + z^2}{r^3}\right) v_r + \left(\frac{x^2 + y^2 + z^2}{r^2}\right) v_{rr} = \frac{2}{r} v_r + v_{rr}. \tag{2.19}$$

Вводя обозначение $w = rv$, сводим нашу задачу к одномерной задаче на полуоси:

$$\begin{aligned} &w_{tt} = w_{rr}, \quad r > 0; \\ &w(0, r) = r\varphi(r); \quad w_t(0, r) = r\psi(r); \quad w(t, 0) = 0. \end{aligned}$$

Обратите внимание на то, как в формуле (2.19) сократились все “лишние” переменные. Понятно, что если бы этого не произошло, то подстановка $u = v(t, r)$ была бы некорректной. Иначе говоря, требуется не только, чтобы краевые условия были специального вида, но и чтобы само уравнение было как-то согласовано с искомым видом решения. В рассмотренном примере это “интуитивно ясно” из физического смысла уравнения.

Определение 7. *Пусть G — некоторая группа точечных симметрий уравнения в частных производных $F(x, u, u_\sigma) = 0$. Решение $u = f(x)$ называется инвариантным относительно группы G, или G-инвариантным, если для любого преобразования T : $(x, u) \mapsto (\tilde{x}, \tilde{u})$ из группы выполняется равенство $\tilde{u} = f(\tilde{x})$.*

Общий вид G-инвариантных функций задается неявной формулой

$$\Phi(h_1, \ldots, h_s) = 0, \tag{2.20}$$

где Φ — произвольная функция, а $h_i(x_1, \ldots, x_m, u)$, $i = 1, \ldots, s$ — полный набор функционально-независимых инвариантов нулевого порядка группы G. Число s таких инвариантов равно $m + 1 - d$, где d — размерность орбит группы G. Для однопараметрических групп, очевидно, $d = 1$ и, следовательно, $s = m$, но для r-параметрических групп размерность орбит может быть и меньше r.

Отсюда вытекает следующий способ построения G-инвариантных решений. Выбираем один из инвариантов в качестве новой зависимой переменной v, а остальные считаем новыми независимыми переменными $y_1, \ldots, y_{s-1}$. Конечно, замена $(x, u) \to (y, v)$ вырождена, но в силу того, что само уравнение допускает G в качестве группы симметрий, его можно переписать в новых переменных. Такая процедура называется редукцией. (На практике бывает удобно дополнить набор переменных (y, v) какими-нибудь "лишними" переменными так, чтобы замена стала невырожденной. После осуществления замены эти переменные сократятся.) Решая редуцированное уравнение, мы тем самым уточняем вид функции Φ в (2.20).

Вернемся к примеру 19. Нетрудно понять, что фактически мы нашли решения, инвариантные относительно 3-параметрической группы $SO(3)$ вращений 3-мерного пространства $\mathbb{R}^3$:

$$\tilde{t} = t; \quad \widetilde{X} = AX; \quad \tilde{u} = u,$$

где $X = (x, y, z)$, $A \in SO(3)$. Орбиты этой группы есть двумерные сферы, и поэтому мы имеем $3 = 5 - 2$ инварианта t, r, u.

В теории инвариантных решений возникают два основных вопроса. Они достаточно сложны, и мы только зафиксируем внимание читателя на них (по этому поводу см., напр., [5,6]).

1) Классификация инвариантных решений. Обычно ищутся решения, инвариантные относительно не всей группы симметрий G, а только относительно какой-то подгруппы G_0 (например, можно показать, что полная группа симметрий уравнения (2.18) 10-мерна). При этом каждой подгруппе отвечают свои решения. Однако не все они различаются по существу, так как решения, соответствующие сопряженным подгруппам G_0 и TG_0T^{-1}, переводятся друг в друга преобразованием T. (Например, можно искать решение уравнения (2.18) в виде плоской волны, распространяющейся в направлении $\vec{a} \in \mathbb{R}^3$. Это есть решение, инвариантное относительно сдвигов в направлениях, перпендикулярных $\vec{a}$. Однако, учитывая вращение, мы можем ограничиться изучением плоских волн, распространяющихся вдоль оси x.) Таким образом, возникает задача классификации подгрупп группы G относительно сопряжения.

2) Исследование редуцированного уравнения. Допустим, мы ищем решения, инвариантные относительно подгруппы G_0. Спрашивается, что при этом происходит с остальными симметриями? Оказывается, что часть из них может перейти в симметрии редуцированного уравнения, а другая часть может пропасть, причем ответ зависит от структуры алгебры симметрий. С другой стороны, в редуцированном уравнении могут появиться дополнительные симметрии.

Для уравнений с двумя независимыми переменными достаточно 1-параметрической подгруппы симметрий, чтобы редуцировать его к обыкновенному уравнению. Рассмотрим уравнение KdV (2.3), группа симметрий которого была вычислена в примере 18.

Пример 20. 1) Бегущие волны. Найдем решения, инвариантные относительно симметрии $X = X_2 + cX_4 = \partial_t + c\partial_x$. Очевидно, это векторное поле имеет инварианты $v = u$ и $y = x - ct$, так что уравнение допускает редукцию $u(x,t) = v(x - ct)$. На функцию v получаем обыкновенное уравнение

$$v''' + 6vv' + cv' = 0,$$

которое допускает достаточно большую алгебру симметрий (какую?) и поэтому легко решается. Интегрируя, получаем $v'' + 3v^2 + cv + c_1 = 0$, затем домножаем на v' и вновь интегрируем:

$$(v')^2 + P(v) = 0; \quad P(v) = 2v^3 + cv^2 + 2c_1 v + c_2.$$

Таким образом, общий вид бегущей волны для уравнения KdV выражается через эллиптические функции. Рассмотрим частный случай, когда полином $P(v)$ имеет кратный корень: пусть

$$P(v) = 2(v - \alpha)(v - \beta)^2; \quad \alpha - \beta = \gamma; \quad \alpha + 2\beta = -\frac{c}{2}.$$

Обозначая $v = \alpha - \frac{1}{2}w^2$, получаем уравнение

$$\pm 2w' = 4\gamma^2 - w^2,$$

которое легко решается: $w = \mp 2\gamma \operatorname{th}(\gamma(y + \varepsilon))$. Соответствующее решение исходного уравнения называется *солитоном*

$$u = -\frac{1}{6}(c + 4\gamma^2) + \frac{2\gamma^2}{\operatorname{ch}^2(\gamma(x - ct + \varepsilon))}. \tag{2.21}$$

