

МЕЖДУНАРОДНАЯ ШКОЛА-КОНФЕРЕНЦИЯ  
ДЛЯ СТУДЕНТОВ, АСПИРАНТОВ И МОЛОДЫХ УЧЕНЫХ  
«ФУНДАМЕНТАЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА  
И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ В ЕСТЕСТВОЗНАНИИ»

---

СБОРНИК ТРУДОВ  
ТОМ I. МАТЕМАТИКА

Уфа 2011

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ  
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФГБОУ ВПО БАШКИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

МЕЖДУНАРОДНАЯ  
ШКОЛА-КОНФЕРЕНЦИЯ  
ДЛЯ СТУДЕНТОВ, АСПИРАНТОВ  
И МОЛОДЫХ УЧЕНЫХ  
«ФУНДАМЕНТАЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА  
И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ В ЕСТЕСТВОЗНАНИИ»

**Сборник трудов  
Том I. Математика**

Научные статьи

Уфа 2011

УДК 51+ 54  
ББК 22.1+24  
Ф94

Сборник издан при финансовой поддержке РФФИ (проект № 11-01-06831-моб\_г) и за счет внебюджетных средств БашГУ.

*Редакционная коллегия:*

д-р хим. наук, проф. Р.Ф. Талипов (проректор по науке БашГУ);  
д-р физ.-мат. наук, проф. Б.Н. Хабибуллин (*отв. редактор*);  
канд. физ.-мат. наук, доц. В.В. Картак;  
канд. физ.-мат. наук. Р.Н. Гарифуллин;

Международная школа-конференция для студентов,  
Ф94 аспирантов и молодых ученых «Фундаментальная математика  
и ее приложения в естествознании»:  
Сборник трудов. Том 1. Математика.– Уфа: БашГУ, 2011.-155с.

В сборнике трудов помещены научные статьи участников международной школы-конференции для студентов, аспирантов и молодых ученых «Фундаментальная математика и ее приложения в естествознании». Научные статьи воспроизводятся с представленных авторами оригиналов.

УДК 51+54  
ББК 22.1+24

**ISBN 978-5-7477-2944-5**

@Коллектив авторов, 2011  
@БашГУ, 2011

## Содержание

<i>Акбашева М. С., Шабат А. Б.</i> ТЕОРЕМА О КОММУТИРОВАНИИ В ГЛАВНОМ	5
<i>Ахтямов А. М., Салыхова Е. В.</i> ДИАГНОСТИРОВАНИЕ ЛОКАЛЬНОЙ ПОЛОСТИ В СТЕРЖНЕ ПО СОБСТВЕННЫМ ЧАСТОТАМ ЕГО ИЗГИБНЫХ КОЛЕБАНИЙ	10
<i>Ахтямова А.А.</i> ИДЕНТИФИКАЦИЯ МАССЫ И МОМЕНТА ИНЕРЦИИ ГРУЗА, СОСРЕДОТОЧЕННОГО НА КОНЦЕ БАЛКИ	17
<i>Байгускаров Т. Ю.</i> СФЕРИЧЕСКОЕ РАССТОЯНИЕ И ЭНТРОПИЯ ЛИНЕЙНОЙ СВЯЗНОСТИ	21
<i>Байчорова Ф. Х., Яикбаева А. К.</i> ФОРМУЛА ШУРА И УРАВНЕНИЯ ЛАКСА	29
<i>Баладай Р. А.</i> О КОНТРПРИМЕРЕ ШАРИПОВА К ГИПОТЕЗЕ ХАБИБУЛЛИНА	34
<i>Волкова Е.В.</i> НЕЛИНЕЙНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ОДИНОЧНОГО ПУЗЫРЬКА В АКУСТИЧЕСКОМ ПОЛЕ	40
<i>Итжулова Ю.А., Солнышкина О.А.</i> ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕЧЕНИЯ СТОКСА В КАНАЛЕ ПЕРЕМЕННОГО СЕЧЕНИЯ МЕТОДОМ ГРАНИЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ	45
<i>Картак В.В., Розит А.П., Юрьева А.М.</i> ПРИМЕРЫ ОДУ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ПОСТОЯННЫМ ИНВАРИАНТОМ КАРТАНА	50
<i>Кожевникова Л.М., Хаджи А.А.</i> ОЦЕНКА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ ДЛЯ АНИЗОТРОПНОГО КВАЗИЛИНЕЙНОГО ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА	55
<i>Кузнецова М. Н.</i> НЕЛИНЕЙНЫЕ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ С НУЛЕВЫМИ ИНВАРИАНТАМИ ЛАПЛАСА	63
<i>Марьин Д.Ф.</i> ПРИМЕНЕНИЕ GRU В МОДЕЛИРОВАНИИ ПРОЦЕССОВ МОЛЕКУЛЯРНОЙ ДИНАМИКИ	72
<i>Минниахметов А. Р.</i> О ПОСТОЯННОЙ ФРИДРИХСА КРУГОВОЙ МЕМБРАНЫ, ЗАКРЕПЛЕННОЙ НА МАЛОЙ ЧАСТИ ГРАНИЦЫ	77
<i>Моисеева Е. Ф., Малышев В. Л.</i> МОДЕЛИРОВАНИЕ НАСЫЩЕННЫХ СОСТОЯНИЙ ПАРА И ЖИДКОСТИ МЕТОДОМ МОЛЕКУЛЯРНОЙ ДИНАМИКИ	82
<i>Морозкин Н. Д., Морозкин Н.Н.</i> ЗАДАЧА НАИТОЧНЕЙШЕГО НАГРЕВА С ФАЗОВЫМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ	87
<i>Морозкин Ю. Н.</i> МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ УПРАВЛЕНИЯ ПОРТФЕЛЕМ ЦЕННЫХ БУМАГ	95
<i>Подымова М.Ю.</i> МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ ОБТЕКАНИЯ МЯГКОЙ ОБОЛОЧКИ ВБЛИЗИ ЭКРАНА	99

<i>Саетгалеева Л. А., Морозкин Н. Н.</i> ПРОГРАММНЫЙ КОМПЛЕКС «ГЛОНАСС-АВТОТРЕКЕР»	104
<i>Салимьянов А.Р.</i> ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ НЕСТАЦИОНАРНОЙ ЭЛЕКТРОХИМИЧЕСКОЙ ОБРАБОТКИ ПЛОСКИМ ЭЛЕКТРОД-ИНСТРУМЕНТОМ С ВЫСТУПОМ ПОЛУКРУГЛОЙ ФОРМЫ	107
<i>Сафина Г. Ф.</i> К ВОПРОСУ СОХРАНЕНИЯ ЧАСТОТ ИЗГИБНЫХ КОЛЕБАНИЙ ТРУБОПРОВОДА	112
<i>Солнышкина О. А., Иткулова Ю. А.</i> ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ГРАФИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОРОВ ДЛЯ РЕШЕНИЯ БОЛЬШИХ ЗАДАЧ МЕТОДОМ ГРАНИЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ СТОКСА	127
<i>Талитова Г. Р.</i> О ПРОДОЛЖЕНИИ ОДНОГО СПЕЦИАЛЬНОГО КЛАССА ФУНКЦИЙ КАК СУБГАРМОНИЧЕСКИХ НА ВСЮ КОМПЛЕКСНУЮ ПЛОСКОСТЬ	132
<i>Телицкий С.В.</i> ПРИМЕНЕНИЕ ОПТИМИЗАЦИИ ПРЯМОУГОЛЬНОГО РАСКРОЯ ДЛЯ СОВЕРШЕНСТВОВАНИЯ СИСТЕМЫ ТЕХНОЛОГИЧЕСКОЙ ПОДГОТОВКИ РАСКРОЙНО-ЗАГОТОВИТЕЛЬНЫХ ПРОИЗВОДСТВ В СУДОСТРОЕНИИ	140
<i>Тимергалина Л.З.</i> ИССЛЕДОВАНИЯ ЭФФЕКТИВНОСТИ ПАРАМЕТРОВ ГЕНЕТИЧЕСКОГО АЛГОРИТМА НА ОСНОВЕ ЗАДАЧИ РАЗМЕЩЕНИЯ	144
<i>Черданцева К. И.</i> СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННАЯ ЗАДАЧА ДИРИХЛЕ ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ОПЕРАТОРА ВТОРОГО ПОРЯДКА	146
<i>У. Cherniavsky, A. Mouftakhov</i> CERTAIN TECHNICAL MISTAKES IN CALCULUS.	151

# ТЕОРЕМА О КОММУТИРОВАНИИ В ГЛАВНОМ

Акбашева М. С., Шабат А. Б.

(Карачаевск, КЧГУ)

## Введение

Мы рассматриваем дифференциальные операторы со многими независимыми переменными в  $\mathbb{R}^N$ , записывая их в виде:

$$A = \sum a_\alpha(x) D^\alpha, \quad D^\alpha = D_1^{\alpha_1} D_2^{\alpha_2} \cdots D_N^{\alpha_N}, \quad D_j \doteq \frac{\partial}{\partial x_j}.$$

**Определение 1.** Мы говорим, что операторы  $A$  и  $B$  порядков  $m$  и  $n$ , соответственно, **коммутируют в главном**, если их коммутатор  $[A, B] = AB - BA$  имеет порядок не выше  $n + m - 2^1$ .

Очевидно, что в операторе  $AB - BA$  члены порядка  $n + m$  сокращаются автоматически и, что при вычислении членов порядка  $n + m - 1$  нужно учитывать только старшие члены рассматриваемых операторов  $A$  и  $B$ :

$$A^0 \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha D^\alpha, \quad B^0 \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{|\beta|=n} b_\beta D^\beta.$$

Нетрудно проверить далее, что

$$[A, B]^0 = [A^0, B^0]^0 = A_\xi^0 \cdot B_x^0 - B_\xi^0 \cdot A_x^0, \quad (1)$$

где  $A_{\xi_j}$  обозначает результат дифференцирования многочлена  $A = \sum a_\alpha D^\alpha$  от  $D = (D_1, \dots, D_N)$  по формальной переменной  $D_j$ . Таким образом главная часть коммутатора  $[A, B]^0$  совпадает с скобкой Пуассона (1) многочленов  $A^0(x, \xi)$  и  $B^0(x, \xi)$ ,  $\xi \equiv D$ . Просто проверяемым следствием формулы (1) является утверждение, играющее центральную роль в нашей работе:

**Лемма 1.** Пусть операторы  $A, B$  имеют следующий вид

$$A = e^{\alpha \cdot x} \cdot a(D), \quad B = e^{\beta \cdot x} \cdot b(D), \quad (2)$$

где  $a(D)$  и  $b(D)$  многочлены с постоянными коэффициентами, а  $\alpha$  и  $\beta$  произвольные вектора в  $\mathbb{C}^N$ . Тогда коммутирование в главном сводится к следующему условию на главные части  $a(D)$  и  $b(D)$ :

$$\partial_\beta \log a^0 = \partial_\alpha \log b^0, \quad (3)$$

---

<sup>1</sup>при  $N = 1$  это определение уточняется при помощи теории дробных степеней из работы [1]

где  $\partial_\alpha$  и  $\partial_\beta$  обозначают производные по направлению векторов  $\alpha$  и  $\beta$ , соответственно. Например, в случае  $N = 2$  двух независимых переменных  $x = (x_1, x_2)$  и мы имеем

$$A = e^{\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2} \cdot a(D_1, D_2), \quad B = e^{\beta_1 x_1 + \beta_2 x_2} \cdot b(D_1, D_2).$$

Уравнение (2) записывается при этом в виде

$$(\beta_1 \partial_{\xi_1} + \beta_2 \partial_{\xi_2}) \log P(\xi_1, \xi_2) = (\alpha_1 \partial_{\xi_1} + \alpha_2 \partial_{\xi_2}) \log Q(\xi_1, \xi_2), \quad (4)$$

где введено переобозначение  $\xi_j \equiv D_j$  формальных переменных по которым производится дифференцирование в уравнении (3):  $P(\xi_1, \xi_2) = a^0(\xi_1, \xi_2)$ ,  $Q(\xi_1, \xi_2) = b^0(\xi_1, \xi_2)$ .

Очевидно, что равенство скобки Пуассона (1) нулю, т.е. коммутирование в главном, является лишь необходимым условием равенства нулю коммутатора  $[A, B] = 0$ .

Для рассматриваемых операторов вида (2) критерий коммутирования операторов можно записать в виде функционального уравнения на соответствующие им многочлены  $a(\xi)$  и  $b(\xi)$ :

$$a(\xi + \beta)b(\xi) = a(\xi)b(\xi + \alpha). \quad (5)$$

Это уравнение вытекает из приведенной ниже формулы для композиции операторов (2), рассматриваемым в Лемме 1:

$$A \circ B = e^{\alpha \cdot x} a(D) \circ e^{\beta \cdot x} b(D) = e^{(\alpha + \beta) \cdot x} a(D + \eta) b(D).$$

## § 1. Взаимосвязь уравнений (3) и (5).

Нашей целью яв-ся проверка гипотезы, что уравнения (3) достаточно для классификации коммут-х пар операторов вида (2). Др. словами речь идет о скобке Пуассона и связанных с ней проблемах квантования в весьма специальном классе дифф. операторов.

**1.1.Случай  $N = 2$ .** Предполагая вектора  $\alpha$  и  $\beta$  в формуле (2) линейно независимыми, представим рассматриваемые операторы в следующем виде

$$A = e^x \cdot a(D_x, D_y), \quad B = e^y \cdot b(D_x, D_y). \quad (6)$$

Тогда уравнение (5) запишется в виде

$$a(\xi, \eta + 1)b(\xi, \eta) = a(\xi, \eta)b(\xi + 1, \eta). \quad (7)$$

Следствием уравнения (7) является

**Лемма 2.** Уловия коммутирования (7) операторов (6) не нарушаются при умножении многочленов  $a(\xi, \eta)$  и  $b(\xi, \eta)$  на  $\xi^i$  и  $\eta^j$ , соответственно, или одновременном умножении этих многочленов на степень  $\xi + \eta$ .

**Пример 1.** В силу Леммы 2 имеем:

$$A = e^x D_x^i (D_x + D_y)^k, \quad B = e^y D_y^j (D_x + D_y)^k \Rightarrow AB = BA. \quad (8)$$

Следующий пример, в котором оператор  $A$  имеет первый порядок, а порядок  $B$  произволен, показывает, что коммутирующие пары не исчерпываются формулой (8):

**Пример 2.** Используя функциональное уравнение (7) несложно проверить коммутирование операторов

$$A = e^x X, \quad B = e^y X(X+1) \cdots (X+n-1); \quad X = D_x + nD_y. \quad (9)$$

Заметим, что треугольная замена независимых переменных

$$x = \hat{x}, \quad y = n\hat{x} + \hat{y} \Rightarrow D_{\hat{x}} = D_x + nD_y \quad (10)$$

приводит эти операторы к "одномерному виду"<sup>2</sup> из работы[3]:

$$\hat{A} = e^{\hat{x}} D_{\hat{x}}, \quad \hat{B} = e^{\hat{y}} e^{n\hat{x}} D_{\hat{x}} (D_{\hat{x}} + 1) \cdots (D_{\hat{x}} + n - 1).$$

Используя цитированную выше работу[3](ср., также [2]можно обобщить серию (9) на операторы  $A$  второго порядка следующим образом.

**Пример 3.** Пусть  $X = 2D_x + nD_y, n \geq 2$  тогда коммутируют операторы  $A = e^x X(X+1), \quad B = e^y X(X+1) \cdots (X+n-1)$ .

В частности при  $n = 5$

$$B = e^y (2D_x + 5D_y)(2D_x + 5D_y + 1) \cdots (2D_x + nD_y + 4).$$

Замена

$$x = 2\hat{x}, \quad y = n\hat{x} + \hat{y} \Rightarrow D_{\hat{x}} = 2D_x + nD_y, \quad (11)$$

как и в предыдущем примере сводит рассматриваемую серию к одномерному случаю.

Вообще задача о коммутирующих операторах (6) сводится к задаче рассмотренной в работе[3]при помощи Леммы Адлера из работы[4]. Эта лемма утверждает, что полиномиальные решения функционального уравнения (7) являются приводимыми<sup>3</sup> и раскладываются на линейные множители вида

<sup>2</sup>за новыми переменными сохранены старые обозначения

<sup>3</sup>в этом заключается специфика случая  $N = 2$



$\alpha D_x + \beta D_y + \gamma$ . Легко видеть, что треугольные замены типа (11), (10), вкуже с сформулированной выше леммой 2, позволяют понижать порядок рассматриваемого оператора  $A$  и, в конечном счете, свести его к одномерному (ср. Пример 2). Очевидно, аналогичные преобразования применимы и к решениям соответствующего уравнения (4), которое много проще чем уравнение (7). Все это позволяет полностью проклассифицировать список коммутирующих пар (6), в которых оператор  $A$  имеет второй порядок, а порядок оператора  $B$  не превосходит 5 (см. [3]) и сопоставить его с аналогичным списком решений уравнения (4). В результате этого сравнения мы убеждаемся в совпадении списков и, обобщая, формулируем следующую гипотетическую теорему:

**Теорема\*.** При  $N = 2$  все решения уравнения (ср. (4)):

$$\partial_\eta \log P(\xi, \eta) = \partial_\xi \log Q(\xi, \eta)$$

порождают коммутирующие операторы (6) с  $P = a^0$ ,  $Q = b^0$ .

Наряду с разработкой различных подходов к доказательству сформулированного утверждения представляется перспективным также изучение связи разложения на множители одномерных операторов из работы [3] и формулы разложения на множители однородного многочлена  $P(\xi, \eta)$  :

$$P(\xi, \eta) = \text{const } \eta^m \prod_{j=1}^m (z - z_j), \quad z = \frac{\xi}{\eta}$$

отвечающего оператору  $A$  порядка  $m$ . В заключение этого раздела приведем в дополнение к лемме 2 и примерам 1–3, еще две коммутирующие пары операторов  $A$  и  $B$

$$A = e^x (D_x + 2D_y)^2; \quad B = e^y (D_x + 2D_y)^2 (D_x + 2D_y + 1)^2 \quad (12)$$

$$A = e^x X \cdot Y, \quad X = D_x + 2D_y, \quad Y = D_x + 3D_y; \quad B = e^y X(X+1)Y(Y+1)(Y+2). \quad (13)$$

В первом случае треугольная замена приводит оператор  $A$  к одномерному, а во втором- замена

$$x = \hat{x} + \hat{y}, \quad y = 3\hat{x} + 2\hat{y} \quad \Rightarrow \quad D_{\hat{x}} = D_x + 3D_y, \quad D_{\hat{y}} = D_x + 2D_y$$

приводит пару (13) к случаю разделяющихся переменных:

$$A = A_1 \cdot A_2, \quad [A_1, A_2] = 0, \quad B = A_1^3 A_2^2, \quad A_1 = e^x D_x, \quad A_2 = e^y D_y.$$

**1.2. Случай  $N > 2$ .** Вопрос о классификации многочленов, удовлетворяющих функциональному уравнению (5) и его следствию (3) при  $N > 2$  остается пока открытым. В простейшем случае операторов второго порядка и  $N = 3$ :

$$A = e^x \cdot a(D_x, D_y, D_z), \quad B = e^y \cdot b(D_x, D_y, D_z),$$

уравнение (3) сводится к приведенной ниже системе алгебраических уравнений для 12 коэффициентов однородных многочленов

$$P(\xi, \eta, \zeta) = a^0(\xi, \eta, \zeta), \quad Q(\xi, \eta, \zeta) = b^0(\xi, \eta, \zeta) :$$

$$P = a_1\xi^2 + a_2\xi\eta + a_3\xi\zeta + a_4\eta^2 + a_5\eta\zeta + a_6\zeta^2, \quad Q = b_1\xi^2 + b_2\xi\eta + \dots + b_6\zeta^2 :$$

$$2a_1b_1 = b_1a_2, \quad a_6b_3 = a_5b_6, \quad a_1b_2 + 2a_2b_1 = 2a_4b_1 + a_2b_2, \quad a_1b_3 + 2b_1a_3 = b_1a_5 + a_2b_3,$$

$$a_2b_2 + 2a_4b_1 = 2a_4b_2 + a_2b_4, \quad a_3b_3 + 2a_6b_1 = b_3a_5 + b_6a_2, \quad a_5b_3 + a_6b_2 = b_5a_5 + 2b_6a_4,$$

$$a_4b_2 = 2a_4b_4, \quad a_2b_3 + a_3b_2 + 2a_5b_1 = b_2a_5 + 2b_3a_4 + b_5a_2, \quad a_4b_3 + a_5b_2 = b_4a_5 + 2b_5a_4,$$

variant :  $b_1 = a_4 = 1$  *quad* В случае общего положения  $b_1a_4 \neq 0$  эта система дает двухпараметрическое семейство:

$$P = Q = (\xi + \eta)^2 + \alpha(\xi + \eta)\zeta + \lambda\alpha\zeta^2 = (\xi + \eta + \beta_1\zeta)(\xi + \eta + \beta_2\zeta)$$

решений уравнения (3) и соотв-их им коммут-их операторов

$$A = e^x (D_x + D_y + \beta_1 D_z)(D_x + D_y + \beta_2 D_z), \quad B = e^{y-x} A. \quad (14)$$

Наложив дополнительные условия на параметры  $\beta_j$  можно получить при этом третий оператор  $C$  вида (2) коммутирующий с (14).

#### ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Schur I.* Uber vertauschbare lineare Differentialausdrucke // *Sitzungsber. Berliner Math. Gen.*, **4**: 2–8, 1905.
- [2] *Burchnall J. L., Chaundy T. W.* Commutative ordinary diff. operators, II. The identity  $P^n = Q^m$ . // *Proc. Roy. Soc. London, (A)*, **134**: 471-485, 1932.
- [3] *Шабат А. Б., Эльканова З. С.* О коммутир. дифф. операторах // *ТМФ*, **162**(3): 334-344, 2010.
- [4] *Шабат А. Б., Эльканова З. С.* Об условиях коммутирования дифф. операторов // *УМЖ*, **3**(2): 91-99, 2011.

# ДИАГНОСТИРОВАНИЕ ЛОКАЛЬНОЙ ПОЛОСТИ В СТЕРЖНЕ ПО СОБСТВЕННЫМ ЧАСТОТАМ ЕГО ИЗГИБНЫХ КОЛЕБАНИЙ

Ахтямов А. М., Саляхова Е. В.  
(Уфа, БГУ)

## Аннотация

Предлагается метод определения местоположения локальной полости заданной размерности в стержне по собственным частотам его изгибных колебаний. Для идентификации полости используются первые собственные частоты из двух спектров изгибных колебаний (вокруг разных осей). Расчет параметров, характеризующих местоположение полости, ведется с помощью разностно-аналитического метода.

## Введение

Стержни, балки являются деталями многих механизмов и конструкций, в которых часто образуются дефекты (трещины, полости из-за коррозии, ударов и т. п.). Для предотвращения аварий и поломок возникает задача их ранней диагностики. Часто для выявления дефекта в стержне и его местоположения используют собственные частоты его колебаний [1-8].

Настоящая работа является продолжением исследований [9-10] по диагностированию локальных полостей в стержнях. Целью ее является однозначная идентификация полости квадратного сечения в призматическом консольном стержне в случае, когда заданы характеристики полости. Показано, что по двум собственным частотам, каждая из которых взята из спектров частот изгибных колебаний дефектного стержня вокруг разных осей, можно однозначно идентифицировать местоположение локальной полости в стержне.

## § 1. Постановка задачи

Рассмотрим колебания призматического консольного стержня с дефектом в виде локальной полости квадратного сечения (рис. 1).

Сечение стержня изображено на рис. 2.

Уравнение изгибных колебаний стержня с постоянной жесткостью на изгиб имеет вид:

$$EJ \frac{\partial^4 u(x, t)}{\partial x^4} + \rho F \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = 0,$$

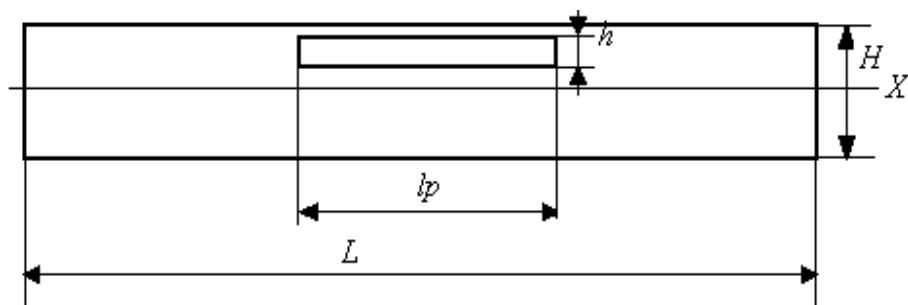


Рис. 1: Схема стержня с локальной полостью

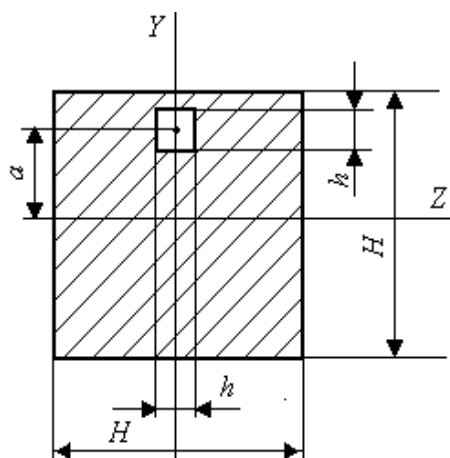


Рис. 2: Схема сечения рассматриваемого стержня

где  $u(x, t)$  - прогиб текущей оси стержня,  $E$  [кг/м<sup>2</sup>] - модуль упругости,  $J$  [м<sup>4</sup>] - момент инерции поперечного сечения стержня относительно нейтральной оси сечения, перпендикулярной плоскости колебаний,  $\rho$  [кг/м<sup>3</sup>] - плотность стержня,  $F$  [м<sup>2</sup>] - площадь поперечного сечения стержня. Собственные частоты изгибных колебаний рассматриваемого стержня будем обозначать через  $\omega_i^a$ .

В данном исследовании рассматривается консольный стержень: левый конец жестко закреплен, правый конец свободен.

Полость квадратного сечения имеет размерность  $h$ . Длина ее известна и равна  $lp$ . Как видно из рис. 2, параметр  $a$  определяет положение полости рассматриваемого стержня вдоль оси  $Y$ . Из рис. 1 видно, что параметр  $x_c$ , который является серединой отрезка  $[x_1; x_2]$  локализации полости, определяет положение полости вдоль оси  $X$ .

Необходимо идентифицировать полость с заданными характеристиками в стержне, то есть однозначно определить ее местоположение.

В рамках принятых выше обозначений цель данного исследования можно сформулировать следующим образом: для полости квадратного сечения

размерности  $h$ , протяженность которой равна  $lp$ , необходимо идентифицировать ее положение в стержне, то есть определить значение параметра  $a$  и параметра  $x_c$ .

## § 1. Диагностирование местоположения полости в стержне

Задача об изгибных колебаниях консольного стержня длины  $L$  заменой  $u(x, t) = y(x)\cos\omega t$  сводится к следующей спектральной задаче [11]:

$$y^4(x) = \frac{\rho F \omega^2}{EJ} y(x) \quad (1)$$

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = 0, \quad y''(L) = 0, \quad y'''(L) = 0, \quad (2)$$

$$\begin{aligned} y_1(x_1) &= y_2(x_1), & y_2(x_2) &= y_3(x_2), \\ y_1'(x_1) &= y_2'(x_1), & y_2'(x_2) &= y_3'(x_2), \\ EJ_1 y_1''(x_1) &= EJ_2 y_2''(x_1), & EJ_2 y_2''(x_2) &= EJ_1 y_3''(x_2), \\ EJ_1 y_1'''(x_1) &= EJ_2 y_2'''(x_1), & EJ_2 y_2'''(x_2) &= EJ_1 y_3'''(x_2), \end{aligned} \quad (3)$$

где  $x_1, x_2$  - соответственно левая и правая границы полости,  $y_1$  и  $y_2$  - прогибы соответственно слева и справа от левой границы полости,  $y_2$  и  $y_3$  - прогибы соответственно слева и справа от правой границы полости,

$$F = \begin{cases} F_1, & x \in [0, x_1), \\ F_2, & x \in [x_1, x_2], \\ F_1, & x \in (x_2, L], \end{cases} \quad J = \begin{cases} J_1, & x \in [0, x_1), \\ J_2, & x \in [x_1, x_2], \\ J_1, & x \in (x_2, L]. \end{cases}$$

Равенства (3) представляют собой условия сопряжения [11, с. 197].

Полость в стержне локализуется на отрезке  $[x_1; x_2]$ . Длина ее известна и равна  $lp$ . Также известен размер полости в плоскости сечения стержня  $YZ$ , то есть значение параметра  $h$ . Для идентификации параметра  $x_c$ , являющегося серединой отрезка  $[x_1; x_2]$ , рассмотрим колебания вокруг оси  $Y$ . Для вышеописанного стержня

$$F_1 = H^2, \quad J_1 = \frac{H^4}{12}.$$

Площадь поперечного сечения на отрезке  $[x_1; x_2]$ , где локализуется полость, равна  $F_2 = H^2 - h^2$ . Определим момент инерции  $J_2$ . В случае колебаний стержня вокруг оси  $Y$  момент инерции  $J_2$  имеет вид:

$$J_2 = J_Y = \frac{H^4 - h^4}{12}$$

(ось  $Y$  является нейтральной осью). То есть он не зависит от параметра  $a$ . Следовательно, взяв первую собственную частоту из известного спектра частот колебаний вокруг оси  $Y$ , мы можем вычислить значение параметра  $x_c$ . Расчет ведется с помощью разностно-аналитического метода [12].

После чего, зная значение параметра  $x_c$ , а также длину полости  $lp$  и ее размер в плоскости  $YZ$ , равный  $h$ , можем определить положение полости вдоль оси  $Y$ , то есть найти значение параметра  $a$ . Для рассматриваемого стержня определена система осей  $Z$  и  $Y$  (оси проходят через центр квадрата со стороной  $H$ ). Нейтральная ось  $Z_1$  проходит через центр тяжести сечения. Чтобы однозначно выявить значение параметра  $a$ , рассмотрим колебания стержня вокруг оси  $Z_1$ . Для определения ее положения найдем центр тяжести сечения по отношению к оси  $Z$  [13]. Разобьем сечение на фигуры: 1 - квадрат ( $H \times H$ ), 2 - полость ( $h \times h$ ).

Площади фигур: квадрат  $f_1 = H^2$ , полость  $f_2 = -h^2$  (для полости площадь выражается отрицательной величиной). Площадь сечения  $F_2 = H^2 - h^2$ .

Вычислим координаты  $y_i$  центров тяжести фигур, составляющих сечение, относительно оси  $Z$ . Результаты поместим в таблицу.

Части сечения	Площади частей $f_i$	Коорд. $y_i$ их центр.тяж.
1	$H^2$	0
2	$-h^2$	$a$

Определим статический момент сечения относительно выбранной оси  $Z$ :

$$S_Z = H^2 \cdot 0 - h^2 \cdot a.$$

Координата  $y_c$  центра тяжести сечения по отношению к оси  $Z$  имеет вид:

$$y_c = \frac{S_Z}{F_2} = \frac{-h^2 a}{H^2 - h^2}.$$

Положение нейтральной оси  $Z_1$ , проходящей через центр тяжести сечения (рис. 3), найдено.

Вычислим теперь момент инерции сечения стержня с полостью относительно нейтральной оси  $Z_1$ .

$$J_{Z_1} = \frac{H^4}{12} + H^2 \left( \frac{h^2 a}{H^2 - h^2} \right)^2 - \left( \frac{h^4}{12} + h^2 \left( a + \frac{h^2 a}{H^2 - h^2} \right)^2 \right).$$

После упрощения, выражение для  $J_{Z_1}$  примет вид:

$$J_{Z_1} = \frac{H^4 - h^4}{12} - \frac{H^2 h^2 a^2}{H^2 - h^2}.$$

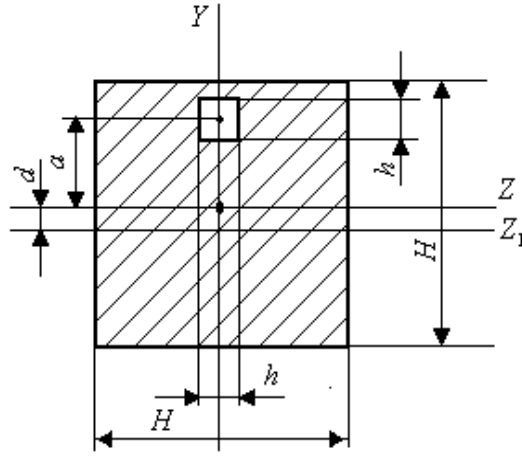


Рис. 3: Нейтральная ось  $Z_1$  проходит через центр тяжести сечения,  $d = (h^2 a)/(H^2 - h^2)$

Следовательно, момент инерции сечения стержня с полостью на отрезке  $[x_1; x_2]$ , где локализуется полость, имеет вид:

$$J_2 = J_{Z_1} = \frac{H^4 - h^4}{12} - \frac{H^2 h^2 a^2}{H^2 - h^2}.$$

Зная значение параметра  $h$ , и взяв одну собственную частоту из спектра частот колебаний стержня вокруг оси  $Z_1$ , мы можем теперь однозначно определить значение параметра  $a$ , характеризующего местоположение локализованной на отрезке  $[x_1; x_2]$  полости вдоль оси  $Y$ . Таким образом, используя по одной собственной частоте из двух разных спектров частот изгибных колебаний можно однозначно идентифицировать местоположение рассматриваемой локальной полости в стержне.

## § 2. Пример

Рассмотрим полученные выше результаты на конкретном примере. Рассматриваемый консольный стержень имеет следующие характеристики:

$$H = 0,1 \text{ м}, \quad L = 1 \text{ м}, \quad \rho = 7850 \text{ кг/м}^3,$$

$$E = 2,1 \cdot 10^6 \text{ кг/см}^2 = 2,1 \cdot 10^{10} \text{ кг/м}^2.$$

Полость квадратного сечения имеет размерность  $h = 0,01$ . Длина ее известна и равна  $0,48$  м. Спектр частот колебаний вокруг оси  $Y$  для рассматриваемого стержня также известен. Необходимо идентифицировать полость в стержне, то есть однозначно определить значения параметра  $a$  и параметра  $x_c$ , который является серединой отрезка  $[x_1; x_2]$  локализации полости. Зная значение параметра  $h = 0,01$ , и взяв первую собственную

частоту  $\omega_1 = 166,24510$  из спектра частот колебаний стержня вдоль оси  $Y$ , с помощью разностно-аналитического метода [12] мы можем рассчитать значение параметра  $x_c$ .

Рассматриваемый пример является модельным, то есть нам известно точное значение параметра  $x_c$ :  $x_c = 0,50$ .

В таблице 1 показаны результаты вычислений параметра  $x_c$  при использовании разностно-аналитического метода с шагом разбиения равным  $0,000001$ . Там также показано, как изменится значение параметра  $x_c$ , если мы зададим собственную частоту  $\omega_1 = 166,24510$  с некоторой погрешностью.

Таблица 1. Вычисление значения параметра  $x_c$  при известном значении параметра  $h = 0,01$ (шаг разбиения  $0,000001$ )

	$\omega_1 = 166,24510$	$\omega_1 = 166,26$	$\omega_1 = 166,10$
Значение $x_c$	0,4	0,5	0,3
Отн. погр. $\omega_1$ (проц.)	0	0,009	0,087
Отн. погр. $x_c$ (проц.)	20	0	40

Поскольку пример модельный, то нам известно, что для данных характеристик стержня и данной собственной частоты значение  $x_c$  должно быть равно  $0,50$ . Таким образом, таблица 1 показывает, что на результат вычислений значительно влияет точность вводимой собственной частоты, а также сильно влияет шаг разбиения.

Если мы уменьшим шаг разбиения и возьмем его равным  $0,0000001$ , то для  $\omega_1 = 166,24510$  (первой собственной частоты колебаний стержня вдоль оси  $Y$ ) мы получим  $x_c = 0,50$ .

Зная значение параметра  $h = 0,01$ , а также значение  $x_c = 0,50$ , мы можем найти значение параметра  $a$ . Для этого надо взять одну собственную частоту из известного спектра колебаний вокруг оси  $Z_1$ . Расчет ведется с помощью разностно-аналитического метода [12]. Результаты занесены в таблицу 2.

Таблица 2. Значение параметра  $a$  для стержня с полостью длиной  $l_p = 0,48$ ,  $h = 0,01$ .

Собственная частота, $\omega_1$ (рад/с)	Значение параметра $a$
166,239	0
166,138	0,01
165,837	0,02
165,334	0,03
164,626	0,04
164,195	0,045



### § 3. Выводы

1. Для случая, когда известны характеристики полости, но неизвестно ее местоположение, проведено диагностирование локальной полости в стержне. Показано, что для идентификации полости необходимо использование собственных частот из двух спектров изгибных колебаний (вокруг разных осей). По двум собственным частотам, каждая из которых взята из спектров частот изгибных колебаний стержня вокруг разных осей, можно однозначно идентифицировать параметры  $x_c$  и  $a$ , характеризующие местоположение полости.

2. Показано, что на результаты вычислений значительно влияет точность используемых собственных частот, а также шаг разбиения для разностно-аналитического метода.

### ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Gladwell G.M.L.* Inverse Problems in Vibration. 2nd ed. — Dordrecht, Boston, London: Kluwer Academic Publishers, 2004.
- [2] *Ваньков Ю.В., Казаков Р.Б., Яковлева Э.Р.* Собственные частоты изделия как информативный признак наличия дефектов. Электронный журнал "Техническая акустика <http://www.ejta.org>, 2003, 5.
- [3] *Morassi A.* Crack-induced changes in eigenparameters of beam structures // ASCE Journal of engineering mathematics, 1993, vol. 119 (9). P. 1798-1803.
- [4] *Ильгамов М.А., Хакимов А.Г.* Диагностика повреждений консольной балки с надрезом // Дефектоскопия. — 2009. — № 5. — С. 83-89.
- [5] *Ватульян А.О.* Обратные задачи в механике деформируемого твердого тела. М.: Физматлит, 2007. — 224 с.
- [6] *Ватульян А.О., Солуянов Н.О.* Об определении местоположения и размера полости в упругом стержне // Дефектоскопия. — 2005. — № 9. — С.44-56.
- [7] *Ватульян А.О., Солуянов Н.О.* Идентификация полости в упругом стержне при анализе поперечных колебаний // Прикладная механика и техническая физика. — 2008. — Т. 49, № 6. — С. 152-158.
- [8] *Ахтямов А.М., Аюпова А.Р.* Определение полости в стержне методом отрицательной массы // Дефектоскопия. — 2010. — № 5. — С. 29-33.

- [9] *Ахтямов А.М., Саляхова Е.В.* Всегда ли наличие полости в стержне меняет собственные частоты? Электронный журнал "Техническая акустика" <http://www.ejta.org>, 2011, 7.
- [10] *Ахтямов А.М., Саляхова Е.В.* Диагностирование полости в стержне // Журнал СВМО, № 13, т. 2.
- [11] *Вибрации в технике* : Справочник под. ред. В. В. Болотина. Т. 1. Колебания линейных систем. М.: Машиностроение, 1978, 352 с.
- [12] *Абзалымов Р. Р., Саляхова Е. В.* Разностно-аналитический метод вычисления собственных значений для уравнений 4-го порядка с разделенными краевыми условиями // Известия вузов. Математика, 2008, № 11, с. 3-11.
- [13] *Рудицын М. Н., Артемов П. Я., Любошиц М. И.* Справочное пособие по сопротивлению материалов. Минск: Вышэйшая школа, 1970, 630 с.

УДК 534.112

## **ИДЕНТИФИКАЦИЯ МАССЫ И МОМЕНТА ИНЕРЦИИ ГРУЗА, СОСРЕДОТОЧЕННОГО НА КОНЦЕ БАЛКИ**

**Ахтямова А.А.**

(Уфа, БашГУ)

### **Введение**

Рассмотрим однородную балку Эйлера-Бернулли длиной  $l$ , плотностью  $\rho$  и площадью поперечного сечения  $F$ . Левый конец балки закреплен на пружинках с жесткостями  $c_1$ , которая препятствует вертикальному смещению балки, и  $c_2$  - препятствующая повороту балки. На правом конце сосредоточен груз. Требуется определить массу  $m_2$  и момент инерции  $J_2$  груза по трем собственным частотам изгибных колебаний балки.

Ранее подобная задача для балки Эйлера-Бернулли не ставилась. В работе [1] решалась похожая задача, где параметры сосредоточенного груза находились для балки Тимошенко, левый конец которой заделан.

## § 1. Прямая задача.

Для начала, решим прямую задачу, т.е. найдем собственные частоты  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$  и  $\lambda_3$ . Воспользуемся уравнением изгибных колебаний однородной балки Эйлера-Бернулли с постоянной жесткостью на изгиб [2]:

$$EJ \frac{\partial^4 U(x, t)}{\partial x^4} + \rho F \frac{\partial^2 U(x, t)}{\partial t^2} = 0, \quad (1)$$

где  $U(x, t)$  — прогиб текущей точки оси балки;  $EJ$  — изгибная жесткость стержня;  $\rho$  — плотность балки;  $F$  — площадь поперечного сечения балки.

Для заданных закреплений краевые условия записываются следующим образом:

$$EJ \frac{\partial^3 U(x, t)}{\partial x^3} - c_1 U(x, t) = 0, \quad EJ \frac{\partial^2 U(x, t)}{\partial x^2} - c_2 \frac{\partial U(x, t)}{\partial x} = 0 \quad (2)$$

— при  $x = 0$ ,

$$EJ \frac{\partial^3 U(x, t)}{\partial x^3} + m_2 \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = 0, \quad EJ \frac{\partial^2 U(x, t)}{\partial x^2} + J_2 \frac{\partial^3 U}{\partial x \partial t^2} = 0 \quad (3)$$

— при  $x = l$ .