2) Галилеевски-инвариантные решения. Рассмотрим комбинацию преобразования Галилея и сдвига по t : $X = X_3 + cX_2 = 6t\partial_x - \partial_u + c\partial_t$. В данном случае инвариантами служат величины $v = u + at$ и $y = x - 3at^2$, где $a = 1/c$, так что уравнение допускает редукцию $u(x,t) = v(x - 3at^2) - at$. На функцию v получаем уравнение $v''' + 6vv' - a = 0$, которое можно проинтегрировать один раз:

$$v'' + 3v^2 - ay + b = 0.$$

Это уравнение эквивалентно так называемому первому уравнению Пенлеве

$$w'' = 6w^2 + z,$$

которое не решается в элементарных функциях (можно проверить, что оно не обладает симметриями).

Пример 21. Иногда по известным симметриям уравнения можно построить и его общее решение. В качестве примера рассмотрим модельное уравнение газовой динамики — уравнение Хопфа

$$u_t = uu_x.$$

Будем записывать симметрии в эволюционном виде. Легко проверить, что любое уравнение вида $u_{t_1} = f(u)u_x$, где f—произвольная дифференцируемая функция, является симметрией уравнения Хопфа. Кроме того, инвариантность относительно растяжения независимых переменных приводит к симметрии $u_{t_2} = tu_t + xu_x$. Рассмотрим теперь стационарную часть симметрии $\partial_{t_1} + \partial_{t_2}$. Полученное уравнение $(f(u)+tu+x)u_x = 0$, очевидно, имеет два типа решений: $u = \mathrm{const}$ и $f(u) + tu + x = 0$. Эти формулы дают общее решение уравнения Хопфа, в чем можно убедиться, сравнив их с общим решением $F(u, tu + x) = 0$, полученным по стандартному методу характеристик.

3. Высшие симметрии

3.1. Теорема Бэклунда

В заключение нашего знакомства с классическим групповым анализом зададимся вопросом: а нельзя ли обобщить понятие точечных и контактных преобразований и тем самым ввести в игру симметрии более общего вида, чем (1.24)? Для простоты рассмотрим сначала случай одной независимой переменной. Сравнивая

формулы (1.2) и (1.8), можно прийти к преобразованиям вида

$$\begin{gathered}\tilde{x} = P(x, u, u_1, \ldots, u_k); \quad \tilde{u} = Q(x, u, u_1, \ldots, u_k); \\ \tilde{u}_1 = Q^1(x, u, u_1, \ldots, u_k), \ \ldots; \ \tilde{u}_k = Q^k(x, u, u_1, \ldots, u_k),\end{gathered} \tag{3.1}$$

где функции $P, Q, Q^1, \ldots, Q^k$ подчиняются соотношениям типа (1.9). Точнее, ограничения на эти функции выводятся из "естественного" требования о сохранении смысла обозначений u_j как производных u по x, то есть из условия $\tilde{u}_j = d^j\tilde{u}/d\tilde{x}^j$. По научному это требование называется сохранением "контактной структуры" или "распределения Картана" в пространстве переменных x, u. Распределение Картана — это линейное пространство C дифференциальных форм с базисом

$$du_i - u_{i+1}dx.$$

Замена (3.1) должна переводить $\widetilde{C}$ в C, то есть каждая из форм $d\tilde{u}_i - \tilde{u}_{i+1}d\tilde{x} = dQ^i - Q^{i+1}dP$ должна представляться в виде линейной комбинации форм из C. Преобразование (3.1), удовлетворяющее этому условию, называется касательным преобразованием k-го порядка. Оказывается, однако, что такое обобщение ни к чему новому не приводит. Докажем это для случая $k = 2$, то есть для преобразований вида

$$\tilde{x} = P; \ \tilde{u} = Q; \ \tilde{u}_1 = Q^1; \ \tilde{u}_2 = Q^2, \tag{3.2}$$

где все 4 функции зависят от переменных x, u, u_1, u_2.

Утверждение 1. *Любое невырожденное касательное преобразование вида (3.2) является продолжением контактного преобразования вида (1.8).*

Доказательство. Дифференцируя по x равенства $\tilde{u}(P) = Q$, $\tilde{u}_1(P) = Q^1$, получаем, что функции P, Q, Q^1, Q^2 должны быть связаны соотношениями (упражнение: выведите их, пользуясь понятием распределения Картана)

$$Q^1 D_x(P) = D_x(Q); \quad Q^2 D_x(P) = D_x(Q^1)$$

или, более подробно,

$$Q^1 P_{u_2} = Q_{u_2}; \tag{3.3}$$
$$Q^2 P_{u_2} = Q^1_{u_2}; \tag{3.4}$$
$$Q^1(P_x + P_u u_1 + P_{u_1} u_2) = Q_x + Q_u u_1 + Q_{u_1} u_2; \tag{3.5}$$
$$Q^2(P_x + P_u u_1 + P_{u_1} u_2) = Q^1_x + Q^1_u u_1 + Q^1_{u_1} u_2. \tag{3.6}$$

Из (3.3), (3.4) видим, что если хотя бы одна из производных P_{u_2}, Q_{u_2}, $Q^1_{u_2}$ тождественно равна 0, то и обе другие тоже; при этом мы получаем, что (3.2) есть продолжение контактного преобразования.