Обозначим  $\frac{\rho F \omega^2}{EJ}$  через  $\lambda^4$ . Заменой  $U(x, t) = y(x) \cos(\omega t)$  уравнение (1) с краевыми условиями (2), (3) сводится к следующей спектральной задаче:

$$y^{(4)} = \lambda^4 y, \quad (4)$$

$$U_1(y) = y'''(0) - h_0 y(0) = 0, \quad U_2(y) = y''(0) - h_2 y'(0) = 0, \quad (5)$$

$$U_3(y) = y'''(l) - h_5 \lambda^4 y(l) = 0, \quad U_4(y) = y''(l) - h_7 \lambda^4 y'(l) = 0, \quad (6)$$

где  $\lambda^4 = \frac{\rho F \omega^2}{EJ}$ ,  $h_0 = \frac{c_1}{EJ}$ ,  $h_2 = \frac{c_2}{EJ}$ ,  $h_5 = \frac{m_2}{\rho F}$ ,  $h_7 = \frac{J_2}{\rho F}$ .

Требуются найти собственные частоты  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$  и  $\lambda_3$  задачи (4)–(6). Выпишем общее решение уравнения (4):

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + C_3 y_3 + C_4 y_4,$$

где

$$\begin{aligned} y_1(x, \lambda) &= (\cos \lambda x + \operatorname{ch} \lambda x)/2, \\ y_2(x, \lambda) &= (\sin \lambda x + \operatorname{sh} \lambda x)/(2\lambda) \\ y_3(x, \lambda) &= (-\cos \lambda x + \operatorname{ch} \lambda x)/(2\lambda^2), \\ y_4(x, \lambda) &= (-\sin \lambda x + \operatorname{sh} \lambda x)/(2\lambda^3) \end{aligned} \quad (7)$$

— линейно независимые решения уравнения (4), удовлетворяющие условиям

$$y_j^{(r-1)}(0, \lambda) = \begin{cases} 0, & \text{при } j \neq r, \\ 1, & \text{при } j = r. \end{cases}$$

$j, r = \overline{1, 4}$ . Другими словами, решения  $y_j(x, \lambda)$ ,  $j = \overline{1, 4}$  образуют фундаментальную систему Коши и выражаются через функции Крылова [2].

Как известно [3], собственные значения  $\lambda_i$  задачи (4)–(6) являются нулями характеристического определителя

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} U_1(y_1) & U_1(y_2) & U_1(y_3) & U_1(y_4) \\ U_2(y_1) & U_2(y_2) & U_2(y_3) & U_2(y_4) \\ U_3(y_1) & U_3(y_2) & U_3(y_3) & U_3(y_4) \\ U_4(y_1) & U_4(y_2) & U_4(y_3) & U_4(y_4) \end{vmatrix},$$

т.е. они удовлетворяют уравнению

$$\Delta(\lambda_i) = 0. \quad (8)$$

Здесь  $U_1(y_1)$  получается с помощью подстановки  $y_1(x, \lambda) = (\cos \lambda x + \operatorname{ch} \lambda x)/2$  из (7) в линейную форму  $U_1(y) = y'''(0) - h_0 y(0)$ . Остальные элементы характеристического определителя находятся аналогичным образом.

**Пример 4.** Если  $l = 1, h_0 = 1, h_2 = 2, h_5 = 3, h_7 = 4$ , то характеристический определитель  $\Delta(\lambda)$  имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \Delta(\lambda) = & \frac{9}{2}\lambda^5 \operatorname{ch} \lambda \sin \lambda - 4\lambda^3 \sin \lambda \operatorname{ch} \lambda - \\ & \frac{7}{2}\lambda \cos \lambda \operatorname{sh} \lambda - \frac{5}{2}\lambda \operatorname{ch} \lambda \sin \lambda + \frac{1}{2}\lambda^4 - \\ & 6\lambda^8 + 4\lambda^3 \operatorname{sh} \lambda \cos \lambda + \operatorname{sh} \lambda \sin \lambda - \\ & \frac{9}{2}\lambda^5 \cos \lambda \operatorname{sh} \lambda + 2\lambda^7 \sin \lambda \operatorname{ch} \lambda + \\ & 2\lambda^7 \operatorname{sh} \lambda \cos \lambda + \frac{7}{2}\lambda^4 \operatorname{ch} \lambda \cos \lambda - \\ & 6\lambda^8 \operatorname{ch} \lambda \cos \lambda - 3\lambda^2 \operatorname{sh} \lambda \sin \lambda + 12\lambda^4 \operatorname{sh} \lambda \sin \lambda \end{aligned} \quad (9)$$

Воспользовавшись программным пакетом Maple вычислим первые три собственных значения нуля характеристического определителя  $\Delta(\lambda)$ :

$$\lambda_1 = 4,601002690, \quad \lambda_2 = 7,808155116, \quad \lambda_3 = 10.96348449$$

## § 2. Обратная задача.

В реализации на компьютере пакеты аналитических вычислений, как правило, решают системы уравнений только в том случае, когда количество уравнений и неизвестных совпадает, к тому же, ввиду ошибок вычислений, неизвестные находятся с погрешностью гораздо большей, чем исходные  $\Delta(\lambda_i)$ . Поэтому на практике вначале рекомендуется решить систему (8) только для двух уравнений ( $i = 1, 2$ ). Такая система имеет два решения. Также два решения будут иметь системы двух уравнений  $\lambda_i = 0$

при  $(i = 2, 3)$  и при  $(i = 1, 3)$ . Общим решением систем является лишь один набор значений, который и будет искомым.

**Пример 5.** Приведем пример восстановления массы  $m_2$  и момент инерции  $J_2$  груза. Где в качестве исходных данных приняты данные из примера 1. Подставим известные  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  в характеристический определитель. Получим систему двух уравнений:

$$\begin{aligned} \Delta(\lambda_1) &= 1313,732043 - 1,199024,498h_7 + 46615,00656h_5 + \\ &\quad 3,879050369 \cdot 10^5 h_7 h_5 = 0, \\ \Delta(\lambda_2) &= -97080,30473 + 1,136845358 \cdot 10^9 h_7 - 1,710175044 \cdot 10^7 h_5 - \\ &\quad 3,746646339 \cdot 10^8 h_7 h_5 = 0 \end{aligned} \tag{10}$$

относительно двух неизвестных  $h_5$  и  $h_7$  ( $h_5 = \frac{m_2}{\rho F}$ ,  $h_7 = \frac{J_2}{\rho F}$ ). Решением данной системы уравнений является два набора  $h_5$ ,  $h_7$ :

$$\begin{aligned} (h_5 = -0,04238153439, h_7 = -0,0005445518614), \\ (h_5 = 2,999973012, h_7 = 3,996547836.) \end{aligned}$$

Решение системы (8) при  $(i = 2, 3)$  дает два набора  $h_5$ ,  $h_7$ :

$$\begin{aligned} (h_5 = -0,008635096838, h_7 = -0,00004437841095), \\ (h_5 = 2,999998871, h_7 = 3,999595008.) \end{aligned}$$

Решение системы (8) при  $(i = 1, 3)$  дает два набора  $h_5$ ,  $h_7$ :

$$\begin{aligned} (h_5 = -0,03453212637, h_7 = -0,0002441260716.) \\ (h_5 = 2,999988543, h_7 = 3,997250146.) \end{aligned}$$

Общим приближенным решением этих трех систем из двух уравнений является набор  $(h_5 = 3, h_7 = 4)$ , который практически совпадает с данными примера 1.

### § 3. Заключение.

Таким образом, параметры твердого тела, присоединенного к балке, вполне могут быть восстановлены по трем собственным значениям изгибных колебаний. Найденный метод идентификации дает возможность диагностирования элементов конструкций механизмов, недоступных для визуального осмотра, по звучанию их колебаний.

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Ахтямов А. М., Урманчиев С. Ф.* Определение параметров твердого тела, прикрепленного к одному из концов балки, по собственным частотам колебаний. // Сибирский журнал индустриальной математики. 2008. Т. 11, № 4. С. 19–24.
- [2] *Вибрации в технике: Справочник.* Т.1. Колебания линейных систем. // Под редакцией В.В. Болотина — М.: Изд-во Машиностроение, 1978. — 352 с.
- [3] *Наймарк М.А.* Линейные дифференциальные операторы. // М.: Наука, 1969. — 526 с.

УДК 514.747

## СФЕРИЧЕСКОЕ РАССТОЯНИЕ И ЭНТРОПИЯ ЛИНЕЙНОЙ СВЯЗНОСТИ

Байгускаров Т. Ю.  
(Уфа, БГУ)

### ВВЕДЕНИЕ

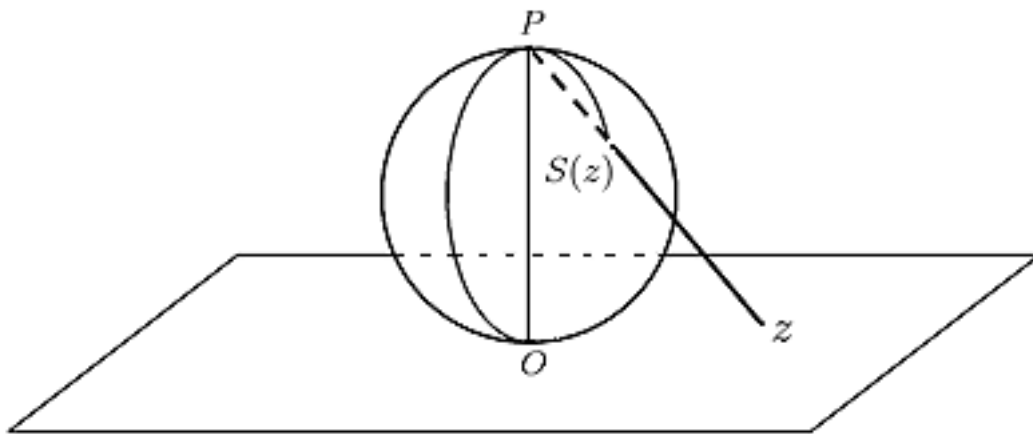
Возьмем сферу единичного диаметра, касательную к плоскости в нулевой точке  $O$ . Диаметр сферы  $OP$ , проходящий через точку  $O$ , будет перпендикулярным к плоскости; вторую точку его пересечения со сферой, точку  $P(0, 0, 1)$  назовем полюсом.

Всякое комплексное число  $z$  изображается точкой на плоскости; соединяя эту точку с полюсом прямой линией  $Pz$ , получим в пересечении этой прямой и сферы единственную точку (отличную от  $P$ ), которую примем за изображение комплексного числа  $z$  и назовем ее  $S(z)$ .

Итак, мы устанавливаем взаимно однозначное и взаимно непрерывное соответствие между точками плоскости и точками сферы (за исключением точки  $P$ ). Эта сфера, из которой выкинута точка  $P$ , является изображением совокупности всех комплексных чисел,  $S(\mathbb{C})$ . Естественно принять

точку  $P$  за изображение бесконечности, а соответствующую ей единственную точку плоскости назвать *бесконечно удаленной* точкой этой плоскости.

Таким образом, путем указанного преобразования, называемого *стереографической проекцией*, мы устанавливаем взаимно однозначное соответствие между точками сферы и точками плоскости, включая ее единственную бесконечно удаленную точку. Эта сфера, точки которой изображают совокупность всех комплексных чисел и бесконечности, носит название *комплексной числовой сферы*, или *сферы Римана*. Плоскость комплексного переменного вместе с бесконечно удаленной точкой будем называть *расширенной плоскостью* комплексного переменного  $\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ .



Смысл этого исследования заключается в том, чтобы с помощью отображения  $S$  доказать некоторые теоремы для областей на плоскости, доказанные только для конечных областей.

## § 1. ФОРМУЛЫ СТЕРЕОГРАФИЧЕСКОЙ ПРОЕКЦИИ

Мы уже дали геометрическое определение стереографической проекции; теперь займемся выводом формул этого преобразования, т.е. решим задачу: *зная комплексное число, определить координаты соответствующей точки сферы, и обратно*. Для решения этой задачи выберем систему пространственных осей координат  $O\xi\eta\zeta$  таким образом, что оси  $O\xi$  и  $O\eta$  совпадают соответственно с осями  $Ox$  и  $Oy$  на числовой плоскости, а ось  $O\zeta$  направлена по диаметру  $OP$ . Комплексное число  $z = x + yi$  изображается на плоскости точкой с координатами  $x, y$ ; на сфере пусть это число отобразится в точку с координатами  $\xi, \eta, \zeta$ . Так как центр сферы лежит в точке  $(0, 0, \frac{1}{2})$  и радиус ее равен  $\frac{1}{2}$ , то  $\xi, \eta, \zeta$  должны удовлетворять следующему уравнению сферы:

$$\xi^2 + \eta^2 + \left(\zeta - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} \quad \text{или} \quad \xi^2 + \eta^2 = \zeta(1 - \zeta). \quad (1)$$

Далее, так как три точки  $(0, 0, 1)$ ,  $(\xi, \eta, \zeta)$  и  $(x, y, 0)$  лежат на одной и той же прямой линии, их координаты удовлетворяют соотношениям

$$\frac{\xi - 0}{x - 0} = \frac{\eta - 0}{y - 0} = \frac{\zeta - 1}{0 - 1}. \quad (2)$$

Из этих равенств (2) можно выразить  $x$  и  $y$  через  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$ . Так, сравнивая первое отношение с третьим, а затем второе с третьим, найдем:

$$x = \frac{\xi}{1 - \zeta}, \quad y = \frac{\eta}{1 - \zeta}. \quad (3)$$

Эти формулы (3) дают выражения координат точки плоскости через координаты соответствующей точки сферы. Для получения обратных формул заметим, что

$$x^2 + y^2 = \frac{\xi^2 + \eta^2}{(1 - \zeta)^2} = \frac{\zeta}{1 - \zeta}, \quad (3')$$

откуда находим:

$$\zeta = \frac{x^2 + y^2}{x^2 + y^2 + 1} = \frac{|z|^2}{|z|^2 + 1}; \quad (4)$$

зная же  $\zeta$  из формул (3) определяем  $\xi$  и  $\eta$ :

$$\xi = \frac{x}{x^2 + y^2 + 1} = \frac{Re z}{|z|^2 + 1}; \quad (4')$$

$$\eta = \frac{y}{x^2 + y^2 + 1} = \frac{Im z}{|z|^2 + 1}. \quad (4'')$$

Формулы (4), (4'), и (4'') дают выражения для координат точки сферы через компоненты  $x$  и  $y$  комплексного числа.

## § 2. СФЕРИЧЕСКОЕ РАССТОЯНИЕ

**Определение 1.** Пусть  $z = x + iy$ ,  $w = p + iq$  – комплексные числа, а  $S(z)$  и  $S(w)$  – их изображения на сфере Римана. Сферическим расстоянием  $sp(z, w)$  будем называть функцию, равную обыкновенному расстоянию в  $\mathbb{R}^3$  между  $S(z)$  и  $S(w)$ :

$$sp(z, w) = |S(z) - S(w)|. \quad (5)$$

Для краткости обозначим  $S(z)$  и  $S(w)$ , как  $Z$  и  $W$  соответственно, а их координаты  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$  как  $Z_\xi$ ,  $Z_\eta$ ,  $Z_\zeta$  и  $W_\xi$ ,  $W_\eta$ ,  $W_\zeta$ . Выразим  $sp(z, w)$  через  $z$  и  $w$ :

$$sp(z, w) = \sqrt{(Z_\xi - W_\xi)^2 + (Z_\eta - W_\eta)^2 + (Z_\zeta - W_\zeta)^2}. \quad (5')$$



Чтобы не запутаться, будем вычислять по частям:

$$\text{sp}(z, w) = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}, \text{ где } A = Z_\xi - W_\xi, B = Z_\eta - W_\eta, C = Z_\zeta - W_\zeta.$$

$$A = \frac{x}{|z|^2 + 1} - \frac{p}{|w|^2 + 1} = \frac{x(|w|^2 + 1) - p(|z|^2 + 1)}{(|z|^2 + 1)(|w|^2 + 1)} \quad (6.1)$$

$$B = \frac{y}{|z|^2 + 1} - \frac{q}{|w|^2 + 1} = \frac{y(|w|^2 + 1) - q(|z|^2 + 1)}{(|z|^2 + 1)(|w|^2 + 1)} \quad (6.2)$$

$$C = \frac{|z|^2}{|z|^2 + 1} - \frac{|w|^2}{|w|^2 + 1} = \frac{|z|^2(|w|^2 + 1) - |w|^2(|z|^2 + 1)}{(|z|^2 + 1)(|w|^2 + 1)} \quad (6.3)$$

$$A^2 = \frac{x^2(|w|^2 + 1)^2 - 2xp(|w|^2 + 1)(|z|^2 + 1) + p^2(|z|^2 + 1)^2}{(|z|^2 + 1)^2(|w|^2 + 1)^2} \quad (6.4)$$

$$B^2 = \frac{y^2(|w|^2 + 1)^2 - 2yq(|w|^2 + 1)(|z|^2 + 1) + q^2(|z|^2 + 1)^2}{(|z|^2 + 1)^2(|w|^2 + 1)^2} \quad (6.5)$$

$$C^2 = \frac{|z|^4(|w|^2 + 1)^2 - 2|z|^2|w|^2(|w|^2 + 1)(|z|^2 + 1) + |w|^4(|z|^2 + 1)^2}{(|z|^2 + 1)^2(|w|^2 + 1)^2} \quad (6.6)$$

Учитывая, что  $x^2 + y^2 = |z|^2$  и  $p^2 + q^2 = |w|^2$ , перепишем знаменатель дроби  $A^2 + B^2 + C^2$  в виде:

$$\begin{aligned} & (|z|^4 + |z|^2)(|w|^2 + 1)^2 - 2(|w|^2 + 1)(|z|^2 + 1)(|z|^2|w|^2 + xp + yq) + \\ & \quad + (|w|^4 + |w|^2)(|z|^2 + 1)^2 = |z|^2(|z|^2 + 1)(|w|^2 + 1)^2 - \\ & - 2(|w|^2 + 1)(|z|^2 + 1)(|z|^2|w|^2 + xp + yq) + |w|^2(|w|^2 + 1)(|z|^2 + 1)^2 = \\ & = (|w|^2 + 1)(|z|^2 + 1)(|z|^2(|w|^2 + 1) - 2(|z|^2|w|^2 + xp + yq) + \\ & \quad + |w|^2(|z|^2 + 1)) = (|w|^2 + 1)(|z|^2 + 1)(|z|^2 - 2xp - 2yq + |w|^2) = \\ & = (|w|^2 + 1)(|z|^2 + 1)((x - p)^2 + (y - q)^2) = (|w|^2 + 1)(|z|^2 + 1)|z - w|^2; \end{aligned}$$

$(|w|^2 + 1)(|z|^2 + 1)$  сокращается и остается:

$$\text{sp}(z, w) = \sqrt{\frac{|z - w|^2}{(|w|^2 + 1)(|z|^2 + 1)}} = \frac{|z - w|}{\sqrt{(|w|^2 + 1)(|z|^2 + 1)}}. \quad (7)$$

Эта формула будет служить основной формулой для вычисления сферического расстояния. Примечательно, что  $\text{sp}(z, w)$  зависит только от  $|z|$ ,  $|w|$  и  $|z - w|$ , то есть при повороте плоскости  $\text{sp}(z, w)$  не меняется.

### § 3. ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА СФЕРИЧЕСКОГО РАССТОЯНИЯ

Во первых, стоит удостовериться, действительно ли  $\text{sp}(z, w)$  можно называть *расстоянием*. То есть, удовлетворяет ли оно трем аксиомам метрики:

$$1) \text{sp}(z, w) \geq 0, \text{sp}(z, w) = 0 \Leftrightarrow z = w;$$

$$2) \text{sp}(z, w) = \text{sp}(w, z);$$

$$3) \text{sp}(z, w) + \text{sp}(w, t) \geq \text{sp}(z, t),$$

где  $z, w, t$  – произвольные комплексные числа.

Принимая во внимание, что  $\text{sp}(z, w)$  на самом деле является евклидовым расстоянием между  $S(z)$  и  $S(w)$ , заключаем, что все три аксиомы верны, так как верны для евклидова расстояния.

Пусть  $z \in \widehat{\mathbb{C}}$  и  $S$  – непустое подмножество области  $D \subset \widehat{\mathbb{C}}$ . Для краткости функцию сферического расстояния до границы области переобозначим как

$$\text{sp}_D(z) = \inf_{w \in \partial D} \text{sp}(z, w), \quad z \in D,$$

$$\text{sp}_D(S) = \inf_{z \in S} \text{sp}_D(z).$$

По аналогии с евклидовым расстоянием, определим понятие круга.

**Определение 2.** *Кругом в понятии сферического расстояния* (далее в этом тексте будет подразумеваться именно такое определение) с центром в точке  $z$  и радиусом  $d$  называется множество

$$D_{\text{sp}}(z, d) = \{w \in \widehat{\mathbb{C}} : \text{sp}(z, w) < d\}$$

Проводя аналогию с евклидовым расстоянием, необходимо выделить некоторые элементарные свойства. Выделим важные для нас свойства  $\text{sp}_D$  в небольшую теорему.

**Теорема 1.** *Для области  $D \subset \widehat{\mathbb{C}}$  (необязательно ограниченной) функция  $\text{sp}_D$  положительна, непрерывна и обладает свойствами:*

$$1) \text{sp}(z, w) \geq \text{sp}_D(z) - \text{sp}_D(w) \text{ для любых } z, w \in D;$$

$$2) \text{ если } S \subset S' \subset D \subset \Omega, \text{ где } \Omega \text{ — область, то } \text{sp}_D(S) \geq \text{sp}_D(S') \text{ и } \text{sp}_D(S) \leq \text{sp}_\Omega(S).$$

3) если

$$z, w \in D, \text{sp}_D(z) \geq d > 0 \text{ и } \text{sp}(z, w) \leq d/2,$$

то отрезок  $[z, w]$  с концами в точках  $z$  и  $w$  включается в  $D$  и справедливо неравенство  $\text{sp}_D([z, w]) \geq d/2$ .

*Доказательство.*

1) Так как  $S(\partial D)$  – замкнуто,

$$\text{sp}_D(z) = \inf_{t \in \partial D} \text{sp}(z, t) = \min_{t \in \partial D} \text{sp}(z, t), \text{ т.е. } \exists A \in \partial D : \text{sp}(z, A) = \text{sp}_D(z);$$

$$\text{sp}(z, w) + \text{sp}(z, A) \geq \text{sp}(w, A) \geq \text{sp}_D(w).$$

2) Следует из определения  $\inf$  и включений  $S \subset S', D \subset \Omega$ .

3)  $\text{sp}_D(z) \geq d$ , т.е. замкнутый круг  $\overline{D_{\text{sp}}(z, d/2)} \supset [z, w]$  включается в  $D$  и по свойству 2, учитывая неравенство треугольника, получаем

$$\text{sp}([z, w], \partial D) \geq \text{sp}(D_{\text{sp}}(z, d/2), \partial D) \geq d/2.$$

По определению  $\text{sp}_D$  это влечет за собой требуемое неравенство  $\text{sp}_D([z, w]) \geq d/2$ . □

**Определение 3.** Распространим понятие длины дуги на сферическую метрику. Пусть на  $\widehat{\mathbb{C}}$  задана дуга  $l(z, w)$ . Разобьем ее на  $n$  частей точками  $z = M_0, M_1, M_2, \dots, M_n = w$  и впишем в нее ломаную  $M_0M_1 \dots M_n$ . Длина этой ломаной будет равна сумме сферических расстояний между точками  $M_{i-1}$  и  $M_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ . Устремим теперь количество звеньев ломаной  $n$  к бесконечности так, чтобы максимальная длина звена  $\max_{i=1,2,\dots,n} \text{sp}(M_{i-1}, M_i)$  стремилось к нулю. Если при этом существует конечный предел  $L_{\text{лом}} = \sum_{i=1}^n \text{sp}(M_{i-1}, M_i)$ , то такая дуга называется *спрямляемой в смысле сферического расстояния*, а значение этого предела называется *длиной дуги в смысле сферического расстояния* и обозначается  $|l(z, w)|_{\text{sp}}$ .

## § 4. ЭНТРОПИЯ ЛИНЕЙНОЙ СВЯЗНОСТИ

**Определение 4.** *Энтропией линейной связности непустого подмножества  $S$  в области  $D \subset \widehat{\mathbb{C}}$  в смысле сферического расстояния* называем величину

$$\ell_{\text{sp}}(S; D) = \sup_{z, w \in S} \inf_{l(z, w) \subset D} \frac{|l(z, w)|_{\text{sp}}}{\text{sp}_D(l(z, w), \partial D)},$$

где  $\inf_{l(z,w) \subset D}$  берется по всем спрямляемым дугам  $l(z,w) \subset D$ , соединяющим  $z$  с  $w$ .

**Теорема 2.** Если  $\ell(S; D) < l < +\infty$ , то для любой пары точек  $z, w \in S$  найдется конечная последовательность кругов  $D_{\text{sp}}(\zeta_k, d)$ ,  $k = 0, \dots, n+1$ , содержащихся в  $D$ , для которых одновременно выполнены два условия:

- 1)  $z = \zeta_0$ ,  $w = \zeta_{n+1}$  и  $\text{sp}(\zeta_{k-1}, \zeta_k) \leq d/2$  при всех  $k = 1, \dots, n+1$ ;
- 2) имеет место оценка  $n \leq 2l$ .

*Доказательство.* Пусть  $z, w \in S$ . По определению энтропии линейной связности найдется спрямляемая дуга  $l(z, w) \subset D$ , для которой

$$\frac{|l(z, w)|_{\text{sp}}}{d} \leq l, \quad d = \text{sp}_D(l(z, w)) = \text{sp}(l(z, w), \partial D). \quad (8)$$

Двигаясь по дуге  $l(z, w)$  от начальной точки  $z$  к конечной точке  $w$ , разобьем эту дугу последовательно точками

$$\zeta_0 = z, \zeta_1, \dots, \zeta_{n+1} = w, \quad \zeta_k \in l(z, w) \subset D, \quad (9)$$

на поддуги  $l(\zeta_{k-1}, \zeta_k)$  с длинами, удовлетворяющими соотношениям

$$|l(\zeta_{k-1}, \zeta_k)|_{\text{sp}} = \frac{d}{2}, \quad k = 1, 2, \dots, n; \quad |l(\zeta_n, \zeta_{n+1})|_{\text{sp}} \leq \frac{d}{2}. \quad (10)$$

По построению последовательности точек  $\{\zeta_k\}$  и в силу выбора  $d$  в (8) каждый круг  $D_{\text{sp}}(\zeta_k, d)$ ,  $k = 0, 1, \dots, n+1$ , включается в  $D$ , а ввиду (9) и (10) выполнен первый пункт теоремы. Кроме того, из (10) следует, что  $nd/2 = |\cup_{k=1}^n l(\zeta_{k-1}, \zeta_k)|_{\text{sp}} \leq |l(z, w)|_{\text{sp}}$ , откуда, согласно (8), получаем  $n \leq 2 \frac{|l(z, w)|_{\text{sp}}}{d} \leq 2l$ , что дает второй пункт теоремы.  $\square$

Элементарные следствия определения 4 сведем в

**Теорема 3.** Пусть  $D$  — область в  $\widehat{\mathbb{C}}$ ,  $S \subset D$ . Тогда

- 1)  $\ell_{\text{sp}}(S; D) = \ell_{\text{sp}}(\overline{S} \cap D; D)$ ;
- 2) если  $S \subset S' \subset D$ , то  $\ell_{\text{sp}}(S; D) \leq \ell_{\text{sp}}(S'; D)$ ;
- 3) если  $\Omega$  — область в  $\widehat{\mathbb{C}}$  и  $D \subset \Omega$ , то  $\ell_{\text{sp}}(S; D) \geq \ell_{\text{sp}}(S; \Omega)$ ;
- 4)  $S \Subset D$  тогда и только тогда, когда  $\ell_{\text{sp}}(S; D) < +\infty$ .

*Доказательство.* Свойства 1-3 — очевидные следствия определения 4. Некоторых рассуждений требует только доказательство свойства 4.

Пусть  $S \Subset D$ . Тогда найдется число  $\varepsilon$ ,  $0 < \varepsilon \leq 1/4$ , для которого

$$\text{sp}(S, \partial D) \geq 2\varepsilon. \quad (11)$$

По нему можно построить конечную  $\varepsilon$ -сеть  $\{z_1, \dots, z_N\}$  для  $S$  в  $D$ . Для каждой пары точек  $z_k, z_m$  выберем какую-либо спрямляемую дугу (можно ломаную с конечным числом звеньев)  $l_{km} \Subset D$ , соединяющую  $z_k$  с  $z_m$ . В силу конечности числа таких дуг найдутся числа  $d$ ,  $0 < d \leq \varepsilon$ , и  $L \geq 0$ , для которых  $\text{sp}_D(l_{km}) \geq d$  и  $|l_{km}| \leq L$  при всех  $k, m = 1, \dots, N$ . Для каждой пары точек  $z, w \in S$  существует пара точек  $z_k, z_m$  из  $\varepsilon$ -сети, для которой  $\text{sp}(z, z_k) < \varepsilon$  и  $\text{sp}(z_m, w) < \varepsilon$ . Следовательно, дуга  $l(z, w) = [z, z_k] \cup l_{km} \cup [z_m, w]$ , соединяющая точки  $z$  и  $w$ , имеет длину не больше  $L + 2\varepsilon \leq L + \frac{1}{2}$ . При этом ввиду (11), дважды применяя теорему 1 (3 пункт), имеем  $[z, z_k] \cup [z_m, w] \subset D$ ,  $\text{sp}_D([z, z_k]) \geq \varepsilon$  и  $\text{sp}_D([z_m, w]) \geq \varepsilon$ , т. е.  $l(z, w) \subset D$ . Отсюда, учитывая выбор  $0 < d \leq \varepsilon \leq 1$ , получаем

$$\text{sp}_D(l(z, w)) \geq \min \{d, \text{sp}_D([z, z_k]), \text{sp}_D([z_m, w])\} \geq \min\{d, \varepsilon\} = d.$$

Следовательно,  $\frac{|l(z, w)|_{\text{sp}}}{\text{sp}_D(l(z, w))} \leq \frac{L+2}{d}$  для некоторой дуги  $l(z, w) \subset D$ , соединяющей  $z$  с  $w$ , откуда  $\ell_{\text{sp}}(S; D) \leq \frac{L+2}{d} < +\infty$ .

Обратно, пусть  $\ell_{\text{sp}}(S; D) < +\infty$ ,  $z$  — фиксированная точка в  $S$ . Допустим, что подмножество  $S$  не является предкомпактным в  $D$ . Тогда существует последовательность точек  $\{w_n\} \subset S$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , для которой  $w_n \rightarrow w \in \partial D$  при  $n \rightarrow \infty$ . В таком случае для любой спрямляемой дуги  $l(z, w_n) \subset D$ , соединяющей  $z$  и  $w_n$ , в силу определения  $\inf$  получаем

$$\frac{|l(z, w_n)|_{\text{sp}}}{\text{sp}_D(l(z, w_n))} \geq \frac{|z - w_n|_{\text{sp}}}{\text{sp}(l(z, w_n), \partial D)} \geq \frac{|z - w_n|_{\text{sp}}}{\text{sp}(w_n, \partial D)} \geq \frac{|z - w_n|_{\text{sp}}}{|w_n - w|_{\text{sp}}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty,$$

что противоречит конечности энтропии  $\ell_{\text{sp}}(S; D)$ .  $\square$

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Основная польза этой работы состоит в обобщении результатов статьи Хабибуллина Б.Н. [1], полученных для конечных областей комплексной плоскости, на неограниченные области. Такое понятие, как энтропия линейной связности было распространено на произвольную неограниченную область  $D \subset \widehat{\mathbb{C}}$  с помощью сферической метрики, достоинство которой состоит

в том, что для любых двух точек  $z$  и  $w$  выполняется  $\text{sp}(z, w) \leq 1$ . Были введены новые понятия, такие как длина кривой, круг, по аналогии с евклидовой метрикой. В дальнейшем планируется обобщить другие результаты из этой области с помощью сферического расстояния на расширенной комплексной плоскости.

Работа поддержана грантом РФФИ № 09-01-00046-а.

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Хабидуллин Б. Н.* Подпоследовательности нулей для классов голоморфных функций и энтропия линейной связности.
- [2] *Привалов И. И.* Введение в теорию функций комплексного переменного. М.: Наука, 1984.

УДК 517.958

## ФОРМУЛА ШУРА И УРАВНЕНИЯ ЛАКСА

**Байчорова Ф. Х., Яикбаева А. К.**

(Карачаевск, КЧГУ им.У.Д.Алиева)

Задаче о представлении эволюции уравнений типа КдФ в форме  $A_t = [A, B]$  посвящена обширная литература. Наиболее известный подход предложен в работе Гельфанда, Дикого [2], в которой использовалась спектральная теория псевдодифференциальных операторов.

Мы будем следовать классической работе известного алгебраиста И. Шура, который расширил кольцо дифференциальных операторов, введя в рассмотрение операторы вида

$$A_1 = D + aD^{-1} + fD^{-2} + gD^{-3} + hD^{-4} + \dots, \quad (1)$$

Он показал, что две формулы

$$D_x \circ a = aD_x + a_x \quad \text{и} \quad D^n D^m = D^{n+m} \quad (2)$$

однозначно определяют умножение в расширенном кольце. В его работе также развита теория дробных степеней дифференциальных операторов.

*Пример 1.* Найдем коэффициенты оператора (1) из алгебраического уравнения  $A_1^3 = A$ , где  $A$ —оператор третьего порядка:

$$A = D^3 + g_2D + g_3 \quad (3)$$

Используя формулы (2), находим

$$A_1^3 = D^3 + 3aD + 3a_x + 3f + (a_{xx} + 3f_x + 3g + 3a^2)D^{-1} + \\ (f_{xx} + 2g_x + 3h + 4af + aa_x)D^{-2} + \dots$$

Приравнивая коэффициенты, получаем

$$\begin{cases} a = \frac{1}{3}g_2, \\ f = \frac{1}{3}g_3 - \frac{1}{3}g_2x, \\ g = \frac{2}{9}g_2xx - \frac{1}{9}g_2^2 - \frac{1}{3}g_3x, \\ h = \frac{1}{3}g_3xx - g_2xxx + \frac{7}{9}g_2g_2x - \frac{4}{9}g_2g_3. \end{cases}$$

*Определение 1.* Пусть  $A$  дифференциальный оператор порядка  $m > 1$  специального вида

$$A = a_0D^m + a_1D^{m-1} + a_2D^{m-2} + \dots + a_m, \quad a_0 = 1, \quad a_1 = 0. \quad (4)$$

и операторы  $B_n$  порядка  $n \geq 1$  определяются формулами

$$B_n = (\alpha_0A_1^n + \alpha_1A_1^{n-1} + \dots + \alpha_{n-1}A_1)_+ + const, \quad \alpha_i \in \mathbb{C}, \quad (5)$$

где

$$A_1 = r_{-1}D + r_0 + r_1D^{-1} + r_2D^{-2} + \dots, \quad A_1^m = A \quad (6)$$

Тогда **уравнениями Лакса** называются следующие эволюционные уравнения для коэффициентов оператора (4):

$$0 = [A, D_{t_n} - B_n] = [A, B_n] - D_{t_n}(A), \quad n = 1, 2, \dots \quad (7)$$

*Лемма 1905, I.Schur.* Пусть коэффициенты оператора  $B_n$  выражаются формулой (5)

$$B_n = (\alpha_0A_1^n + \alpha_1A_1^{n-1} + dots + \alpha_{n-1}A_1)_+ + const, \quad \alpha_i \in \mathbb{C}, \quad (8)$$

Тогда

$$(5) \Rightarrow [A, B_n] = K_0D^{m-2} + \dots + K_{m-2}, \quad K_j = K_j(a_i, a_i', \dots, i = 0, 1, \dots) \quad (9)$$

Лемма Шура позволяет переписать условия коммутирования (7) в виде нелинейных дифференциальных уравнений на коэффициенты оператора (3), Определим эволюционные уравнения

$$[A, D_t - B_n] = [A, B_n] - D_t(A) = 0, \quad (10)$$

или

$$\begin{cases} D_t(g_2) = K_0, \\ D_t(g_3) = K_1, \end{cases}$$

где  $B_n = (A_1^n)_+$ , обозначает дифференциальную часть соответствующей степени формального ряда  $A_1$ , для коэффициентов оператора (3).

*Пример 2.* Рассмотрим оператор четвертого порядка

$$A_1^4 = D^4 + 4aD^2 + (6a_x + 4f)D + 4a_{xx} + 6f_x + 4g + 6a^2 + (a_{xxx} + 4f_{xx} + 5g_x + 2h + 10af + 4aa_x)D^{-1} + \dots$$

$$B = (A_1^4)_+ = D^4 + \frac{4}{3}g_2D^2 + \left(\frac{2}{3}g_{2x} + \frac{4}{3}g_3\right)D + \frac{2}{3}g_{3x} + \frac{2}{9}g_{2xx} + \frac{2}{9}g_2^2$$

Применяя соотношение (10), получим следующую систему уравнений на коэффициенты оператора  $A$ :

$$\begin{cases} g_{2t} = \frac{1}{3}g_{2xxxx} + \frac{2}{3}g_{2x}^2 + \frac{2}{3}g_2g_{2xx} - \frac{2}{3}g_{3xxx} - \frac{4}{3}g_3g_{2x} - \frac{4}{3}g_2g_{3x}, \\ g_{3t} = \frac{2}{9}g_{2xxxxx} + \frac{2}{3}g_2g_{2xxx} - \frac{4}{3}g_3g_{3x} + \frac{4}{3}g_{2x}g_{2xx} - \frac{2}{3}g_2g_{3xx} + \frac{4}{9}g_2^2g_{2x} - \\ - \frac{2}{3}g_{3x}g_{2x} - \frac{1}{3}g_{3xxx}, \end{cases}$$

Сделаем замену  $2g_3 = (g_2 + b)_x$ .

Тогда система, с учетом первого уравнения, примет вид:

$$\begin{cases} g_{2t} = -\frac{1}{3}b_{xxxx} - \frac{2}{3}g_{2x}b_x - \frac{2}{3}g_2b_{xx}, \\ b_t = \frac{1}{9}g_{2xxxx} + \frac{8}{27}g_2^3 - \frac{1}{3}b_x^2 + \frac{1}{3}g_{2x}^2 + \frac{2}{3}g_2g_{2xx} + \varepsilon_1, \end{cases}$$

Дополним лемму Шура следующим утверждением (ср. [1]):

*Лемма 2.* Пусть  $A_1^m = A$  и  $B = B_n$  один из дифференциальных операторов (10). Тогда

$$[A, D_t - B] = 0 \Leftrightarrow [A_1, D_t - B] = 0.$$

◀ Действительно, пусть  $C = [A_1, D_t - B]$ ,  $\hat{B} = D_t - B$ . Тогда

$$0 = [A_1^m, \hat{B}] = A_1^m \cdot \hat{B} - \hat{B} \cdot A_1^m = A_1^{m-1} \cdot C + A_1^{m-2} \cdot C \cdot A_1 + \dots + C \cdot A_1^{m-1}$$



и остается заметить, что указанные выше  $m$  слагаемых имеют один и тот же старший член. Справедливость обратной импликации следует из свойств коммутатора. ►

*Определение 2.* Семейство уравнений Лакса (7) называется **коммутативной иерархией** (или просто иерархией), если при любых  $n$  и  $m$  выполняются коммутационные соотношения

$$[D_\tau - B_n, D_t - B_m] = D_t(B_n) + [B_n, B_m] - D_\tau(B_m) = 0. \quad (11)$$

Эти коммутационные соотношения (11) легко выводятся из Леммы 2 (см. например, [4]).

### Гиперболические уравнения.

В работе [3] (см. также [5]) можно найти симметрии уравнений  $u_{xy} = f(u)$  с

$$f(u) = e^u, \quad e^u + e^{-u}, \quad e^u + e^{-2u}.$$

Напомним, что симметриями уравнения  $u_{xy} = f(u)$  называется функция  $h(x, y, u, u_x, u_y)$ , удовлетворяющая определяющему уравнению

$$[D_x D_y - g(u)](h) = 0, \quad g(u) = f'(u), \quad (12)$$

Следствием этого уравнения является условие коммутирования операторов

$$[D_y - D_x^{-1}g, D_t + a_0 D_x^n + a_1 D_x^{n-1} + a_2 D_x^{n-2} + \dots + a_n] = 0 \quad (13)$$

аналогичное коммутационным соотношениям (11). Дифференциальный оператор  $A = a_0 D_x^n + \dots + a_n$  соответствует здесь линеаризации симметрии (см. [4]).