Допустим, что $P_{u_2}, Q_{u_2}, Q^1_{u_2}$ не равны тождественно нулю. Дифференцирование (3.3) по x дает

$$Q_{xu_2} + Q_{uu_2} u_1 + Q_{u_1 u_2} u_2 =$$
$$= (Q^1_x + Q^1_u u_1 + Q^1_{u_1} u_2) P_{u_2} + Q^1 (P_{xu_2} + P_{uu_2} u_1 + P_{u_1 u_2} u_2).$$

Заменяя первое слагаемое в правой части в силу (3.6),(3.4), имеем

$$(Q_x + Q_u u_1 + Q_{u_1} u_2)_{u_2} - Q_{u_1} =$$
$$= Q^1_{u_2}(P_x + P_u u_1 + P_{u_1} u_2) + Q^1 (P_x + P_u u_1 + P_{u_1} u_2)_{u_2} - Q^1 P_{u_1}.$$

Сравнивая с формулой (3.5), получаем соотношение

$$Q_{u_1} = Q^1 P_{u_1}. \tag{3.7}$$

Перекрестное дифференцирование с (3.3) дает

$$Q^1_{u_2} P_{u_1} = Q^1_{u_1} P_{u_2}, \tag{3.8}$$

откуда, с учетом (3.4), имеем

$$Q^1_{u_1} = Q^2 P_{u_1}.$$

Опять осуществляя перекрестное дифференцирование, находим

$$Q^2_{u_2} P_{u_1} = Q^2_{u_1} P_{u_2}. \tag{3.9}$$

Сравнивая формулы (3.3),(3.4),(3.7),(3.8) и (3.9), получаем

$$\frac{P_{u_1}}{P_{u_2}} = \frac{Q_{u_1}}{Q_{u_2}} = \frac{Q^1_{u_1}}{Q^1_{u_2}} = \frac{Q^2_{u_1}}{Q^2_{u_2}},$$

откуда следует, что якобиан преобразования (3.2) равен 0. Полученное противоречие завершает доказательство. ∎

Ситуация становится еще беднее при переходе от скалярных уравнений к системам. В общем случае системы уравнений в частных производных по m независимым переменным $x_1, \ldots, x_m$ от n зависимых $u^1, \ldots, u^n$ определение касательного преобразования k-го порядка формулируется аналогично предыдущему, с той лишь разницей, что теперь распределение Картана натянуто на формы

$$du^j_\sigma - u^j_{\sigma,1}dx_1 - \ldots - u^j_{\sigma,m}dx_m.$$

Оказывается, что в этом случае смысл теряет даже понятие контактного преобразования. Убедимся в этом на простейшем примере $m = 1, n = 2$. Обозначив для краткости $u^1 = u, u^2 = v$, рассмотрим преобразование

$$\tilde{x} = P;\ \tilde{u} = Q;\ \tilde{v} = R;\ \tilde{u}_1 = Q^1;\ \tilde{v}_1 = R^1, \tag{3.10}$$

где все 5 функций зависят от переменных x, u, v, u_1, v_1.

Утверждение 2. *Любое невырожденное касательное преобразование вида (3.10) является продолжением точечного преобразования, то есть функции P, Q, R не зависят от u_1, v_1.*

Доказательство. Дифференцируя по x равенства $\tilde{u}(P) = Q$, $\tilde{v}(P) = R$, получаем $Q^1 D_x(P) = D_x(Q),\ R^1 D_x(P) = D_x(R)$, откуда имеем

$$Q^1 P_{u_1} = Q_{u_1}; \quad Q^1 P_{v_1} = Q_{v_1}; \tag{3.11}$$

$$R^1 P_{u_1} = R_{u_1}; \quad R^1 P_{v_1} = R_{v_1}. \tag{3.12}$$

Перекрестное дифференцирование дает

$$Q^1_{v_1}P_{u_1} = Q^1_{u_1}P_{v_1}, \quad R^1_{v_1}P_{u_1} = R^1_{u_1}P_{v_1}. \tag{3.13}$$

Из (3.11) и (3.12) видим, что P_{u_1}, Q_{u_1} и R_{u_1} обращаются в 0 одновременно, так же как и $P_{v_1}, Q_{v_1}, R_{v_1}$. Допустим сначала, что хотя бы одна из этих троек, например, первая, не равна тождественно нулю. Тогда из (3.11) — (3.13) имеем

$$Q_{v_1} = Q_{u_1}\frac{P_{v_1}}{P_{u_1}};\ R_{v_1} = R_{u_1}\frac{P_{v_1}}{P_{u_1}};\ Q^1_{v_1} = Q^1_{u_1}\frac{P_{v_1}}{P_{u_1}};\ R^1_{v_1} = R^1_{u_1}\frac{P_{v_1}}{P_{u_1}},$$

то есть якобиан преобразования равен 0. Полученное противоречие завершает доказательство. ∎

Доказанные утверждения являются частными случаями следующей общей теоремы. Доказательство технически достаточно сложно, и мы не будем его приводить. (Инфинитезимальный вариант см. в [4].)

Теорема 11. (Бэклунд) *Пусть Φ есть невырожденное касательное преобразование k-го порядка в пространстве независимых переменных $x_1, \ldots, x_m$ и зависимых переменных $u^1, \ldots, u^n$. Тогда, если $n > 1$, то Φ есть продолжение точечного преобразования, а если $n = 1$ — контактного.*

Как видим, увеличение числа независимых переменных, то есть переход от обыкновенных уравнений к уравнениям в частных производных, не столь губителен для контактных преобразований, как переход от скалярного уравнения к системе.

Замечание 2. Если от требования сохранения контактной структуры отказаться, то запас допустимых преобразований, конечно, можно расширить. Например, мы можем записать обыкновенное уравнение $(k+1)$-го порядка $u_{k+1} = F(x, u, \ldots, u_k)$ в виде системы

$$u_x = u_1,\ u_{1,x} = u_2,\ \ldots,\ u_{k,x} = F(x, u, \ldots, u_k) \tag{3.14}$$

и рассмотреть произвольное преобразование вида (3.1), воспринимая его просто как точечное преобразование переменных $x, u, u_1, \ldots, u_k$. Разумеется, диагональная структура системы (3.14) при этом преобразовании, вообще говоря, разрушится. Контактные преобразования характеризуются тем, что они сохраняют диагональность системы (3.14) для любого уравнения. В то же время для каждого отдельно взятого уравнения существуют преобразования, обладающие этим свойством, но отличные от контактных. Таково, например, преобразование $\tilde{x} = x$; $\tilde{u} = Q$; $\tilde{u}_j = D_x^j(Q)$, где $Q(x, u, u_1, \ldots, u_k)$ — произвольная функция, а дифференцирование происходит в силу уравнения, то есть $D_x = \partial_x + u_1\partial_u + \ldots + u_k\partial_{u_{k-1}} + F\partial_{u_k}$. Среди таких преобразований могут встретиться даже такие, которые не меняют уравнение, то есть своего рода симметрии. Пример: уравнение $u_{k+1} = u$ инвариантно относительно потенциирования $\tilde{u} = u_1$, которое для уравнения является обратимым преобразованием ($u = \tilde{u}_k$). Однако для уравнений в частных производных такие трюки не проходят.

3.2. Высшие симметрии

Из теоремы Бэклунда следует, что не существует групп преобразований, отличных от контактных или точечных. Это препятствие можно преодолевать по-разному. Путь, намеченный в конце предыдущего раздела, заключается в отказе от требования касательности. Отказ от обратимости приводит к понятию преобразований Бэклунда (см. пример в разделе 4.3). В последнее время наиболее широкое развитие получил путь, предложенный Эмми Нётер (1918) и заключающийся в отказе от понятия преобразования. Выше мы уже могли убедиться, что с самими преобразованиями все равно неудобно работать, и на практике вместо них всегда рассматривают инфинитезимальные образующие, то есть работают с алгеброй Ли вместо группы. При этом, как видно из формулы (2.11), по существу, достаточно рассматривать эволюци-

онные дифференцирования

$$\nabla_\omega = \sum_\sigma D^\sigma(\omega)\partial_{u_\sigma}. \tag{3.15}$$

Обобщение понятия классической симметрии происходит при отказе от требования, чтобы характеристика ω зависела только от x, u и производных первого порядка.

Определение 8. *Векторное поле (3.15) называется симметрией k-го порядка уравнения $F = 0$, если оно удовлетворяет определяющему уравнению $\nabla_\omega(F)|_{F=0} = 0$ и старший порядок производных, от которых зависит функция ω, равен k. Пространство всех симметрий порядка не выше, чем k, обозначается* $\mathrm{Sym}_k(F)$.

Менее формально высшую симметрию можно определить как эволюционное уравнение (дальнейшее обобщение может состоять в отказе от эволюционности...)

$$u_\tau = \omega, \tag{3.16}$$

совместное с исходным уравнением (ср. с задачей 6). Действительно, ∇_ω есть дифференцирование в силу уравнения (3.16). Вспомогательная независимая переменная τ является аналогом группового параметра a в классических симметриях.

Вычисление высших симметрий, по существу, ничем не отличается от вычисления классических. Единственная сложность заключается в том, что мы должны заранее зафиксировать порядок производных, от которых зависит ω.

Задача 12. Найдите симметрию 5-го порядка для уравнения KdV (2.3).

Как мы увидим в дальнейшем, уравнение KdV имеет бесконечно много симметрий (все они нечетного порядка). Однако доказательство этого факта весьма нетривиально. Для линейных уравнений ситуация значительно проще. Любое линейное уравнение с

постоянными коэффициентами $L_0(u) = 0$ имеет бесконечно много симметрий вида $u_\tau = L(u)$.

Пример 22. Уравнение $u_{xy} = 0$ допускает высшую симметрию $u_\tau = \omega = D_x^n(u)$. Действительно, $\nabla_\omega(u_{xy}) = D_x D_y(\omega) = D_x^n(u_{xy}) = 0$ в силу уравнения.

Пример 23. Рассмотрим пропотенциированное уравнение Бюргерса

$$v_t = v_2 + v_1^2. \tag{3.17}$$

Нетрудно найти его симметрии 3-го и 4-го порядков:

$$v_{t_3} = v_3 + 3v_1v_2 + v_1^3; \quad v_{t_4} = v_4 + 4v_1v_3 + 3v_2^2 + 6v_1^2v_2 + v_1^4.$$

Возникает вопрос, существуют ли симметрии более высоких порядков? Для уравнения (3.17) ответить на этот вопрос очень просто. Действительно, точечная замена $v = \ln w$ переводит его в линейное уравнение теплопроводности $w_t = w_2$, которое обладает высшими симметриями $w_{t_n} = w_n$. Обратная замена показывает, что для любого n существует симметрия n-го порядка

$$v_{t_n} = e^{-v} D_x^n(e^v) = Y_n(v_1, v_2, \ldots, v_n).$$

Очевидно, эти симметрии можно находить по рекуррентной формуле

$$Y_{n+1} = L(Y_n) = (D_x + v_1)(Y_n).$$

Оператор L, обладающий свойством переводить симметрии в симметрии, называется оператором рекурсии. В данном примере это дифференциальный оператор, но, вообще говоря, он может быть и псевдодифференциальным, то есть содержать выражения с D_x^{-1}.

Обычное уравнение Бюргерса

$$u_t = u_2 + 2uu_1 \tag{3.18}$$

получается из (3.17) после дифференцирования $v_1 = u$. Оно связано с уравнением теплопроводности подстановкой Коула-Хопфа

$u = w_1/w$. Очевидно, симметрии (3.17) переходят при дифференцировании в симметрии (3.18), например

$$u_{t_3} = u_3 + 3uu_2 + 3u_1^2 + 3u^2u_1.$$

Рекуррентное соотношение для их вычисления принимает вид

$$u_{t_{n+1}} = L(u_{t_n}); \quad L = D_x + u + u_1 D_x^{-1}. \tag{3.19}$$

Замечание 3. В комбинаторике полиномы Y_n от переменных v_i называются полиномами Белла. Имеем

$$1 + \sum_1^\infty Y_n \frac{\lambda^n}{n!} = 1 + \sum_1^\infty \frac{D_x^n(e^v)}{e^v} \frac{\lambda^n}{n!} = e^{v(x+\lambda)-v(x)}.$$

Разлагая $v(x+\lambda)$ в ряд Тейлора, получаем производящую функцию для Y_n :

$$1 + \sum_1^\infty Y_n \frac{\lambda^n}{n!} = \exp(\sum_1^\infty v_n \frac{\lambda^n}{n!}).$$

3.3. Интегрируемые уравнения

Нелинейные уравнения, как правило, не имеют высших симметрий, и поэтому это понятие долгое время не находило приложений. Интерес к высшим симметриям подскочил за последние 30 лет в связи с открытием очень важного и интересного, хотя и исключительного, класса нелинейных уравнений — так называемых *солитонных* или *интегрируемых* уравнений. Уравнения Бюргерса и KdV, рассмотренные выше, являются интегрируемыми. Кроме них, характерными представителями этого класса служат уже упоминавшееся уравнение KdV, нелинейное уравнение Шредингера

$$-iu_t = u_{xx} + 2|u|^2 u, \quad u \in \mathbb{C},$$

уравнение Ландау-Лифшица

$$u_t = [u, u_{xx} + Ju], \quad u \in \mathbb{R}^3, \quad \langle u, u \rangle = 1, \quad J = \mathrm{diag}(J_1, J_2, J_3),$$