*Пример 3.* При  $f(u) = e^u - e^{-u}$  симметрией является  $h = u_{xxx} - \frac{1}{2}u_x^3$  и после линеаризации симметрии мы имеем

$$\blacktriangleleft [D_t - D_x^3 + \frac{3}{2}u_x^2 D_x, D_y - D_x^{-1}g] = -\frac{3}{2}D_x^{-1} \circ (u_x^2 f)_x + D_x^{-1} \circ f_{xxx} + 3(g_x - u_x f) D_x$$

Сравнение членов с  $D_x^{-1}$  в коммутаторе дает

$$f_t = f_{xxx} - \frac{3}{2}(f u_x^2)_x, \Leftrightarrow u_t = u_{xxx} - \frac{1}{2}u_x^3 \blacktriangleright$$

В общем случае, покажем, что из условий коммутирования (13) следует, что функция  $f(u)$  должна удовлетворять уравнению второго порядка с постоянными коэффициентами

$$f'' = c_1 f' + c_2 f \quad (14)$$

Для простоты рассмотрим сначала оператор  $A$  третьего порядка

$$[D_y - D_x^{-1}g, D_t + a_0D_x^3 + a_1D_x^2 + a_2D_x + a_3] = D_x^{-1} \circ g_t + a_{0,y}D_x^3 + a_{1,y}D_x^2 + a_{2,y}D_x + a_{3,y} + [a_0D_x^3 + a_1D_x^2 + \dots, D_x^{-1}g] = 0 \Leftrightarrow a_{0,y} = 0, \dots$$

$$\begin{aligned} a_0D_x^3D_x^{-1}g - D_x^{-1}ga_0D_x^3 &= a_0(2g_xD_x + g_{xx}) + (ga_0)_xD_x - (ga_0)_{xx} + \\ &+ (ga_0)_{xxx}D_x^{-1} - \dots a_1D_x^2D_x^{-1}g - D_x^{-1}ga_1D_x^2 = a_1g_x + (ga_1)_x - \\ &- (ga_1)_{xx}D_x^{-1} + \dots a_2D_xD_x^{-1}g - D_x^{-1}ga_2D_x = (ga_2)_xD_x^{-1} - \dots \end{aligned}$$

После приведения подобных членов получаем:

$$\begin{aligned} a_{0,y} &= 0, \quad a_{1,y} = 0, \\ a_0g_{xx} - (ga_0)_{xx} + a_1g_x + (a_1g)_x + a_{3,y} &= 0, \quad 2a_0g_x + (ga_0)_x + a_{2,y} = 0 \\ (ga_0)_{xxx} - (a_1g)_{xx} + (a_2g)_x + g_t &= 0 \end{aligned}$$

При дополнительном предположении

$$D_y h(x, y, u, u_x, u_y, \dots) = 0 \Rightarrow h = const \quad (15)$$

полученная система уравнений сводится к следующей

$$a_0 = 1, \quad a_1 = 0; \quad \alpha_{2,y} + 3g_x = 0, \quad g_t + g_{xxx} + (ga_2)_x = 0$$

и уравнение (14) следует из уравнения для  $a_2$ . В случае  $A = D_x^n + a_2D_x^{n-2} + \dots$  аналогичное уравнение  $a_{2,y} + ng_x = 0$  получается приравниванием коэффициентов при  $D_x^{n-3}$  в коммутаторе

$$[D_y - D_x^{-1}g, D_t + D_x^n + a_2D_x^{n-2} + a_3D_x^{n-3} + \dots + a_n] = a_{2,y}D_x^{n-2} + a_{3,y}D_x^{n-3} + \dots + a_{n,y} + D_x^{-1} \circ g_t + [A, D_x^{-1}g]$$

с использованием формулы

$$D_x^{-1} \circ b D_x^m = bD_x^{m-1} - b_xD_x^{m-2} + b_{xx}D_x^{m-3} - b_{xxx}D_x^{m-4} + \dots, \quad m \geq 0,$$

При  $f(u) = e^u$  (Уравнение Лиувилля) условие (15) нарушается и мы имеем

$$D_x^{-1} \circ e^u = e^u \circ (D_x + u_x)^{-1} \Rightarrow (D_x + u_x)D_y = (D_y - D_x^{-1} \circ e^u)(D_x + u_x)$$

$$h = (D_x + u_x)(w), \quad D_y(w) = 0 \Rightarrow D_x \circ (D_y - D_x^{-1} \circ e^u)(h) = 0$$

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Schur I.*, Uber vertauschbare lineare Differentialausdrucke, // Sitzungsber. Berliner Math. Gen., 1905. 4. С. 2–8.
- [2] *Гельфанд И. М., Диккий Л. А.* Дробные степени операторов и гамильтоновы системы // Функц. Анализ и его приложения 1976. 10(4). С. 13–29.
- [3] *Жибер А. В., Шабат А. Б.*, Уравнения Клейна-Гордона с нетривиальной группой, // ДАН СССР 1979. 247(5).
- [4] *Шабат А. Б.* Лекции по теории солитонов. // Учеб. пособие. Карачаевск. 2008.
- [5] *Муртазина Р. Д.* Нелинейные гиперболические уравн. и характеристические алгебры Ли // Труды института математики и механики УрО РАН. – 2007. – Т. 13. – № 4. – С. 102 - 117.

## О КОНТРПРИМЕРЕ ШАРИПОВА К ГИПОТЕЗЕ ХАБИБУЛЛИНА

**Баладай Р. А.**  
(Уфа, БГУ)

### Введение

Гипотеза Хабибуллина — это некоторое утверждение относительно интегральных неравенств. Первоначально она была сформулирована в работах [1] и [2] в классе неотрицательных неубывающих функций, выпуклых относительно логарифма. В работе [3] были даны две другие формулировки этой гипотезы, эквивалентные первоначальной. При этом условие выпуклости относительно логарифма было снято и гипотеза Хабибуллина была сначала переформулирована в классе неотрицательных неубывающих функций, а затем в классе неотрицательных непрерывных функций. Приведём все три формулировки гипотезы Хабибуллина. Первая из них — это исходная формулировка.

*Гипотеза 1* (Хабибуллин). Пусть  $\lambda$  — положительное вещественное число и пусть  $n$  — целое число, такое, что  $n \geq 2$ . Пусть  $S(x)$  — неотрицательная неубывающая функция на интервале  $[0, +\infty)$ , выпуклая относительно логарифма. Тогда, если неравенство

$$\int_0^1 S(tx) (1-x^2)^{n-2} x dx \leq t^\lambda$$

выполняется для всех  $0 \leq t < +\infty$ , то из него вытекает неравенство

$$\int_0^{+\infty} S(t) \frac{t^{2\lambda-1}}{(1+t^{2\lambda})^2} dt \leq \frac{\pi(n-1)}{2\lambda} \prod_{k=1}^{n-1} \left(1 + \frac{\lambda}{2k}\right).$$

Условие выпуклости функции  $S(x)$  относительно логарифма в гипотезе 1 означает, что функция  $\sigma(x) = S(e^x)$  является выпуклой функцией в обычном понимании, т. е. при любых значениях  $x$  и  $y$  она удовлетворяет неравенству

$$\sigma(\alpha x + \beta y) \leq \alpha \sigma(x) + \beta \sigma(y), \text{ если } \alpha \geq 0, \beta \geq 0 \text{ и } \alpha + \beta = 1.$$

*Гипотеза 2* (Хабибуллин). Пусть  $\alpha$  — положительное вещественное число и пусть  $n$  — целое число, такое, что  $n \geq 1$ . Пусть  $h(x)$  — неотрицательная неубывающая функция на интервале  $[0, +\infty)$ . Тогда, если неравенство

$$\int_0^1 \frac{h(tx)}{x} (1-x)^{n-1} dx \leq t^\alpha \tag{1}$$

выполняется для всех  $0 \leq t < +\infty$ , то из него вытекает неравенство

$$\int_0^{+\infty} \frac{h(t)}{t} \frac{dt}{1+t^{2\alpha}} \leq \frac{\pi}{2} \prod_{k=1}^{n-1} \left(1 + \frac{\alpha}{k}\right). \tag{2}$$

*Гипотеза 3* (Хабибуллин). Пусть  $\alpha$  — положительное вещественное число и пусть  $n$  — натуральное число, такое что  $n \geq 1$ . Пусть  $q(x)$  — неотрицательная непрерывная функция на интервале  $[0, +\infty)$ . Тогда, если неравенство

$$\int_0^1 \left( \int_x^1 (1-y)^{n-1} \frac{dy}{y} \right) q(tx) dx \leq t^{\alpha-1}$$

выполняется для всех  $0 \leq t < +\infty$ , то из него вытекает неравенство

$$\int_0^{+\infty} q(t) \ln\left(1 + \frac{1}{t^{2\alpha}}\right) dt \leq \pi \alpha \prod_{k=1}^{n-1} \left(1 + \frac{\alpha}{k}\right).$$

В работе [4] было доказано, что гипотеза 1 верна в случае  $0 < \lambda \leq 1$ . Для гипотез 2 и 3 это означает, что они верны при  $0 < \alpha \leq 1/2$ .

В серии работ [5, 6, 7] отдельно исследовалась третья формулировка гипотезы Хабибуллина. При этом ещё раз было доказано, что гипотеза 3 верна при  $0 < \alpha \leq 1/2$  для любых целых  $n \geq 1$ . Однако, как оказалось, за пределами интервала  $0 < \alpha \leq 1/2$  гипотеза 3 не всегда верна. В работе [7] был построен контрпример к гипотезе 3 для случая  $n = 2$  и  $\alpha = 2$ . Основная цель данной работы пересчитать построенный Шариповым в [7] контрпример на случай гипотез 2 и 1 соответственно.

## § 1. Контрпример Шарипова

Контрпример Шарипова к гипотезе 3, построенный в работе [7], — это функция  $q(x)$ , заданная на интервале  $[0, +\infty)$  при помощи формулы

$$q(x) = \begin{cases} 12x(1 - \varepsilon r(x)) & \text{при } 0 \leq x < x_0, \\ 12x & \text{при } x \geq x_0, \end{cases} \quad (3)$$

в которой  $x_0 = \sqrt[4]{3/5}$ , а  $r(x)$  — некоторый конкретный полином четвёртой степени по  $x$ . Контрпример (3) содержит числовой параметр  $\varepsilon$ , который может быть любым фиксированным вещественным числом, удовлетворяющим неравенству  $0 < \varepsilon \leq 1$ . То есть формула (3) даёт не один контрпример, а однопараметрическое семейство контрпримеров, зависящее от параметра  $\varepsilon$ .

Полином  $r(x)$  в формуле (3) выражается через другой полином четвёртой степени  $R(\tau)$  при помощи линейной замены переменной:

$$r(x) = R(\tau), \quad \text{где } \tau = \frac{x_0 - x}{x_0}. \quad (4)$$

А полином  $R(\tau)$  в (4) уже определяется явной формулой:

$$R(\tau) = (21\tau^3 - 34\tau^2 + 16\tau - 2)\tau.$$

## § 2. Контрпример к гипотезе 2.

Контрпример к гипотезе 2 должен быть неотрицательной неубывающей функцией  $h(x)$  на интервале  $[0, +\infty)$ , удовлетворяющей неравенству (1), но не удовлетворяющей неравенству (2). При выводе гипотезы 3 из гипотезы 2 в работах [3] и [4] была использована формула

$$q(x) = \frac{dh(x)}{dx}. \quad (5)$$

Согласно формуле (5) для получения требуемой функции  $h(x)$  надо проинтегрировать функцию (3). Это даёт

$$h(x) = \int_0^x q(y) dy + C, \quad (6)$$

где  $C$  — константа интегрирования.

Выбор константы интегрирования  $C$  в формуле (6) определяется неравенством (1). В этом неравенстве следует положить  $\alpha = 2$  и  $n = 2$ , поскольку контрпример Шарипова (3) относится именно к такому случаю. Тогда неравенством (1) запишется в следующем виде:

$$\int_0^1 \frac{h(tx)}{x} (1-x) dx \leq t^2. \quad (7)$$

Подставим  $t = 0$  в неравенство (7). При этом аргумент функции  $h(tx)$  занулится и её можно будет вынести за знак интегрирования:

$$h(0) \int_0^1 \frac{1-x}{x} dx \leq 0. \quad (8)$$

Интеграл в формуле (8) положителен. По этой причине неравенство (8) даёт  $h(0) \leq 0$ . С другой стороны,  $h(x)$  должна быть неотрицательной функцией на интервале  $[0, +\infty)$ . Отсюда  $h(0) \geq 0$ . Из двух противоположных неравенств  $h(0) \leq 0$  и  $h(0) \geq 0$  вытекает следующее равенство:

$$h(0) = 0. \quad (9)$$

Равенство (9) означает, что константа интегрирования  $C$  в формуле (6) должна выбираться равной нулю, что даёт

$$h(x) = \int_0^x q(y) dy. \quad (10)$$

Теперь функция  $h(x)$  вычисляется прямой подстановкой функции (3) в формулу (10). После вычисления интеграла это даёт

$$h(x) = \begin{cases} 6x^2(1 - \varepsilon u(x)) & \text{при } 0 \leq x < x_0, \\ 6x^2 & \text{при } x \geq x_0. \end{cases} \quad (11)$$

Многочлен  $u(x)$  в формуле (11) определяется равенством

$$u(x) = U(\tau), \text{ где } \tau = \frac{x_0 - x}{x_0}. \quad (12)$$

Через  $U(\tau)$  в формуле (12) обозначен многочлен четвёртой степени по переменной  $\tau$ , определяемый следующей явной формулой:

$$U(\tau) = (7\tau^2 - 8\tau + 2)\tau^2. \quad (13)$$

**Теорема 4.** *Для каждого конкретного значения параметра  $\varepsilon$ , удовлетворяющего неравенствам  $0 < \varepsilon \leq 1$ , функция  $h(x)$ , определяемая формулами (11), (12) и (13), является контрпримером к гипотезе Хабибуллина 2 для случая  $n = 2$  и  $\alpha = 2$ .*

Доказательство теоремы 4 может быть получено прямыми вычислениями. Сама же функция (11) с многочленом  $u(x)$  из (12) — это есть контрпример Шарипова, пересчитанный со случая гипотезы 3 на случай гипотезы 2.

### § 3. Контрпример к гипотезе 1.

Для того, чтобы пересчитать контрпример (11) со случая гипотезы 2 на случай гипотезы 1, надо пройти путем, проложенным в работе [3], но в обратном направлении. Сначала определим функцию

$$s(x) = 4h(x^2). \quad (14)$$

Подобно  $h(x)$ , функция  $s(x)$  из (14) является неотрицательной неубывающей функцией на интервале  $[0, +\infty)$ . С помощью  $s(x)$  определим функцию

$$S(x) = \int_0^x \frac{s(t)}{t} dt = \int_0^x \frac{4h(t^2)}{t} dt. \quad (15)$$

Преобразование (15) основано на утверждении 5.1 из работы [8], которое было использовано в работе [3]. Полученная в результате такого преобразования функция  $S(x)$  будет неотрицательной, неубывающей и одновременно выпуклой относительно логарифма функцией.

Обозначим  $x_1 = \sqrt{x_0} = \sqrt[8]{3/5}$ . После этого подставим функцию (11) в формулу (15). В результате прямых вычислений получим

$$S(x) = \begin{cases} 6x^4(1 - \varepsilon v(x)) & \text{при } 0 \leq x < x_1, \\ 6x^4 & \text{при } x \geq x_1. \end{cases} \quad (16)$$

Здесь  $v(x)$  — некоторый конкретный полином восьмой степени. Полином  $v(x)$  в формуле (16) выражается через другой полином восьмой степени  $V(\theta)$  при помощи линейной замены переменной:

$$v(x) = V(\theta), \text{ где } \theta = \frac{x}{x_1}. \quad (17)$$

А полином  $V(\theta)$  в (17) уже определяется явной формулой:

$$V(\theta) = \frac{(7\theta^2 - 3)(\theta^2 - 1)^3}{3}. \quad (18)$$

Согласно результатам работы [3] при переходе от гипотезы 1 к гипотезе 2 параметр  $n$  не меняется, а параметр  $\lambda$  заменяется параметром  $\alpha = \lambda/2$ . По этой причине можно сформулировать следующий результат.

**Теорема 5.** *Для каждого конкретного значения параметра  $\varepsilon$ , удовлетворяющего неравенствам  $0 < \varepsilon \leq 1$ , функция  $S(x)$ , определяемая формулами (16), (17) и (18), является контрпримером к гипотезе Хабибуллина 1 для случая  $n = 2$  и  $\lambda = 4$ .*

Теорема 5 доказывается прямыми вычислениями. Функция  $S(x)$ , упоминаемая в этой теореме, — это контрпример Шарипова, пересчитанный со уже со случая гипотезы 2 на случай гипотезы 1.

## Список литературы

- [1] Б. Н. Хабибуллин, *Проблема Пэли для плюрисубгармонических функций конечного нижнего порядка* // Мат. Сборник. Т.190, вып 2 1999. С. 145-157.
- [2] Б. Н. Хабибуллин, *The representation of a meromorphic function as a quotient of entire functions and the Paley problem in  $\mathbb{C}^n$ : survey of some results*, // Математическая физика, анализ, геометрия (Украина). Т.9, №2. 2002. С. 146-167; см. также e-print **math.CV/0502433** в электронном архиве <http://arXiv.org>.
- [3] B. N. Khabibullin, *A conjecture on some estimates for integrals*, e-print **arXiv:1005.3913** в электронном архиве <http://arXiv.org>.
- [4] R. A. Baladai, B. N. Khabibullin, *Three equivalent conjectures on an estimate of integrals*, e-print **arXiv:1006.5140** в электронном архиве <http://arXiv.org>.



- [5] R. A. Sharipov, *A note on Khabibullin's conjecture for integral inequalities*, e-print **arXiv:1008.0376** в электронном архиве <http://arXiv.org>.
- [6] R. A. Sharipov, *Direct and inverse conversion formulas associated with Khabibullin's conjecture for integral inequalities*, e-print **arXiv:1008.1572** в электронном архиве <http://arXiv.org>.
- [7] R. A. Sharipov, *A counterexample to Khabibullin's conjecture for integral inequalities*, e-print **arXiv:1008.2738** в электронном архиве <http://arXiv.org>.
- [8] А. А. Кондратюк, *Ряды Фурье и мероморфные функции*, издательство «Вища школа», Львов, 1988.

УДК 532.5

## НЕЛИНЕЙНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ОДИНОЧНОГО ПУЗЫРЬКА В АКУСТИЧЕСКОМ ПОЛЕ

Волкова Е.В.

Центр Микро- и наномасштабная динамика дисперсных систем, БашГУ,  
ИМех УНЦ РАН, г. Уфа

### Введение

В данной работе рассматривается одиночный газовый пузырек под действием акустического поля, с учетом массопереноса через подвижную стенку пузырька. Массоперенос рассчитывается отдельно в постановке задачи диффузии. Как следствие изменения давления внутри пузырька за счет колебаний его объема, концентрация растворенного в жидкости газа претерпевает колебания большой амплитуды на границе с пузырьком.

### § 1. Постановка задачи

Рассмотрен сферически-симметричный парогазовый пузырек в бесконечной несжимаемой жидкости в изотропном поле давления, теплообменом в жидкости пренебрегается.

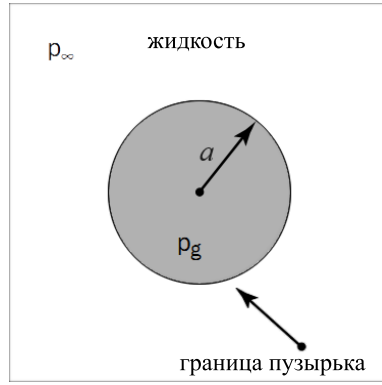


Рис. 1: Схематическое представление сферического пузырька в бесконечном объеме жидкости

В невозмущенном начальном состоянии выражения для давления, плотности и массы газа следующие (Рис. 1):

$$p_{g0} = p_0 + \frac{2\sigma}{a_0}, \quad \rho_{g0} = \frac{p_{g0}}{R_g T_0}, \quad m_{g0} = \frac{4}{3}\pi a_0^3 \rho_{g0}.$$

где  $a$  – радиус пузырька,  $\rho_g$  – плотность газа,  $p_g$  – давление газа в пузырьке,  $m_g$  – масса газа в пузырьке,  $\sigma$  – поверхностное натяжение. Индекс “0” обозначает значение величины в начальный момент времени.

Одиночный газовый пузырек в бесконечной несжимаемой жидкости с растворенным газом в отсутствии внешнего акустического поля неустойчив, потому что давление внутри пузырька больше давления в жидкости и, следовательно, пузырек будет медленно растворяться из-за диффузии газа из пузырька в окружающую жидкость и со временем исчезнет [1]. Если же поместить пузырек в акустическое поле, изменяющееся по закону синуса,

$$p_\infty = -A \sin \omega t.$$

где  $p_\infty$  – давление в жидкости вдали от пузырька, то это вызовет колебания пузырька, причем во время расширения будет происходить диффузия газа из жидкости в пузырек, а во время сжатия – наоборот. Этот процесс называется “направленной” диффузией. За полный период колебания диффузия должна приводить к росту пузырька. Предполагается, что длина волны звукового давления во много раз превышает размеры пузырька,  $\omega a \ll C$ , где  $\omega$  – круговая частота,  $a$  – радиус пузырька, и  $C$  – скорость звука в жидкости.

Скорость переноса массы через подвижную границу пузырька определяется через градиент концентрации газа  $c_l$  по следующей формуле

$$\dot{m}_g = 4\pi a^2 \rho_l D_l \left. \frac{\partial c_l}{\partial r} \right|_{r=a}.$$

Полагая поведение пузырька политропным, получим уравнение для давления газа в пузырьке,

$$\frac{p_g}{p_{g0}} = \left( \frac{\rho_g}{\rho_{g0}} \right)^\gamma = \left( \frac{m_g}{m_{g0}} \right)^\gamma \left( \frac{a_0}{a} \right)^{-3\gamma}.$$

При квазиизотермических условиях масса газа меняется очень медленно. В этом случае справедливо

$$\frac{p_g}{p_{g0}} = \left( \frac{m_g}{m_{g0}} \right) \left( \frac{a_0}{a} \right)^{-3\gamma}.$$

Динамика пузырька описывается следующим нелинейным дифференциальным уравнением Келлера-Миксиса [2]

$$\left( 1 - \frac{\dot{a}}{C} \right) a \ddot{a} + \frac{3}{2} \dot{a}^2 \left( 1 - \frac{\dot{a}}{3C} \right) = \left( 1 + \frac{\dot{a}}{C} \right) \frac{P}{\rho_l} + \frac{a}{\rho_l C} \frac{\partial P}{\partial t},$$

в котором

$$P = \left( p_0 + \frac{2\sigma}{a_0} \right) \left( \frac{a_0}{a} \right)^3 \kappa - p_0 - \frac{2\sigma}{a} - \frac{4\mu}{a} \dot{a} - p_\infty,$$

где  $a$  – радиус пузырька,  $\rho_l$  – плотность жидкости,  $\mu$  – кинематическая вязкость жидкости,  $\sigma$  – поверхностное натяжение.

Начальные условия:  $a(0) = a_0$ ,  $\dot{a}(0) = 0$ .

Уравнение конвекции-диффузии растворенного газа в жидкости в сферических координатах представлено в следующем виде:

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{a^2 \dot{a}}{r^2} \frac{\partial c}{\partial r} = D \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial c}{\partial r} \right), \quad c|_{r=\infty} = c_\infty, \quad c|_{r=a} = c_a.$$

где  $c$  – массовая концентрация газа, растворенного в жидкости,  $\frac{a^2 \dot{a}}{r^2}$  – радиальное поле скорости,  $D$  – коэффициент диффузии, радиус пузырька  $a$  – функция от времени  $t$ . Поле скорости в жидкости зависит от времени, пространственно неоднородно и возникает в области с подвижной границей.

#### § 4. Результаты численного моделирования

Задача решалась численно и разбита на два этапа: исследование динамики пузырька в акустическом поле и решение задачи диффузии.

Численное исследование уравнения Келлера-Миксиса осуществлялось в среде Matlab с помощью метода Дормана-Принца восьмого порядка точности. Также для проверки решения использовалась встроенная процедура Matlab ode45 для решения ОДУ методом Рунге-Кутты 4-5 порядка точности.

Задача диффузии решалась с использованием схемы Кранка-Николсона. Для устранения вычислительных проблем, связанных с подвижной границей, по аналогии с [4] задача рассмотрена в Лагранжевых координатах. Граница зафиксирована с помощью переменной Лагранжа  $\zeta$  :

Для проверки правильности вычислений в задаче о динамике пузырька автором использовалась работа [2], поэтому результаты получены для пузырьков газа в воде при температуре  $20^\circ\text{C}$  и следующих параметрах: показатель адиабаты  $\kappa = 1.4$ ,  $\sigma = 0.0725$  Н/м,  $p_0 = 1$  бар,  $C = 1500$  м/с, частота  $\omega = 2\pi \cdot 20$  кГц.

На (Рис. 2) показано изменение давления звукового поля за один период.

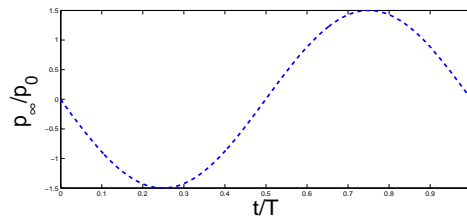


Рис. 2: Акустическое поле  $p_\infty = -A \sin \omega t$ . при  $A = 1.5$  бар

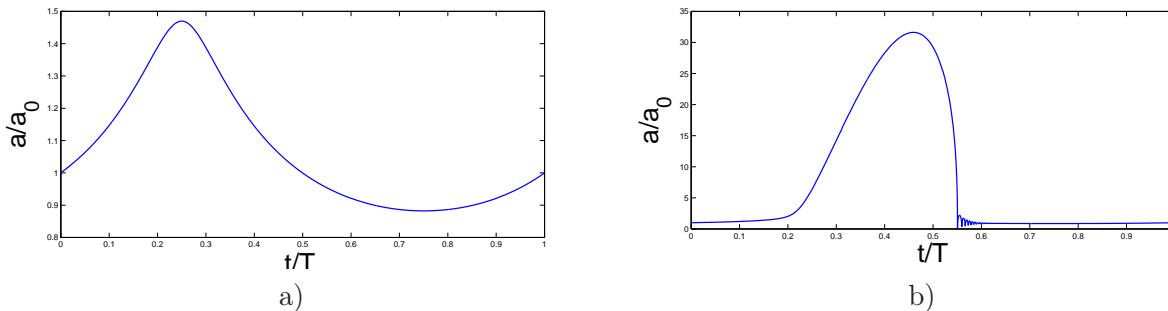


Рис. 3: Изменение безразмерного радиуса пузырька при  $a_0 = 1$  микрон а)  $a_0 = 1.5$  микрон б)

На рисунках (Рис. 3 а, б) представлено изменение радиуса пузырька в зависимости от безразмерного времени (за один период акустического поля) при начальных радиусах  $a_0 = 1$  микрон и  $a_0 = 1.5$  микрон. В первом случае пузырек осциллирует с малой амплитудой из-за относительно большого давления поверхностного натяжения. Для второго случая наблюдаются нелинейные колебания большой амплитуды. Аналогичные результаты при данных параметрах были получены в работе [2].

Также обнаружено хорошее соответствие результатов вычислений с встроеной процедурой Matlab для решения обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ). Порядок аппроксимации реализованного алгоритма Дормана-Принца превышает порядок аппроксимации встроеной функции Matlab для решения систем ОДУ.

Задача диффузии решалась при следующих параметрах:

$h_\zeta = L/M - 1$ ,  $M = 100$ ,  $L = 1$ ,  $u_a = 1$ ,  $N_{step} = 300$ ,  $h_\tau = 10^{-5}$ . Для возможности сравнения результатов численного решения с аналитическим положим  $k[\zeta, \tau] = const = 1$ , что делает задачу линейной. Для такого случая существует аналитическое решение

$$u(\zeta, \tau) = 1 - u_a \operatorname{erf} \left( \frac{x}{2\sqrt{kt}} \right)$$

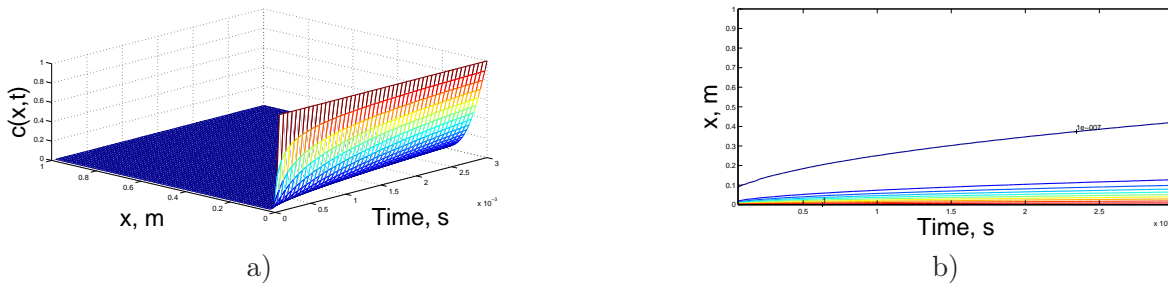


Рис. 4: Распределение концентрации газа, растворенного в жидкости, по пространству и времени а) контурное представление концентрации б)

На (Рис. 4) показано распределение концентрации газа по пространству и времени. При заданных параметрах абсолютная ошибка в сравнении с аналитическим решением составляет  $10^{-2}$ .

Для дальнейшего исследования необходимо решение задачи с нелинейной зависимостью коэффициента диффузии, а также расчет радиуса пузырька под влиянием направленной диффузии.

#### Литература

- [1] *Насибулаева Э.Ш., Ахатов И.Ш.* Исследование диффузионной устойчивости пузырьков в кластере // Прикладная механика и техническая физика. 2007. vol. 48, №4, стр. 40–48.
- [2] *I. Akhatov, N. Gumerov, C. D. Ohl, U. Parlitz, W. Lauterborn.* The Role of Surface Tension in Stable Single-Bubble Sonoluminescence. // Physical Review Letters. 1997. Vol. 78, No 2, pp 227-230.
- [4] *Marios M. Fyrillas, Andrew J. Szeri* Dissolution or growth of soluble spherical bubble // J. Fluid Mech. 1994. vol. 277, P. 381-407.

# ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕЧЕНИЯ СТОКСА В КАНАЛЕ ПЕРЕМЕННОГО СЕЧЕНИЯ МЕТОДОМ ГРАНИЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Иткулова Ю.А., Солнышкина О.А.

Центр «Микро- и наномасштабная динамика дисперсных систем»,  
БашГУ, ИМех УНЦ РАН, г. Уфа

## Введение

Повышение дебита нефтяных скважин всегда было и остается важной проблемой нефтедобывающей отрасли. На величину дебита скважины конкретного месторождения, прежде всего, влияет состояние призабойной зоны скважины с точки зрения ее фильтрационных свойств. Для анализа которых важно определить критический радиус сужения канала, при котором формируются вихри. Исследования так же связаны с проблемой запыления эмульсий в микроканалах.

### § 1. Постановка задачи

Рассмотрим течение вязкой несжимаемой жидкости с вязкостью  $\mu$  в ограниченном канале переменного сечения с гладкой поверхностью  $S$  при малых числах Рейнольдса (Рис. 1). Движение жидкости описывается уравнениями Стокса

$$\frac{1}{\mu} \nabla p = \nabla^2 \mathbf{u}, \quad \nabla \cdot \mathbf{u} = 0. \quad (1)$$

Поверхность канала разбивается на два подмножества:

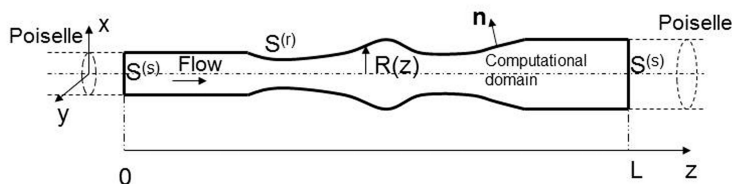


Рис. 1: Канал переменного сечения

$S = S^{(s)} \cup S^{(r)}$ , где  $S^{(r)}$  - жесткая граница (боковая поверхность канала)

и  $S^{(s)}$  - мягкая граница (торцы канала). Граничные условия задавались следующие:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(\mathbf{x}) &= \mathbf{u}^0(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in S, \\ \mathbf{f}(\mathbf{x}_0) &= \mathbf{f}^0(\mathbf{x}_0), \quad \mathbf{x}_0 \in S^{(s)}. \end{aligned} \quad (2)$$

Задача решалась численно методом граничных элементов в нескольких модификациях.

## § 2. Построение трехмерной треугольной сетки канала переменного сечения

Предполагаем, что канал является осесимметричным радиуса  $R(x)$  и длиной  $x \in [0, L]$ , где  $x$  – координата вдоль оси канала. Канал переменного сечения можно получить из кругового цилиндра аппроксимацией его вершин на аналитическую поверхность  $R(x)$ . Массивы граней таких моделей будут совпадать, т.е. фигуры будут с одинаковой топологией. Таким образом, построение трехмерной треугольной сетки канала переменного сечения сводится к задаче формирования подобной сетки для кругового цилиндра.

Триангуляция боковой поверхности кругового цилиндра была получена из триангуляции 4-х связанных граней параллелепипеда, полученного из куба. На торцах цилиндра производилась триангуляция Делоне, затем сетки склеивались. О качественной ориентации сетки говорит то, что нормали цилиндра сонаправлены и направлены вне канала.

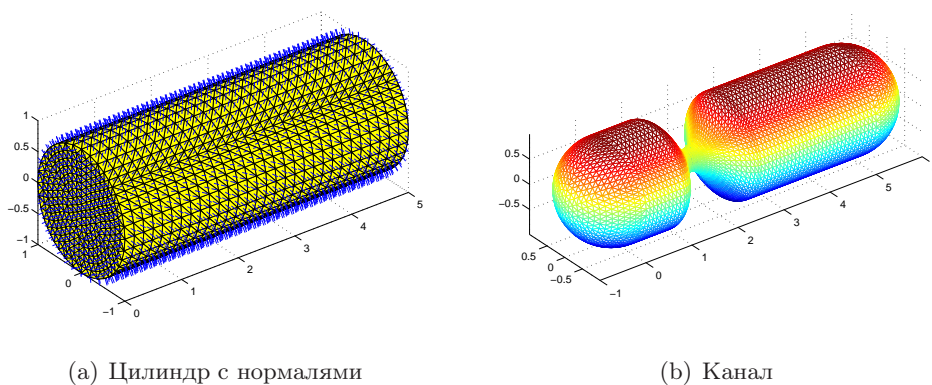


Рис. 2: Качественная триангуляция канала

К сожалению, построенная триангуляция канала переменного сечения не удовлетворяла критериям качества сетки, так как равномерное разбиение вдоль образующей канала в сужающейся части давало “вытянутые” треугольники. Поэтому на горлышке канала необходимо было сгустить сетку.

Для использования метода вершинных коллокаций в методе граничных элементов необходимо, чтобы поверхность была гладкой. Поэтому торцевые части пришлось вытянуть вдоль оси цилиндра. На рисунке 2 представлена качественная триангуляция канала.

### § 3. Метод граничных элементов в нескольких модификациях

Уравнения Стокса (1) переписываются в граничных интегралах [1],[2]. Сначала находим вектор нормального напряжения  $\mathbf{f}$  на границе

$$\frac{1}{\mu} \int_S \mathbf{G}(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \cdot \mathbf{f}(\mathbf{x}) dS(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \mathbf{u}^0(\mathbf{y}) - \int_S \mathbf{K}(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \cdot \mathbf{u}^0(\mathbf{x}) dS(\mathbf{x}), \quad \mathbf{y} \in S, \quad (3)$$

где  $\mathbf{G}$  — фундаментальное решение уравнения Стокса,  $\mathbf{T}$  — тензор напряжений, определяются как

$$\mathbf{G}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{8\pi} \left( \frac{\mathbf{I}}{r} + \frac{\mathbf{r}\mathbf{r}}{r^3} \right), \quad \mathbf{T}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -\frac{3}{4\pi} \frac{\mathbf{r}\mathbf{r}\mathbf{r}}{r^5}, \quad (4)$$

$$\mathbf{r} = \mathbf{x} - \mathbf{y}, \quad r = |\mathbf{r}|.$$

Затем, значения скорости  $\mathbf{u}$  в любой точке области  $\mathbf{y}$  можно вычислить через граничные интегралы:

$$\mathbf{u}(\mathbf{y}) = \frac{1}{\mu} \int_S \mathbf{G}(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \cdot \mathbf{f}(\mathbf{x}) dS(\mathbf{x}) + \int_S \mathbf{K}(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \cdot \mathbf{u}^0(\mathbf{x}) dS(\mathbf{x}), \quad \mathbf{y} \in V. \quad (5)$$

Для проверки достоверности полученных результатов, задача так же была решена модифицированным методом граничных элементов, который заключается в следующем.

Нам известно точное решение для течения Пуазейля, которому задаем возмущение

$$\mathbf{f} = \mathbf{f}^0 + \mathbf{f}', \quad \mathbf{u} = \mathbf{u}^0 + \mathbf{u}'. \quad (6)$$

Граничные условия (2) для возмущений  $\mathbf{u}'$  и  $\mathbf{f}'$  будут выглядеть следующим образом

$$\mathbf{u}' = 0, \quad \mathbf{x} \in S^{(s)}, \quad \mathbf{u}' = -\mathbf{u}^0, \quad \mathbf{x} \in S^{(r)}, \quad (7)$$

$$\mathbf{f}'(\mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}_0) = 0, \quad \mathbf{x}_0 \in S^{(s)}.$$

Из интегральных уравнений (3)–(5), которым так же удовлетворяют возмущения  $\mathbf{u}'$  и  $\mathbf{f}'$ , находим их значения. С учетом (6) определяем вектор нормального напряжения  $\mathbf{f}$  на границе и компоненты скорости  $\mathbf{u}$  в любой точке области.



## § 4. Результаты численного моделирования

Для тестирования программы использовался канал с входным и выходным сечением радиуса  $R = 1$ , длиной  $L = 5$ .

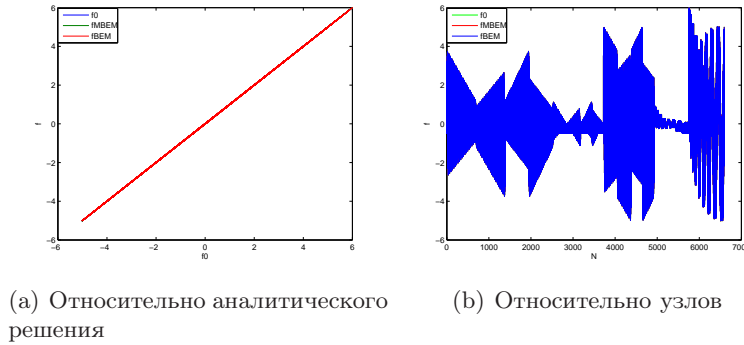


Рис. 3: Нормальное напряжение на границе

Проведено сравнение компонент вектора нормального напряжения  $\mathbf{f}$  на границе методом граничных элементов в нескольких модификациях с аналитическим решением для течения Пуазейля. На рисунке (3) представлены результаты сравнения относительно точного решения и узлов сетки. Погрешность вычисления неизвестных значений на границе составила порядка 1%.

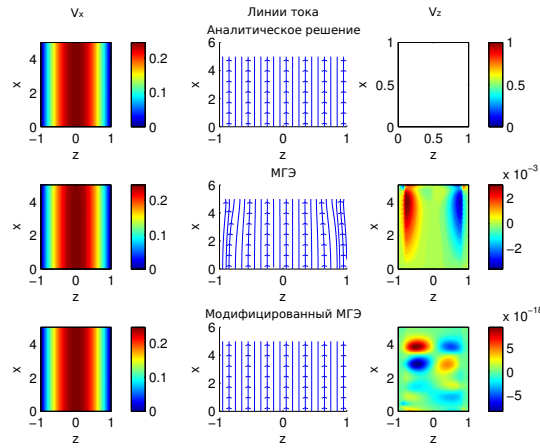


Рис. 4: Сравнение модификаций МГЭ с аналитическим решением

На рисунке (4) представлены поля скорости и линии тока, вычисленные в осевом сечении цилиндра плоскостью  $Oxz$ , для течения Пуазейля. Из рисунка видно, что численные расчеты хорошо приближаются к аналитическому решению. Однако, модифицированный метод граничных элементов, особенно для компонент скорости вдоль оси  $Oz$ , дает более точные

результаты, по сравнению с обычным методом граничных элементов.

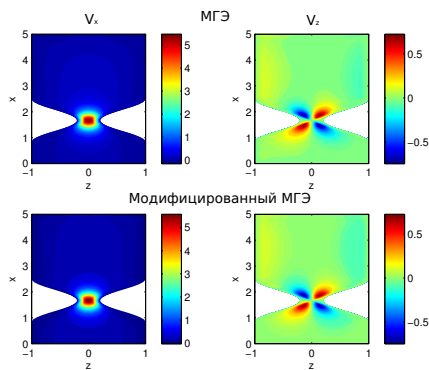


Рис. 5: Поля скорости для канала радиусом сужения  $R_{min} = 0.2$

Получены численные результаты для канала различного радиуса сужения методом граничных элементов в двух модификациях и проведено сравнение этих вариантов метода. В результате, относительная погрешность составила порядка 0,1-1,7% в зависимости от формы канала. По мере уменьшения радиуса сужения канала погрешность увеличивается и максимальное значение 1.7 % принимает на цилиндрическом канале. На рисунке (5) представлены поля скорости для канала радиусом сужения  $R_{min} = 0.2$ , где образуется вихрь. К сожалению, наблюдать вихрь в полном размере не представляется возможным, т.к. на границе сингулярные интегралы вычисляются не точно, а с помощью известных тождеств для линейных и постоянных течений, что ведет к большой погрешности вычисления поля скорости в точках, лежащих близко к границе.

### Литература

- [1] *Pozrikidis C.* Boundary Integral and Singularity Methods for Linearized Viscous Flow. 1992(Cambridge University Press, Cambridge, MA).
- [2] *Бреббия К.* Методы граничных элементов. Пер. с англ. М.: Мир, 1987. 524 с.

## ПРИМЕРЫ ОДУ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ПОСТОЯННЫМ ИНВАРИАНТОМ КАРТАНА

Картак В.В., Розит А.П., Юрьева А.М.  
(Уфа, БГУ)

### Введение

Рассматриваются ОДУ второго порядка вида

$$y'' = P(x, y) + 3Q(x, y)y' + 3R(x, y)y'^2 + S(x, y)y'^3. \quad (1)$$

*Инвариантом* уравнения (1) относительно действия точечных преобразований  $\tilde{x} = \tilde{x}(x, y)$ ,  $\tilde{y} = \tilde{y}(x, y)$  называется функция, зависящая только от  $(x, y)$ , такая, что при произвольном точечном преобразовании она сохраняет свой вид:

$$I(x, y) = I(\tilde{x}(x, y), \tilde{y}(x, y)).$$

Теория инвариантов уравнений (1) берет начало в классических работах конца XIX - начала XX века (R.Liouville, S.Lie, A.Tresse, E.Cartan); далее развита в работах конца XX века (C.Grissom, G.Thompson and G.Wilkens; N.Kamran, K.G.Lamb & W.F.Shadwick; J.Hietarinta, V.Dryuma, L.A.Bordag, N.Kh.Ibragimov, R.A.Sharipov). Она остается актуальной и в XXI веке (C.Bandle and L.A.Bordag, V.V.Kartak, N.Kh.Ibragimov, S.V. Meleshko).

В работе [1] приведены эффективные формулы для построения инвариантов Картана уравнений (1).

Уравнения (1), для которых выполнены некоторые специальные условия, и инвариант Картана для которых  $I_1 = const \neq 0$ , полностью описаны в работе [2]. Всего существует 4 типа таких уравнений, в зависимости от значения инварианта  $I_1$ . Точечной заменой переменных их можно привести к виду:

$$y'' = P^*(y) + t(x)y + s(x),$$

где

$$P^*(y) = \begin{cases} e^y, & \text{если } I_1 = \frac{3}{5}; \\ -\ln y, & \text{если } I_1 = -\frac{9}{10}; \\ y(\ln y - 1), & \text{если } I_1 = -\frac{12}{5}; \\ \frac{y^{C+2}}{(C+1)(C+2)}, & \text{если } I_1 = \frac{3(C+5)}{5C}, \\ & C = \text{const} \neq -5, -2, -1, 0. \end{cases}$$

Целью данной работы является поиск содержательных примеров из классического справочника Э.Камке [3].

### § 1. Примеры уравнений из справочника Э.Камке

Были рассмотрены 249 уравнений из Части 3, Главы VI „Нелинейные дифференциальные уравнения второго порядка“ справочника Э.Камке [3]. Всего найдено 71 подходящее уравнение. По четырем типам они распределились следующим образом. Уравнений типа II обнаружено не было.

#### Уравнения типа I

- 6.14  $y'' = e^y$   
 6.28  $y'' = -ay' - be^y + 2a, \quad b \neq 0$   
 6.75  $y'' = -\frac{2}{x}y' - e^y$   
 6.76  $y'' = -\frac{a}{x}y' - be^y, \quad b \neq 0$   
 6.77  $y'' = -\frac{a}{x}y' - bx^{4-2a}e^y, \quad b \neq 0$   
 6.83  $y'' = -\frac{a(e^y-1)}{x^2}, \quad a \neq 0$   
 6.110  $y'' = \frac{y'^2}{y} - \frac{1}{y}$   
 6.111  $y'' = \frac{y'^2}{y} + \frac{1}{y}$   
 6.118  $y'' = \frac{y'^2}{y} - ay' - by^2 + 2ay, \quad b \neq 0$   
 6.126  $y'' = -\frac{a(y'^2+1)}{y}, \quad a = -1$   
 6.127  $y'' = -\frac{ay'^2}{y} - by^2, \quad a = -1$   
 6.172  $xyy'' - xy'^2 + ayy' + by^2 = 0, \quad b \neq 0$

### Уравнения типа III

$$6.45 \quad y'' = -ay'^2 - by, \quad ab \neq 0$$

$$6.47 \quad y'' = -ay'^2 - by' - cy, \quad ac \neq 0$$

### Уравнения типа IV

1.  $I_1$  выражается через параметр

$$6.11 \quad y'' = -ax^m y^n, \quad n \neq 0, 1, \quad I_1 = \frac{3}{5} \cdot \frac{n+3}{n-2}$$

уравнение Эмдена-Фаулера

$$6.26 \quad y'' = -ay' - by^n - \frac{a^2-1}{4}y, \quad b \neq 0, \quad n \neq 1, 2, -3, \quad I_1 = \frac{3}{5} \cdot \frac{n+3}{n-2}$$

$$6.27 \quad y'' = -ay' - bx^m y^n, \quad b \neq 0, \quad n \neq 1, 2, -3, \quad I_1 = \frac{3}{5} \cdot \frac{n+3}{n-2}$$

$$6.58 \quad y'' = kx^a y^b y'^c, \quad c = 0, \quad k \neq 0, \quad b \neq 0, 1, 2, -3,$$

$$I_1 = \frac{3}{5} \cdot \frac{b+3}{b-2}$$

$$6.58 \quad y'' = kx^a y^b y'^c, \quad c = 3, \quad k \neq 0, \quad a \neq 0, 1, 2, -3,$$

$$I_1 = \frac{3}{5} \cdot \frac{a+3}{a-2}$$

$$6.73 \quad y'' = -\frac{2}{x}y' + y^n, \quad n \neq 0, 1, 2, -3, \quad I_1 = \frac{3}{5} \cdot \frac{n+3}{n-2}$$

$$6.74 \quad y'' = -\frac{2}{x}y' - ax^{m-1}y^n, \quad a \neq 0, \quad n \neq 0, 1, 2, -3,$$

$$I_1 = \frac{3}{5} \cdot \frac{n+3}{n-2} \quad \text{уравнение Эмдена-Фаулера}$$

$$6.82 \quad y'' = a(y^n - y)x^{-2}, \quad a \neq 0, \quad n \neq 0, 1, 2, -3, \quad I_1 = \frac{3}{5} \cdot \frac{n+3}{n-2}$$

$$6.96 \quad y'' = -\frac{a^2 y^n}{x^n}, \quad a \neq 0, \quad n \neq 0, 1, 2, -3, \quad I_1 = \frac{3}{5} \cdot \frac{n+3}{n-2}$$

$$6.126 \quad y'' = -\frac{a(y'^2+1)}{y}, \quad a \neq -1, 0, 1, -\frac{1}{2}, -3, \quad I_1 = -\frac{6}{5} \cdot \frac{1+2a}{3+a}$$

$$6.127 \quad y'' = -\frac{ay'^2}{y} - by^2, \quad b \neq 0, \quad a \neq 0, -1, -2, -\frac{5}{4},$$

$$I_1 = -\frac{3}{5} \cdot \frac{5+4a}{a}$$

$$6.12 \quad y'' = -(n+1)a^{2n}y^{2n+1} + y, \quad a \neq 0, \quad n \neq 0, -\frac{1}{2}, -1,$$

$$I_1 = \frac{6}{5} \cdot \frac{n+2}{2n-1}$$

$$6.102 \quad y'' = y^{\frac{2n+1}{n+1}} x^{-\frac{n}{n+1}}, \quad n \neq 0, -\frac{1}{2}, -\frac{4}{5}, -1, \quad I_1 = -\frac{12}{5} - 3n$$

$$6.25 \quad y'' = \frac{3n+4}{n}y' - 2\frac{(n+1)(n+2)}{n^2}y(y^{\frac{n}{n+1}} - 1),$$

$$n \neq 0, -\frac{1}{2}, -\frac{4}{5}, -1, -2, \quad I_1 = -\frac{12}{5} - 3n$$

2.  $I_1 = -\frac{27}{5}$

$$6.22 \quad y'' = 7y' - 12y + y^{\frac{3}{2}}$$

$$6.100 \quad y'' = \frac{y^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{x}} \quad \text{уравнение Томаса-Ферми}$$

3.  $I_1 = -\frac{24}{35}$

$$6.155 \quad y'' = -\frac{y'^2}{2(y-a)} - \frac{1}{2(y-a)}$$

4.  $I_1 = -\frac{12}{55}$

6.212  $y'' = \frac{ax^2+bx+c}{2y^3} - \frac{y'}{2y}, \quad a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$

5.  $I_1 = -\frac{3}{5}$

6.15  $y'' = ae^x y^{-\frac{1}{2}}, \quad a \neq 0$

6.153  $y'' = \frac{3y'}{y} - \frac{ay^4}{2} - \frac{y}{2}, \quad a \neq 0$

6.220  $y'' = \frac{a}{\sqrt{y}}, \quad a \neq 0$

6.  $I_1 = -\frac{3}{20}$

6.188  $y'' = \frac{a}{y^2} \quad a \neq 0, \quad \text{уравнение свободного падения}$

6.205  $y'' = \frac{a}{xy^2} \quad a \neq 0$

7.  $I_1 = -\frac{39}{35}$

6.189  $y'' = -\frac{y'}{y} - \frac{ax}{y^2}, \quad a \neq 0$

6.190  $y'' = -\frac{y'}{y} + \frac{ax+b}{y^2}, \quad a^2 + b^2 \neq 0$

8.  $I_1 = -\frac{2}{5}$

6.104  $y'' = \frac{a}{y}, \quad a \neq 0$

6.105  $y'' = \frac{ax}{y}, \quad a \neq 0$

6.106  $y'' = \frac{ax^2}{y}, \quad a \neq 0$

6.108  $y'' = \frac{ax}{y} + \frac{b}{y} - y, \quad a, b \neq 0$

9.  $I_1 = \frac{6}{35}$

6.156  $y'' = \frac{2y'}{3y} + \frac{ax^2+bx+c}{3y}, \quad a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$

10.  $I_1 = \frac{8}{5}$

6.146  $y'' = \frac{y'}{2y} - \frac{3y^3}{2}$

6.159  $y'' = \frac{3y'}{4y} + 3y^2$

11.  $I_1 = \frac{18}{5}$

6.6  $y'' = 2y^3 + xy + a \quad \text{уравнение Пенлеве II}$

6.7  $y'' = ay^3, \quad a \neq 0$

- 6.8  $y'' = 2a^2y^3 - 2abxy + b, \quad a \neq 0$
- 6.9  $y'' = -ay^3 - bxy - cy - d, \quad a \neq 0$
- 6.10  $y'' = -ay^3 - by^2 - cy - d, \quad a, b \neq 0$
- 6.24  $y'' = -3ay' + 2y^3 - 2a^3y$
- 6.30  $y'' = -yy' + y^3$
- 6.31  $y'' = -yy' + y^3 - ay$
- 6.32  $y'' = -(y + 3a)y' + y^3 - ay^2 - 2a^2y$
- 6.33  $y'' = -(y + 3f)y' + y^3 - y^2f - y(f' + 2f^2), \quad f = f(x)$
- 6.34  $y'' = -yy' + y^3 + \left(\frac{f'}{f} + f\right)(3y' + y^2) -$   
 $-(af^2 + 3f' + \frac{3f'^2}{f^2} - \frac{f''}{f})y - bf^3, \quad f = f(x)$
- 6.35  $y'' = \left(\frac{3f'}{2} - y\right)y' + y^3 + \frac{f'}{2f}y^2 - \left(f + \frac{f'^2}{f^2} - \frac{f''}{2f}\right)y, \quad f = f(x)$
- 6.36  $y'' = -2yy' - f(x)y' - f'(x)y, \quad f = f(x)$
- 6.37  $y'' = -2yy' - f(x)(y' + y^2) + g(x)$
- 6.40  $y'' = 3yy' + (3ay^2 + 4a^2y + b)$
- 6.42  $y'' = 2a yy' + a, \quad a \neq 0$
- 6.43  $y'' = -a yy' - by^3, \quad a^2 + b^2 \neq 0$
- 6.78  $y'' = \frac{1-y}{x}y'$
- 6.91  $y'' = -\frac{ay^3}{9x^2} - \frac{2y}{9x^2}, \quad a \neq 0$
- 6.92  $y'' = \frac{(-12xy-24)}{x^3} + y^3 - yy'$
- 6.94  $y'' = -\frac{(2x^3y+9x^2)}{2x^3}y' + \frac{2x^3y^3-3x^2y^2-axy-b}{ax^3}$
- 6.95  $2(4x^3 - x^k)y'' + 2y(4x^3 - x^k)y' - 2(4x^3 - x^k)^3 +$   
 $+3(12x^2 - kx^{k-1})y' + (12x^2 - kx^{k-1})y^2 + axy + b = 0$
- 6.97  $y'' = \frac{2xy+x^3}{x^4}y' - \frac{4y}{x^4}$
- 6.140  $y'' = \frac{y'^2}{2y} + 4y^2$
- 6.142  $y'' = \frac{y'^2}{2y} + 4y^2 + 2xy$
- 6.143  $y'' = \frac{y'^2}{2y} - \frac{ay^2}{2} - \frac{by}{2}, \quad a \neq 0$
- 6.145  $y'' = \frac{y'^2}{2y} - \frac{ay^2}{2} - \frac{bxy}{2}, \quad a \neq 0$
- 6.186  $y'' = \frac{y'^2}{2y} - \frac{3y'x^2}{2(x^3-1)} + \frac{3xy^2}{8(x^3-1)}$

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Sharipov R. A.* Effective procedure of point classification for the equations  $y'' = P + 3Qy' + 3Ry'^2 + Sy'^3$  // El. archive at LANL (MathDG #9802027, 1998) 1–35.
- [2] *Kartak V. V.* Equivalence classes of the second order ODEs with the constant Cartan invariant // Journal of Nonlinear Math. Physics (2011,

accepted). See also preprint at LANL arXiv:1106.6124v1 [nlin.SI].

[3] Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. // Москва. Наука. 1976.

УДК 517.956.2

## ОЦЕНКА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ ДЛЯ АНИЗОТРОПНОГО КВАЗИЛИНЕЙНОГО ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Кожевникова Л.М., Хаджи А.А.  
(Стерлитамак, СГПА)<sup>1</sup>

### Введение

Пусть  $\Omega$  — произвольная неограниченная область пространства  $\mathbb{R}_n = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)\}$ ,  $\Omega \subseteq \mathbb{R}_n$ ,  $n \geq 3$ . Для анизотропного квазилинейного эллиптического уравнения второго порядка рассматривается задача Дирихле

$$\sum_{\alpha=1}^n (a_\alpha(\mathbf{x}, \nabla u))_{x_\alpha} = \sum_{\alpha=1}^n (\Phi_\alpha(\mathbf{x}))_{x_\alpha}, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (1)$$

$$u \Big|_{\partial\Omega} = 0. \quad (2)$$

Предполагается, что функции  $a_\alpha(\mathbf{x}, \xi)$ ,  $\alpha = \overline{1, n}$ , измеримы по  $\mathbf{x} \in \Omega$  для  $\xi \in \mathbb{R}_n$ , непрерывны по  $\xi \in \mathbb{R}_n$  для почти всех  $\mathbf{x} \in \Omega$ . Пусть  $\mathbf{p} = (p_1, p_2, \dots, p_n)$ , будем считать, что  $1 < p_1 \leq p_2 \leq \dots \leq p_n$ . Предположим, что для любых  $\xi, \eta \in \mathbb{R}_n$  при почти всех  $\mathbf{x} \in \Omega$  выполняются условия:

$$\sum_{\alpha=1}^n (a_\alpha(\mathbf{x}, \xi) - a_\alpha(\mathbf{x}, \eta)) (\xi_\alpha - \eta_\alpha) \geq \bar{a} \sum_{\alpha=1}^n |\xi_\alpha - \eta_\alpha|^{p_\alpha}; \quad (3)$$

$$|a_\alpha(\mathbf{x}, \xi) - a_\alpha(\mathbf{x}, \eta)| \leq \hat{a} |\xi_\alpha - \eta_\alpha| (|\xi_\alpha| + |\eta_\alpha|)^{p_\alpha - 2}, \quad \alpha = \overline{1, n}; \quad (4)$$

$$a_\alpha(\mathbf{x}, 0) = 0, \quad \alpha = \overline{1, n}. \quad (5)$$

<sup>1</sup>Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 09-01-00440-а)



Здесь  $\bar{a}, \hat{a}$  — положительные числа.

В работе исследована зависимость скорости убывания решения задачи Дирихле для уравнения (1) с экспоненциально убывающей правой частью от геометрии неограниченной области  $\Omega$ .

Изучением поведения на бесконечности решений линейных эллиптических уравнений занимались О.А. Олейник, Г.А. Иосифьян [1], Е.М. Ландис, Г.П. Панасенко [2], В.А. Кондратьев, И. Копачек, Д.М. Леквишвили, О.А. Олейник [3] и другие (подробный обзор результатов приведен в [4]). В работе [5] Л.М. Кожевниковой, Р.Х. Каримовым для некоторого класса квазилинейных эллиптических уравнений второго порядка установлены оценки сверху решения задачи Дирихле. Анизотропный случай до настоящего времени оставался неизученным.

Будем рассматривать области, расположенные вдоль выделенной оси  $Ox_s$ ,  $s \in \overline{2, n-1}$  (область  $\Omega$  лежит в полупространстве  $x_s > 0$  и сечение  $\gamma_r = \{\mathbf{x} \in \Omega \mid x_s = r\}$  не пусто при любом  $r > 0$ ).

Введем обозначения:  $\Omega_a^b = \{\mathbf{x} \in \Omega \mid a < x_s < b\}$ , значение  $b = \infty$  может быть опущено;  $\nu(r) = \min\{\nu_1(r), \nu_n(r)\}$ ,

$$\nu_\alpha(r) = \inf \left\{ \|g_{x_\alpha}\|_{L_{p_\alpha}(\gamma_r)} \mid g(\mathbf{x}) \in C_0^\infty(\Omega), \|g\|_{L_{p_\alpha}(\gamma_r)} = 1 \right\}, \quad r > 0.$$

Пусть область  $\Omega$  удовлетворяет условию

$$\int_1^\infty \nu(\rho) d\rho = \infty \quad (6)$$

и существуют положительные числа  $\widetilde{M}$  и  $\widetilde{\kappa}$  такие, что для функций  $\Phi_\alpha(\mathbf{x})$  справедливы неравенства

$$\|\Phi_\alpha\|_{L_{p_\alpha/(p_\alpha-1), \Omega_{r/3}}} \leq \widetilde{M} \left( -\widetilde{\kappa} \int_{2r/3}^r \nu(\rho) d\rho \right), \quad \alpha = \overline{1, n}. \quad (7)$$

**Теорема 6.** Если для области  $\Omega$  выполнено условие (6), а функции  $\Phi_\alpha(\mathbf{x})$ ,  $\alpha = \overline{1, n}$ , подчиняются требованиям (7), то существуют положительные числа  $\kappa, M$  такие, что обобщенное решение  $u(\mathbf{x})$  задачи (1), (2) удовлетворяет оценке

$$\sum_{\alpha=1}^n \|u_{x_\alpha}\|_{L_{p_\alpha}(\Omega_r)}^{p_\alpha} \leq M \exp \left( -\kappa \int_{2r/3}^r \nu(\rho) d\rho \right). \quad (8)$$

## § 1. Вспомогательные утверждения

Положим:  $\|\cdot\|_{p,Q}$  — норма в пространстве  $L_p(Q)$ , причем значение  $Q = \Omega$  опускается. Определим пространство  $\mathring{H}_p^1(\Omega)$  как пополнение пространства  $C_0^\infty(\Omega)$  по норме  $\|v\|_{\mathring{H}_p^1(\Omega)} = \sum_{\alpha=1}^n \|v_{x_\alpha}\|_{p_\alpha}$ .

**Лемма 1.** *Если для  $\mathbf{x} \in \Omega$  выполнено условие  $x_\alpha \neq y_\alpha$  при некотором фиксированном  $\alpha \in \overline{1, n}$ , то для функции  $u(\mathbf{x}) \in C_0^\infty(\Omega)$  справедливо неравенство*

$$\left\| \frac{u(\mathbf{x})}{|x_\alpha - y_\alpha|} \right\|_{p_\alpha} \leq \frac{p_\alpha}{p_\alpha - 1} \|u_{x_\alpha}(\mathbf{x})\|_{p_\alpha}. \quad (9)$$

*Доказательство.* Воспользовавшись равенством

$$\left( \frac{x_\alpha - y_\alpha}{|x_\alpha - y_\alpha|^{p_\alpha}} \right)'_{x_\alpha} = - \frac{p_\alpha - 1}{|x_\alpha - y_\alpha|^{p_\alpha}},$$

интегрируя по частям, выводим

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \frac{|u(\mathbf{x})|^{p_\alpha}}{|x_\alpha - y_\alpha|^{p_\alpha}} d\mathbf{x} &= - \frac{1}{p_\alpha - 1} \int_{\Omega} |u(\mathbf{x})|^{p_\alpha} \frac{d}{dx_\alpha} \frac{x_\alpha - y_\alpha}{|x_\alpha - y_\alpha|^{p_\alpha}} d\mathbf{x} = \\ &= \frac{p_\alpha}{p_\alpha - 1} \int_{\Omega} |u|^{p_\alpha - 2} u u_{x_\alpha} \frac{x_\alpha - y_\alpha}{|x_\alpha - y_\alpha|^{p_\alpha}} d\mathbf{x} \leq \frac{p_\alpha}{p_\alpha - 1} \int_{\Omega} \frac{|u|^{p_\alpha - 1}}{|x_\alpha - y_\alpha|^{p_\alpha - 1}} |u_{x_\alpha}| d\mathbf{x}. \end{aligned}$$

Применяя неравенство Гельдера получаем соотношение

$$\int_{\Omega} \frac{|u(\mathbf{x})|^{p_\alpha}}{|x_\alpha - y_\alpha|^{p_\alpha}} d\mathbf{x} \leq \frac{p_\alpha}{p_\alpha - 1} \left( \int_{\Omega} \frac{|u(\mathbf{x})|^{p_\alpha}}{|x_\alpha - y_\alpha|^{p_\alpha}} d\mathbf{x} \right)^{\frac{p_\alpha - 1}{p_\alpha}} \left( \int_{\Omega} |u_{x_\alpha}(\mathbf{x})|^{p_\alpha} d\mathbf{x} \right)^{\frac{1}{p_\alpha}},$$

из которого следует (9). □

**Следствие 1.** *Для функции  $u(\mathbf{x}) \in \mathring{H}_p^1(\Omega)$  найдется  $\alpha^* \in \overline{1, n}$  такое, что справедливо неравенство*

$$\|u\|_{p_{\alpha^*}, \Omega(r)} \leq C(r, \alpha^*) \sum_{\alpha=1}^n \|u_{x_\alpha}\|_{p_\alpha}, \quad (10)$$

$$\Omega(r) = \{\mathbf{x} \in \Omega \mid |x_\alpha| < r, \alpha = \overline{1, n}\}.$$

*Доказательство.* Возьмем  $y_{\alpha^*} \neq x_{\alpha^*}$ ,  $\mathbf{x} \in \Omega$ , из неравенства (9) выводим

$$\begin{aligned} \left( \int_{\Omega(r)} |u(\mathbf{x})|^{p_{\alpha^*}} d\mathbf{x} \right)^{1/p_{\alpha^*}} &\leq (r + |y_{\alpha^*}|) \left( \int_{\Omega(r)} \frac{|u(\mathbf{x})|^{p_{\alpha^*}}}{|x_{\alpha} - y_{\alpha}|^{p_{\alpha^*}}} d\mathbf{x} \right)^{1/p_{\alpha^*}} \leq \\ &\leq C(r, \alpha^*) \left( \int_{\Omega} |u_{x_{\alpha^*}}(\mathbf{x})|^{p_{\alpha^*}} d\mathbf{x} \right)^{1/p_{\alpha^*}}, \end{aligned}$$

тогда справедливо неравенство

$$\|u\|_{p_{\alpha^*}, \Omega(r)} \leq C(r, \alpha^*) \sum_{\alpha=1}^n \|u_{x_{\alpha}}\|_{p_{\alpha}}.$$

Отсюда следует, что если последовательность  $u^k(\mathbf{x}) \in C_0^{\infty}(\Omega)$  сходится по норме пространства  $\mathring{H}_{\mathbf{p}}^1(\Omega)$ , то она сходится и в  $L_{p_{\alpha^*}}(\Omega(r))$ . Выполняя предельный переход установим неравенство (10) для  $\mathring{H}_{\mathbf{p}}^1(\Omega)$ . Из неравенства (10) следует, что  $\|v\|_{\mathring{H}_{\mathbf{p}}^1(\Omega)} = \sum_{\alpha=1}^n \|v_{x_{\alpha}}\|_{p_{\alpha}}$  является нормой.  $\square$

**Определение 5.** Обобщенным решением задачи (1), (2) с  $\Phi_{\alpha}(\mathbf{x}) \in L_{p_{\alpha}/(p_{\alpha}-1)}(\Omega)$ ,  $\alpha = \overline{1, n}$ , назовем функцию  $u(\mathbf{x}) \in \mathring{H}_{\mathbf{p}}^1(\Omega)$ , удовлетворяющую интегральному тождеству

$$\sum_{\alpha=1}^n \int_{\Omega} (a_{\alpha}(\mathbf{x}, \nabla u) - \Phi_{\alpha}) v_{x_{\alpha}} d\mathbf{x} = 0 \quad (11)$$

для любой функции  $v(\mathbf{x}) \in \mathring{H}_{\mathbf{p}}^1(\Omega)$ .

Определение обобщенного решения корректно, поскольку входящие в (11) интегралы конечны. Действительно, используя неравенство Юнга и интегральное неравенство Гельдера, применяя условия (4), (5), для функций  $u(\mathbf{x}), v(\mathbf{x}) \in \mathring{H}_{\mathbf{p}}^1(\Omega)$ , выводим

$$\int_{\Omega} |a_{\alpha}(\mathbf{x}, \nabla u)| |v_{x_{\alpha}}| d\mathbf{x} \leq \widehat{a} \int_{\Omega} |u_{x_{\alpha}}|^{p_{\alpha}-1} |v_{x_{\alpha}}| d\mathbf{x} \leq \widehat{a} \|u_{x_{\alpha}}\|_{p_{\alpha}}^{p_{\alpha}-1} \|v_{x_{\alpha}}\|_{p_{\alpha}}.$$

**Теорема 7.** Пусть выполнены условия (3) – (5), тогда для обобщенного решения задачи (1), (2) справедлива оценка

$$\sum_{\alpha=1}^n \|u_{x_{\alpha}}\|_{p_{\alpha}} \leq C_1 \sum_{\alpha=1}^n \|\Phi_{\alpha}\|_{p_{\alpha}/(p_{\alpha}-1)}^{p_{\alpha}/(p_{\alpha}-1)}. \quad (12)$$

*Доказательство.* Действительно, полагая  $v = u$  в равенстве (11), с помощью интегрального неравенства Гельдера, применяя (3), (5), установим соотношение

$$\bar{a} \sum_{\alpha=1}^n \|u_{x_\alpha}\|_{p_\alpha}^{p_\alpha} \leq \sum_{\alpha=1}^n \|\Phi_\alpha\|_{p_\alpha/(p_\alpha-1)} \|u_{x_\alpha}\|_{p_\alpha}.$$

Далее, используя неравенство Юнга, выводим

$$\bar{a} \sum_{\alpha=1}^n \|u_{x_\alpha}\|_{p_\alpha}^{p_\alpha} \leq C \sum_{\alpha=1}^n \|\Phi_\alpha\|_{p_\alpha/(p_\alpha-1)}^{p_\alpha/(p_\alpha-1)} + \frac{\bar{a}}{2} \sum_{\alpha=1}^n \|u_{x_\alpha}\|_{p_\alpha}^{p_\alpha},$$

из которого следует (12).  $\square$

**Теорема 8.** Пусть выполнены условия (3) – (5), тогда существует единственное обобщенное решение  $u(\mathbf{x})$  задачи (1), (2) с функциями  $\Phi_\alpha(\mathbf{x}) \in L_{p_\alpha/(p_\alpha-1)}(\Omega)$ ,  $\alpha = \overline{1, n}$ .

Доказательство существования проводится методом галеркинских приближений, аналогично доказательству соответствующего утверждения для изотропного уравнения в случае ограниченной области  $\Omega$  (см. [6, гл.4, §9]).

## § 2. Оценка сверху

**Следствие 2.** Для функции  $u(\mathbf{x}) \in \mathring{H}_{\mathbf{p}}^1(\Omega)$ , при  $0 < a < b$  справедливо неравенство

$$\frac{1}{b} \|u\|_{p_s, \Omega_a^b} \leq \frac{p_s}{p_s - 1} \|u_{x_s}\|_{p_s}. \quad (13)$$

*Доказательство.* Возьмем  $y_s = 0$ , из неравенства (9) для  $u(\mathbf{x}) \in C_0^\infty(\Omega)$  выводим

$$\begin{aligned} \left( \int_{\Omega} |u(\mathbf{x})|^{p_s} d\mathbf{x} \right)^{1/p_s} &\leq b \left( \int_{\Omega} \frac{|u(\mathbf{x})|^{p_s}}{|x_s|^{p_s}} d\mathbf{x} \right)^{1/p_s} \leq \\ &\leq b \frac{p_s}{p_s - 1} \left( \int_{\Omega} |u_{x_s}(\mathbf{x})|^{p_s} d\mathbf{x} \right)^{1/p_s}. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что если последовательность  $u^k(\mathbf{x}) \in C_0^\infty(\Omega)$  сходится по норме пространства  $\mathring{H}_{\mathbf{p}}^1(\Omega)$ , то она сходится и в  $L_{p_s}(\Omega)$ . Выполняя предельный переход установим неравенство (13) для  $u \in \mathring{H}_{\mathbf{p}}^1(\Omega)$ .  $\square$

*Доказательство теоремы 6.* Пусть  $\theta(x)$ ,  $x > 0$ , — абсолютно непрерывная функция, равная единице при  $x \geq r$ , нулю при  $x \leq r/3$ , линейная при  $x \in [\frac{r}{3}, \frac{2r}{3}]$  и удовлетворяющая уравнению

$$\theta'(x) = \delta \nu(x) \theta(x), \quad x \in (2r/3, r), \quad (14)$$

(постоянную  $\delta$  определим позднее). Решая это уравнение, находим, в частности, что

$$\theta'(x) = \frac{3\theta(2r/3)}{r} = \frac{3}{r} \exp \left( -\delta \int_{2r/3}^r \nu(\rho) d\rho \right), \quad x \in (r/3, 2r/3). \quad (15)$$

Для любой функции  $v(\mathbf{x}) \in C_0^\infty(\Omega)$  из определения функции  $\nu(\rho)$  следуют неравенства

$$\nu(\rho) \|v\|_{p_\alpha, \gamma_\rho} \leq \|v_{x_\alpha}\|_{p_\alpha, \gamma_\rho}, \quad \rho > 0, \quad \alpha = 1, n,$$

из которых выводим соотношения

$$\int_{2r/3}^r \theta^{p_s}(\rho) \nu^{p_\alpha}(\rho) \|v\|_{p_\alpha, \gamma_\rho}^{p_\alpha} d\rho \leq \int_{2r/3}^r \theta^{p_s}(\rho) \|v_{x_\alpha}\|_{p_\alpha, \gamma_\rho}^{p_\alpha} d\rho, \quad \alpha = 1, n. \quad (16)$$

Применяя (16) для любой функции  $v \in C_0^\infty(\Omega)$  при  $s = \overline{2, n-1}$  выводим

$$\begin{aligned} & \int_{2r/3}^r \nu^{p_s}(\rho) \theta^{p_s}(\rho) \|v\|_{p_s, \gamma_\rho}^{p_s} d\rho \leq \int_{2r/3}^r \nu^{p_1}(\rho) \theta^{p_s}(\rho) \|v\|_{p_1, \gamma_\rho}^{p_1} d\rho + \\ & + \int_{2r/3}^r \nu^{p_n}(\rho) \theta^{p_s}(\rho) \|v\|_{p_n, \gamma_\rho}^{p_n} d\rho \leq \int_{2r/3}^r \theta^{p_s}(\rho) \|v_{x_1}\|_{p_1, \gamma_\rho}^{p_1} d\rho + \int_{2r/3}^r \theta^{p_s}(\rho) \|v_{x_n}\|_{p_n, \gamma_\rho}^{p_n} d\rho. \end{aligned} \quad (17)$$

Отметим, что неравенства (17) справедливы для любой функции  $v \in \overset{\circ}{H}{}^1_p(\Omega)$  (см. следствие 2).

Пусть  $\xi(\mathbf{x})$  липшицева неотрицательная срезающая функция, положим в (11)  $v = u\xi$ , получим соотношение

$$\sum_{\alpha=1}^n \int_{\Omega} a_\alpha(\mathbf{x}, \nabla u) (u\xi)_{x_\alpha} d\mathbf{x} = \sum_{\alpha=1}^n \int_{\Omega} \Phi_\alpha(\mathbf{x}) (u\xi)_{x_\alpha} d\mathbf{x}.$$

Положим  $\xi(\mathbf{x}) = \theta^{p_s}(x_s)$ , далее, применяя (3), (5), получаем

$$\bar{a} \sum_{\alpha=1}^n \int_{\Omega} \theta^{p_s} |u_{x_\alpha}|^{p_\alpha} d\mathbf{x} \leq \hat{a} \int_{\Omega} |u| |u_{x_s}|^{p_s-1} (\theta^{p_s}(x_s))' d\mathbf{x} + \quad (18)$$

$$+ \sum_{\alpha=1}^n \int_{\Omega} |\Phi_{\alpha}| |u_{x_{\alpha}}| \theta^{p_s} d\mathbf{x} + \int_{\Omega} |\Phi_s| |u| (\theta^{p_s}(x_s))' = I_1 + I_2 + I_3.$$

Оценим интегралы

$$I_1 = \widehat{a} p_s \int_{\Omega} |u| |u_{x_s}|^{p_s-1} \theta'(x_s) \theta^{p_s-1}(x_s) d\mathbf{x},$$

$$I_2 = \sum_{\alpha=1}^n \int_{\Omega} |\Phi_{\alpha}| |u_{x_{\alpha}}| \theta^{p_s} d\mathbf{x},$$

$$I_3 = p_s \int_{\Omega} |\Phi_s| |u| \theta'(x_s) \theta^{p_s-1}(x_s) d\mathbf{x}.$$

Используя неравенство Юнга выводим

$$I_1 \leq \varepsilon (p_s - 1) \widehat{a} \int_{\Omega} |u_{x_s}|^{p_s} \theta^{p_s} d\mathbf{x} + \frac{\widehat{a}}{\varepsilon^{p_s-1}} \int_{\Omega} |u|^{p_s} (\theta'(x_s))^{p_s} d\mathbf{x}, \quad (19)$$

$$I_2 \leq \sum_{\alpha=1}^n \frac{p_{\alpha} - 1}{p_{\alpha} \varepsilon_{\alpha}^{1/(p_{\alpha}-1)}} \int_{\Omega_{r/3}} |\Phi_{\alpha}|^{p_{\alpha}/(p_{\alpha}-1)} \theta^{p_s} d\mathbf{x} + \sum_{\alpha=1}^n \frac{\varepsilon_{\alpha}}{p_{\alpha}} \int_{\Omega} |u_{x_{\alpha}}|^{p_{\alpha}} \theta^{p_s}, \quad (20)$$

$$I_3 \leq \int_{\Omega} |u|^{p_s} (\theta'(x_s))^{p_s} d\mathbf{x} + (p_s - 1) \int_{\Omega} |\Phi_s|^{p_s/(p_s-1)} \theta^{p_s}. \quad (21)$$

Выберем  $\varepsilon = \frac{\bar{a}}{4\widehat{a}} \frac{1}{p_s - 1}$ ,  $\varepsilon_{\alpha} = \frac{p_{\alpha} \bar{a}}{4}$ ,  $\alpha = \overline{1, n}$ , соединяя (18) – (21), выводим неравенство

$$\begin{aligned} \frac{\bar{a}}{2} \sum_{\alpha=1}^n \int_{\Omega} \theta^{p_s} |u_{x_{\alpha}}|^{p_{\alpha}} d\mathbf{x} &\leq C_1 \int_{\Omega} |u|^{p_s} (\theta'(x_s))^{p_s} d\mathbf{x} + \\ &+ C_2 \sum_{\alpha=1}^n \int_{\Omega_{r/3}} |\Phi_{\alpha}|^{p_{\alpha}/(p_{\alpha}-1)} \theta^{p_s} d\mathbf{x}. \end{aligned} \quad (22)$$

Пользуясь (14), (15), нетрудно привести (22) к виду

$$\frac{\bar{a}}{2} \sum_{\alpha=1}^n \int_{\Omega} \theta^{p_s} |u_{x_{\alpha}}|^{p_{\alpha}} d\mathbf{x} \leq C_1 \delta^{p_s} \int_{\Omega_{2r/3}^r} |u|^{p_s} \nu^{p_s}(x_s) \theta^{p_s}(x_s) d\mathbf{x} +$$

$$+C_2 \sum_{\alpha=1}^n \int_{\Omega_{r/3}} |\Phi_\alpha|^{p_\alpha/(p_\alpha-1)} \theta^{p_s} d\mathbf{x} + \quad (23)$$

$$+ \frac{C_3}{r^{p_s}} \exp \left( -\delta p_s \int_{2r/3}^r \nu(\rho) d\rho \right) \int_{\Omega_{r/3}^{2r/3}} |u|^{p_s} d\mathbf{x} = I_4 + I_5 + I_6.$$

Применяя (17), (13), (12) соответственно получаем

$$I_4 \leq C_1 \delta^{p_s} \int_{\Omega_{2r/3}^r} (|u_{x_1}|^{p_1} \theta^{p_s} + |u_{x_n}|^{p_n} \theta^{p_s}) d\mathbf{x}, \quad (24)$$

$$I_5 \leq C_4 \exp \left( -\tilde{\kappa} \int_{2r/3}^r \nu(\rho) d\rho \right), \quad (25)$$

$$I_6 \leq C_5 \exp \left( -\delta p_s \int_{2r/3}^r \nu(\rho) d\rho \right) \sum_{\alpha=1}^n \|\Phi_\alpha\|_{p_\alpha/(p_\alpha-1)}^{p_\alpha/(p_\alpha-1)}. \quad (26)$$

Выбирая  $\delta = \left( \frac{\bar{a}}{4C_1} \right)^{1/p_s}$ , соединяя (23) – (26) выводим

$$\begin{aligned} \frac{\bar{a}}{4} \sum_{\alpha=1}^n \|u_{x_\alpha}\|_{\Omega_r}^{p_\alpha} &\leq C_4 \exp \left( -\tilde{\kappa} \int_{2r/3}^r \nu(\rho) d\rho \right) + \\ &+ C_5 \exp \left( -\delta p_s \int_{2r/3}^r \nu(\rho) d\rho \right) \leq C_6 \exp \left( -\kappa \int_{2r/3}^r \nu(\rho) d\rho \right). \end{aligned}$$

Неравенство (8) доказано. □

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] Олейник О. А., Иосифьян Г. А. О поведении на бесконечности решений эллиптических уравнений второго порядка в областях с некомпактной границей // Матем. сб. 1980. Т. 112. № 4. С. 588–610.

- [2] Ландис Е. М., Панасенко Г. П. Об одном варианте типа Фрагмена-Линделефа для эллиптических уравнений с коэффициентами, периодическими по всем переменным, кроме одной // Труды сем. им. И.Г. Петровского. 1979. Вып. 5. С. 105–136.
- [3] Кондратьев В. А., Копачек И., Леквешвили Д. М., Олейник О. А. Неулучшаемые оценки в пространствах Гельдера и точный принцип Сен-Венана для решений бигармонического уравнения // Труды МИАН СССР. 1984. Т. 166. С. 91–106.
- [4] Кожевникова Л. М. Поведение на бесконечности решений псевдодифференциальных эллиптических уравнений в неограниченных областях // Матем. сб. 2008. Т. 199. № 8. С. 61–94.
- [5] Кожевникова Л. М., Каримов Р. Х. Поведение на бесконечности решений квазилинейных эллиптических уравнений второго порядка в неограниченных областях // Уфимск. матем. журн. 2010. № 2. С. 53–66.
- [6] Ладыженская О. А., Уральцева Н. Н. Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. М.: Наука, 1973.

УДК 517.95

## НЕЛИНЕЙНЫЕ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ С НУЛЕВЫМИ ИНВАРИАНТАМИ ЛАПЛАСА

Кузнецова М. Н.  
(Уфа, УГАТУ)

### Введение

В настоящей работе рассматриваются нелинейные гиперболические двухкомпонентные системы уравнений вида

$$\begin{aligned} u_{xy}^1 &= f(x, y, u^1, u^2, u_x^1, u_y^1, u_x^2, u_y^2), \\ u_{xy}^2 &= \phi(x, y, u^1, u^2, u_x^1, u_y^1, u_x^2, u_y^2). \end{aligned} \quad (1)$$



Для исследования интегрируемости указанных систем используется подход, основанный на применении инвариантов Лапласа.

Прежде всего, отметим, что через  $u^1, u^2$  будем обозначать любое решение системы (1). Поэтому все смешанные производные от функций  $u^1$  и  $u^2$  исключаются из всех выражений в силу системы (1) и ее дифференциальных следствий. При этом, переменные

$$x, y, u^1, u^2, u_x^1, u_x^2, u_y^1, u_y^2, u_{xx}^1, u_{xx}^2, u_{yy}^1, u_{yy}^2, \dots \quad (2)$$

считаются независимыми. Обозначим через  $D$  ( $\bar{D}$ ) – оператор полного дифференцирования по переменной  $x$  ( $y$ ).

**Определение 6.** Функция

$$W \left( x, y, u^1, u^2, \frac{\partial u^1}{\partial x}, \frac{\partial u^2}{\partial x}, \dots, \frac{\partial^n u^1}{\partial x^n}, \frac{\partial^n u^2}{\partial x^n} \right)$$

называется  $X$ -интегралом для системы (1), если  $\bar{D}(W) = 0$ . Функция

$$\bar{W} \left( x, y, u^1, u^2, \frac{\partial u^1}{\partial y}, \frac{\partial u^2}{\partial y}, \dots, \frac{\partial^m u^1}{\partial y^m}, \frac{\partial^m u^2}{\partial y^m} \right)$$

называется  $Y$ -интегралом для системы (1), если  $D(\bar{W}) = 0$ .