уравнение синус-Гордона

$$u_{xy} = \sin u,$$

уравнение Кадомцева-Петвиашвили

$$D_x(u_t - 6uu_x + u_{xxx}) = \pm 3u_{yy}.$$

Кроме уравнений в частных производных, в этот класс входят и уравнения других типов. Например, цепочка Вольтерра

$$u_{n,x} = u_n(u_{n+1} - u_{n-1}), \quad n \in \mathbb{Z}$$

и цепочка Тоды

$$q_{n,xx} = e^{q_{n+1}-q_n} - e^{q_n - q_{n-1}}, \quad n \in \mathbb{Z}$$

являются дифференциально-разностными уравнениями. По своим свойствам цепочки напоминают одновременно и уравнения в частных производных, и системы обыкновенных уравнений. Есть даже чисто разностные примеры — так называемые интегрируемые отображения. Например, один из дискретных аналогов уравнения Ландау-Лифшица имеет вид

$$u_{n+1} = 2\frac{\langle Ju_n, u_{n-1}\rangle}{\langle Ju_n, Ju_n\rangle} Ju_n - u_{n-1},$$

где, как и в непрерывном случае, $J = \mathrm{diag}(J_1, J_2, J_3)$, $u_n \in \mathbb{R}^3$, $\langle u_n, u_n\rangle = 1$.

Задача 13. Запрограммируйте указанное отображение и понаблюдайте за его итерациями.

Всего известно, должно быть, около тысячи интегрируемых уравнений и современные исследования постоянно увеличивают это число. Разумеется, уравнения, связанные контактным преобразованием, например уравнения (2.2) и (2.3), считаются за одно. Впрочем, список уравнений можно значительно уменьшить при

помощи дифференциальных подстановок — необратимых преобразований, простейшим представителем которых служит подстановка Коула-Хопфа из примера 23.

Некоторые из интегрируемых уравнений были известны очень давно. Например, уравнение KdV было выведено в 1895 г. для описания волн на мелкой воде. Сама волна вида (2.21) была экспериментально открыта еще раньше, в 1834 г. Наблюдавший ее в узком канале Джон Скотт Рассел назвал ее *great solitary wave of translation*, откуда потом и произошло слово *солитон* . Уравнение синус-Гордона также возникло в прошлом веке из дифференциальной геометрии, цепочка Вольтерра была введена в 20-х годах. Однако большинство замечательных свойств этих уравнений оставались неизвестными до последнего времени. Началом современной солитонной науки принято считать 1967 г., когда уравнение KdV было проинтегрировано при помощи обратной задачи рассеяния (развитой в 50-х годах в рамках квантовой механики).

Характерными признаками интегрируемых уравнений являются следующие свойства. Как правило, в том или ином варианте они есть у каждого интегрируемого уравнения.

1) Наличие бесконечномерной алгебры (иерархии) высших симметрий. Очень часто это свойство принимается за определение интегрируемого уравнения. Такое определение настолько эффективно, что позволяет классифицировать интегрируемые уравнения и отвечать на вопрос, является ли заданное уравнение интегрируемым. Этот вопрос очень важен, так как близкие по форме уравнения могут обладать совершенно различными свойствами. Например, сферическое уравнение KdV $u_t = u_3 + 6uu_1 - u/t$ в отличие от (2.2) неинтегрируемо. В разработке симметрийного подхода к интегрируемым уравнениям следует отметить заслуги уфимской школы под руководством Н.Х. Ибрагимова и А.Б. Шабата.

2) Бесконечная серия законов сохранения. Связи между симметриями и законами сохранения, то есть соотношениями вида

$\mathrm{Div}(p) = 0$, выполняющимися на уравнении, весьма тесны и имеют множество приложений, но мы не затрагиваем здесь эту важную тему.

3) Богатый набор точных решений. Солитоноподобными решениями типа бегущей волны обладают и очень многие неинтегрируемые уравнения. Настоящие солитоны отличаются тем, что после взаимодействия друг с другом они восстанавливают свою форму. Многосолитонными решениями обладают только интегрируемые уравнения.

Более специальными свойствами или, скорее, даже механизмами, обеспечивающими интегрируемость, являются следующие:

4) Представление уравнения в виде условия совместности вспомогательных линейных уравнений (представление Лакса или нулевой кривизны). Например, легко убедиться, что уравнение KdV (2.3) является условием совместности уравнений

$$\psi_{xx} = -(u + \lambda)\psi; \quad \psi_t = (2u - 4\lambda)\psi_x - u_x\psi$$

(первое из них является одномерным стационарным уравнением Шредингера с потенциалом $-u$, что и объясняет упоминавшуюся выше связь с квантовой механикой).

5) Оператор рекурсии и мастер-симметрии — способы построения высших симметрий.

6) Бигамильтонова структура — способ построения оператора рекурсии.

7) Автопреобразование Бэклунда. Так называется необратимое в обе стороны преобразование (обычно композиция двух дифференциальных подстановок), переводящее уравнение в частных производных в себя. В отличие от классических симметрий, это преобразование не содержит группового параметра, то есть по свойствам оно ближе к дискретным симметриям. Наиболее известным и старым примером (Бэклунд, 1882 г.) является преобра-

зование

$$\frac{1}{2}(u_x + v_x) = a \sin \frac{u - v}{2}; \quad \frac{1}{2}(u_y - v_y) = \frac{1}{a} \sin \frac{u + v}{2}.$$

Проверьте, что в силу этих соотношений каждая из переменных u и v удовлетворяет уравнению синус-Гордона.

8) Свойство Пенлеве. Интегрируемые уравнения обладают замечательными формально-алгебраическими свойствами, а их решения обладают замечательными аналитическими свойствами, такими, как отсутствие подвижных существенно особых точек в общем решении.

3.4. Граничные условия, совместимые с симметриями

Как мы видели выше, симметрии позволяют строить частные решения уравнения. При этом интегрируемые уравнения выделены тем, что допускают весьма широкий класс явных решений (солитонных и конечнозонных). Но, как известно, иногда в приложениях важны решения, удовлетворяющие некоторым дополнительным условиям, например, краевым условиям, заданным вдоль прямой $x = 0$ на плоскости x, t. На вопрос о том, может ли решение, инвариантное относительно заданной симметрии, удовлетворять заданному краевому условию, другими словами, являются ли симметрия и краевое условие совместимыми друг с другом, можно ответить эффективно, не находя самого этого решения явно. Существуют краевые условия, совместимые с бесконечномерной подалгеброй симметрий. Мы называем такие краевые условия совместимыми с интегрируемостью.