В настоящей работе описаны двухкомпонентные системы вида (1), обладающие нулевыми главными инвариантами Лапласа. Доказано, что в данном случае система обладает полным набором  $X$ - и  $Y$ -интегралов.

## § 1. Нелинейные гиперболические системы

Линеаризованная система для системы (1) имеет вид

$$(D\bar{D} - AD - B\bar{D} - C)p = 0. \quad (3)$$

Здесь  $p = (p^1, p^2)^T$  и

$$A = \begin{pmatrix} f_{u_x^1} & f_{u_x^2} \\ \phi_{u_x^1} & \phi_{u_x^2} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} f_{u_y^1} & f_{u_y^2} \\ \phi_{u_y^1} & \phi_{u_y^2} \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} f_{u^1} & f_{u^2} \\ \phi_{u^1} & \phi_{u^2} \end{pmatrix}. \quad (4)$$

Главные инварианты Лапласа (см. [1]) системы (3) определяются формулами

$$H_{-1} = AB + C - \bar{D}(B), \quad H_0 = BA + C - D(A). \quad (5)$$

Справедливо следующее утверждение:

**Лемма 2.** Пусть главные инварианты Лапласа (5) системы (1) нулевые матрицы. Тогда система (1) принимает следующий вид:

$$\begin{aligned} u_{xy}^1 &= \Gamma_{kj}^1(x, y, u)u_x^k u_y^j + A_i^1(x, y, u)u_x^i + B_i^1(x, y, u)u_y^i + C^1(x, y, u), \\ u_{xy}^2 &= \Gamma_{kj}^2(x, y, u)u_x^k u_y^j + A_i^2(x, y, u)u_x^i + B_i^2(x, y, u)u_y^i + C^2(x, y, u), \end{aligned} \quad (6)$$

$$i, j, k = \overline{1, 2}.$$

**Доказательство.** Пусть инварианты Лапласа (5) нулевые матрицы. Подставляя формулы (4) в (5) получаем, что

$$\begin{aligned} BA + C - \frac{\partial A}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial u^1}u_x^1 - \frac{\partial A}{\partial u^2}u_x^2 - \frac{\partial A}{\partial u_x^1}u_{xx}^1 - \frac{\partial A}{\partial u_x^2}u_{xx}^2 - \\ - \frac{\partial A}{\partial u_y^1}f - \frac{\partial A}{\partial u_y^2}\phi = 0, \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} AB + C - \frac{\partial B}{\partial y} - \frac{\partial B}{\partial u^1}u_y^1 - \frac{\partial B}{\partial u^2}u_y^2 - \frac{\partial B}{\partial u_x^1}f - \frac{\partial B}{\partial u_x^2}\phi - \\ - \frac{\partial B}{\partial u_y^1}u_{yy}^1 - \frac{\partial B}{\partial u_y^2}u_{yy}^2 = 0. \end{aligned} \quad (8)$$

Поскольку функции  $A, B, C$  не зависят от переменных  $u_{xx}^i, u_{yy}^i, i = 1, 2$ , то  $A_{u_x^1} = 0, A_{u_x^2} = 0, B_{u_y^1} = 0, B_{u_y^2} = 0$ . Подставляя матрицы (4) в последние равенства, нетрудно показать, что система приобретает форму (6). Лемма доказана.

Теперь рассмотрим системы линейных уравнений

$$u_{xy} + a(x, y)u_x + b(x, y)u_y + c(x, y)u = 0, \quad (9)$$

$$v_{xy} + \alpha(x, y)v_x + \beta(x, y)v_y + \gamma(x, y)v = 0. \quad (10)$$

Здесь  $u = (u_1, u_2)^T, v = (v_1, v_2)^T$ , а коэффициенты  $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma$  являются квадратными матрицами.

**Лемма 3.** Пусть системы уравнений (9), (10) связаны мультипликативным преобразованием

$$u(x, y) = \lambda(x, y)v(x, y), \quad (11)$$

где  $\lambda$  – невырожденная квадратная матрица. Тогда инварианты Лапласа  $H_{-1}, H_0$  системы (9) и инварианты  $h_{-1}, h_0$  системы (10) связаны соотношениями

$$h_{-1} = \lambda^{-1}H_{-1}\lambda, \quad h_0 = \lambda^{-1}H_0\lambda. \quad (12)$$

Если существует невырожденная матрица  $\lambda$ , удовлетворяющая соотношениям

$$\lambda_y = \lambda\alpha - a\lambda, \quad \lambda_x = \lambda\beta - b\lambda, \quad \lambda_{xy} + a\lambda_x + b\lambda_y + c\lambda = \lambda\gamma, \quad (13)$$

то решения  $u(x, y)$  и  $v(x, y)$  систем (9) и (10) связаны преобразованием (11).

**Доказательство.** Пусть системы (9) и (10) связаны преобразованием (11). Подставляя (11) в (9), получим, что

$$v_{xy} + \alpha(x, y)v_x + \beta(x, y)v_y + \gamma(x, y)v = 0, \quad (14)$$

где

$$\begin{aligned} \alpha &= \lambda^{-1}\lambda_y + \lambda^{-1}a\lambda, & \beta &= \lambda^{-1}\lambda_x + \lambda^{-1}b\lambda, \\ \gamma &= \lambda^{-1}\lambda_{xy} + \lambda^{-1}a\lambda_x + \lambda^{-1}b\lambda_y + \lambda^{-1}c\lambda. \end{aligned} \quad (15)$$

Инварианты Лапласа системы (14) определяются формулами

$$h_0 = \alpha_x + \beta\alpha - \gamma, \quad h_{-1} = \beta_y + \alpha\beta - \gamma. \quad (16)$$

Подставляя в соотношения (16) формулы (15) и учитывая, что  $(\lambda^{-1})_x = -\lambda^{-1}\lambda_x\lambda^{-1}$ ,  $(\lambda^{-1})_y = -\lambda^{-1}\lambda_y\lambda^{-1}$ , приходим к равенствам (12).

Теперь предположим, что существует невырожденная матрица  $\lambda$ , удовлетворяющая соотношениям (13). Тогда для  $\lambda$  справедливы равенства (15), откуда следует, что решения систем (9) и (10) связаны преобразованием (11). Лемма доказана.

Основным результатом является следующее утверждение:

**Теорема 9.** Пусть система (1) обладает нулевыми инвариантами Лапласа (5). Тогда с точностью до точечных преобразований она принимает следующий вид:

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \begin{pmatrix} u^1 & 0 \\ 0 & u^2 \end{pmatrix} = \Gamma_{11}u_x^1u_y^1 + \Gamma_{22}u_x^2u_y^2 + \sum_{i=1}^2 A_i u_x^i + \sum_{i=1}^2 B_i u_y^i + C. \quad (17)$$

Здесь

$$\Gamma_{11} = \begin{pmatrix} \psi_{u^1} & 0 \\ 0 & \exp \psi \end{pmatrix}, \quad \Gamma_{22} = \begin{pmatrix} \exp \psi & 0 \\ 0 & \psi_{u^2} \end{pmatrix}, \quad (18)$$

$$A_i = \begin{pmatrix} A_i^1 & 0 \\ 0 & A_i^2 \end{pmatrix}, \quad B_i = \begin{pmatrix} B_i^1 & 0 \\ 0 & B_i^2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} C^1 & 0 \\ 0 & C^2 \end{pmatrix}, \quad (19)$$

$$A_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -\mu^{-1}\mu_y \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = -\mu^{-1}\mu_y \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (20)$$

$$B_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -\mu^{-1}\mu_x \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = -\mu^{-1}\mu_x \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (21)$$

$$C \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \mu^{-1}(-M^1(x, y, u^1) - M^2(x, y, u^2) - \Phi(x, y)), \quad (22)$$

$$\psi = \frac{1}{2} \ln \left( \frac{\xi_{u^1}(x, y, u^1)\varphi_{u^2}(x, y, u^2)}{(\xi(x, y, u^1)\varphi(x, y, u^2))^2} \right), \quad \mu = \begin{pmatrix} \frac{c_2+c_1\xi}{\sqrt{\xi_{u^1}}} & \frac{c_2-c_1\varphi}{\sqrt{\varphi_{u^2}}} \\ \frac{c_4+c_3\xi}{\sqrt{\xi_{u^1}}} & \frac{c_4-c_3\varphi}{\sqrt{\varphi_{u^2}}} \end{pmatrix}, \quad (23)$$

$$M^1 = \begin{pmatrix} \int \frac{\partial^2 \mu_{11}}{\partial x \partial y} du^1 & 0 \\ \int \frac{\partial^2 \mu_{21}}{\partial x \partial y} du^1 & 0 \end{pmatrix}, \quad M^2 = \begin{pmatrix} \int \frac{\partial^2 \mu_{12}}{\partial x \partial y} du^2 & 0 \\ \int \frac{\partial^2 \mu_{22}}{\partial x \partial y} du^2 & 0 \end{pmatrix}, \quad c_i = c_i(x, y). \quad (24)$$

**Схема доказательства.** Пусть инварианты (5) системы (1) нулевые матрицы. Тогда матрицы  $A, B, C$  удовлетворяют условиям

$$AB + C - \bar{D}(B) = 0, \quad BA + C - D(A) = 0. \quad (25)$$

Покажем, что в данном случае существует невырожденная матрица  $\lambda$  такая, что

$$\begin{aligned} A &= \bar{D}(\lambda)\lambda^{-1}, & B &= D(\lambda)\lambda^{-1}, \\ C &= \left( D\bar{D}(\lambda) - \bar{D}(\lambda)\lambda^{-1}D(\lambda) - D(\lambda)\lambda^{-1}\bar{D}(\lambda) \right)\lambda^{-1}. \end{aligned} \quad (26)$$

Перепишем соотношения (26) в следующем виде:

$$\begin{aligned} A\lambda &= \bar{D}(\lambda), & B\lambda &= D(\lambda), \\ C\lambda &= D\bar{D}(\lambda) - \bar{D}(\lambda)\lambda^{-1}D(\lambda) - D(\lambda)\lambda^{-1}\bar{D}(\lambda). \end{aligned} \quad (27)$$

Дифференцируем первое и второе равенства (27) по переменным  $x$  и  $y$  соответственно

$$D(A)\lambda + AD(\lambda) = D\bar{D}(\lambda), \quad \bar{D}(B)\lambda + B\bar{D}(\lambda) = D\bar{D}(\lambda).$$

Отсюда, согласно (27)

$$D(A)\lambda + AB\lambda = D\bar{D}(\lambda), \quad \bar{D}(B)\lambda + BA\lambda = D\bar{D}(\lambda). \quad (28)$$

Для того, чтобы условия (28) не противоречили друг другу необходимо, чтобы матрицы  $A, B, C$  удовлетворяли соотношению  $D(A) + AB = \bar{D}(B) + BA$ . Легко видеть, что последнее равенство выполняется в силу (25). Далее, третье соотношение (27), используя первое и второе, можно переписать в одном из следующих видов

$$C\lambda = D(A)\lambda - BA\lambda, \quad C\lambda = \bar{D}(B)\lambda - AB\lambda.$$

Последние равенства справедливы в силу соотношений (25).

Поскольку существует невырожденная матрица  $\lambda$ , удовлетворяющая условиям (26), то в силу леммы 2 решение системы (3) связано с решением системы волновых уравнений  $z_{xy} = 0$  мультипликативным преобразованием  $p = \lambda z$ . Учитывая соотношения (26), легко заметить, что  $\lambda = \lambda(x, y, u^1, u^2)$ . Обозначим через  $\mu$  обратную замену, т.е.  $z = \mu q$ . Дифференцируя последнее равенство по переменным  $x, y$  получаем, что

$$\mu D\bar{D}(q) + \bar{D}(\mu)D(q) + D(\mu)\bar{D}(q) + D\bar{D}(q) = 0. \quad (29)$$

Последняя система должна совпадать с системой (3), поэтому

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} f_{u_x^1} & f_{u_x^2} \\ \phi_{u_x^1} & \phi_{u_x^2} \end{pmatrix} &= -\mu^{-1}\bar{D}(\mu), & \begin{pmatrix} f_{u_y^1} & f_{u_y^2} \\ \phi_{u_y^1} & \phi_{u_y^2} \end{pmatrix} &= -\mu^{-1}D(\mu), \\ \begin{pmatrix} f_{u^1} & f_{u^2} \\ \phi_{u^1} & \phi_{u^2} \end{pmatrix} &= -\mu^{-1}D\bar{D}\mu. \end{aligned} \quad (30)$$

Поскольку инварианты являются нулевыми матрицами, то, согласно лемме 1, система (1) принимает вид (6). Используя свойства

$$\begin{pmatrix} f & 0 \\ \phi & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f & 0 \\ 0 & \phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & f \\ 0 & \phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f & 0 \\ 0 & \phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

и учитывая, что функции  $f, \phi$  – правые части системы (6), перепишем (30) так:

$$\begin{aligned} \left( \sum_{j=1}^2 \Gamma_{1j} u_y^j + A_1 \right) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \left( \sum_{j=1}^2 \Gamma_{2j} u_y^j + A_2 \right) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} &= \\ &= -\mu^{-1}(\mu_y + \mu_{u^1} u_y^1 + \mu_{u^2} u_y^2), \end{aligned} \quad (31)$$

$$\begin{aligned} \left( \sum_{i=1}^2 \Gamma_{i1} u_x^i + B_1 \right) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \left( \sum_{i=1}^2 \Gamma_{i2} u_x^i + B_2 \right) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} &= \\ &= -\mu^{-1}(\mu_x + \mu_{u^1} u_x^1 + \mu_{u^2} u_x^2), \end{aligned} \quad (32)$$

$$\begin{aligned}
& \left( \sum_{i,j=1}^2 \frac{\partial \Gamma_{ij}}{\partial u^1} u_x^i u_y^j + \sum_{i=1}^2 \frac{\partial A_i}{\partial u^1} u_x^i + \sum_{i=1}^2 \frac{\partial B_i}{\partial u^1} u_y^i + \frac{\partial C}{\partial u^1} \right) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \\
& + \left( \sum_{i,j=1}^2 \frac{\partial \Gamma_{ij}}{\partial u^2} u_x^i u_y^j + \sum_{i=1}^2 \frac{\partial A_i}{\partial u^2} u_x^i + \sum_{i=1}^2 \frac{\partial B_i}{\partial u^2} u_y^i + \frac{\partial C}{\partial u^2} \right) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \\
& -\mu^{-1} \left( u_x^1 (\mu_{yu^1} + \mu_{u^1 u^1} u_y^1 + \mu_{u^1 u^2} u_y^2) + u_x^2 (\mu_{yu^2} + \mu_{u^1 u^2} u_y^1 + \mu_{u^2 u^2} u_y^2) + \right. \\
& + \mu_{u^1} \left( \sum_{i,j=1}^2 \Gamma_{ij}^1 u_x^i u_y^j + \sum_{i=1}^2 A_i^1 u_x^i + \sum_{i=1}^2 B_i^1 u_y^i + C^1 \right) + \\
& + \mu_{u^2} \left( \sum_{i,j=1}^2 \Gamma_{ij}^2 u_x^i u_y^j + \sum_{i=1}^2 A_i^2 u_x^i + \sum_{i=1}^2 B_i^2 u_y^i + C^2 \right) + \\
& \left. + \mu_{xy} + \mu_{xu^1} u_y^1 + \mu_{xu^2} u_y^2 \right). \tag{33}
\end{aligned}$$

Учитывая независимость переменных  $u^i$ ,  $u_x^i$ ,  $u_y^i$ ,  $i = 1, 2$  из соотношений (31)–(33) получаем, что

$$\Gamma_{11} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \Gamma_{21} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = -\mu^{-1} \mu_{u^1}, \tag{34}$$

$$\Gamma_{12} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \Gamma_{22} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = -\mu^{-1} \mu_{u^2}, \tag{35}$$

$$A_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + A_2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = -\mu^{-1} \mu_y, \tag{36}$$

$$\Gamma_{11} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \Gamma_{12} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = -\mu^{-1} \mu_{u^1}, \tag{37}$$

$$\Gamma_{21} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \Gamma_{22} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = -\mu^{-1} \mu_{u^2}, \tag{38}$$

$$B_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + B_2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = -\mu^{-1} \mu_x, \tag{39}$$

$$\frac{\partial \Gamma_{ij}}{\partial u^1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \frac{\partial \Gamma_{ij}}{\partial u^2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = -\mu^{-1} (\mu_{u^i u^j} + \mu_{u^1} \Gamma_{ij}^1 + \mu_{u^2} \Gamma_{ij}^2), \tag{40}$$

$$\frac{\partial A_i}{\partial u^1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \frac{\partial A_i}{\partial u^2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = -\mu^{-1}(\mu_{yu^i} + \mu_{u^1}A_i^1 + \mu_{u^2}A_i^2), \quad (41)$$

$$\frac{\partial B_i}{\partial u^1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \frac{\partial B_i}{\partial u^2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = -\mu^{-1}(\mu_{xu^i} + \mu_{u^1}B_i^1 + \mu_{u^2}B_i^2), \quad (42)$$

$$\frac{\partial C}{\partial u^1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \frac{\partial C}{\partial u^2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = -\mu^{-1}(\mu_{xy} + \mu_{u^1}C^1 + \mu_{u^2}C^2). \quad (43)$$

Из соотношений (33), (34), (37), (38) следует, что  $\Gamma_{12} = \Gamma_{21}$ . При помощи точечной замены сводим  $\Gamma_{12}$ ,  $\Gamma_{21}$  к нулю. Тогда формулы (34) – (40) приобретают форму

$$\Gamma_{11} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -\mu^{-1}\mu_{u^1}, \quad \Gamma_{22} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = -\mu^{-1}\mu_{u^2}, \quad (44)$$

$$A_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + A_2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = -\mu^{-1}\mu_y, \quad (45)$$

$$B_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + B_2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = -\mu^{-1}\mu_x, \quad (46)$$

$$\frac{\partial \Gamma_{11}}{\partial u^1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \frac{\partial \Gamma_{11}}{\partial u^2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = -\mu^{-1}(\mu_{u^1u^1} + \mu_{u^1}\Gamma_{11}^1 + \mu_{u^2}\Gamma_{11}^2), \quad (47)$$

$$\frac{\partial \Gamma_{22}}{\partial u^1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \frac{\partial \Gamma_{22}}{\partial u^2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = -\mu^{-1}(\mu_{u^2u^2} + \mu_{u^1}\Gamma_{22}^1 + \mu_{u^2}\Gamma_{22}^2). \quad (48)$$

Кроме того, из равенства (40) получаем, что

$$\mu_{u^1u^2} = 0. \quad (49)$$

Дальнейшее исследование соотношений (41) – (49) приводит к системе (17). Более того, прямым вычислением можно показать, что главные инварианты Лапласа системы (17) при условиях (18)–(24) являются нулевыми матрицами.

Далее, исследуем систему (17) на интегрируемость. Если существует  $X$ -интеграл  $W(x, y, u^1, u^2, u_x^1, u_x^2)$  системы (17), то на любом решении системы

(17) выполняется равенство  $\bar{D}W = 0$ . Последнее эквивалентно тому, что  $W$  удовлетворяет системе

$$X_1W = 0, \quad X_2W = 0, \quad X_3W = 0. \quad (50)$$

Здесь операторы  $X_1, X_2, X_3$  определены формулами

$$\begin{aligned} X_1 &= \frac{\partial}{\partial u^1} + (\psi_{u^1}u_x^1 + B_1^1)\frac{\partial}{\partial u_x^1} + (\exp(\psi)u_x^1 + B_1^2)\frac{\partial}{\partial u_x^2} \\ X_2 &= \frac{\partial}{\partial u^2} + (\exp(\psi)u_x^2 + B_2^1)\frac{\partial}{\partial u_x^1} + (\psi_{u^2}u_x^2 + B_2^2)\frac{\partial}{\partial u_x^2} \\ X_3 &= \frac{\partial}{\partial y} + (A_1^1u_x^1 + A_2^1u_x^2 + C^1)\frac{\partial}{\partial u_x^1} + (A_1^2u_x^1 + A_2^2u_x^2 + C^2)\frac{\partial}{\partial u_x^2}. \end{aligned}$$

Операторы  $X_1, X_2, X_3$  являются линейно независимыми. Прямым вычислением можно показать, что коммутаторы  $[X_1, X_2], [X_1, X_3], [X_2, X_3]$  при условиях (18) – (24) равны нулю. Следовательно, (см. [2], стр. 70) система (50) имеет два независимых решения. Последнее означает, что система (17) обладает двумя  $X$ -интегралами. Аналогично доказывается существование  $Y$ -интегралов.

Автор выражает благодарность своему научному руководителю Жиберу А. В. за постановку задачи и внимание к работе.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (гранты 10-01-91222-Ст-а, 11-01-97005-р-поволжье-а).

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] Жибер А. В., Соколов В. В. Точно интегрируемые гиперболические уравнения лиувиллевого типа. // УМН. 2001. Т. 56. № 1. С. 63–106.
- [2] Гюнтер Н. М. Интегрирование уравнений первого порядка в частных производных. - Москва: ОНТИ, 1994, С. 340.



## ПРИМЕНЕНИЕ GPU В МОДЕЛИРОВАНИИ ПРОЦЕССОВ МОЛЕКУЛЯРНОЙ ДИНАМИКИ

Марьин Д.Ф.

Центр «Микро- и наномасштабная динамика дисперсных систем»,  
БашГУ, ИМех УНЦ РАН, г.Уфа<sup>1</sup>

### Введение

Экспериментальные исследования процессов, происходящих на микро- и наноуровнях либо достаточно сложны и требуют сложного дорогостоящего оборудования, либо попросту невозможны. В данном случае вычислительный эксперимент становится незаменимым.

Однако и при проведении вычислительного эксперимента имеется ряд проблем, которые связаны с тем, что при достаточно подробном математическом описании проблемы, учитывающем многомерность и многопараметричность, а также с использованием при моделировании большого числа частиц, серьезно возрастают требования к производительности как используемого программного кода, так и вычислительной системы в целом.

Для проведения вычислительного эксперимента в разумные сроки необходимо использовать высокопроизводительные вычислительные системы. В настоящее время наиболее эффективными для задач динамики многих тел являются гетерогенные системы, представляющие собой вычислительные кластеры, узлы которых содержат как CPU (центральный процессор), так и GPU (графический процессор).

Следует отметить ещё один факт. Он заключается в том, что на протяжении масштабной шкалы от микро- до наноуровней располагается условная точка, после которой использование классических континуальных моделей многофазных систем оказывается недопустимым и актуальность приобретают кинетические модели, используемые в методах молекулярной динамики.

Таким образом, проведение исследований процессов динамики дисперсных систем происходящих на микро- и наноуровнях требует реализации молекулярно-динамических моделей на гетерогенных вычислительных системах.

---

<sup>1</sup>Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации, грант 11.G34.31.0040.

## § 1. Математическая модель

Математическая модель среды, описываемой в терминах молекулярной динамики для случая неполярных молекул основана на предположении о том, что среда состоит из сферических частиц, которые взаимодействуют друг с другом по определённом закону.

Функция, описывающая такое взаимодействие, может принимать различные формы, и зависит от поставленной задачи. Для проведения тестовых расчётов был выбран потенциал Леннарда—Джонса (эта модель достаточно реалистично передаёт свойства реального взаимодействия сферических неполярных молекул и поэтому широко используется в расчётах и при компьютерном моделировании)

$$U_{LJ}(r) = 4\varepsilon \left[ \left( \frac{\sigma}{r} \right)^{12} - \left( \frac{\sigma}{r} \right)^6 \right],$$

где  $r$  — расстояние между частицами;  $\varepsilon$  — глубина потенциальной ямы;  $\sigma$  — расстояние, на котором энергия взаимодействия становится равной нулю. Параметры  $\varepsilon$  и  $\sigma$  являются характеристиками молекул соответствующего вещества.

Для ускорения расчётов потенциал Леннарда—Джонса обрывается на расстоянии  $r_c = 2,5\sigma$ . И, чтобы избежать нефизичной ситуации, такой, что при пересечении сферы радиуса  $r_c$  какой-то молекулой энергия системы меняется скачкообразно, потенциал сдвигается, чтобы выполнялось условие  $U(r_c) = 0$ . Таким образом обрезанный потенциал Леннарда—Джонса принимает следующий вид

$$U_{LJ_{trunc}}(r) = U_{LJ}(r) - U_{LJ}(r_c),$$

при условии  $r \leq r_c$ , иначе  $U(r) = 0$ .

Кинетические уравнения движения атомов следуют из второго закона Ньютона:

$$m\ddot{\mathbf{r}}_i = \mathbf{f}_i = \sum_{\substack{j=1 \\ (j \neq i)}}^N \mathbf{f}_{ij},$$

$\mathbf{f}_{ij} = -\nabla U_{LJ_{trunc}}(r_{ij})$ . Макроскопические параметры (температура, давление, плотность среды и др.) могут быть получены, исходя из положений молекулярно-кинетической теории.

## § 2. Численный метод

Для интегрирования уравнений движения используется простая численная схема — метод чехарды (leapfrog), который имеет вид

$$\mathbf{v}_i(t + h/2) = \mathbf{v}_i(t - h/2) + h\mathbf{a}_i(t),$$

$$\mathbf{r}_i(t + h) = \mathbf{r}_i(t) + h\mathbf{v}_i(t + h/2),$$

где  $\mathbf{r}_i$  — координаты  $i$ -ой частицы,  $\mathbf{v}_i$  — её скорость,  $\mathbf{a}_i$  — её ускорение,  $t$  — текущий временной шаг,  $h$  — шаг по времени.

Если для оценки необходимо значение скорости на шаге по времени соответствующем шагу, на котором вычислены координаты, то можно использовать следующую формулу

$$\mathbf{v}_i(t) = \mathbf{v}_i(t - h/2) + (h/2)\mathbf{a}_i(t).$$

## § 3. Результаты

Для тестирования программы использовалась равномерная генерация частиц по пространству. В работе не использовались никакие структуры данных и списки соседей.

Тестовые расчёты проводились на вычислительной системе с CPU Intel Xeon 5660, 2.8GHz, GPU NVIDIA Tesla C2050, операционной системой Linux 64bit, компиляторами GCC v.4.4, CUDA v.4.0. Размер блока при проведении расчетов выбирался исходя из оптимальности и, начиная с некоторого числа частиц, равнялся 256 потокам на блок.

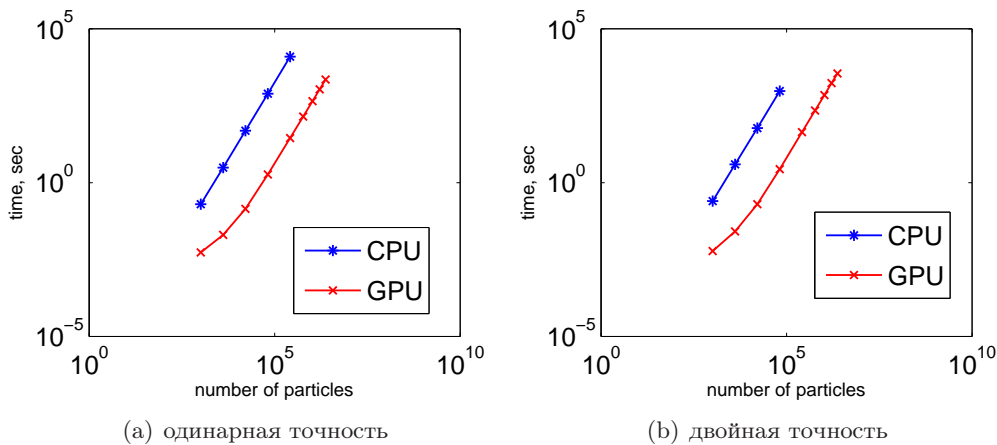


Рис. 1: Время выполнения

На рис. (1, а) показано время расчёта в зависимости от числа частиц в рассматриваемой системе для чисел с плавающей точкой одинарной точности. Как видно из рисунка графики выходят на постоянный тренд и имеют одинаковый наклон. Аналогичную картину можно наблюдать и для чисел с плавающей точкой двойной точности (см. рис. (1, б)).

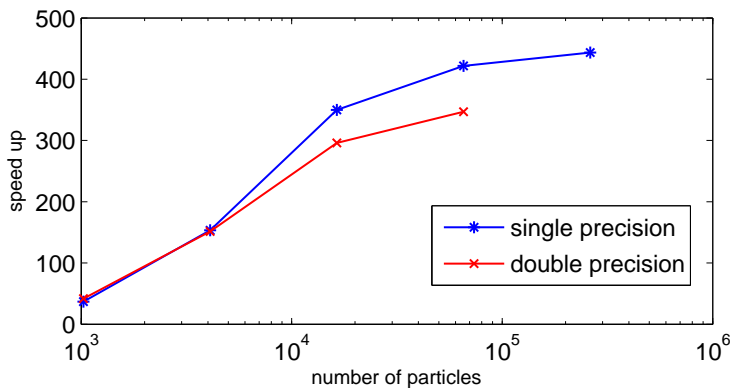


Рис. 2: Ускорение в зависимости от числа частиц

На рис. (2) показано ускорение полученное на GPU в сравнении с запуском на одном ядре CPU для чисел с плавающей точкой одинарной и двойной точности. Оно достигает 450 и 330 раз для чисел с одинарной и двойной точностью соответственно. Ускорение получено по времени вычислений без учета времени коммуникаций. Важно отметить, что сравнение ведется с оптимизированным, но не распараллеленным кодом на CPU (была включена автоматическая оптимизация компилятором как для CPU-кода, так и для GPU-кода). Целью является не соревнование между CPU и GPU, а использование кода на CPU в качестве основы для разработки кода на GPU.

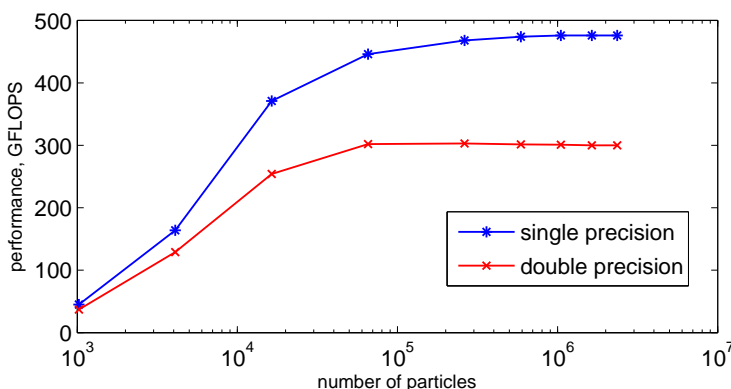


Рис. 3: Производительность в зависимости от числа частиц

Об эффективности использования GPU можно судить по получаемой производительности, графики которой для чисел с плавающей точкой оди-

нарной и двойной точности показаны на рис. (3). Производительность достигает 480 и 300 GFLOPS для чисел с одинарной и двойной точностью соответственно, что превышает половину пиковой производительности GPU C2050<sup>1</sup>. При расчёте производительности арифметические операции и стандартные функции (например, модуль числа, корень) по занимаемому числу тактов приравнялись к операции сложения. Так же стоит отметить, что в связи со спецификой реализации на GPU, при расчёте сил взаимодействия на GPU не учитывался третий закон Ньютона, в отличие от расчёта на CPU, то есть GPU произвело примерно в два раза больше вычислений, чем CPU.

Таким образом можно сделать вывод, что достигнута очень хорошая производительность на GPU, благодаря чему удалось достичь хорошего ускорения проведения расчётов по сравнению с CPU.

### Литература

- [1] *Rapaport D.C.* The art of molecular dynamics simulation. 2004. p. 400.
- [2] *Gumerov N.A., Duraiswami R.* Fast multipole methods on graphics processors. Journal of computational physics. 2008. Vol. 227. p. 8290–8313.
- [3] *Nyland L., Harris M., Prins J.* Fast N-Body Simulation with CUDA
- [4] NVIDIA Corporation. NVIDIA CUDA Compute Unified Device Architecture Programming Guide. Version 3.2. 2010.

---

<sup>1</sup>пиковая производительность C2050 для чисел с плавающей точкой одинарной точности — 1030 GFLOPS, двойной точности — 515 GFLOPS

# О ПОСТОЯННОЙ ФРИДРИХСА КРУГОВОЙ МЕМБРАНЫ, ЗАКРЕПЛЕННОЙ НА МАЛОЙ ЧАСТИ ГРАНИЦЫ

Миннихметов А. Р.

(Уфа, БашГУ)

## Введение

Пусть  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  – ограниченная область с бесконечно дифференцируемой границей  $\Gamma = \partial\Omega$ , и пусть  $\tilde{\Gamma} \subset \Gamma$ . Тогда под пространством  $W_{2,0}^1(\Omega, \tilde{\Gamma})$  будем понимать подпространство  $W_2^1(\Omega)$ , плотным множеством в котором является множество всех функций из  $C^1(\bar{\Omega})$ , равных нулю вблизи  $\tilde{\Gamma}$ . Известно (см. напр. [1]), что для элементов пространства  $W_{2,0}^1(\Omega, \tilde{\Gamma})$  справедливо неравенство Фридрихса

$$\|\Psi\|_{L_2(\Omega)}^2 \leq C(\Omega, \tilde{\Gamma}) \|\nabla \Psi\|_{L_2(\Omega)}^2, \quad (1)$$

где постоянная  $C(\Omega, \tilde{\Gamma})$  зависит только от  $\tilde{\Gamma}$  и геометрии области  $\Omega$ . Здесь и далее под  $C(\Omega, \tilde{\Gamma})$  будет пониматься минимальная постоянная, при которой неравенство (1) будет выполнено. Нетрудно видеть, что в этом случае  $C(\Omega, \tilde{\Gamma})$  представима в виде

$$C(\Omega, \tilde{\Gamma}) = \sup_{v \in W_{2,0}^1(\Omega, \tilde{\Gamma}) \setminus \{0\}} \left\{ \frac{\|v\|_{L_2(\Omega)}^2}{\|\nabla v\|_{L_2(\Omega)}^2} \right\}. \quad (2)$$

В случае, если  $\tilde{\Gamma}$  совпадает со всей границей  $\Gamma$ , неравенство (1) называется классическим неравенством Фридрихса.

В данной работе рассматривается случай, когда  $\Omega$  представляет собой единичный круг с центром в начале координат,  $\tilde{\Gamma} = \Gamma_\varepsilon$ , где  $\Gamma_\varepsilon = \{(r, \varphi) \in \Gamma : (\varepsilon < \varphi \leq \pi) \vee (-\pi < \varphi < -\varepsilon)\}$ ,  $0 < \varepsilon \ll 1$ . Здесь и далее  $(r, \varphi)$  – полярные координаты точки  $x = (x_1, x_2)$ .

Основной целью работы является построение главного члена асимптотики  $C(\Omega, \Gamma_\varepsilon)$  по обратным степеням  $\ln \varepsilon$  на формальном уровне.

## § 1. Основное содержание

Хорошо известно (см., например, [2]), что для минимального собственного значения краевой задачи

$$-\Delta \psi_0 = \lambda_0 \psi_0, \quad x \in \Omega; \quad \frac{\partial \psi_0}{\partial \mathbf{n}} = 0, \quad x \in \Gamma \quad (3)$$

имеет место равенство

$$\lambda_0 = \inf_{v \in W_{2,0}^1(\Omega, \Gamma) \setminus \{0\}} \left\{ \frac{\|\nabla v\|_{L_2(\Omega)}^2}{\|v\|_{L_2(\Omega)}^2} \right\}. \quad (4)$$

Аналогично [2] легко показать, что для минимального собственного значения краевой задачи

$$-\Delta \psi_\varepsilon = \lambda_\varepsilon \psi_\varepsilon, \quad x \in \Omega, \quad \frac{\partial \psi_\varepsilon}{\partial \mathbf{n}} = 0, \quad x \in \Gamma_\varepsilon, \quad \psi_\varepsilon = 0, \quad x \in \gamma_\varepsilon, \quad (5)$$

где  $\mathbf{n}$  – внешняя нормаль к  $\Omega$ , а  $\gamma_\varepsilon = \Gamma \setminus \bar{\Gamma}_\varepsilon$ , справедливо равенство

$$\lambda_\varepsilon = \inf_{v \in W_{2,0}^1(\Omega, \Gamma_\varepsilon) \setminus \{0\}} \left\{ \frac{\|\nabla v\|_{L_2(\Omega)}^2}{\|v\|_{L_2(\Omega)}^2} \right\}. \quad (6)$$

Из (2), (6) немедленно вытекает, что

$$C(\Omega, \Gamma_\varepsilon) = \lambda_\varepsilon^{-1}. \quad (7)$$

Таким образом, для построения асимптотики  $C(\Omega, \Gamma_\varepsilon)$  достаточно построить формальную асимптотику собственного значения  $\lambda_\varepsilon$  задачи (5), чему и будет посвящено основное содержание данной работы.

Исследование поведений собственных значений эллиптических краевых задач при сингулярном возмущении граничных условий имеет давнюю историю (см., например, [4], [7]-[11]). В [7] была дана оценка собственных значений задачи Дирихле для оператора Лапласа в трехмерной области с малым отверстием. Полные асимптотические разложения по малому параметру собственных значений краевых задач для оператора Лапласа в области с малым отверстием для различных размерностей и граничных условий построены в [9]. В [10] для трехмерной задачи Дирихле рассмотрено возмущение заданием условия Неймана на малой части границы. В названных работах асимптотики собственных значений возмущенных задач строились в предположении, что соответствующие собственные значения невозмущенной задачи простые. В [4] показано, что при указанных типах возмущений собственные значения возмущенных задач сходятся к собственным значениям предельных задач и к любому кратному собственному значению предельной задачи сходятся собственные значения той же суммарной кратности возмущенной задачи.

Заметим, что в случае, когда область  $\Omega$  имеет выпрямленный кусок границы, на малой части которого и задается граничное условие Дирихле, был

рассмотрен в [3]. Отсутствие же такого условия на границу для круга существенно усложняет построение формальной асимптотики собственного значения.

В [4] показано, что простые собственные значения задачи (5) сходятся к простым собственным значениям  $\lambda_0$  краевой задачи (3). Поэтому задачу (3) в дальнейшем будем называть предельной, задачу (5) – возмущенной а собственную функцию  $\psi_\varepsilon(x)$  естественно искать в виде  $\psi_\varepsilon(x) \approx \psi_0(x)$ .

Очевидно, что минимальное собственное значение  $\lambda_0$  предельной задачи (3) простое и равно 0, а собственная функция предельной краевой задачи (3) имеет вид:

$$\psi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}. \quad (8)$$

Однако функция  $\psi_0(x)$  не удовлетворяет требуемому граничному условию для возмущенной задачи на  $\gamma_\varepsilon$ . Поэтому, следуя методу согласования асимптотических разложений, собственную функцию возмущенной задачи в окрестности  $\gamma_\varepsilon$  будем искать в другом виде. Перейдем к переменным  $y = (y_1, y_2)$ ,  $y_1 = \varphi$ ,  $y_2 = 1 - r$ ,  $\tau = |y|$ ,  $\xi = \varepsilon^{-1}y$ ,  $\rho = |\xi|$ . Поэтому, следуя методу согласования асимптотических разложений, собственную функцию возмущенной задачи в окрестности точки  $y = 0$  следует искать в виде:

$$\psi_\varepsilon(x) \approx V_0(\xi), \quad (9)$$

$$V_0(\xi) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}, \quad \xi_2 > 0, \quad (10)$$

Перепишывая оператор Лапласа в переменных  $y$  и разлагая полученные коэффициенты в ряд при  $y \rightarrow 0$ , получаем:

$$\Delta_x = \Delta_y + \sum_{i=-1}^{\infty} L_i^y, \quad L_i^y = -y_2^{i+1} \frac{\partial}{\partial y_2} + (i+3)y_2^{i+2} \frac{\partial^2}{\partial y_1^2}. \quad (11)$$

Следовательно, во внутренних переменных (11) имеет вид:

$$\Delta_x = \varepsilon^{-2} \Delta_\xi + \sum_{i=-1}^{\infty} \varepsilon^i L_i^\xi. \quad (12)$$

Пусть  $\beta_1 := \{\xi : \xi_1 \notin [-1, 1], \xi_2 = 0\}$ ,  $\beta_2 := \{\xi : \xi_1 \in (-1, 1), \xi_2 = 0\}$ . Подставляя (9), (10), (12) в (5) и выписывая члены при минимальной степени  $\varepsilon$ , получаем краевую задачу на  $V_0$ :

$$\Delta_\xi V_0 = 0, \quad \xi_2 > 0, \quad \frac{\partial V_0}{\partial \xi_2} = 0, \quad \xi \in \beta_1, \quad V_0 = 0, \quad \xi \in \beta_2. \quad (13)$$



Известно, что существует единственное решение  $V_0(\xi)$  такой задачи, имеющее дифференцируемую асимптотику на бесконечности:

$$V_0(\xi) = \ln \rho + \sigma + O\left(\frac{1}{\rho}\right), \quad \sigma = \ln 2$$

Решение возмущенной краевой задачи (5) будем искать в виде:

$$\psi_\varepsilon(x) \approx \frac{1}{\ln \varepsilon} \Psi_0(\xi),$$

где

$$\Psi_0(\xi) = -V_0(\xi)\psi_0(0). \quad (14)$$

Следовательно,

$$\frac{1}{\ln \varepsilon} \Psi_0(\xi) = -\frac{1}{\ln \varepsilon} \left( \ln \rho + \sigma + O\left(\frac{1}{\rho}\right) \right) \psi_0(0), \quad \rho \rightarrow \infty.$$

В последней асимптотике перейдем к переменной  $y$ :

$$\frac{1}{\ln \varepsilon} \Psi_0(\xi) = \psi_0(0) - \frac{1}{\ln \varepsilon} \left( \ln \tau + \sigma \right) \psi_0(0) + O\left(\frac{1}{\ln \varepsilon \tau}\right), \quad \tau \varepsilon^{-1} \rightarrow \infty.$$

Заметим, что при каждом фиксированном, довольно малом  $y$

$$\frac{1}{\ln \varepsilon} \Psi_0(\xi) = \psi_0(0) + O\left(\frac{1}{\ln \varepsilon}\right), \quad \varepsilon \rightarrow 0.$$

В соответствии с методом согласования асимптотических разложений [4] собственную функцию  $\psi_\varepsilon(x)$  краевой задачи (5) вне малой окрестности  $y = 0$  следует искать в виде:

$$\psi_\varepsilon(x) \approx \psi_0(x) + \frac{1}{\ln \varepsilon} \psi_1(x), \quad \varepsilon \rightarrow 0, \quad (15)$$

где

$$\psi_1(x) = -\left( \ln \tau + \sigma \right) \psi_0(0) + O(\tau), \quad \tau \rightarrow 0. \quad (16)$$

Учитывая структуру асимптотики собственной функции (16), собственное значение возмущенной задачи (5) естественно искать в виде:

$$\lambda_\varepsilon \approx \widehat{\lambda}_\varepsilon := \frac{1}{\ln \varepsilon} \lambda_1. \quad (17)$$

Подставляя (15), (17) в (5), учитывая (16) и выписывая равенства для членов при одинаковых степенях  $\frac{1}{\ln \varepsilon}$ , получим при нулевой степени предельную краевую задачу (3), а при  $\frac{1}{\ln \varepsilon}$  краевую задачу:

$$-\Delta_x \psi_1 = \lambda_0 \psi_1 + \lambda_1 \psi_0, \quad \text{в } \Omega, \quad \frac{\partial \psi_1}{\partial \mathbf{n}} = 0 \quad \text{на } \Gamma \setminus \{(1, 0)\}. \quad (18)$$

Решая эту задачу, мы получаем, что собственное значение  $\lambda_\varepsilon$  краевой задачи (5) имеет при  $\varepsilon \rightarrow 0$  формальную асимптотику:

$$\lambda_\varepsilon = \frac{1}{\ln \varepsilon} \widehat{\lambda}_1 \left( \frac{1}{\ln \varepsilon} \right) + \dots, \quad (19)$$

где  $\widehat{\lambda}_1(\widehat{\tau})$  – голоморфная в точке  $\widehat{\tau} = 0$  функция.