Рассмотрим интегрируемое уравнение эволюционного типа

$$u_t = f(u, u_1, u_2, \ldots, u_n), \tag{3.20}$$

где $u = u(x, t)$—искомая функция, а нижний индекс обозначает порядок частной производной по x: $u_i = \frac{\partial^i u}{\partial x^i}$. Соотношение вида

$$p(u, u_1, u_2, \ldots, u_k, t)|_{x=0} = 0, \tag{3.21}$$

наложенное в точке $x = 0$, будем называть граничным (краевым) условием в точке $x = 0$. Здесь $p = (p_1, p_2, \ldots, p_s)$ — s-мерный вектор, $s < n$, то есть граничное условие состоит из s скалярных равенств. Граничную задачу (3.20), (3.21) (иногда просто граничное условие (3.21)) будем называть совместимой с симметрией уравнения (3.20)

$$u_\tau = g(u, u_1, \ldots, u_m), \tag{3.22}$$

если для достаточно широкого класса начальных данных уравнения (3.20) и (3.22) имеют совместное решение, удовлетворяющее граничному условию (3.21). Строго говоря, мы имеем в виду следующее. Продифференцировав соотношение (3.21) по переменной τ, получим соотношение

$$\sum_{i=0}^{k} \frac{\partial p}{\partial u_i}(u_i)_\tau = 0, \tag{3.23}$$

где производные по τ следует заменить в силу уравнения (3.22).

Определение 9. *Граничная задача (3.20), (3.21) называется совместимой с симметрией (3.22), если соотношение (3.23) выполняется тождественно в силу (3.21) и его дифференциальных следствий, получающихся при дифференцировании по переменной t в силу самого уравнения (3.20).*

Отметим, что поскольку соотношение (3.21) имеет место лишь в фиксированной точке $x = 0$, то его нельзя дифференцировать по переменной x!

Пример 24. Поясним определение на примере граничного условия вида

$$u_1 = f(u)|_{x=0} \tag{3.24}$$

для уравнения Бюргерса (3.18), совместимого с его симметрией четвертого порядка (см. пример 23)

$$u_\tau = u_4 + 4uu_3 + 10u_1u_2 + 6u^2u_2 + 12uu_1^2 + 4u^3u_1. \tag{3.25}$$

Продифференцируем (3.24) по t в силу уравнения Бюргерса и выразим в полученном соотношении переменную u_3 через u и u_2:

$$u_3 = f'(u)(u_2 + 2uf(u)) - 2uu_2 - 2f(u)^2 = f_1(u, u_2).$$

Аналогично, дифференцирование последнего равенства по t позволяет исключить производную пятого порядка: $u_5 = f_2(u, u_2, u_4)$. Дифференцируя затем (3.24) по τ в силу симметрии (3.25), приходим к равенству $u_{1,\tau} = f_u G$, где через G обозначена правая часть симметрии (3.25). Исключим теперь производные по τ в силу (3.25), а переменные u_1, u_3, u_5 — в силу (3.24) и его дифференциальных следствий. Получившееся равенство должно, согласно определению, выполняться тождественно по переменным u, u_2, u_4. Нетрудно проверить, что оно имеет вид $f_{uu} = -2$, то есть $f = -u^2 + C_1 u + C_2$. Ниже мы покажем, что это граничное условие совместимо со всеми однородными симметриями четного порядка уравнения Бюргерса. Более того, если граничное условие (3.24) совместимо хотя бы с одной высшей симметрией, то оно имеет вид $u_1 = -u^2 + C_1 u + C_2$.

Определение 10. *Граничное условие (3.21) будем называть совместимым со свойством интегрируемости уравнения (3.20), если задача (3.20), (3.21) совместима с симметрией уравнения (3.20) сколь угодно высокого порядка.*

Для поиска граничных условий, совместимых с симметриями, удобно перейти к новому набору динамических переменных, состоящему из вектора $v = (u, u_1, u_2, \ldots, u_{n-1})$ и его производных по t: $v_t, v_{tt}, \ldots$. Ясно, что производные u высокого порядка по переменной x, то есть u_i для $i \geq n$, а также уже их производные по t можно выразить через новые динамические переменные в силу уравнения (3.20). Здесь $n-$ порядок уравнения (3.20). Поэтому как симметрию (3.22), так и граничное условие (3.21) можно переписать в терминах новых динамических переменных:

$$v_\tau = G(v, v_t, v_{tt}, \ldots, v_{tt\ldots t}); \tag{3.26}$$

$$p(v, v_t, v_{tt}, \ldots, v_{tt\ldots t}, t) = 0. \tag{3.27}$$

Следующее утверждение является простым следствием этого преобразования и играет ключевую роль при исследовании граничных условий. Фактически оно служит критерием совместимости граничного условия с симметрией.

Теорема 12. *Для того, чтобы граничная задача (3.20), (3.21) была совместима с симметрией (3.22), необходимо и достаточно, чтобы дифференциальная связь (3.27) была согласована с динамикой по τ в силу системы уравнений (3.26), то есть чтобы выполнялось соотношение*

$$D_\tau(p)|_{p=0} = 0. \tag{3.28}$$

В качестве примера мы вновь рассмотрим уравнение Бюргерса (3.18), которое допускает оператор рекурсии

$$L = D_x + u + u_1 D_x^{-1}.$$

Простейшая симметрия этого уравнения $u_\tau = u_1$, соответствующая сдвигу по x, в новых динамических переменных имеет вид

$$\begin{aligned} &u_\tau = u_1; \\ &u_{1,\tau} = u_t - 2uu_1. \end{aligned} \tag{3.29}$$

Нетрудно проверить, что эта система уравнений не допускает связей вида $p(u, u_1) = 0$. Действительно, дифференцируя равенство $p = 0$ по τ, находим

$$\frac{\partial p}{\partial u} u_1 + \frac{\partial p}{\partial u_1}(u_t - 2uu_1) = 0,$$

откуда в силу независимости переменных u_t и u_1 следует, что

$$\frac{\partial p}{\partial u_1} = \frac{\partial p}{\partial u} = 0,$$

иначе говоря, функция p тривиальна $p = \mathrm{const}$ и не определяет никакой связи между переменными u, u_1. Аналогично можно

убедиться, что потоки $u_{\tau_i} = L^i(u_t)$ для нечетных i не допускают связей вида $p(u, u_1) = 0$.

Ниже мы покажем, что симметрии, соответствующие четным i, допускают такие связи.

Теорема 13. *Граничное условие* $c(u_1+u^2)+c_1u+c_2|_{x=0} = 0$ *совместимо с любой симметрией вида* $u_\tau = P(L^2)(u_t)$, *где* $P-$*полином с постоянными коэффициентами.*

Доказательство. Уравнение $\partial_\tau\sigma = \sigma(u, u_1, \dots u_m)$ будет симметрией уравнения Бюргерса (3.18) тогда и только тогда, когда σ удовлетворяет линеаризованному уравнению Бюргерса, то есть уравнению, полученному из (3.18) взятием производной Фреше

$$\partial_t\sigma = (D_x^2 + 2uD_x + 2u_1)(\sigma). \tag{3.30}$$

В качестве новых динамических переменных выберем u, u_1, u_t, $u_{1t}, \dots$. Для того чтобы переписать оператор рекурсии в терминах новых динамических переменных, необходимо выразить оператор D_x^{-1} через ∂_t. С этой целью перепишем (3.30) в виде $\partial_t\sigma = D_x(D_x + 2u)\sigma$. Домножая это соотношение слева на $(\partial_t D_x)^{-1}$, находим искомое представление

$$D_x^{-1} = \partial_t^{-1}(D_x + 2u),$$

выражающее действие оператора ∂_t на симметриях уравнения Бюргерса. Поэтому рекуррентная формула $u_{\tau_{i+1}} = L(u_{\tau_i})$ принимает вид

$$u_{\tau_{i+1}} = (u + 2w\partial_t^{-1}u)u_{\tau_i} + (1 + w\partial_t^{-1})w_{\tau_i}.$$

Дифференцируя его по x и заменяя вторую производную в силу уравнения Бюргерса $w_x = u_2 = u_t - 2uw$, находим

$$w_{\tau_{i+1}} = [\partial_t + 2(u_t - 2uw)\partial_t^{-1}u]u_{\tau_i} + [-u + (u_t - 2uw)\partial_t^{-1}]w_{\tau_i},$$

где $w = u_1$. В результате оператор рекурсии записывается в новых переменных как матричный псевдодифференциальный оператор

$$R = \begin{pmatrix} u + 2w\partial_t^{-1}u & 1 + w\partial_t^{-1} \\ \partial_t + 2(u_t - 2uw)\partial_t^{-1}u & (u_t - 2uw)\partial_t^{-1} - u \end{pmatrix}. \tag{3.31}$$

Удобно сделать точечную замену переменных $w = h - u^2$ и привести этот оператор к более простому виду

$$R = \begin{pmatrix} -u & 1 + (h - u^2)\partial_t^{-1} \\ \partial_t & u_t\partial_t^{-1} + u \end{pmatrix}. \tag{3.32}$$

Квадрат оператора рекурсии имеет треугольную матричную структуру, а коэффициент при старшей степени оператора ∂_t равен единице:

$$R^2 = \begin{pmatrix} \partial_t + h & u_t\partial_t^{-1} \\ 0 & \partial_t + h + h_t\partial_t^{-1} \end{pmatrix}. \tag{3.33}$$

Возьмем симметрию четвертого порядка $u_\tau = L^2(u_t)$:

$$u_\tau = u_{xxxx} + 4u_{xxx}u + 10u_{xx}u_x + 12u_x^2u + 6u_{xx}u^2 + 4u_xu^3,$$

или в новых переменных

$$\begin{pmatrix} u \\ h \end{pmatrix}_\tau = R^2 \begin{pmatrix} u \\ h \end{pmatrix}_t, \tag{3.34}$$

которая является простейшим многополевым обобщением уравнения Бюргерса [20]

$$\begin{aligned} u_\tau &= u_{tt} + 2hu_t; \\ h_\tau &= h_{tt} + 2hh_t. \end{aligned} \tag{3.35}$$

Очевидно, что любое из равенств $u = \text{const}$, $h = \text{const}$ согласовано с динамикой по τ в силу уравнения (3.35). Полагая, что связь $p(u, h) = 0$, отличная от $u = \text{const}$, совместима с системой уравнений (3.35), разрешим его относительно h, то есть представим в виде $h = f(u)$. Дифференцируя обе части этого равенства по τ, найдем $h_\tau = f_u u_\tau$ или, заменяя производные по τ в силу системы (3.35), получим

$$f_{uu}u_t^2 + f_u u_{tt} + 2ff_u u_t = f_u(u_{tt} + 2fu_t).$$

Отсюда ясно, что $f_{uu} = 0$. Итак, любая связь вида $p(u, h) = 0$, совместимая с системой (3.35), имеет вид либо $u = \text{const}$, либо

$h = c_1 u + c_2$, то есть $u_x = -u^2 + c_1 u + c_2$. Остается доказать, что эта связь совместима с бесконечным числом высших симметрий.

Итак, граничное условие, рассматриваемое в теореме, соответствует связи либо вида $h = c_1 u + c_2$, либо $u = \mathrm{const}$. Ее можно также переписать в одной из следующих форм: $h = \mathrm{const}$; $u = c_3 h + c_4$. Сделаем линейную замену переменных $u = p - c_3 h - c_4$, и тогда наша связь примет одну из форм: $p = 0$; $h = \mathrm{const}$. Построим высшие симметрии уравнения Бюргерса на основе рекуррентной формулы

$$\begin{pmatrix} p \\ h \end{pmatrix}_{\tau_{n+1}} = \begin{pmatrix} \partial_t + h & p_t \partial_t^{-1} \\ 0 & \partial_t + h + h_t \partial_t^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ h \end{pmatrix}_{\tau_n}, \tag{3.36}$$

где $\tau_0 = t$. Отсюда легко можно получить по индукции, что для любого n $p_{\tau_n}|_{p=0} = 0$, а также для любого n $h_{\tau_n}|_{h=\mathrm{const}} = 0$. Иначе говоря, все симметрии, определенные формулой (3.36), совместимы с нашим граничным условием. ∎

Замечание 4. При наложении связи $h = c_1 u + c_2$ система уравнений (3.35) переходит в уравнение Бюргерса $u_\tau = u_{tt} + 2(c_1 u + c_2) u_t$.