Таким образом, мы построили формальную асимптотику собственного значения  $\lambda_\varepsilon$  краевой задачи (5). И следуя (7) получаем главный член асимптотики  $C(\Omega, \Gamma_\varepsilon)$ :

$$C(\Omega, \Gamma_\varepsilon) = \lambda_\varepsilon^{-1}, \quad (20)$$

где  $\lambda_\varepsilon$  определяется из соотношения (19).

## Список литературы

- [1] *Ладыженская О. А.* Краевые задачи математической физики. // М.: Наука, 1973.
- [2] *Михайлов В. П.* Дифференциальные уравнения в частных производных. // М.: Наука, 1976.
- [3] *Гадьльшин Р. Р.* Расщепление кратного собственного значения задачи Дирихле для оператора Лапласа при сингулярном возмущении граничного условия // Математические заметки. Том 52, выпуск 4, октябрь 1992. С. 42-55.
- [4] *Гадьльшин Р. Р.* Спектр эллиптических краевых задач при сингулярном возмущении граничных условий // Сборник статей: Асимптотические свойства решений дифференциальных уравнений. Уфа. БНЦ УрО АН СССР. 1988. С. 3-15.
- [5] *Владимиров В.С.* Уравнения математической физики // М.: Наука, 1971.
- [6] *Ильин А.М.* Согласование асимптотических разложений решений краевых задач. // М.: Наука, 1989.
- [7] *Самарский А.А.* О влиянии закрепления на собственные частоты замкнутых объемов. // Докл. АН СССР. 1948. Т.63, №6. С. 631-634.
- [8] *Swanson C.A.* Asymptotic variational formulae for eigenvalues. // Canad. Math. Bull. 1963. V. 6, N 1. P. 1525.

- [9] *Osawa Shin*. Singular Hadamard's variation of domains and eigenvalues of Laplasian 1. // Proc. Japan Acad. Ser. A. 1981. V. 57, N 5. P. 242-246.
- [10] *Мазья В.Г., Назаров С.А., Пламеневский Б.А.* Асимптотические разложения собственных чисел краевых задач для оператора Лапласа в областях с малыми отверстиями. // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1984. Т. 48, № 2. С. 347-371.
- [11] *Гадьльшин Р. Р.* Асимптотика собственного значения сингулярно возмущенной эллиптической задачи с малым параметром в граничном условии // Дифференц. уравнения. 1986. Т. 22, № 4. С. 640-652.
- [12] *Колмогоров А.Н., Фомин С.В.* Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1972. 496 С.
- [13] *Красносельский М.А., Вайникко Г.М., Забрейко П.П., Рунцицкий Я.Б., Стеценко В.Я.* Приближенное решение операторных уравнений. М.: Наука, 1969. 456 С.

УДК 532, 519.6

## МОДЕЛИРОВАНИЕ НАСЫЩЕННЫХ СОСТОЯНИЙ ПАРА И ЖИДКОСТИ МЕТОДОМ МОЛЕКУЛЯРНОЙ ДИНАМИКИ

Моисеева Е. Ф., Малышев В. Л.

(БашГУ, Центр «Микро- и наномасштабная динамика дисперсных систем», Уфа)<sup>1</sup>

### Введение

В настоящее время при проведении исследования микро- и наномасштабных явлений и объектов значительное внимание уделяется методам молекулярной динамики. Это определяется тем, что характерные размеры исследуемых объектов или областей не превышают нескольких десятков

---

<sup>1</sup>Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации, грант 11.G34.31.0040.

нанометров, вследствие чего непосредственное экспериментальное наблюдение становится практически невозможным, так как такой характерный размер оказывается меньше длины волны видимого света. Также в описанных областях невозможно применение классических континуальных моделей, что связано с малым числом находящихся в области атомов. Поэтому численное исследование методами молекулярной динамики явлений с характерными размерами менее 100 нм становится важным, а нередко и единственно возможным прямым методом исследований.

В представленной работе делается попытка практической верификации метода молекулярной динамики для моделирования паро-жидкостной среды в области, расположенной вблизи линии насыщения и при переходе через неё на примере аргона. Рассмотрены состояния аргона в широком диапазоне плотностей и температур, допускающем существование аргона, как в газообразном, так и в жидком состоянии. Проведено сравнение полученных результатов с хорошо известными теоретическими и экспериментальными данными.

В 1979 году J. Nicolas и др. [1] в своей работе представили таблицы значений конфигурационной энергии и давления для широкого диапазона значений плотности и температуры, а так же получили кривые насыщения для системы жидкость-пар, содержащей 256 атомов. В качестве исследуемой системы рассматривался аргон.

В статье D. Brown и J. H. R. Clarke [2] приведен сравнительный анализ динамических и статических свойств жидкости при плотности и температуре, близких к тройной точке для 4х различных ансамблей.

Одна из последних работ по данной теме, это статья E. S. Landry и др. [3], в которой исследовался процесс испарения капли жидкого аргона, окруженного газообразным аргоном при температуре и давлении, заданных в широком диапазоне значений.

## § 1. Математическая модель

Математическая модель среды, описываемой в терминах молекулярной динамики для случая неполярных молекул, достаточно проста. Она основана на предположении о том, что среда состоит из сферических частиц, которые взаимодействуют друг с другом по определённому закону. Взаимодействия происходят между каждой парой атомов, при этом должны выполняться два главных условия, вызываемых действием межатомных сил: сопротивление бесконечному сжатию и возможность концентрирования атомов в твердом и жидком состояниях, для чего атомы должны притягиваться друг к другу на некотором расстоянии.

Функция, описывающая такое взаимодействие, может принимать различные формы, и, правильно выбранная, позволяет моделировать реальные вещества. Самая известная потенциальная функция, первоначально предложенная для жидкого аргона — это потенциал Леннарда—Джонса [2].

$$u_{LJ}(r) = 4\varepsilon \left[ \left( \frac{\sigma}{r} \right)^{12} - \left( \frac{\sigma}{r} \right)^6 \right]$$

где  $r$  — расстояние между частицами;  $\varepsilon$  — глубина потенциальной ямы;  $\sigma$  — расстояние, на котором энергия взаимодействия становится равной нулю. Параметры  $\varepsilon$  и  $\sigma$  являются характеристиками молекул соответствующего вещества.

Следует отметить, что потенциал Леннарда—Джонса хорошо описывает взаимодействие частиц в системе с замкнутым электронным облаком, например инертных газов, таких как Ar.

Сила, соответствующая потенциалу, рассчитывается следующим образом:

$$f = -\nabla u(r)$$

Уравнения движения атомов следуют из второго закона Ньютона:

$$m\ddot{r}_i = f_i = \sum_{\substack{j=1 \\ (j \neq i)}}^{N_m} f_{ij}.$$

где  $N_m$  — количество атомов; а  $m$  — атомная масса.

Расчет макроскопических параметров производился на основе широкодиапазонного уравнения состояния Бенедикта—Вебба—Рубина следующего вида:

$$\begin{aligned} P = & \rho T + \rho^2(x_1 T + x_2 T^{1/2} + x_3 + x_4 T^{-1} + X_5 T^{-2}) + \\ & + \rho^3(x_6 T + x_7 + x_8 T^{-1} + x_9 T^{-2}) + \\ & + \rho^4(x_{10} T + x_{11} + x_{12} T^{-1}) + \rho^5(x_{13}) + \\ & + \rho^6(x_{14} T^{-1} + x_{15} T^{-2}) + \rho^7(x_{16} T^{-1}) + \rho^8(x_{17} T^{-1} + x_{18} T^{-2}) + \\ & + \rho^9(x_{19} T^{-2}) + \rho^3(x_{20} T^{-2} + x_{21} T^{-3})e^{-\gamma \rho^2} + \\ & + \rho^5(x_{22} T^{-2} + x_{23} T^{-4})e^{-\gamma \rho^2} + \rho^7(x_{24} T^{-2} + x_{25} T^{-3})e^{-\gamma \rho^2} + \\ & + \rho^9(x_{26} T^{-2} + x_{27} T^{-4})e^{-\gamma \rho^2} + \rho^{11}(x_{28} T^{-2} + x_{29} T^{-3})e^{-\gamma \rho^2} + \\ & + \rho^{13}(x_{30} T^{-2} + x_{31} T^{-3} + x_{32} T^{-4})e^{-\gamma \rho^2} \end{aligned}$$

где  $P$  — давление;  $T$  — температура;  $\rho$  — плотность; а  $x_1, x_2, \dots, x_{32}, \gamma$  — константы, значения которых приведены в [6]. Выражение для расчета по-

тенциальной энергии имеет вид:

$$U = \int_0^{\rho} d\rho \frac{1}{\rho^2} \left[ P - T \left( \frac{\partial P}{\partial T} \right)_{\rho} \right]$$

## § 2. Результаты

Нами было проведено сравнение результатов, полученных при численном моделировании методом молекулярной динамики с хорошо известными теоретическими и экспериментальными данными. Рассматривался аргон в жидком и газообразном состоянии при различных значениях температуры и плотности. Полученные результаты приведены на Рис. 1–2.

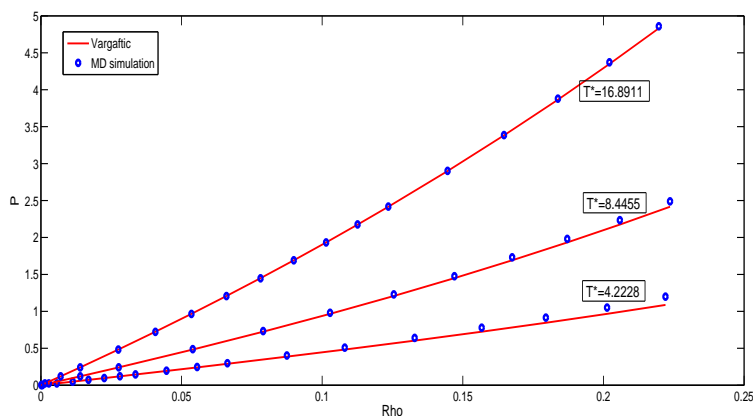


Рис. 1: Сравнение результатов численного моделирования с известными экспериментальными данными [4] для аргона в газообразном состоянии. Линией показаны экспериментальные данные, точками — результаты моделирования.

Из графиков видно, что уравнение состояния Бенедикта—Вебба—Рубина дает адекватные результаты для широкого диапазона плотностей и температур.

Также в данной работе рассматривается процесс конденсации газообразного аргона. Начальная безразмерная плотность и температура полагаются равными  $\rho = 0.0374$  и  $T = 1.0557$  соответственно. Граничные условия выбраны следующим образом. На боковых стенках — периодические; на верхней и нижней — термостатирующие. Термостатирующие условия заданы так, что частица, достигающая стенки, зеркально отражается от нее и приобретает значение модуля скорости, соответствующий температуре на границе. Результаты моделирования представлены на Рис. 3.

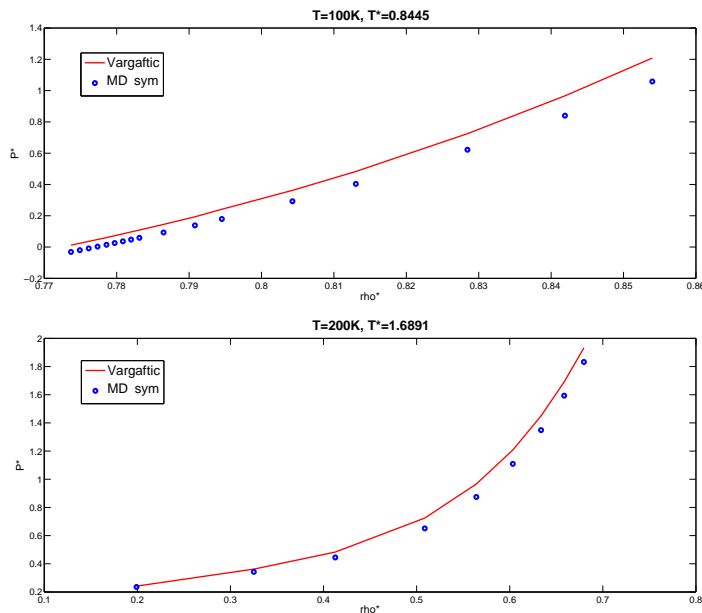


Рис. 2: Сравнение результатов численного моделирования с известными экспериментальными данными [4] для жидкого аргона.  $T=100\text{K}$  и  $T=200\text{K}$  соответственно. Линией показаны экспериментальные данные, точками — результаты моделирования.

### § 3. ВЫВОДЫ

В результате проделанной работы была написана программа, реализующая метод молекулярной динамики. Проведена верификация имеющегося кода посредством сравнения численных и экспериментальных данных. А так же показан процесс конденсации пара на примере аргона

### ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Nicolas J. J., Gubbins K. E., Streett W. B., Tildesley D. J.* Equation of state for the Lennard-Jones fluid // *Molecular Physics: An Int. J. at the Interface Between Chemistry and Physics*. 1979. Vol. 37. N 5. P. 1429–1454.
- [2] *Brown D., Clarke J. H. R.* A Comparison of Constant Energy, Constant Temperature and Constant Pressure Ensembles in Molecular-Dynamics Simulations of Atomic Liquids// *Molecular Physics*. 1984. Vol. 51. P. 1243–1252.
- [3] *Landry E. S., Mikkilineni S., Paharia M., McGaughey A. J. H.* Droplet evaporation: A molecular dynamics investigation// *J. of Appl. Phys.* 2007. Vol. 102. N 12. P. 124301–7.
- [4] *Варгафтик Н. Б.* Справочник по теплофизическим газам и жидкостям// М.:Наука, 1972. С. 720

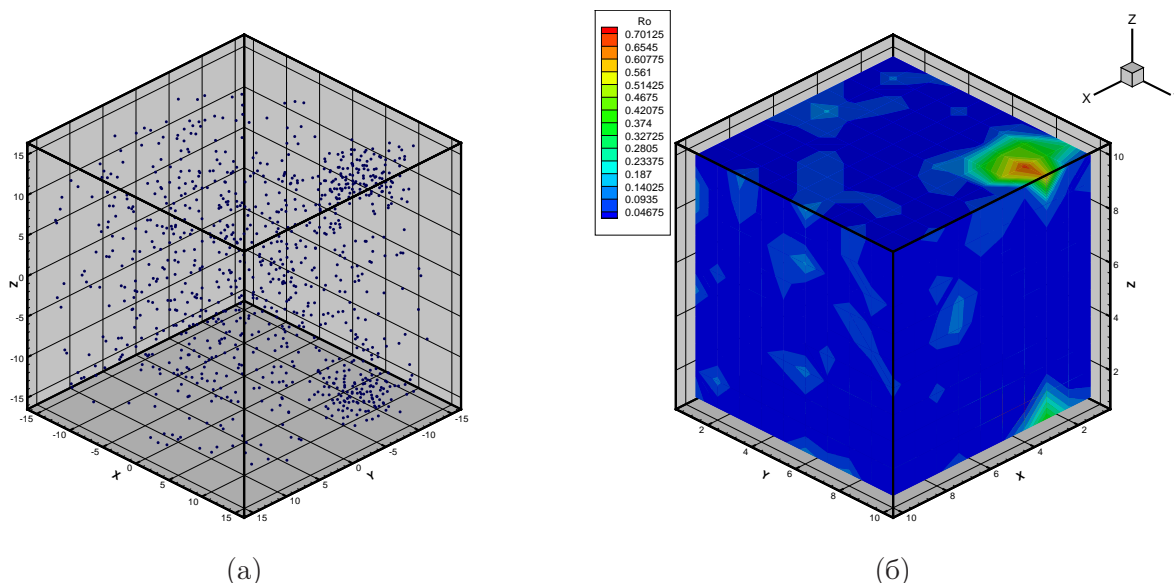


Рис. 3: Результаты численного моделирования конденсации газообразного аргона. Визуализация частиц — (а) и Распределение плотностей — (б)

УДК 517.977 + 669.046

## ЗАДАЧА НАИТОЧНЕЙШЕГО НАГРЕВА С ФАЗОВЫМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ

Морозкин Н. Д., Морозкин Н.Н.  
(Уфа, БГУ)

### Введение

В работе рассматривается задача оптимального нагрева одномерных тел (пластины и цилиндра) с учетом ограничений на термонапряжения и на наибольшую температуру. Предложен способ поиска управления которое за фиксированное время позволит минимизировать функционал, характеризующий отклонение конечного распределения температур в нагреваемом теле от заданного при выполнении вышеуказанных ограничений. При этом нагреваемое тело предполагается упругим, а все теплофизические коэффициенты постоянными, за исключением пределов прочности на сжатие и растяжение, зависимость которых от температуры задается таблично. Заметим, что ранее в такой постановке задача в научной литературе не исследовалась.

### 1. Постановка задачи

Процесс осесимметричного нагрева неограниченной пластины ( $q=0$ ) и неограниченного цилиндра ( $q=1$ ) внешними тепловыми источниками опи-



сывается уравнением:

$$\frac{\partial T(r, t)}{\partial t} = a \left[ \frac{\partial^2 T(r, t)}{\partial r^2} + \frac{q}{r} \frac{\partial T(r, t)}{\partial r} \right], \quad (1)$$

$$0 < r < R, \quad t \in (0, \bar{t}], \quad 0 < \bar{t} < \infty$$

с начальным условием:

$$T(r, 0) = T_0 = const, \quad 0 \leq r \leq R \quad (2)$$

и краевыми условиями, учитывающими теплообмен на границе по закону Ньютона:

$$\lambda \frac{\partial T(r, t)}{\partial r} \Big|_{r=R} = \alpha(\vartheta(t) - T(R, t)), \quad t \in (0, \bar{t}] \quad (3)$$

$$r^q \frac{\partial T(r, t)}{\partial r} \Big|_{r=0} = 0, \quad t \in (0, \bar{t}] \quad (4)$$

где  $T$  - температура ( $^{\circ}C$ ),  $t$  - время (с),  $a$  - коэффициент температуропроводности ( $m^2/c$ ),  $R$  - радиус цилиндра или половина толщины пластины (м),  $\lambda$  - коэффициент теплопроводности (Вт/(м·град)),  $\alpha$  - коэффициент теплообмена (Вт/( $m^2 \cdot \text{град}$ )),  $\vartheta(t)$  - управление (температура внешней среды  $^{\circ}C$ ).

$$\vartheta \in V = \{ \vartheta : \vartheta = \vartheta(t) \in L_2 \in [0, \bar{t}], \quad \vartheta^- \leq \vartheta \leq \vartheta^+ \}$$

По условиям задачи недопустимо, чтобы тело в процессе нагрева получило бы необратимые деформации от возникающих термонапряжений, а наибольшая температура тела превысила бы допустимое значение. Будем рассматривать материалы, которые разрушаются хрупко. Тогда в соответствии с результатами работы [1] ограничения на термонапряжения запишутся в виде:

$$-\sigma_c(T) \leq \sigma_i(r, T) \leq \sigma_p(T),$$

где  $\sigma_c(T)$ ,  $\sigma_p(T)$  - пределы прочности на сжатие и растяжение,  $\sigma_i(r, T)$  - главные компоненты тензора напряжений (мПа), которые находятся из решения уравнений Дюамеля - Неймана [2]. В рассматриваемом случае эти уравнения решаются аналитически. Анализ термонапряжений [3] показывает, что при осесимметричном нагреве растягивающие напряжения наибольших значений достигают на оси, а сжимающие - на поверхности нагреваемых тел. Тогда ограничения на термонапряжения можно написать в виде:

а) в случае пластины:

$$\frac{\alpha_T E}{1 - \nu} \left[ -T(0, t) + \frac{1 + 3\Gamma}{R} \int_0^R T(\xi, t) d\xi - \frac{6\Gamma}{R^2} \int_0^R \xi T(\xi, t) d\xi \right]$$

$$\leq \sigma_p(T(0, t)) \quad (5)$$

$$\frac{\alpha_T E}{1 - \nu} \left[ T(R, t) - \frac{1 - 3\Gamma}{R} \int_0^R T(\xi, t) d\xi - \frac{6\Gamma}{R^2} \int_0^R \xi T(\xi, t) d\xi \right] \leq \sigma_c(T(R, t)) \quad (6)$$

б) в случае цилиндра:

$$\frac{\alpha_T E}{1 - \nu} \left[ -T(0, t) + \frac{2}{R^2} \int_0^R \xi T(\xi, t) d\xi \right] \leq \sigma_p(T(0, t)) \quad (7)$$

$$\frac{\alpha_T E}{1 - \nu} \left[ T(R, t) - \frac{2}{R^2} \int_0^R \xi T(\xi, t) d\xi \right] \leq \sigma_c(T(R, t)) \quad (8)$$

где  $\Gamma \in [0, 1]$  - число, характеризующее степень закрепления от поворота краев пластины,  $\Gamma = 0$  - для жесткого закрепления,  $\Gamma = 1$  - для свободной от поворота краев,  $\alpha_T$  - коэффициент линейного расширения (1/град),  $E$  - модуль упругости (мПа),  $\nu$  - коэффициент Пуассона (безразмерная величина).

Потребуем также выполнения ограничений на максимальную температуру в теле, которая в рассматриваемом случае достигается на поверхности

$$T(R, t) \leq T^{gon} \quad (9)$$

**Задача 1.** При фиксированной длительности нагрева  $\bar{t} > 0$  найти управление  $\vartheta \in V$ , минимизирующее функционал

$$I = \int_0^R r^q \left[ T(r, \bar{t}, \vartheta) - \tilde{T}(r) \right]^2 dr \quad (10)$$

так, чтобы при всех  $t \in (0, \bar{t}]$  были бы выполнены неравенства (5)-(9). Здесь  $\tilde{T}(r)$  - заданное конечное распределение температур в теле.

Введем безразмерные координаты:

$$\begin{aligned} l &= \frac{r}{R}, \quad \Theta = (T(r, t) - T_0)\alpha_T, \quad \tau = \frac{at}{R^2}, \\ Bi &= \frac{\alpha R}{\lambda}, \quad u = (\vartheta(t) - T_0)\alpha_T, \quad \sigma_p^* = (1 - \nu)\frac{\sigma_p}{E} \\ \sigma_c^* &= (1 - \nu)\frac{\sigma_c}{E}, \quad \Theta^{gon} = (T^{gon} - T_0)\alpha_T \end{aligned} \quad (11)$$

В новых переменных соотношения (1)-(4) запишутся в виде:

$$\frac{\partial \Theta(l, \tau)}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 \Theta(l, \tau)}{\partial \tau^2} + \frac{q}{l} \frac{\partial \Theta(l, \tau)}{\partial \tau}, \quad l \in [0, 1] \quad (12)$$

$$\Theta(l, 0) = 0, \quad l \in [0, 1] \quad (13)$$

$$\frac{\partial \Theta(l, \tau)}{\partial l} = Bi(u(\tau) - \Theta(1, \tau)), \quad \tau \in (0, \bar{\tau}] \quad (14)$$

$$l^q \frac{\partial \Theta(l, \tau)}{\partial l} \Big|_{l=0} = 0, \quad q = 0, 1, \quad \tau \in (0, \bar{\tau}], \quad (15)$$

где  $\bar{\tau} = \frac{a\bar{t}}{R^2}$

Аппроксимировав зависимости  $\sigma_c^*(\Theta)$  и  $\sigma_p^*(\Theta)$  линейными функциями

$$\sigma_c^*(\Theta) = \alpha_1 + \beta_1 \Theta \quad (16)$$

$$\sigma_p^*(\Theta) = \alpha_2 + \beta_2 \Theta$$

Неравенства (5) - (8) переписутся в виде

$$\begin{aligned} & (1 - \beta_1)\Theta(1, \tau) - (q + 1 + 3(q - 1)\Gamma) \int_0^1 \xi^q \Theta(\xi, \tau) d\xi + \\ & + 6\Gamma(q - 1) \int_0^1 \xi \Theta(\xi, \tau) d\xi \leq \alpha_1, \\ & -(1 - \beta_2)\Theta(0, \tau) + (q + 1 - 3(q - 1)\Gamma) \int_0^1 \xi^q \Theta(\xi, \tau) d\xi \\ & + 6\Gamma(q - 1) \int_0^1 \xi^q \Theta(\xi, \tau) d\xi \leq \alpha_2, \end{aligned} \quad (17)$$

где  $\Gamma \in [0, 1]$ .

Ограничения на максимальную температуру (9) запишутся так:

$$\Theta(1, \tau) \leq \Theta^{gon} \quad (18)$$

## 2. Применение метода интегральных преобразований.

Методом интегральных преобразований [4] решение уравнений (12) - (15) находится аналитически и записывается в виде:

$$\Theta = \sum_{n=1}^{\infty} D_n x_n(u, \tau) K(\mu_n l) \quad (19)$$

где

$$D_n = \frac{2Bi^2}{(\mu_n^2 + Bi^2 + (1 - q)Bi)K_1(\mu_n l)} \quad (20)$$

$$K(\mu_n l)|_{q=0} = \cos(\mu_n l), \quad K(\mu_n l)|_{q=1} = I_0(\mu_n l) \quad (21)$$

$$K_1(\mu_n)|_{q=0} = \sin(\mu_n), \quad K_1(\mu_n)|_{q=1} = I_1(\mu_n) \quad (22)$$

$\mu_n$ -корни уравнения

$$BiK(\mu_n) - \mu_n K_1(\mu_n) = 0, \quad n = 1, 2, \dots \quad (23)$$

$I_0, I_1$  - функции Бесселя нулевого и первого порядков,  $x_n(u, \tau)$  - находятся из решения следующей бесконечной системы обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\frac{dx_n}{d\tau} = -\mu_n^2 x_n + \mu_n u(\tau), \quad x_n(0) = 0, \quad n = 1, 2, \dots \quad (24)$$

С учетом конкретного вида (19) функции  $\Theta$  неравенства (17), (18) переписутся в виде:

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_{in} x_n(u, \tau) \leq e_i, \quad i = \overline{1, 3}, \quad (25)$$

где

$$c_{1n} = F_n \left[ 1 - \beta_1 + \frac{6\Gamma(q-1)}{\mu_n^2} - \frac{(q+1 - 3\Gamma(q-1))Bi}{\mu_n^2} - \frac{6\Gamma(q-1)}{\mu_n^2 K(\mu_n)} \right] \quad (26)$$

$$c_{2n} = F_n \left[ \frac{((q+1) - 3\Gamma(q-1))Bi + 6\Gamma(q-1)}{\mu_n^2} - \frac{1}{K(\mu_n)} - \left[ 1 + \beta_2 + \frac{6\Gamma(q-1)}{\mu_n^2} \right] \right] \quad (27)$$

$$c_{3n} = F_n, \quad \Gamma \in [0, 1]$$

$$F_n = \frac{2Bi\mu_n}{\mu_n^2 + Bi^2 + (1-q)Bi}, \quad e_1 = \alpha_1, \quad e_2 = \alpha_2, \quad e_3 = \Theta^{gon} \quad (28)$$

Система функций  $\{K(\mu_n l)\}$  ортогональна и полна (с весом  $l^q$ ) в пространстве  $L_2[0, 1]$ . Следовательно, почти при всех  $l \in [0, 1]$  справедливо разложение в ряд Фурье:

$$\tilde{\Theta}(l) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\|K(\mu_n l)\|^2} g_n K(\mu_n l) \quad (29)$$

где

$$g_n = \int_0^1 l^q \tilde{\Theta}(l) K(\mu_n l) dl \quad (30)$$

$$\|K(\mu_n l)\|^2 = \frac{K_1(\mu_n)}{D_n}$$

С учетом проведенных преобразований функционал (10) переписется в виде:

$$\begin{aligned}
& \int_0^1 l^q \left[ \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{K_1(\mu_n)}{\|K(\mu_n l)\|^2} x_n(u, \bar{\tau}) K(\mu_n l) - \frac{g_n}{\|K(\mu_n l)\|^2} K(\mu_n l) \right) \right]^2 dl = \\
& = \int_0^1 l^q \left[ \sum_{n=1}^{\infty} D_n K(\mu_n l) \left( x_n(u, \bar{\tau}) - \frac{g_n}{K_1(\mu_n)} \right) \right]^2 dl \quad (31)
\end{aligned}$$

Ограничившись в (19) первыми  $N$  членами ряда, первыми  $N$  уравнениями в системе (24) и первыми  $N$  членами ряда в (25), получим:

$$\frac{dx}{d\tau} = -Ax + Bu \quad (32)$$

$$x(0) = 0_{R^n} \quad (33)$$

$$Cx \leq F \quad (34)$$

где  $x = x(\tau)$  –  $N$  мерная вектор-функция,  $A = \text{diag}(\mu_1^2, \dots, \mu_n^2)$  – диагональная ( $n \times n$ ) матрица,  $B = (\mu_1, \dots, \mu_n)^T$ ,  $C$  – матрица размерности  $(3 \times N)$  с элементами  $C_{in}$ ,  $i = \overline{1, 3}$ ,  $n = \overline{1, N}$ ,  $F = (\alpha_1, \alpha_2, \Theta^{gon})$ .

Исходной задаче поставим в соответствие следующую конечномерную:

**Задача 2.** Найти управление  $u^\circ \in U$ , минимизирующее интеграл

$$\int_0^1 l^q \left[ \sum_{n=1}^N D_n K(\mu_n l) \left( x_n(u, \bar{\tau}) - \frac{g_n}{K_1(\mu_n)} \right) \right]^2 dl \quad (35)$$

на решениях системы (32), (33) при соблюдении на промежутке  $(0, \bar{\tau}]$  неравенств (34), где  $U = \{u = u(\tau) : u(\tau) \in L_2[0, 1], u^- \leq u(\tau) \leq u^+, \tau \in [0, \bar{\tau}]\}$

Можно показать [4], что для нормы погрешности

$$\gamma(l, \tau) = \sum_{n=N+1}^{\infty} D_n x_n(u, \tau) K(\mu_n, l) \quad (36)$$

справедлива оценка

$$\|\gamma\|_{L_2} \leq \frac{u^+ Bi(2\bar{\tau})^{\frac{1}{2}}}{\pi^2} \left[ \frac{\pi^4}{90} - \sum_{n=1}^{N-1} \frac{1}{n^4} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (37)$$

Сходимость конечномерных аппроксимаций по функционалу и по управлениям в наиболее важном с точки зрения практики случае, когда закрепление концов пластины препятствует ее изгибу, т. е. в случае  $\Gamma = 0$ , показано в работе [4].

### 3. Решение конечномерной задачи оптимального управления.

Рассмотрим функционал:

$$I(u) = \beta \sum_{i=1}^3 \int_0^T \left[ \max \left\{ \sum_{n=1}^N C_{in} x_n(u, t) - \alpha_i, 0 \right\} \right]^2 dt + \\ + \int_0^1 l^q \left[ \sum_{n=1}^N D_n K(\mu_n l) \left( x_n(u, \bar{\tau}) - \frac{g_n}{K_1(\mu_n)} \right) \right]^2 dl, \quad (38)$$

где  $\beta$ -аналог штрафной функции,  $\beta = const \geq 1$ . Отметим что первое слагаемое в (38) характеризует степень нарушения фазовых ограничений.

В результате введения функционала (38) задачу 3 можно сформулировать в виде следующей задачи оптимального управления:

**Задача 3.** При фиксированной длительности нагрева  $\bar{\tau} > 0$  найти управление  $u^\circ \in U$ , минимизирующее функционал (38) на траекториях системы (32)-(33).

Можно показать, что функционал (38) является выпуклым и непрерывно дифференцируемым по  $u$ , а его градиент удовлетворяет условию Липшица по  $u$ . Следовательно, решение задачи 3 можно найти пользуясь методом условного градиента.

Рассмотрим нагрев неограниченной пластины ( $q = 0$ ) из сплава ЖС6У до конечной, постоянной по сечению температуры  $920^\circ C$  за время  $\bar{\tau} = 3.5$  часа.

Исходные данные:

$$a = 0.0153 \text{ м}^2/\text{час}, \lambda = 23 \text{ Вт}/(\text{м}\cdot\text{град}), \alpha = 200 \text{ Вт}/(\text{м}^2\cdot\text{град}) \\ \alpha_T = 0.18 \cdot 10^{-41} / \text{град}, E = 0.145 \cdot 10^{12} \text{ Н}/\text{м}^2, \nu = 0.3, R = 0.25 \text{ м}.$$

Зависимость предела прочности от температуры задавалась таблично:

**Таблица 1:**

Температура, $^\circ C$		20	975	1050	1100	1150
Предел прочности	Сжатие	1500	700	470	310	210-240
мПа	Растяжение	980	540	370	200	140

Температура греющей среды менялась в диапазоне  $[800^\circ C, 1600^\circ C]$ , т. е.  $\vartheta^+ = 1600^\circ C, \vartheta^- = 800^\circ C$ .

Переход к безразмерным величинам осуществляется по формулам (11). Для удобства расчетов было принято  $\alpha_T = 100\alpha_T, E = 0.01E$ . На величину термонапряжений такая замена не влияет, поскольку в формулы для вычисления напряжений входит произведение  $\alpha_T E$ . Перейдем в таблице 1

к безразмерным величинам и аппроксимируем зависимости  $\sigma_c^*$  и  $\sigma_p^*$  от температуры линейными функциями вида (16). Коэффициенты  $\alpha_1$ ,  $\beta_1$ ,  $\alpha_2$ ,  $\beta_2$  найдем используя метод наименьших квадратов. Получим:

$$\begin{aligned}\sigma_c^*(\Theta) &= 0.748 - 0.285\Theta(1, \tau) \\ \sigma_p^*(\Theta) &= 0.493 - 0.18\Theta(0, \tau)\end{aligned}\quad (39)$$

Будем рассматривать наиболее важный с точки зрения практики случай, когда края пластины имеют жесткое защемление от поворота, т. е.  $\Gamma = 0$ . Пределы изменения безразмерного управления  $u : u^- = 1.404, u^+ = 2.844$ . Время нагрева  $\bar{\tau}$  примем равным 4,7 часа. В соответствии с работой [4], это есть время быстрогодействия для данной задачи. При  $N = 3$  фазовые ограничения были выполнены всегда. Воздействия фазовых ограничений ощущается с  $n=4$ , а вполне удовлетворительная аппроксимация фазовых ограничений достигается при  $n=6$ . Таким образом вычислительный эксперимент подтверждает вывод, сделанный в работе [4] о том, что в задачах с фазовыми ограничениями учет первых двух-трех членов ряда не обеспечивает необходимую точность расчетов и делает неприемлемым использование методики работы [5].

#### ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Филоненко - Бородич М. И.* Механические теории прочности. М.: МГУ, 1961, - 92с.
- [2] *Боли Б., Уэйнер Дж.* Теория температурных напряжений. М.: Мир, 1964, 517с.
- [3] *Морозкин Н. Д.* Оптимальное управление одномерным нагревом с учетом фазовых ограничений // Математическое моделирование, 1996, т. 8, №3, с. 92-110.
- [4] *Морозкин Н. Д.* Оптимальное управление процессами нагрева с учетом фазовых ограничений. Уфа, 1997, 114 с.
- [5] *Голубь Н. Н.* Оптимальное управление симметричным нагревом массивных тел при различных фазовых ограничениях // Автоматика и телемеханика, 1967, т. 28, №4, с. 38-57

## МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ УПРАВЛЕНИЯ ПОРТФЕЛЕМ ЦЕННЫХ БУМАГ

Морозкин Ю. Н.  
(Уфа, БГУ)

Математические модели формирования портфеля ценных бумаг позволяют рассчитать оптимальное соотношение активов в портфеле, позволяющее инвестору получить большую прибыль при заранее выбранном уровне риска в краткосрочной перспективе. Однако, в современных условиях на фоне динамично изменяющейся конъюнктуры фондового рынка инвестору, для выполнения поставленных целей, необходимо не только построить оптимальный портфель ценных бумаг, но и разработать грамотную модель управления портфелем.

С помощью модели управления портфелем ценных бумаг, инвестор получает возможность оперативно корректировать сформированный портфель на основе мониторинга тех или иных экономических факторов, позволяющего оперативно оценивать ситуацию на фондовом рынке и принимать своевременные и точные решения относительно изменения стратегии инвестирования и состава портфеля. Особенно роль управления портфелем ценных бумаг возрастает в условиях финансовой неопределенности, связанной с мировым экономическим кризисом.

Для формирования оптимального портфеля ценных бумаг в работе предлагается использовать фундаментальную модель Г.Марковица [3]. Проанализировав текущее состояние фондового рынка, доходности ценных бумаг ведущих российских компаний необходимо рассчитать значения ожидаемой доходности ценных бумаг, а также их риски [1]. На основе полученных данных можно построить эффективную границу и кривые безразличия, а по точкам их касания выявить состав оптимальных портфелей для трех типов инвесторов: умеренного, агрессивного и консервативного (рис. 1).



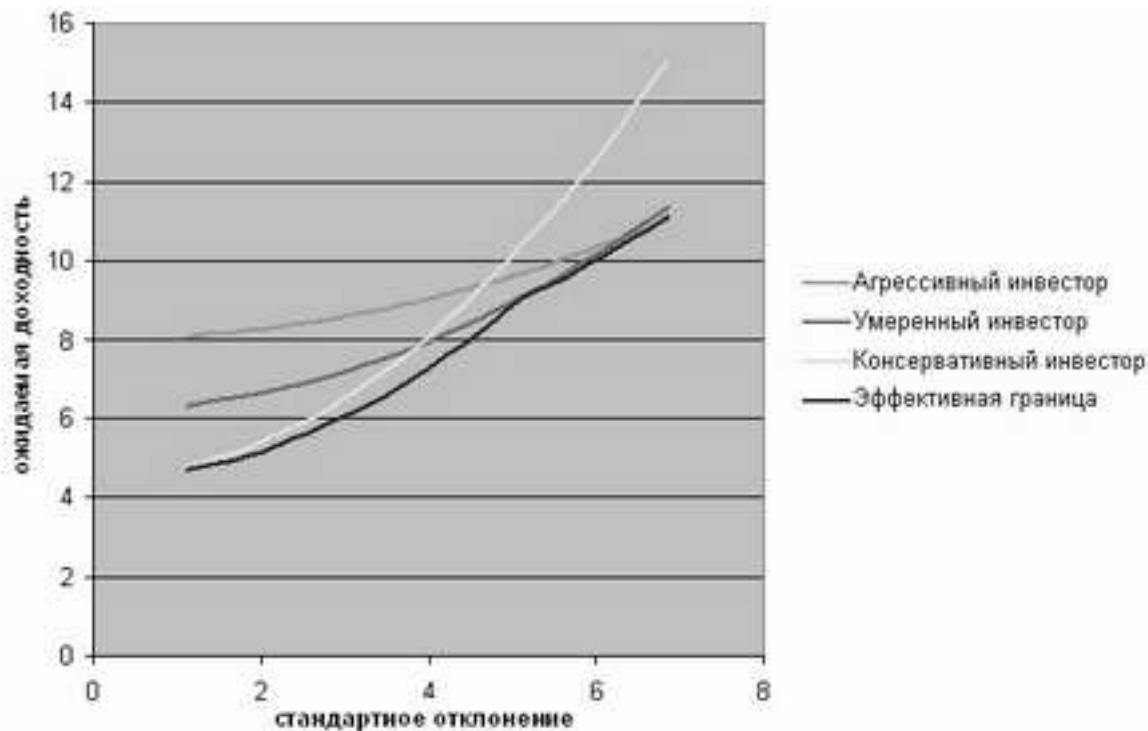


Рис. 1. Касание кривых безразличия с эффективной границей.

Для разработки стратегии управления портфелем ценных бумаг воспользуемся моделью У. Шарпа, которая основана на методах регрессионного анализа [4]. Расчет коэффициентов регрессионного уравнения позволяет вывести формулу для вычисления параметров оптимального портфеля. При этом предлагается построить модель, позволяющую выбрать верную стратегию инвестирования, используя полученные ранее портфели для трех типов инвесторов (рис.1).

Для решения поставленной задачи модифицируем модель Шарпа [2], взяв в качестве независимой переменной данные по ежемесячной доходности от операций покупки-продажи акций физическим лицам крупным коммерческим банком, а в качестве зависимых переменных регрессии - сформированные оптимальные портфели ценных бумаг для трех различных типов инвесторов: умеренного, агрессивного и консервативного:

$$r_i(t) = \alpha_i + \beta_i r_m(t) + \varepsilon_i(t), \quad (1)$$

где  
 $r_i$  – доходность i-го портфеля в момент времени t;  
 $\alpha_i$  – постоянный параметр (не зависит от времени t);  
 $\beta_i$  – параметр, показывающий чувствительность доходности i-го портфеля к изменениям доходности от операций по покупке-продаже акций банком;

$r_m(t)$  - доходность операций по покупке-продаже акций банком в момент времени  $t$ ;

$\varepsilon_i(t)$  - случайная ошибка.

Таким образом, данные о покупке и продаже ценных бумаг выступают для инвестора ориентиром, сигнализирующим об изменяющейся ситуации на фондовом рынке, что позволяет оперативно и адекватно реагировать на подобные изменения.

$$\alpha_i = E_i - \beta_i \cdot E_m \quad (2)$$

где  $E_i$  - ожидаемая доходность  $i$ -го портфеля в %;  $E_m$  - ожидаемая доходность от операции купли-продажи ценных бумаг в %.

Ожидаемое значение дохода по  $i$ -му портфелю ( $E_i$ ) рассчитаем как среднеарифметическое из отдельных возможных доходов  $R_i$  с весами  $P_{ij}$ , приписанными им вероятностями наступления:

$$E_i = \sum_{j=1}^n R_i \cdot P_{ij}, \quad (3)$$

где  $P_{ij} = 1/n$ ;  $n$  - число наблюдений.

Определим величину дисперсии по операции покупки-продажи ценных бумаг  $\sigma_m^2$ , а также значения ковариации доходности портфеля операций по покупке-продаже ценных бумаг  $\sigma_{i,m}$  и найдем величины  $\beta_i$ :

$$\beta_i = \frac{\sigma_{i,m}}{\sigma_m^2} \quad (4)$$

$$\sigma_i^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (R_i - E_i)^2}{n - 1} \quad (5)$$

**Таблица 1. Пример расчета параметров и  $\alpha_i$  и  $\beta_i$**

Наименование показателя	Портфель умеренного инвестора	Портфель агрессивного инвестора	Портфель консервативного инвестора
$\alpha_i$	-31,5547	-76,6393	4,758827
$\beta_i$	3,83705	8,242511	0,007652

$$cov(E_i; E_j) = \rho_{ij} \cdot \sigma_i \cdot \sigma_j, \quad (6)$$

где  $\rho_{ij}$  - корреляция доходностей  $i$ -го и  $j$ -го портфеля;  $\sigma_i, \sigma_j$  - стандартные отклонения доходностей  $i$ -го и  $j$ -го портфеля.

$$\varepsilon_i(t) = \sum_{i=1}^n [r_i(t) - \alpha_i + \beta_i \cdot r_m(t)] / (n - 2) \quad (7)$$

После нахождения всех коэффициентов регрессии, подставим их в формулу для оптимизации структуры портфеля:

$$E_p(r_M) = \sum_{i=1}^{M+1} W_i \alpha_i = \sum_{i=1}^M W_i \alpha_i + \sum_{i=1}^M W_i \beta_i \cdot E_m, \quad (8)$$

$E_p(r_m)$  - ожидаемая доходность операций покупки-продажи акций.

Задавая различные значения доходности, можно определять доли в совокупном оптимальном портфеле, состоящем из портфелей трех различных типов инвесторов (рис. 2).

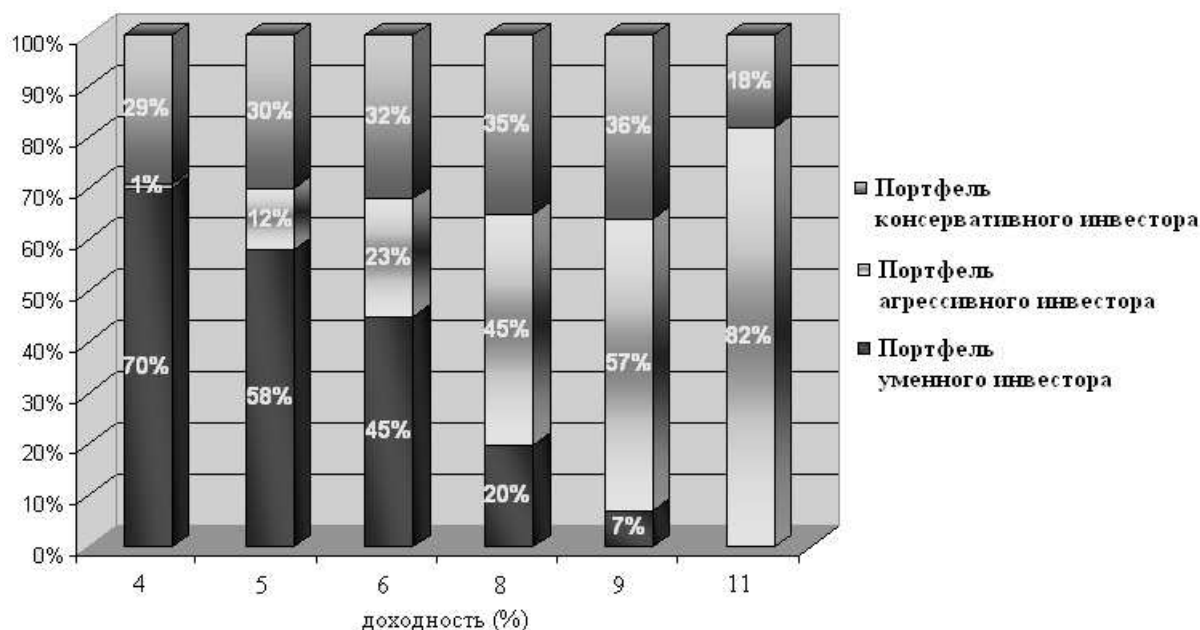


Рис. 2. Доли портфелей различных типов инвесторов при заданных параметрах доходности.

Таким образом, на основе модели Г.Марковица [3] были сформированы оптимальные портфели ценных бумаг для трех типов инвесторов. Модификация модели У.Шарпа [4], предложенная автором, позволяет выявить зависимость между доходностью по операциям покупки-продажи ценных бумаг физическим лицам и составом оптимального портфеля ценных бумаг.

Результаты работы могут использоваться инвестором для формирования собственного портфеля ценных бумаг и управления этим портфелем, в зависимости от выбранных стратегий инвестирования, предпочтений инвестора относительно выбора ценных бумаг и отношения к риску.

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Морозкин Ю. Н.* Формирование оптимального портфеля ценных бумаг коммерческого банка. Монография. Уфа: РИЦ БашГУ, 2011. – 114 С.
- [2] *Морозкин Ю. Н., Свистунова Е. С.* Управление портфелем ценных бумаг в коммерческом банке // Вестник Челябинского государственного университета. Челябинск – 2011. №6 – С. 138-142.
- [3] Рынок ценных бумаг под редакцией *В. А. Галанова, А. И. Басова* изд. 2, перер. и доп. - М.: Финансы и статистика, 2006. - 448 с.
- [4] *Шарп У., Александер Г., Бейли Дж.* Инвестиции. – М.: Инфра-М, - 2003. - 1028 с. ISBN 0-13-183344-8.

УДК

### МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ ОБТЕКАНИЯ МЯГКОЙ ОБОЛОЧКИ ВБЛИЗИ ЭКРАНА

**Подымова М.Ю.**

Уфимский государственный авиационный технический университет,  
г.Уфа, Россия

В связи с техническим применением различных надувных конструкций теоретическое изучение обтекания мягких цилиндрических оболочек приобретает практический интерес. К настоящему времени наиболее полно исследованы вопросы, относящиеся главным образом к задаче о парусе и к безотрывному обтеканию замкнутой оболочки, ограничивающей область постоянного давления.

Цель данной работы – подробно изучить процесс обтекания мягкой оболочки вблизи экрана с применением усовершенствованных численно-аналитических методов. Задача состоит в том, чтобы выявить зависимость формы оболочки от различных геометрических и физических параметров.

В настоящее время наиболее известны решения задачи при  $Q > 1$ . Новизна работы заключается в подробных исследованиях модели при значениях  $Q < 1$ . Такая модель является наиболее приближенной к практике.

В работе рассматривается процесс обтекания мягкой оболочки вблизи экрана с применением усовершенствованных численно-аналитических методов.

Рассмотрим задачу течения жидкости. Жидкость считается идеальной, несжимаемой и невесомой. Происходит обтекание мягкой оболочки с двумя закрепленными точками. Мягкая оболочка закреплена в точках А и В. В точке С происходит отрыв потока.  $P_S$  – экран.  $P_б$  – давление внутри оболочки,  $P_0$  – давление окружающей среды.

Воспользуемся уравнением Бернулли  $P + \frac{\rho V^2}{2} = P^*$ , на свободной границе  $CS'$   $P = P_0$ , и следовательно  $V = V_0$  на ней.

Пусть  $P_{об}$  – давление внутри оболочки,  $P_\infty$ ,  $V_\infty$  – давление и скорость на бесконечности,  $P^*$  – константа Бернулли,  $\rho$  – плотность жидкости.

Введем число

$$\mu = \frac{2(P_{об} - P_\infty)}{\rho V_\infty^2} = \frac{P_{об} - P_\infty}{P^* - P_\infty},$$

характеризующее степень нагружения оболочки.

На поверхности оболочки должно выполняться условие Лапласа

$$T = R(P_{об} - P) = const, \quad (1)$$

где  $R$  – радиус кривизны оболочки ( $R > 0$ , если оболочка выпукла в сторону жидкости),  $P$  – давление жидкости на оболочку,  $T$  – натяжение оболочки (или поверхностное натяжение капиллярной жидкости).

Условие (1) целесообразно записать в дифференциальной форме

$$\frac{d\theta}{ds} = \frac{\rho V_\infty^2}{2T} \left( \mu - 1 + \left( \frac{V}{V_\infty} \right)^2 \right), \quad (2)$$

где  $\theta$  – угол между вектором скорости и осью  $X$ ,  $V$  – величина скорости,  $s$  – дуговая абсцисса, отсчитываемая от точки А.

На плоскости комплексного потенциала областью соответствующей течению является полоса (рис 2.1.2,а). Для решения задачи используем параметрическую плоскость  $\chi = \sigma + i\tau$  в виде полуполосы ширины 1.

Участок оболочки СВ представляет дугу окружности радиуса  $R_0 = \frac{2T}{\rho V_\infty^2}$ . Обозначим через  $\alpha$  центральный угол дуги СВ, через  $\theta_A$ ,  $\theta_B$  и  $\theta_C$  – углы наклона касательной в точках А, В и С оболочки. Тогда длина  $L$  всей оболочки АСВ и расстояние  $l$  между точками закрепления АВ будут равны

$$L = \int_{AC} dS + \alpha R_0, \quad (3)$$

$$l = \int_{AC} \cos \theta dS + R_0 [\sin(\theta_c + \alpha) - \sin \theta_c], \quad \theta_c = q_0 + \theta_A \quad (4)$$

Здесь  $\theta(S)$  – угол наклона вектора скорости на поверхности СА. Ордината точки равна нулю, поэтому

$$\int_{AC} \sin \theta dS - R_0 [\cos(\theta_c + \alpha) - \cos \theta_c] = 0 \quad (5)$$

$$L = \varphi_0 \int_{AC} ds + \alpha r_0, \quad l = \varphi_0 \int_{AC} \cos \theta ds + r_0 [\sin(\theta_c + \alpha) - \sin \theta_c]$$

Найдем  $\alpha$  из (5) :

$$\alpha = \frac{\pi}{2} - \theta_c - \arcsin \left( \frac{\int_{AC} \sin \theta ds}{r_0} + \cos \theta_c \right) \quad (6)$$

Еще два уравнение получим как:

$$\frac{L}{l} = \frac{\int_{AC} ds + \alpha r_0}{\int_{AC} \cos \theta ds + r_0 [\sin(\theta_c + \alpha) - \sin \theta_c]},$$

$$r_0 = \frac{1}{\lim_{\sigma \rightarrow 0} \frac{d\theta}{ds}},$$

$$r_0 = \lim_{\sigma \rightarrow 0} \frac{\left| \frac{dz(0)}{d\sigma} \right|}{\operatorname{Re} \frac{dW(0)}{d\sigma}} = \frac{\left| \frac{d^2 z(0)}{d\sigma^2} \right|}{\operatorname{Re} \frac{d^2 W(0)}{d\sigma^2}},$$

Рассмотрим функцию Жуковского.

Задача сводится к определению функции Жуковского  $\omega = i \ln \frac{1}{V_0} \frac{dw}{dz} = \theta + i\tau$ , действительная часть которой равна нулю на  $PA$  и  $PS$  и удовлетворяет условию (2.1.2) на  $AC$ .

Найдем связь плоскостей  $z$  и  $\chi$ . Учитывая определение функции Жуковского,

$$dz = \frac{1}{V_0} e^{i\omega} \frac{dw}{d\chi} d\chi$$

## Функция

$$\omega_0(\chi) = i\theta_A\chi + \theta_A$$

конформно отображает полосу плоскости  $\chi$  на левую полуплоскость с разрезом.

Функция, отображающая плоскость  $\chi$  на физическую ищется в виде суммы:

$$\omega(\chi) = \omega_0(\chi) + \omega_\Delta(\chi).$$

При  $\chi \rightarrow \infty$  величина  $Re\omega_\Delta(\chi) \rightarrow 0$ .

Функция  $\omega_\Delta(\chi)$  получается следующим образом. Будем искать решение на границе  $\chi = \sigma$  в узловых точках  $\sigma_m (m=0, \dots, n)$ . Искомыми будут значения  $Re\omega_\Delta(\sigma_m) = q_m$ . При  $\sigma = \sigma_n$  примем  $Re\omega_\Delta(\sigma_n) = 0$ , поскольку  $\omega_\Delta(\sigma)$  быстро (как экспонента) убывает при  $\sigma \rightarrow \infty$ . Значения  $Re\omega_\Delta(\sigma)$  в промежуточных между узловыми точках найдем, аналогично, с помощью кубического сплайна, имеющего две непрерывные производные

$$P(\sigma) = \frac{(\sigma_{m+1} - \sigma)^2 (\sigma - \sigma_m)}{h_m^2} p_m + \frac{(\sigma - \sigma_m)^2 (\sigma - \sigma_{m+1})}{h_m^2} p_{m+1} + \\ + \frac{(\sigma_{m+1} - \sigma)^2 (2(\sigma - \sigma_m) + h_m)}{h_m^3} q_m + \frac{(\sigma - \sigma_m)^2 (2(\sigma_{m+1} - \sigma) + h_m)}{h_m^3} q_{m+1},$$

где  $h_m = \sigma_{m+1} - \sigma_m$ . Параметры  $p_m$ , которые равны значениям первой производной  $P(\sigma)$  по  $\sigma$  в узловых точках, определяются при решении системы линейных алгебраических уравнений

$$p_{m-1} + 2 \left( 1 + \frac{h_{m-1}}{h_m} \right) p_m + \frac{h_{m-1}}{h_m} p_{m+1} = 3 \frac{h_{m-1}}{h_m^2} (q_{m+1} - q_m) - 3 \frac{q_m - q_{m-1}}{h_{m-1}}.$$

Отметим, что на  $CS$  ( $Re\chi=0$ )  $Im\omega_\Delta(\chi) = 0$ . Тогда аналитически продолжим функцию  $\omega_\Delta(\chi)$  на левую часть полосы (четным образом). Поэтому в качестве краевого условия используется равенство нулю первой производной  $P(\sigma)$  при  $\sigma = \sigma_0=0$ :  $P'(\sigma_0) = p_0=0$ . При  $\sigma = \sigma_n$  также положим  $P'(\sigma_n) = p_n=0$ .

Система имеет единственное решение, для нахождения которого применяется метод прогонки.

Для восстановления функции  $\omega_\Delta(\chi)$  используем формулу Шварца с учетом того, что  $\omega_\Delta(\chi)$  аналитическая функция, имеющая, как и  $\omega_0(\chi)$  чисто

мнимые значения на прямой  $\text{Im}\chi=1$ . Применяя принцип симметрии аналитически продолжим функцию  $\omega_{\Delta}(\chi)$  на всю полосу. Тогда, получим

$$\omega_{\Delta}(\chi) = \frac{i}{2} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} \text{Re}\omega_{\Delta}(\sigma + i) \text{th} \frac{\pi}{2}(\sigma - \chi) d\sigma - \int_{-\infty}^{\infty} \text{Re}\omega_{\Delta}(\sigma) \text{cth} \frac{\pi}{2}(\sigma - \chi) d\sigma \right] = -\frac{i}{2} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} \text{Re}\omega_{\Delta}(\sigma) \text{cth} \frac{\pi}{2}(\sigma - \chi) d\sigma \right].$$

Путем аналитических вычислений получим:

$$z = - \int \frac{Q}{V_0} e^{-(\theta_A \chi - i\theta_A + sh\pi\chi \int_0^{\infty} P(\sigma) \frac{d\sigma}{ch\pi\sigma - ch\pi\chi})} \left( \frac{1}{\text{cth} \frac{\pi\chi}{2} (1 + \text{cth}^2 \frac{\pi\chi}{2})} \right) d\chi$$

В результате были получены формы оболочки при различных значениях геометрических и физических параметров. Было выявлено, что при увеличении  $\mu$  – коэффициента, характеризующего нагружение оболочки, ее форма практически перестает зависеть от безразмерного натяжения и вертикального размера оболочки: при увеличении  $\mu$  графики зависимостей выходят на константу. В дальнейшем интерес представляют исследования поведения оболочки при уменьшающемся параметре  $Q$ .

#### Список литературы

1. Житников В. П., Шерыхалина Н. М., Муксимова Р. Р. Специальные главы теории функций комплексного переменного (конформные отображения и решение задач математического моделирования). – Уфа: УГАТУ, 2010. – 129 с.
2. Житников В. П., Шерыхалина Н.М. Моделирование течений вязкой жидкости с применением методов многокомпонентного анализа. – Уфа: Гилем, 2009. – 336 с.
3. Циолковский К.Э. Сопротивление воздуха и скорый поезд. -Калуга. - 1927. - 60 с.
4. Гуревич М.И. Теория струй идеальной жидкости. - М.:Наука. - 1979. - 536 с.
5. Житников В.П. Истечение плоской струи жидкости из резервуара с гибкими стенками вблизи экрана // Прикл. матем. и мех. -1990. - Т.54. - Вып.1. - С. 34-39.



6.Житников В.П., Житникова Н.И., Комаров С.С., Шарипов Р.А. Формообразование струйных завес // Нестационарное движение тел в жидкости. - Чебоксары: Чуваш. ун-т. - 1979. - С. 42-49.

7.Житников В.П., Комаров С.С., Куреленкова Т.В. Истечение из сопла с произвольным расположением стенок вблизи экрана // Динамика сплошной среды со свободными поверхностями. - Чебоксары: Чуваш. ун-т. - 1980. - С. 70-83.

8.Житников В.П. К численному методу решения смешанной краевой задачи для ограниченных функций // Динамика сплошной среды со свободными поверхностями. - Чебоксары: Чуваш. ун-т. - 1980. -С. 61-69.

УДК 628.3+519.5

## **ПРОГРАММНЫЙ КОМПЛЕКС «ГЛОНАСС-АВТОТРЕКЕР»**

**Саегаляева Л. А., Морозкин Н. Н.**  
(Уфа, БГУ)

Основной целью работы является создание программного продукта для обработки данных, полученных через навигационное устройство (автомобильный трекер), работающего в системах GPS и Глонасс, проведения мониторинга и контроля навигационных параметров транспортных средств в режиме реального времени, анализа и отображения траекторий движения, скоростных режимов, времени стоянок, зон нарушения ПДД и т.п..

Тема актуальна. В настоящее время по поручению Президента Республики Башкортостан ведется большая работа по включению республики в федеральную целевую программу «Глобальные навигационные системы» на 2012-2020 годы. В рамках этой программы разрабатывается республиканская целевая программа по внедрению спутниковых навигационных систем.

Создание программного комплекса «ГЛОНАСС-АВТОТРЕКЕР» позволит :

- улучшить безопасность дорожного движения;
- обеспечить рациональное управление транспортными потоками;
- улучшить качество услуг пассажирских перевозок;
- сэкономить количество горюче-смазочных материалов.

Для разработки комплекса программ с целью обеспечения безопасности дорожного движения необходимо решить следующие задачи: – создание базы данных дорожных знаков;

– оснащение автомобилей GPS / ГЛОНАСС трекерами в ближайшей перспективе;

– разработка программного обеспечения, позволяющего фиксировать нарушения водителями правил дорожного движения;

– проведение экспериментов по фиксации с помощью комплекса «ГЛОНАСС - АВТОТРЕКЕР» нарушений водителями правил дорожного движения;

По данным ГИБДД в России в 2010 году 85% дорожно-транспортных происшествий произошли из-за несоблюдения водителями правил дорожного движения. Введение данной системы позволит сократить количество ДТП.

Решение задачи управления транспортными потоками предполагает разработку на основе данных комплекса «ГЛОНАСС - АВТОТРЕКЕР» системы своевременного оповещения водителей о заторах в движении автотранспорта. В результате водители с учетом поступающей им информации могли бы выбрать оптимальный путь движения своего автомобиля. Кроме того, для оптимального управления транспортными потоками на основе этих же данных можно ввести систему «умный светофор», позволяющей в зависимости от интенсивности транспортного потока изменять продолжительность запрещающего сигнала светофора.

По данным социальных опросов основные претензии, которые пассажиры предъявляют, к организациям, осуществляющим пассажирские перевозки, связаны с несоблюдением водителями расписания движения автотранспорта. Оснащение автобусов GPS/ГЛОНАСС трекерами позволит организовать сервер, способствующий отображению на географической карте места, где в данный момент времени находится транспортное средство (в данном случае автобус), а также определить предполагаемое время его прибытия на остановку. В результате пассажиры будут иметь возможность, используя ИНТЕРНЕТ, планировать время выхода к остановке на конкретный маршрут автобуса, что, соответственно, существенно улучшит качество обслуживания пассажирского потока.

Известно, что водители различных транспортных средств, принадлежащих конкретным организациям, могут без необходимости изменять маршрут следования, «сливать» топливо и тому подобное. Использование комплекса «ГЛОНАСС - АВТОТРЕКЕР» поможет предотвратить подобные нарушения. По данным компании «m2m-телематика», занимающейся навигацией,

гационным оборудованием, внедрение системы навигации сокращает расходы на ГСМ на 30%, а простой техники на 10%.

В настоящее время нами начата разработка комплекса «ГЛОНАСС - АВТОТРЕКЕР», в результате чего были определены географические координаты ряда дорожных знаков (знаков, не допускающих превышения скорости; знаков стоянка запрещена; стоянка и остановка запрещена и некоторых других). Предполагается, что будет создан специальный слой в формате «Shapefile», содержащий эти и другие дорожные знаки. В ходе исследования проведен также поиск подходящих географических карт для проведения дальнейших экспериментальных работ. Была выбрана карта республики Башкортостан, состоящая из слоев типа «Shapefile». Поясним, что «Shapefile» - это векторное изображение географических данных. Работа с «Shapefile» протекает гораздо быстрее, чем с обычными растровыми (например, Яндекс-карты) или с тайловыми (например, Дубльгис) географическими данными.

Для работы с «Shapefile» была создана компьютерная программа на языке Delphi с использованием ACTIVE X компонента MAPWINDOWGIS. Данная компьютерная программа позволяет отобразить движение автотранспорта на географической карте. В программу включены ресурсы для поддержки многопоточности (каждая машина или несколько машин представляют собой один поток), что дает возможность использовать ее в многопроцессорных системах и таким образом применять высокопроизводительные вычисления. Благодаря внедрению данного ресурса и быстроты работы с «Shapefile» возможно достижение высокой скорости обработки и отображения информации, необходимой в случае последующего массового внедрения комплекса «ГЛОНАСС - АВТОТРЕКЕР».

Данная программа обеспечивает также работу с базой данных координатно-временных параметров транспортных средств, составленной в ходе эксперимента на MySQL. Программа обрабатывает полученную от автотрекеров информацию и автоматически заносит ее в базу данных, а затем берет соответствующие позиционно-временные координаты и отображает их на карте.

В ходе разработки комплекса «ГЛОНАСС - АВТОТРЕКЕР» были проанализированы образцы навигационного оборудования различных производящих компаний. Установлены контакты с московской компанией «Автосет» и приобретено охранно-поисковое устройство «Автофон-маяк». Устройство может передавать скорость транспортного средства, географические координаты, время, курс движения, направления и т.д. Эти данные устройство передает по системе GPRS по конкретному ip-адресу на кон-

кретный порт. Отметим, что к данному устройству прилагается собственный протокол передачи данных по системе GPRS.

Для работы с протоколом нами была создана специальная компьютерная программа, позволяющая получить конкретные экспериментальные данные о местонахождении автомобилей в определенные временные промежутки. Программа открывает необходимый порт и начинает его «прослушку». Как только устройство «автофон-маяк» соединяется с портом, оно отправляет специальный пакет авторизации. Программа анализирует полученный пакет и формирует соответствующий ответ на него. После того как «автофон-маяк» получает обратный ответ, он начинает отправлять нам свои координатно-временные параметры. Программа анализирует полученные данные, расшифровывает их (данные зашифрованы в шестнадцатеричной системе и имеют специальный байт, отвечающий за расшифровку). Данная компьютерная программа способна также построить график скорости движения и провести его анализ. С помощью полученных в ходе эксперимента данных были установлены некоторые погрешности в позиционировании на местности транспортных средств, а затем были определены предполагаемые причины данных погрешностей и далее с помощью методов математической статистики предложены способы их устранения.

В дальнейшем предполагается усовершенствование программной составляющей разрабатываемого нами комплекса «ГЛОНАСС - АВТОТРЕКЕР», а также маркетинговая работа по внедрению данного комплекса в транспортную систему Республики Башкортостан.

УДК 519.632.4

## **ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ НЕСТАЦИОНАРНОЙ ЭЛЕКТРОХИМИЧЕСКОЙ ОБРАБОТКИ ПЛОСКИМ ЭЛЕКТРОД-ИНСТРУМЕНТОМ С ВЫСТУПОМ ПОЛУКРУГЛОЙ ФОРМЫ**

**Салимьянов А.Р.**

Уфимский государственный авиационный технический университет,  
г.Уфа, Россия

Полукруглый ЭИ, представляющий собой полукруг с радиусом  $R$ , заглубляется в заготовку со скоростью  $V_{et}$  под прямым углом к поверхности

(рис. 1). Начальный межэлектродный зазор (МЭЗ) равен  $S_0$ .

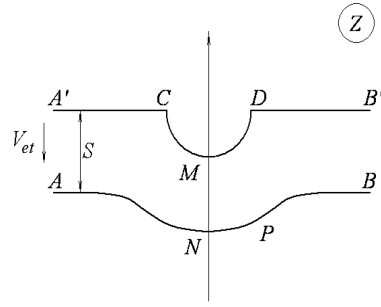


Рис. 1: Форма МЭП

В результате растворения происходит сдвиг точек анодной границы, причем каждая из ее точек движется со своей скоростью  $V_{ecm} \sim \frac{dW}{dZ}$ . Асимптотическая величина зазора  $S(t)$  изменяется и на бесконечности слева и справа приближается к стационарной величине

$$S_{st} = \frac{kk_I\eta U}{V_{et}}, \quad (1)$$

где  $k$  – электрохимическая постоянная (1.1.4);  $k_I$  – коэффициент, учитывающий средний ток за период (с учетом скважности и изменения свойств среды);  $\eta$  – выход по току [1].

Таким образом, задача сводится к определению в каждый момент времени производной  $\frac{dW}{dZ}$  в каждой точке границы анода и вычислению частной производной  $\frac{\partial Z}{\partial t}$ , определяющей сдвиг анодной границы.

Задачи удобнее решать в безразмерном виде. Сведение к безразмерным величинам для данной задачи проведем следующим образом. В качестве характерного размера  $l$  выберем величину стационарного зазора, который устанавливается при обработке полукруглым ЭИ (при обработке поверхности с горизонтальной асимптотой эта величина зазора устанавливается на бесконечности слева и справа).

Перейдем к безразмерным величинам  $z$ ,  $x$ ,  $y$ ,  $\tau$  и  $w$ , где

$$z = \frac{Z}{S_{st}}, \quad x = \frac{X}{S_{st}}, \quad y = \frac{Y}{S_{st}}, \quad \tau = \frac{V_{et}}{S_{st}}t, \quad w = \frac{W}{U}. \quad (2)$$

$$v_{et} = -\frac{dy'_A}{d\tau} = 1, \quad v_{ecm} = -\frac{dy_A}{d\tau} = \frac{1}{s(\tau)}. \quad (3)$$

При этом согласно (3) значение  $s(\tau)$  должно удовлетворять следующим условиям

$$s = s_0 - v_{et}\tau + \int_0^\tau v_{ecm}(\tau_1)d\tau_1, \quad \frac{ds}{d\tau} = -1 + \frac{1}{s(\tau)}, \quad (4)$$

В связи с эквипотенциальностью электродов форма области МЭП на плоскости комплексного потенциала представляет собой полосу (рис. 2).

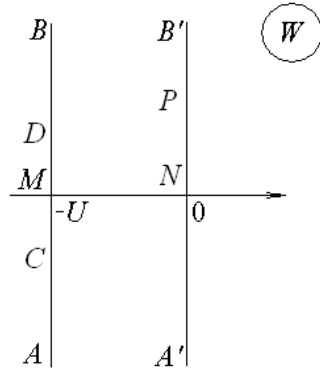


Рис. 2: Форма образа МЭП на плоскости комплексного потенциала

Выберем в качестве параметрической переменную  $\chi = \sigma + i\nu$ , область изменения которой представляет собой горизонтальную полосу единичной ширины (рис. 3). Конформное отображение параметрической плоскости  $\chi$  на плоскость комплексного потенциала определяется по формуле

$$W = Ui\chi. \text{ Тогда согласно (2)}$$

$$w = \varphi + i\psi = i\chi, \quad \frac{dw}{d\chi} = i, \quad \frac{\partial\psi}{\partial\sigma} = 1. \quad (5)$$

Представим функцию, конформно отображающую полосу плоскости  $\chi$  на область МЭП физической плоскости в неподвижной (относительно тела заготовки) системе координат в виде суммы

$$z(\chi, \tau) = -i \int_0^\tau \frac{d\tau_1}{s(\tau_1)} + s(\tau)\chi + z_a(\chi, \tau) + z_c(\xi(\chi), \tau), \quad (6)$$

где  $z_a(\chi, \tau)$  – аналитическая в области  $D_\chi$  и непрерывная в ее замыкании  $\bar{D}_\chi$  функция, определяющая отличие формы обрабатываемой поверхности от прямолинейной (при  $\chi = \sigma + i$   $Imz_a(\chi, \tau) = 0$ );  $z_c(\xi, \tau)$  – аналитическая в области  $D_\chi$  и непрерывная в ее замыкании  $\bar{D}_\chi$  функция, предназначенная для описания выпуклости на ЭИ (при  $\xi = \omega + i0$   $Imz_c(\xi, \tau) = 0$ ). Функция  $z_c(\xi, \tau)$  определена на полосе единичной ширины  $D_\xi$  (рис. 4). Связь  $\xi$  и  $\chi$

$$\chi = \frac{1}{\pi} \ln \frac{e^{\pi\xi} e^{\pi\beta} - 1}{e^{\pi\xi} - e^{\pi\beta}} + i, \quad \xi = \frac{1}{\pi} \ln \frac{1 + e^{\pi\chi} e^{\pi\beta}}{e^{\pi\chi} + e^{\pi\beta}}. \quad (7)$$

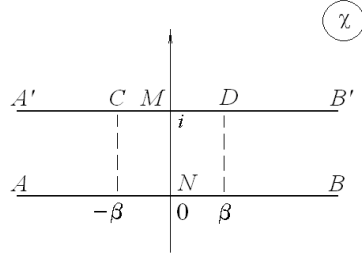


Рис. 3: Форма образа МЭП на параметрической плоскости  $\chi$

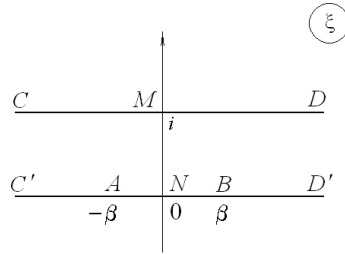


Рис. 4: Форма образа МЭП на параметрической плоскости  $\xi$

Функция  $z_a(\chi, \tau)$  определяется следующим образом. Будем искать решение на границе  $\chi = \sigma + i0$  в узловых точках  $\sigma_m (m=0, \dots, n)$ . Заданными на каждом временном шаге будут значения  $Im z_a(\sigma_m, \tau_j) = y_m$ . Примем  $Im z_a(\sigma_n, \tau) = 0$ , поскольку  $z_a(\sigma, \tau)$  быстро (как экспонента) убывает при  $\sigma \rightarrow \infty$ . Значения  $Im z_a(\sigma, \tau)$  в промежуточных между узловыми точках найдем с помощью кубического сплайна, имеющего две непрерывные производные.

Для восстановления функции  $z_a(\chi, \tau)$  используем формулу Шварца с учетом того, что  $z_a(\chi, \tau)$  аналитическая функция, имеющая чисто действительные значения на прямой  $Im \chi = 1$

$$z_a(\chi, \tau) = sh \pi \chi \int_0^{\infty} Im z_a(\sigma, \tau) \frac{d\sigma}{ch \pi \sigma - ch \pi \chi}. \quad (8)$$

$$\frac{dz_a}{d\chi}(\chi, \tau) = \int_0^{\infty} Im \frac{\partial z_a}{\partial \sigma}(\sigma, \tau) \frac{sh \pi \sigma}{ch \pi \sigma - ch \pi \chi} d\sigma. \quad (9)$$



Функция  $z_c(\xi, \tau)$  получается аналогичным образом.

$$z_c(\xi, \tau) = sh\pi\xi \int_0^{\infty} Im z_c(\omega + i, \tau) \frac{d\omega}{ch\pi\omega + ch\pi\xi}. \quad (10)$$

$$\frac{\partial z_c}{\partial \xi}(\xi, \tau) = - \int_0^{\infty} Im \frac{\partial z_c}{\partial \omega}(\omega + i, \tau) \frac{sh\pi\omega}{ch\pi\omega + ch\pi\xi} d\omega. \quad (11)$$

Нестационарная задача сводится к решению системы обыкновенных дифференциальных уравнений и решается численным методом. При этом на каждом временном шаге  $\tau_j = j\Delta\tau$ ,  $j = 1, 2, \dots$  решаются задачи конформного отображения полосы параметрической плоскости  $\chi$  на физическую плоскость  $z$ . При этом задача конформного отображения в полном объеме решается только при  $\tau=0$ , так как после каждого шага по времени значения переменных  $y_m(\tau_j)$  и  $\bar{y}_m(\tau_j)$  являются известными, и остается только подставить их в сплайн (11) и интегралы Шварца (8), (9). После этого остается решить краевую задачу: найти частную производную  $\frac{\partial z_a}{\partial \tau}(\chi, \tau_j) = \frac{\partial x_a}{\partial \tau}(\chi, \tau_j) + i \frac{\partial y_a}{\partial \tau}(\chi, \tau_j)$  как аналитическую функцию комплексного параметра  $\chi$ .

Для вычисления производных  $\frac{\partial z_a}{\partial \tau}(\chi, \tau_j)$  и  $\frac{\partial z_c}{\partial \tau}(\xi, \tau_j)$  применяется способ, аналогичный применяемому для определения конформного отображения  $z_a(\chi, \tau_j)$ .

$$\frac{\partial z_a}{\partial \tau}(\chi, \tau) = sh\pi\chi \int_0^{\infty} Q(\sigma, \tau) \frac{d\sigma}{ch\pi\sigma - ch\pi\chi}. \quad (12)$$

$$\frac{\partial z_c}{\partial \tau}(\xi, \tau) = sh\pi\xi \int_0^{\infty} R(\omega, \tau) \frac{d\omega}{ch\pi\omega + ch\pi\xi}. \quad (13)$$

На границе катода  $\xi = \omega + i$  в системе координат, связанной с катодом

$$z_{et}(\chi, \tau) = -is(\tau) + s(\tau)\chi + z_a(\chi, \tau) + z_c(\xi(\chi), \tau).$$

Значения  $p_m, q_m$  определяются методом коллокаций по краевому условию с учетом того, что  $\psi = \sigma$

$$Im \left[ \frac{\partial z}{\partial \tau}(\sigma_m) \overline{\frac{\partial z}{\partial \sigma}(\sigma_m)} \right] + 1 = 0, \quad m = 0, \dots, N-1. \quad (14)$$

На катоде краевое условие имеет вид



$$Im \left[ \frac{\partial z_{et}}{\partial \tau} (\omega_m) \overline{\frac{\partial z_{et}}{\partial \sigma} (\omega_m)} \right] = 0, \quad m = 0, \dots, N - 1. \quad (15)$$

После решения системы линейных алгебраических уравнений (14), (15) и определения частных производных  $Im \frac{\partial z_a}{\partial \tau} = q_m$ ,  $Im \frac{\partial z_c}{\partial \tau} = r_m$  производится шаг по времени по методу предиктор-корректор второго порядка точности.

Далее снова повторяется процесс вычисления  $\frac{\partial z_a}{\partial \sigma}$ ,  $\frac{\partial z_c}{\partial \sigma}$ ,  $q_m$ ,  $r_m$  и т.д.

### Литература

1. Житников В. П., Зайцев А. Н. Импульсная электрохимическая размерная обработка. М.: Машиностроение, 2008. 413 с.

УДК 517.984, 54.534

## К ВОПРОСУ СОХРАНЕНИЯ ЧАСТОТ ИЗГИБНЫХ КОЛЕБАНИЙ ТРУБОПРОВОДА

Сафина Г. Ф.

(Нефтекамск, Нефтекамский филиал БашГУ)

### Введение

Решение проблемы сохранения заданных частот колебаний трубопровода с жидкостью важно в связи с увеличением техногенных катастроф и опасностями, связанными с изношенностью основных фондов. Исследования подобной проблемы тесно связаны с прямой задачей определения влияния характеристик жидкости и закреплений трубопровода на частоты его колебаний и обратной задачей по диагностированию закреплений трубопровода.

Часто колебания трубопроводов могут приводить к дребезжанию, лишнему шуму, вибрациям, что связано с нахождением спектра частот в опасном для здоровья человека диапазоне. Для изменения частот колебаний трубопровода не всегда бывает целесообразно менять его длину или же прикреплять сосредоточенные массы. Поэтому возникает задача определения таких закреплений трубопровода, которые обеспечивали бы безопасный диапазон частот его колебаний. Именно подобному вопросу сохранения

безопасных частот колебаний трубопровода и посвящена представленная работа.

Прямые задачи по колебательным процессам в механических системах рассмотрены во многих классических учебниках, таких как [1 – 7]. Обратные задачи акустической диагностики по частотам колебаний закреплений струн, мембран, стержней, пластин, полых труб, труб с жидкостью, валов рассматривались в работах [8 – 18]. В продолжение исследований работ [6, 14, 19], в данной работе проводится исследование зависимости частот изгибных колебаний трубопровода от жесткостей закреплений и параметров жидкости, и решается задача сохранения безопасных частот.

## § 1. Влияние параметров жидкости на частоты колебаний трубопровода

Задача о свободных колебаниях узкого трубопровода, заполненной несжимаемой жидкостью сводится к дифференциальному уравнению в частных производных [6]:

$$EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + (m + \tilde{m}) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + 2 \tilde{m} V_0 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} + \tilde{m} \left( \frac{p_0}{\rho_0} + V_0^2 \right) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0. \quad (1)$$

Здесь

$$I = \frac{\pi}{4}(r^4 - r_1^4), \quad m = \pi(r^2 - r_1^2)\rho, \quad \tilde{m} = \pi r_1^2 \rho_0,$$

где  $I$  — момент инерции трубчатого сечения,  $EI$  — жесткость трубы,  $p_0$  — критическое внутреннее давление,  $m$  и  $\tilde{m}$  — массы трубы и жидкости, приходящиеся на единицу длины  $l$  трубы,  $r$  и  $r_1$  — радиусы внешнего и внутреннего поперечного сечения,  $V_0$  — скорость движения жидкости,  $\rho$  — плотность материала трубы,  $\rho_0$  — плотность жидкости,  $x$  — координата вдоль оси трубы,  $t$  — время.

Выражение для прогиба, удовлетворяющее условиям на концах трубки в виде [6]  $w = \partial^2 w / \partial x^2 = 0$ , принято в форме

$$w = \sum_{s=1}^{\infty} W_s \sin \frac{s \pi}{l} x e^{i \omega t}.$$

Решение задачи найдено приближенно по методу Бубнова-Галеркина.