Уравнение Бюргерса допускает богатую алгебру классических симметрий, поэтому класс граничных условий, совместимых с этим уравнением, в действительности шире рассмотренного выше.

Задача 14. Проверить, что граничная задача

$$u_t = u_{xxx} + 6 u u_x; \quad u_{xx} - c u^2|_{x=0} = 0 \tag{3.37}$$

для уравнения Кортевега-де Фриза совместна с классической симметрией этого уравнения, отвечающей растяжению:

$$u_\tau = 3 t u_t + x u_x + 2u.$$

Ответы

1. $u_3 = \frac{3}{2} u_2^2 / u_1 - f(u) u_1^3$.

2. $\tilde{u}_2 = 1/u_2;\ \tilde{u}_3 = -u_3/u_2^3;\ \tilde{u}_4 = (3u_3^2 - u_2u_4)/u_2^5,\ \ldots$
3. $X^0 = u_1\partial_x + \frac{u_1^2}{2}\partial_u;\ X^0 = \alpha\partial_x + \beta\partial_u;\ X^0 = \alpha x\partial_x + \beta u\partial_u.$
11.

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_d
X_1	0	$-2X_1$	$2X_6 - 4X_2$	0	$-2X_4$	0	X_a
X_2		0	$-2X_3$	X_4	$-X_5$	0	X_b
X_3			0	$2X_5$	0	0	X_{d_t}
X_4				0	X_6	0	X_c
X_5					0	0	X_{d_x}
X_6						0	$-X_d$
X_d							0

где $a = 4t^2d_t + 4txd_x + (x^2 + 2t)d;\ b = 2td_t + xdx;\ c = 2td_x + xd.$
Групповые преобразования:

$$\begin{array}{llll}
X_1: & \tilde{t} = \frac{t}{1-4at}; & \tilde{x} = \frac{x}{1-4at}; & \tilde{u} = u\sqrt{1-4at}\exp(\frac{-ax^2}{1-4at}); \\
X_2: & \tilde{t} = e^{2a}t; & \tilde{x} = e^a x; & \tilde{u} = u; \\
X_3: & \tilde{t} = t + a; & \tilde{x} = x; & \tilde{u} = u; \\
X_4: & \tilde{t} = t; & \tilde{x} = x + 2at; & \tilde{u} = u\exp(-ax - a^2t); \\
X_5: & \tilde{t} = t; & \tilde{x} = x + a; & \tilde{u} = u; \\
X_6: & \tilde{t} = t; & \tilde{x} = x; & \tilde{u} = e^a u; \\
X_d: & \tilde{t} = t; & \tilde{x} = x; & \tilde{u} = u + ad.
\end{array}$$

Литература

1. Полищук Е.М. Софус Ли. – Л.: Наука, 1983. с. 127
2. Седов Л.И. Методы подобия и размерностей в механике. – М.: ГИТТЛ, 1957. с. 432
3. Овсянников Л.В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. – М.: Наука, 1978. с. 400
4. Ибрагимов Н.Х. Группы преобразований в математической физике. – М.: Наука, 1983. с. 280

5. Олвер П. Приложения групп Ли к дифференциальным уравнениям. – М.: Мир, 1989. с. 639

6. Миллер У. Симметрия и разделение переменных. – М.: Мир, 1981. с. 342

7. Соколов В.В. О симметриях эволюционных уравнений // УМН. 1988. - 43(5) - С. 133-163.

8. Ибрагимов Н.Х. Групповой анализ обыкновенных дифференциальных уравнений и принцип инвариантности в математической физике // УМН. 1992. - 47(4) - С. 83-144.

9. Поммаре Ж. Системы уравнений с частными производными и псевдогруппы Ли. – М.: Мир, 1983. с. 400

10. Виноградов А.М., Красильщик И.С., Лычагин В.В. Введение в геометрию нелинейных дифференциальных уравнений. – М.: Наука, 1986. с. 336

11. Симметрии и законы сохранения уравнений математической физики под ред. Виноградова А.М. и Красильщика И.С.. – М.: Факториал, 1997. с. 464

12. Уорнер Ф. Основы теории гладких многообразий и групп Ли. – М.: Мир, 1987. с. 304

13. Дубровин Б.А., Новиков С.П., Фоменко А.Т. Современная геометрия: Методы и приложения. – М.: Наука, 1986. с. 760

14. Гото М., Гроссханс Ф. Полупростые алгебры Ли. – М.: Мир, 1982. с. 357

15. Джекобсон Н. Алгебры Ли. – М.: Мир, 1964. с. 355

16. Захаров В.Е., Манаков С.В., Новиков С.П., Питаевский Л.П. Теория солитонов. Метод обратной задачи. – М.: Наука, 1980. с. 320

17. Абловиц М., Сигур Х. Солитоны и метод обратной задачи. – М.: Мир, 1987. с. 479

18. Ньюэлл А. Солитоны в математике и физике. – М.: Мир, 1989. с. 326

19. Тахтаджян Л.А., Фаддеев Л.Д. Гамильтонов подход в теории солитонов. – М.: Наука, 1986. с. 528

20. Svinolupov S.I. On the analogues of the Burgers equation // Phys. Lett. A. 1989. - 135(1) - P. 32-40.

21. Hearn A.C., REDUCE user's manual, version 3.4, 1991148

АДЛЕР Всеволод Эдуардович
ХАБИБУЛЛИН Исмагил Талгатович
ЧЕРДАНЦЕВ Игорь Юрьевич

ГРУППОВОЙ АНАЛИЗ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Учебное пособие

Редактор Г.Г.Синайская

ЛР № 021319 от 05.01.99
Подписано в печать 23.12.2012. Формат 60 x 84 1/16. Бумага писчая. Печать плоская. Гарнитура литературная. Усл. печ. л. 5,86. Уч.-изд.л. 6,12. Тираж 100 экз. Заказ 515.

Редакционно-издательский центр
Башкирского государственного университета
450074, РБ, г.Уфа, ул. З.Валиди, 32.