В работе [14] нами рассмотрен другой подход к решению данной задачи. С помощью безразмерных переменных

$$\tilde{x} = x/l, \quad \tilde{w} = w/r, \quad \tilde{t} = t/\tau,$$

где  $\tau = l^2 \sqrt{\frac{m+\tilde{m}}{EJ}}$ , уравнение (1) сведено к дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial^4 \tilde{w}}{\partial \tilde{x}^4} + a \frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial \tilde{x}^2} + 2b \frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial \tilde{x} \partial \tilde{t}} + \frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial \tilde{t}^2} = 0. \quad (2)$$

Рассматривая выражение для прогиба в виде  $\tilde{w}(\tilde{x}, \tilde{t}) = X(\tilde{x}) e^{i\omega \tilde{t}}$ , последнее уравнение разделено относительно переменных  $\tilde{x}$  и  $\tilde{t}$ . Получено линейное дифференциальное уравнение

$$X^{(4)} + a X'' + 2b i \omega X' - \omega^2 X = 0, \quad (3)$$

линейно независимыми решениями которого являются функции

$$X_j = X_j(\tilde{x}, \omega) = e^{\lambda_j \tilde{x}}, \quad j = 1, 2, 3, 4,$$

где  $\lambda_j = \lambda_j(\omega)$  — различные корни характеристического уравнения,  $\omega$  — безразмерная собственная частота колебаний. В работе [14] рассмотрены краевые условия, учитывающие любые закрепления трубы. Здесь мы рассмотрим различные виды упругого закрепления и примем краевые условия к уравнению (3) в виде:

$$\begin{aligned} U_1(X) &= X(0) - c_1 X'''(0) = 0, \\ U_2(X) &= X''(0) = 0, \\ U_3(X) &= X(l) + c_2 X'''(l) = 0, \\ U_4(X) &= X''(l) = 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Коэффициенты  $c_1$  и  $c_2$  линейных форм  $U_1(X)$ ,  $U_3(X)$  характеризуют величины относительной жесткости на изгиб пружин, с которыми упруго закреплены соответственно левый и правый концы трубопровода.

Подставляя решения уравнения (3) в краевые условия (4), получим систему уравнений, характеристический детерминант которой примет вид:

$$D = \begin{vmatrix} 1 - c_1 \lambda_1^3 & 1 - c_1 \lambda_2^3 & 1 - c_1 \lambda_3^3 & 1 - c_1 \lambda_4^3 \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \lambda_3^2 & \lambda_4^2 \\ e^{\lambda_1} (1 + c_2 \lambda_1^3) & e^{\lambda_2} (1 + c_2 \lambda_2^3) & e^{\lambda_3} (1 + c_2 \lambda_3^3) & e^{\lambda_4} (1 + c_2 \lambda_4^3) \\ \lambda_1^2 e^{\lambda_1} & \lambda_2^2 e^{\lambda_2} & \lambda_3^2 e^{\lambda_3} & \lambda_4^2 e^{\lambda_4} \end{vmatrix}.$$

Приравняв определитель к нулю, получим следующее частотное уравнение

$$c_1 f_1(\lambda_j) - c_2 f_2(\lambda_j) - c_1 c_2 f_3(\lambda_j) + f_4(\lambda_j) = 0, \quad (5)$$

где функции  $f_k(\lambda_j)$  ( $k = 1, 2, 3, 4$ ) выражаются в виде произведений, сумм и разностей  $\lambda_j = \lambda_j(\omega)$  и показательных функций от  $\lambda_j = \lambda_j(\omega)$ . Из уравнения (5) при различных значениях параметров  $c_1$ ,  $c_2$  краевых условий (4) определяются собственные частоты изгибных колебаний трубопровода.

Исследуем влияние на значения собственных частот изгибных колебаний трубопровода параметров жидкости, таких, как внутреннее давление, скорость и плотность.

Рассмотрим зависимость собственных частот колебаний трубы от изменения внутреннего давления в трубопроводе при условии не протекания жидкости (т.е. при  $V_0 = 0$ ). В этом случае в дифференциальном уравнении (3) коэффициент  $b = 0$ . Зададим следующие параметры системы (трубопровод – жидкость):

$$\begin{aligned} r_1 &= 0,0095 \text{ м}, & r &= 0,01 \text{ м}, & l &= 5 \text{ м}, \\ \rho &= 2,7 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3, & V_0 &= 0 \text{ м/с}, & \rho_0 &= 10^3 \text{ кг/м}^3, \\ E &= 6,9 \cdot 10^9 \text{ Н/м}^2. \end{aligned} \quad (6)$$

Здесь в качестве материала трубы рассматривается металлопластик, а в качестве жидкости — вода. Найдем максимальное значение внутреннего давления  $p_0$ , которое может привести к разрыву трубы. Это значение определяется формулой [20]:

$$p_{\max} = \sigma (r - r_1)/r. \quad (7)$$

Для принятых выше параметров

$$r - r_1 = 5 \cdot 10^{-4} \text{ м}, \quad \sigma = 1800 \cdot 10^5 \text{ Н/м}^2,$$

тогда значение максимально допустимого давления равно  $p_{\max} = 90 \cdot 10^5 \text{ Н/м}^2$ .

Поставим к уравнению (3) краевые условия в виде

$$\begin{aligned} U_1(X) = X(0) - X'''(0) &= 0, & U_2(X) = X''(0) &= 0, \\ U_3(X) = X(1) + X'''(1) &= 0, & U_4(X) = X''(1) &= 0. \end{aligned} \quad (8)$$

Эти краевые условия, как было сказано, означают упругие закрепления обоих концов трубы пружинами с относительными жесткостями на изгиб, равными единице. Будем вычислять значения собственных частот колебаний трубопровода, меняя давление  $p_0$ , которое оказывает жидкость на стенки трубы, оставляя остальные параметры системы неизменными. Как изменятся при этом собственные частоты изгибных колебаний трубопровода?

Результаты решений уравнения  $\Delta(\omega_k) = 0$  при параметрах системы (6) и краевых условиях (8) рассмотрим на графиках и таблицах.

На рисунке 2.1 (а) дана зависимость первой собственной частоты колебаний трубы от внутреннего давления жидкости. Видно, что с увеличением давления, первая собственная частота  $\omega_1$  уменьшается. На рисунке 2.1 (б)

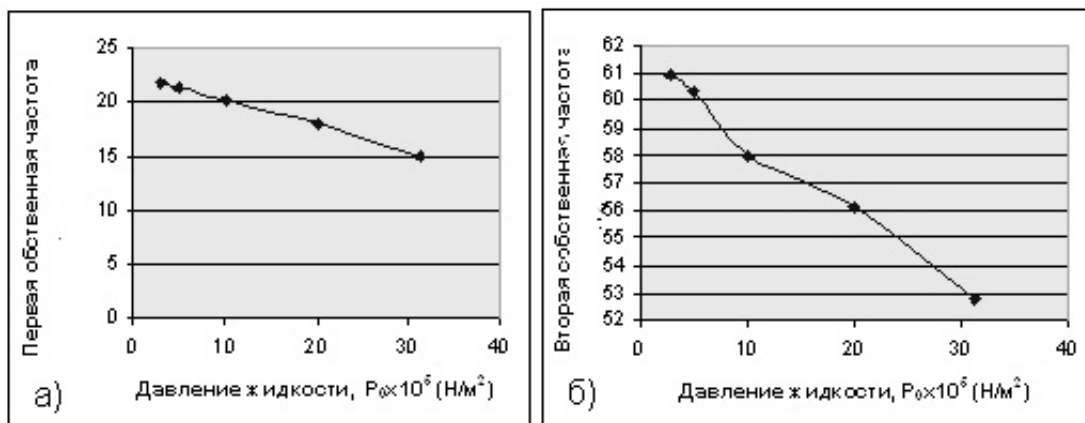


Рис. 2.1 – Зависимость значений первой (а), второй (б) собственных частот колебаний от давления жидкости для задачи (3), (8) при параметрах (6) системы (трубопровод – жидкость)

подобная зависимость рассмотрена для второй собственной частоты колебаний трубопровода.

Такое изменение касается не только первых двух собственных частот, но и всех последующих частот изгибных колебаний трубопровода. В таблице 2.1 приведены значения пяти собственных частот колебаний трубы, соответствующие увеличивающимся значениям внутреннего давления жидкости в трубе для рассматриваемой выше задачи.

Таблица 2.1 – Зависимость частот изгибных колебаний трубы от давления жидкости для задачи (3), (8) при параметрах (6) системы (трубопровод – жидкость)

	$\omega_1$	$\omega_2$	$\omega_3$	$\omega_4$	$\omega_5$
$p_0 = 2,9 \cdot 10^5 \text{ Н/м}^2$	21,82	60,92	120,08	199,00	297,67
$p_0 = 5 \cdot 10^5 \text{ Н/м}^2$	21,39	60,35	119,46	198,35	297,00
$p_0 = 10 \cdot 10^5 \text{ Н/м}^2$	20,35	58,00	118,00	198,83	295,44
$p_0 = 20 \cdot 10^5 \text{ Н/м}^2$	18,04	56,14	114,99	193,71	292,25
$p_0 = 31,3 \cdot 10^5 \text{ Н/м}^2$	15,03	52,78	111,53	190,18	288,66

Установлено, что подобная зависимость собственных частот колебаний трубы от внутреннего давления жидкости справедлива при любых параметрах системы (трубопровод – жидкость). Кроме того, увеличение внутреннего давления жидкости ведет к уменьшению частот колебаний трубы не только при упругих закреплениях трубы, но и при других видах закреплений (свободных опорах, плавающих заделках и т. п.). На рисунке 2.2 (а, б), например, показаны зависимости первой и второй собственных частот колебаний трубы от внутреннего давления жидкости при шарнирных опо-

рах трубы

$$\begin{aligned} U_1(X) = X(0) = 0, \quad U_2(X) = X''(0) = 0, \\ U_3(X) = X(1) = 0, \quad U_4(X) = X''(1) = 0 \end{aligned} \quad (9)$$

и при параметрах

$$\begin{aligned} r_1 = 0,01 \text{ м}, \quad r = 1,08 r_1, \quad l = 1 \text{ м}, \\ \rho = 7,8 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3, \quad V_0 = 0 \text{ м/с}, \quad \rho_0 = 10^3 \text{ кг/м}^3, \\ E = 2 \cdot 10^{11} \text{ Н/м}^2 \end{aligned} \quad (10)$$

системы (трубопровод – жидкость). Параметры (10) определяют в качестве материала трубы – сталь, в качестве жидкости – воду. Максимальное значение давления, которое может привести к разрыву трубы равно  $p_{\max} = 422 \cdot 10^5 \text{ Н/м}^2$  (при  $r - r_1 = 8 \cdot 10^{-4} \text{ м}$  и  $\sigma = 5700 \cdot 10^5 \text{ Н/м}^2$ ).

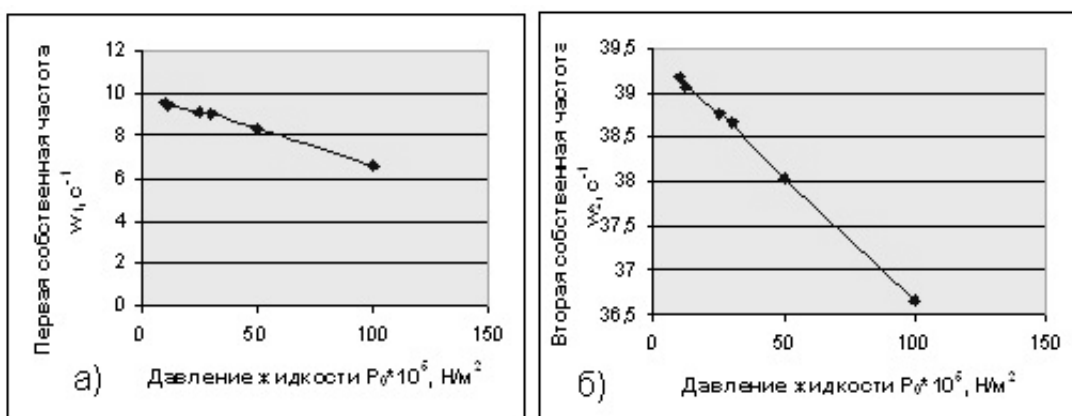


Рис. 2.2 – Зависимость значений первой (а), второй (б) собственных частот от давления жидкости для задачи (3), (9) при параметрах (10) системы (трубопровод – жидкость)

Заметим также, что обратная зависимость значений собственных частот колебаний трубы от внутреннего давления справедлива и в случае протекания жидкости по трубопроводу.

Исследуем теперь зависимость частот колебаний трубы от таких параметров жидкости, как скорость и плотность потока. Для этого рассмотрим задачу с дифференциальным уравнением (3) и краевыми условиями

$$\begin{aligned} U_1(X) = X(0) - 3X'''(0) = 0, \quad U_2(X) = X''(0) = 0, \\ U_3(X) = X(1) + 3X'''(1) = 0, \quad U_4(X) = X''(1) = 0, \end{aligned} \quad (11)$$

которые означают упругие закрепления обоих концов трубы пружинами с относительными жесткостями на изгиб, равными трем. Пусть имеются параметры (10) системы при давлении жидкости  $p_0 = 170 \cdot 10^5 \text{ Н/м}^2$ . Рассмотрим влияние скорости потока жидкости на собственные формы колебаний трубы при неизменных значениях остальных параметров системы.

Исследования прямой спектральной задачи показывают, что увеличение скорости  $V_0$  потока жидкости ведет к уменьшению значений  $\omega_k$  собственных частот изгибных колебаний цилиндрической оболочки.

Известно, что если для какой-либо собственной частоты, мнимая часть равна нулю, и одновременно действительная часть равна нулю, то это отвечает порогу дивергенции, т.е. наличию статической потери устойчивости [19]. Исследуя изменения действительной и мнимой частей собственных частот  $\omega_k$  можно также установить порог флаттера для данной упругой системы.

На рисунке 2.3 представлены значения  $Re \omega_k$  и  $Im \omega_k$  для первых трех тонов колебаний системы в зависимости от скорости потока жидкости для задачи (3), (11) при параметрах системы (6) и внутреннем давлении жидкости  $p_0 = 0.5 \times 10^3 \text{ Н/м}^2$ . На оси ординат рисунка 2.3 (а) отложены значения  $Re \omega_k$  системы (трубопровод – жидкость) при упругих закреплениях (11) в отсутствие течения жидкости  $\omega_1 = 21, 203$ ,  $\omega_2 = 61, 502$ ,  $\omega_3 = 120, 729$ .

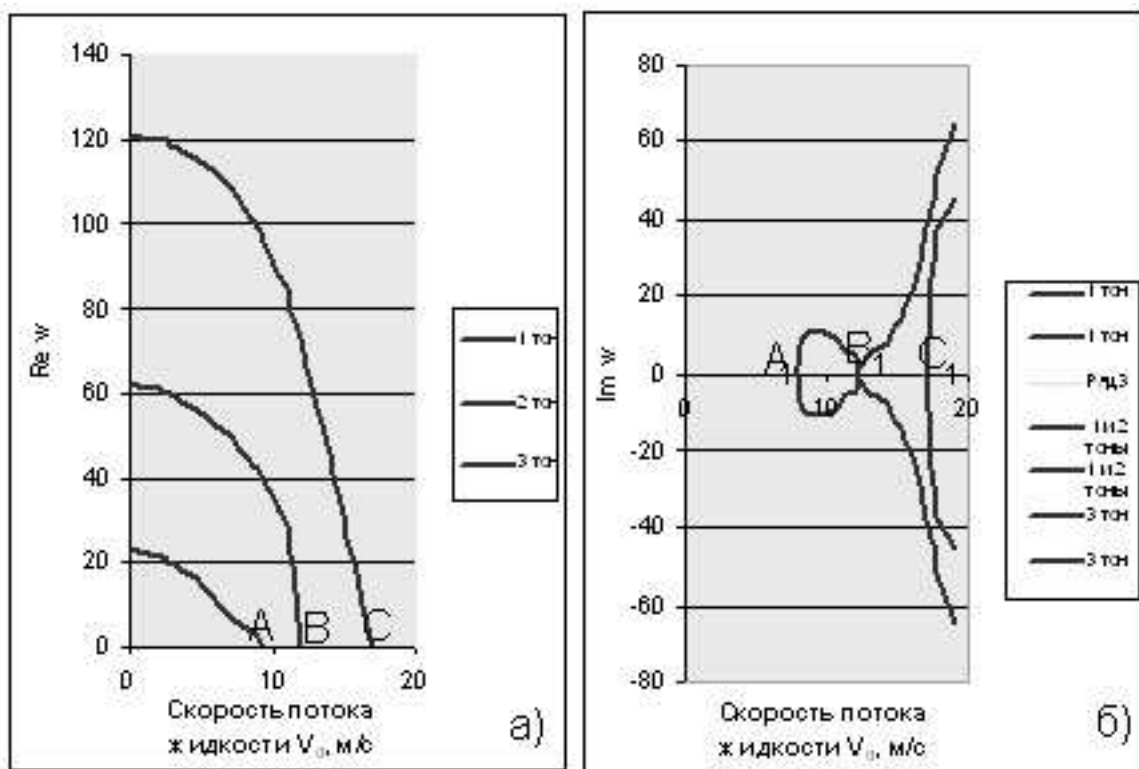


Рис. 2.3 – Частотные годографы в зависимости от скорости потока жидкости для задачи (3), (11) при параметрах (6) системы (трубопровод – жидкость)

Остановимся на частотных годографах рисунка 2.3 подробнее. Видим, что увеличение скорости  $V_0$  потока жидкости ведет к уменьшению значений собственных частот. При достижении значения скорости  $V_0 = 9, 4 \text{ м/с}$



находим, что  $\operatorname{Re} \omega_1 = 0$  (точка  $A$ ), кроме того по рисунку 2.3 (б) значение  $\operatorname{Im} \omega_1 = 0$  (точка  $A_1$ ).

Таким образом, мы имеем порог дивергенции для первой формы колебаний  $\omega_1$ , (точки  $A$  и  $A_1$ ). При дальнейшем возрастании скорости потока жидкости можно отметить на оси абсцисс точки, отвечающие порогу дивергенции для второй формы (точки  $B$  и  $B_1$ ) и третьей формы ( $C$  и  $C_1$ ) колебаний трубы.

Дальнейшее же увеличение скорости потока за точкой  $B$  приводит к флаттеру, объединяющему первую и вторую формы колебаний. Таким образом, здесь мы имеем классический флаттер для рассматриваемой задачи при увеличении скорости потока жидкости. Собственные частоты  $\omega_k$  становятся комплексно сопряженными, что и отражено на рисунке 2.3 (б).

Если, как и в работе [19], рассматривать безразмерную скорость  $U$  и считать внутреннее давление  $p_0$  жидкости равным нулю, то для трубы с заземленными концами и на свободных опорах получаются те же результаты, что и в указанной работе. А именно, для трубы с заземленными концами порог дивергенции для первого тона колебаний отвечает значению  $U = 2\pi$ , а порог флаттера соответствует величине  $U$ , чуть меньшей  $3\pi$ . Причем при отсутствии течения жидкости имеем

$$\omega_1 = 22,373, \quad \omega_2 = 61,673, \quad \omega_3 = 120,903,$$

что отвечает квадратам соответствующих собственных значений задачи для балки с заземленными концами [21].

Для трубы же, как балки с шарнирно опертыми концами порог дивергенции отвечает значениям  $U = \pi k$ , где  $k = 1, 2, 3$  и т.д., а порог флаттера соответствует величине  $U$ , несколько превышающей  $2\pi$ .

Обратные зависимости значений собственных частот колебаний трубы с жидкостью при упругих закреплениях аналогичны подобной зависимости при заземлениях и шарнирных опорах указанной выше работы с разницей в значениях порогов дивергенций и флаттера. Например, для задачи (3), (11) при параметрах (6) системы имеем: порог дивергенции для первой формы колебаний соответствует величине  $U$ , чуть большей  $2\pi$ , а порог флаттера соответствует  $U$ , несколько превышающей  $3\pi$ .

Аналогичные результаты получены в исследованиях спектра частот колебаний трубопровода при упругих закреплениях трубы пружинами с другими относительными жесткостями на изгиб.

Проведенные вычисления позволяют сделать вывод о том, что при различных видах упругих закреплений пороги дивергенции отвечают следующим значениям  $U$  безразмерной скорости:  $2\pi < U < 3\pi$  — порог



дивергенции для первой собственной частоты,  $3\pi < U < 4\pi$  — для второй собственной частоты,  $4\pi < U < 5\pi$  — для третьей собственной частоты и т.д.; порог флаттера соответствует значению  $U$ , несколько превышающей  $3\pi$ .

Проведены также исследования по влиянию скорости потока жидкости на частоты изгибных колебаний трубы при таких закреплениях, как свободные опоры, заделки. Получено, что и при этих видах закреплений увеличение скорости потока жидкости ведет к уменьшению значений форм колебаний трубы. Например, на рисунке 2.4 (а, б) приведены частотные годографы для трубы со свободными концами

$$\begin{aligned} U_1(X) = X'''(0) = 0, & \quad U_2(X) = X''(0) = 0, \\ U_3(X) = X'''(1) = 0, & \quad U_4(X) = X''(1) = 0 \end{aligned} \quad (12)$$

при параметрах (6) системы (оболочка – жидкость).

Здесь точками  $A$  и  $A_1$ ,  $B$  и  $B_1$ ,  $C$  и  $C_1$  отмечены пороги дивергенции соответственно для первой, второй, третьей форм колебаний. Этим же порогам отвечают соответственно следующие значения скорости потока жидкости  $V_0 = 4,1 \text{ м/с}$ ,  $V_0 = 7,5 \text{ м/с}$ ,  $V_0 = 11,3 \text{ м/с}$ . Флаттеру, объединяющему первую и вторую формы колебаний отвечает скорость  $V_0 = 7,5 \text{ м/с}$ .

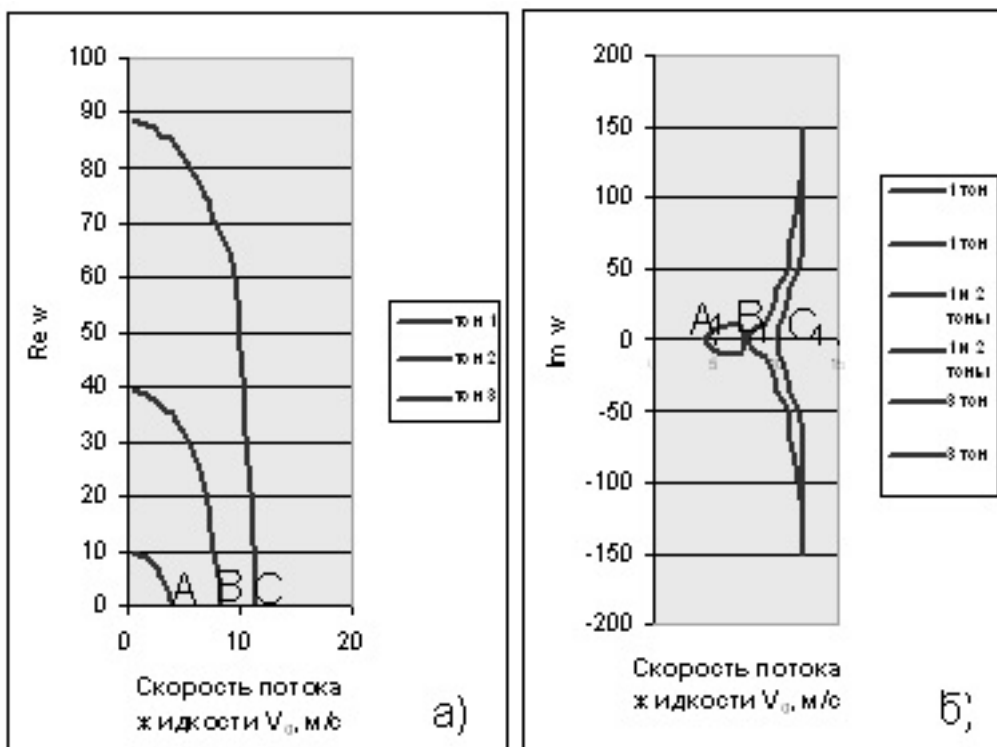


Рис. 2.4 – Частотные годографы в зависимости от скорости потока жидкости для задачи (3), (12) при параметрах (6) системы (оболочка – жидкость)

Таким образом, увеличение скорости потока жидкости при любых закреплении концов трубопровода ведет к уменьшению собственных частот его изгибных колебаний.

Исследуем теперь влияние на частоты колебаний трубы плотности жидкости. Рассмотрим задачу (3), (8) при следующих параметрах системы

$$\begin{aligned} r_1 = 0,0095 \text{ м}, \quad r = 0,01 \text{ м}, \quad \rho = 7,8 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3, \\ V_0 = 5 \text{ м/с}, \quad E = 2 \cdot 10^{11} \text{ Н/м}^2, \quad l = 5 \text{ м}, \\ \rho_0 = 1,78 \cdot 10^5 \text{ Н/м}^2. \end{aligned} \quad (13)$$

Будем вычислять собственные значения частот колебаний при увеличении плотности жидкости и неизменных значениях остальных параметров системы. Результаты, полученные по решениям прямых задач, продемонстрируем снова на графиках и таблицах. Для указанной выше задачи на рисунке 2.5 (а) показан график зависимости значений первой собственной частоты  $\omega_1$  колебаний трубопровода от различных значений  $\rho_0$  плотности жидкости.

По графику видно, что при увеличении плотности жидкости первая собственная частота колебаний трубопровода уменьшается. Вычисления показывают, что увеличение плотности жидкости ведет к уменьшению не только первой собственной частоты колебаний трубопровода, но и всех значений из спектра частот его колебаний.

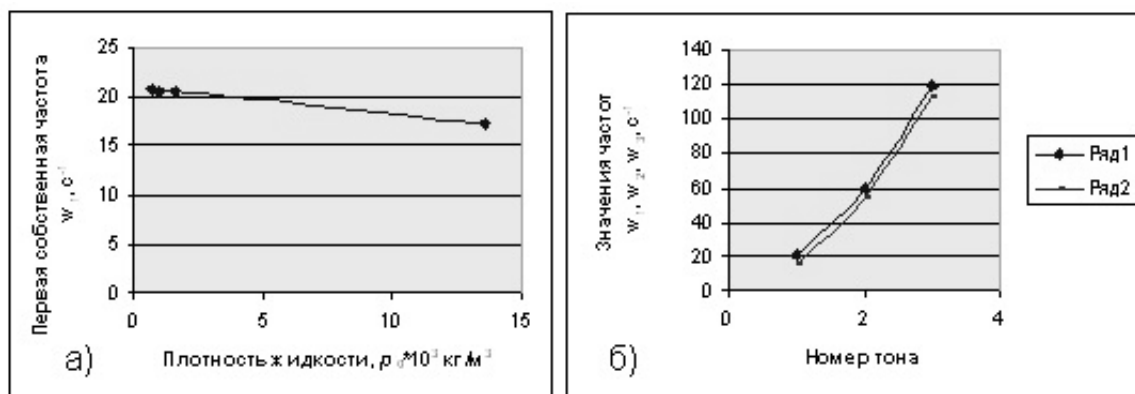


Рис. 2.5 – Зависимость первой собственной частоты колебаний трубы от плотности жидкости (а) и изменение значений первых трех тонов колебаний трубы при различных значениях плотности жидкости (б)

На рисунке 2.5 (б), например, рассмотрен график изменения значений первых трех собственных частот колебаний трубы в зависимости от плотности потока жидкости. Здесь ряду 1 соответствуют значения первых трех частот при  $\rho_0 = 0,71 \times 10^3 \text{ кг/м}^3$ , ряду 2 — при  $\rho_0 = 13,6 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$ .

Если же увеличивать одновременно скорость потока жидкости и плотность, то темп падения частот колебаний будет резче. Например, для задачи (3), (8) при параметрах системы (13) будем увеличивать не только плотность жидкости, но и ее скорость. Результаты вычислений прямых задач представлены в таблице 2.2.

Таблица 2.2 – Зависимость частот колебаний от скорости и плотности потока жидкости для задачи (3), (8) при параметрах (13) системы

	$\omega_1$	$\omega_2$	$\omega_3$
$\rho_0 = 0,71 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3, V_0 = 1 \text{ м/с}$	20,92	59,94	119,05
$\rho_0 = 1,59 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3, V_0 = 10 \text{ м/с}$	18,82	57,56	116,89

Таким образом, установлено, как на значения собственных частот колебаний трубопровода с жидкостью влияют меняющиеся параметры потока жидкости. По решению прямой спектральной задачи (3), (9) при различных параметрах системы (трубопровод – жидкость) установлено, что на значения собственных частот колебаний трубопровода с жидкостью влияют меняющиеся параметры потока жидкости. Результаты вычислений показывают, что при увеличении как скорости потока жидкости, так и ее плотности значения собственных частот колебаний трубопровода уменьшаются.

Проведенное исследование важно для решения проблемы сохранения заданного диапазона частот колебаний трубы при изменениях параметров жидкости.

## § 2. Задача сохранения заданных частот колебаний

Обратная задача диагностирования закреплений трубопровода по спектру частот его колебаний, впервые поставлена и решена в работе [14]. В ней рассмотрен общий метод восстановления любых краевых условий задачи по 9-ти значениям из спектра частот колебаний трубопровода с непротекающей жидкостью. В продолжение исследований поставим к прямой задаче задачу сохранения частот: по известным параметрам системы (трубопровод-жидкость) и собственным частотам свободных изгибных колебаний трубы найти параметры ее упругих закреплений, сохраняющие заданные частоты колебаний. В терминах задачи (3), (4) имеем: по известным ненулевым частотам  $\omega_j$ , а значит значениям  $\lambda_j$  уравнения (3), найти неизвестные коэффициенты  $c_1, c_2$  краевых условий (4), сохраняющих заданный диапазон частот колебаний трубопровода.

Пусть известны значения двух собственных частот  $\omega_1$  и  $\omega_2$  спектральной задачи (3), (4) и соответствующие им значения  $\lambda_j^1$  и  $\lambda_j^2$ . Тогда равенства (5) представляют собой систему двух уравнений от двух неизвестных  $c_1, c_2$ :

$$\begin{aligned} c_1 f_1(\lambda_j^1) - c_2 f_2(\lambda_j^1) - c_1 c_2 f_3(\lambda_j^1) + f_4(\lambda_j^1) &= 0, \\ c_1 f_1(\lambda_j^2) - c_2 f_2(\lambda_j^2) - c_1 c_2 f_3(\lambda_j^2) + f_4(\lambda_j^2) &= 0, \end{aligned} \quad (14)$$

$$(j = 1, 2, 3, 4).$$

Преобразуя последнюю систему уравнений, получим следующие аналитические формулы для коэффициентов относительной жесткости на изгиб:

$$c_1 = \frac{-N \pm \sqrt{N^2 - 4MR}}{2M}, \quad c_2 = \frac{f_4(\lambda_j^1) + c_1 f_1(\lambda_j^1)}{f_2(\lambda_j^1) + c_1 f_3(\lambda_j^1)}, \quad (15)$$

в которых

$$\begin{aligned} M &= f_1(\lambda_j^2) f_3(\lambda_j^1) - f_3(\lambda_j^2) f_1(\lambda_j^1); \\ N &= f_1(\lambda_j^2) f_2(\lambda_j^1) - f_2(\lambda_j^2) f_1(\lambda_j^1) - f_3(\lambda_j^2) f_4(\lambda_j^1) + f_4(\lambda_j^2) f_2(\lambda_j^1); \\ K &= f_4(\lambda_j^2) f_2(\lambda_j^1) - f_2(\lambda_j^2) f_4(\lambda_j^1). \end{aligned} \quad (16)$$

Таким образом, справедлива **теорема**: если известны две ненулевые собственные частоты  $\omega_1$  и  $\omega_2$  задачи (3), (4), а значит, соответствующие им значения  $\lambda_j^1$  и  $\lambda_j^2$ , ранг матрицы системы (14) равен двум, то коэффициенты  $c_1, c_2$  краевых условий (4), сохраняющие заданные частоты колебаний трубы при изменении параметров жидкости определяются по формулам (15), (16).

Итак, известны частоты колебаний трубопровода. Необходимо, изменив параметры жидкости, сохранить прежние частоты его колебаний. Эту задачу предлагаем решить с помощью необходимых изменений в закреплениях трубы с жидкостью. Рассмотрим использование найденного алгоритма на конкретном примере. Дана задача (3), (4) при параметрах при параметрах

$$\begin{aligned} r_1 &= 0,068\text{м}, \quad r = 0,07\text{м}, \quad l = 6\text{м}, \\ \rho &= 7,8 \cdot 10^3 \text{кг/м}^3, \quad V_0 = 0\text{м/с}, \\ \rho_0 &= 0,68 \cdot 10^3 \text{кг/м}^3, \quad E = 2 \cdot 10^{11} \text{Н/м}^2. \end{aligned} \quad (17)$$

системы (трубопровод-жидкость). Для принятых параметров

$$r - r_1 = 20 \cdot 10^{-4} \text{м}; \quad \sigma = 5700 \cdot 10^5 \text{Н/м}^2$$

и значение максимально допустимого давления, вычисленного по формуле [12]  $p_0 = \sigma(r - r_1)/r$  равно  $p_0 = 163 \cdot 10^5 \text{Н/м}^2$ .

В ходе решения прямой задачи (3), (4) с коэффициентами относительной жесткости  $c_1 = 9,5$ ,  $c_2 = 9,5$  и внутреннем давлении  $p_0 = 55,268311 \cdot 10^5 \text{ Н/м}^2$  получены собственные частоты колебаний трубы:

$$\omega_1 = 20,33; \quad \omega_2 = 58,99; \quad \omega_3 = 118 \quad \text{и т.д.} \quad (18)$$

Пусть требуется уменьшить внутреннее давление в трубопроводе до  $p_0 = 55,268271 \cdot 10^5 \text{ Н/м}^2$ . Тогда для сохранения спектра частот (18), необходимо по формулам (15), (16), например, увеличить жесткость закрепления на левом конце трубы с  $c_1 = 9,5$  до  $c_1 = 18,82$ , а на правом конце трубы уменьшить жесткость закрепления с  $c_2 = 9,5$  до  $c_2 = 6,35$ . Такой же спектр частот при изменении давления жидкости сохранится и при других жесткостях на изгиб упругих закреплений трубы. В таблице 3.1 показаны, например, соответствующие значения коэффициентов упругих закреплений при изгибных колебаниях трубопровода, обеспечивающие частоты колебаний трубы для рассмотренной выше задачи.

Таблица 3.1 – Значения коэффициентов  $c_1$ ,  $c_2$ , обеспечивающие заданные частоты колебаний для задачи (3), (4) при параметрах (17) системы (труба-жидкость) при изменении внутреннего давления системы (трубопровод-жидкость)

$\omega_i$	$p_0, \times 10^5 \text{ Н/м}^2$	$c_1$	$c_2$
$\omega_1 = 20,33$ $\omega_2 = 58,99$ $\omega_3 = 118,01$ и т.д.	55,26831	9,5	9,5
$\omega_1 = 20,33$ $\omega_2 = 58,99$ $\omega_3 = 118,01$ и т.д.	55,26823	18,8	6,35
$\omega_1 = 20,33$ $\omega_2 = 58,99$ $\omega_3 = 118,01$ и т.д.	55,268212	32,1	4,25

Проведенные исследования показывают, что при уменьшении внутреннего давления для сохранения заданного диапазона частот колебаний трубы с жидкостью, необходимо увеличить жесткость закрепления на левом конце и уменьшить жесткость закрепления на правом конце трубы. Формулы (15), (16) для коэффициентов относительной жесткости упругих закреплений трубы позволяют диагностировать такие закрепления трубопровода, которые позволяют сохранять частоты его колебаний неизменными при изменении давления жидкости.

## Заключение

По решению прямой задачи исследовано влияние на спектр частот колебаний трубы давления жидкости, и показано, что увеличение давления жидкости на стенки трубы ведет к уменьшению собственных частот изгибных колебаний трубопровода. Такие изменения касаются колебаний трубы при любых ее закреплениях.

Разработанный метод решения задачи сохранения спектра частот позволяют обеспечивать заданный безопасный диапазон частот колебаний трубопровода при изменении давления жидкости. Полученные формулы позволяют определять значения коэффициентов относительной жесткости пружин, с которыми упруго закреплены края трубопровода, обеспечивающие заданный спектр частот его колебаний.

Построенный алгоритм решения задачи сохранения спектра частот при упругих закреплениях трубы может быть применен для диагностики недоступных для визуального осмотра закреплений элементов механических систем и строительных конструкций, составляющими которых являются трубопроводы с жидкостью.

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Артоболевский И. И., Бобровницкий Ю. И., Генкин М. Д.* Введение в акустическую динамику машин. М.: Наука, 1979.
- [2] *Павлов Б. В.* Акустическая диагностика механизмов. М.: Машиностроение, 1971.
- [3] *Генкин М. Д., Соколова А.Г.* Виброакустическая диагностика машин и механизмов. М.: Машиностроение, 1987.
- [4] *Вибрации в технике: Справочник. В 6-ти т. / Ред. совет: В. Н. Челомей (пред.). М.: Машиностроение, 1978. Т. 1. Колебания линейных систем / Под ред. В. В. Болотина. 1978.*
- [5] *Агеносов Л. Г., Саченков А.В.* Устойчивость и свободные колебания тонких цилиндрических оболочек кругового сечения при разных краевых условиях. Сб. "Исследования по теории пластин и оболочек". Вып.2. Изд. Казанск. гос. ун-та, 1964.
- [6] *Ильгамов М.А.* Колебания упругих оболочек, содержащих жидкость и газ. – М: Наука, 1969.
- [7] *Гонткевич В. С.* Собственные колебания пластин и оболочек. Киев: Наукова думка, 1964, –288с.

- [8] *Ахтямов А. М.* Об определении краевого условия по конечному набору собственных значений // Дифференциальные уравнения. 1999. Т. 35. № 8. С. 1127–1128.
- [9] *Ахатов И. Ш., Ахтямов А. М.* Определение вида закрепления стержня по собственным частотам его изгибных колебаний // Прикладная математика и механика. 2001. Т. 65. Вып. 2. С. 290–298.
- [10] *Ахтямов А. М., Сафина Г. Ф.* Диагностирование относительной жесткости упругих краевых ребер цилиндрической оболочки. // Техническая акустика, №19, 2004.
- [11] *Сафина Г. Ф.* Диагностирование относительной жесткости подкрепленных цилиндрических оболочек по собственным частотам их асимметричных колебаний // Контроль. Диагностика. 2005. № 12. – С.55–59.
- [12] *Сафина Г. Ф.* Определение закреплений трубопровода с протекающей по нему жидкостью. Обзорение прикладной и промышленной математики". 2005. Т.12. Вып.4. – С. 1079–1080.
- [13] *Сафина Г. Ф.* Диагностирование закреплений трубопровода с жидкостью // Приборы и системы. Управление. Контроль. Диагностика. 2006. № 3. – С.59-60.
- [14] *Ахтямов А. М., Сафина Г. Ф.* Определение виброзащитного закрепления трубопровода // Прикладная механика и техническая физика. 2008. Т. 49. № 1. С. 139–147.
- [15] *Ахтямов А. М.* Теория идентификации краевых условий. Уфа: Гилем, 2008. 300 с.
- [16] *Сафина Г. Ф.* Исследования прямой и обратной задач по поперечным колебаниям вала на опорах. // Дефектоскопия. – М.: №4, 2010. – С.24-30.
- [17] *Сафина Г. Ф.* Моделирование в диагностировании закреплений цилиндрических оболочек. Уфа: БашГУ, 2010. - 164 с. ISBN 978-5-7477-2483-9.
- [18] *Сафина Г. Ф.* Исследования по крутильным колебаниям вала с дисками // Дефектоскопия. – 2011. М.:. №3, – С 51-65.
- [19] *Вольмир А. С.* Оболочки в потоке жидкости и газа. Задачи гидроупругости. – М.: Наука – 1979.



- [20] Биргер И.А., Мавлютов Р.Р. Сопротивление материалов. – М.: Наука – 1986. – 560 с.
- [21] Прочность, устойчивость, колебания. Справочник в 3-х т. / Под ред. И. А. Биргера и Я. Г. Пановко. – М.: Машиностроение – 1968. Т. 1. 831 с.

УДК 532.5; 519.6

## ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ГРАФИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОРОВ ДЛЯ РЕШЕНИЯ БОЛЬШИХ ЗАДАЧ МЕТОДОМ ГРАНИЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ СТОКСА

Солнышкина О. А., Иткулова Ю. А.

(г. Уфа, Центр «Микро- и наномасштабная динамика дисперсных систем», БашГУ, г. Уфа, ИМех УНЦ РАН)

### Введение

Детальное исследование динамики дисперсных систем является актуальной проблемой современной науки и техники. Так, например, эмульсии широко используются в нефтяной промышленности. В то же время на сегодняшний день нет однозначных представлений об их поведении при движении в пористых средах или микроканалах сложной геометрии, которые моделируют пористый пласт. Недавно был обнаружен эффект динамического запираания водонефтяных эмульсий в микроканалах, но его механизм до сих пор не изучен. Рассматриваемая в данной работе задача является одним из этапов численного исследования этого эффекта.

### § 1. Постановка задачи и численный метод

Рассмотрим течение некоторого объема  $V$  вязкой несжимаемой жидкости с вязкостью  $\mu$  в цилиндрическом канале с гладкой поверхностью  $S$ . Предположим, что движение жидкости описывается уравнениями Стокса:

$$\frac{1}{\mu} \nabla p = \nabla^2 \mathbf{u}, \quad \nabla \cdot \mathbf{u} = 0. \quad (1)$$



Пусть поверхность канала разбивается на два подмножества:  $S = S^{(s)} \cup S^{(r)}$ , где  $S^{(r)}$  - боковая поверхность и  $S^{(s)}$  - входное и выходное сечения. Граничные условия имеют вид:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{u}_a(\mathbf{x}), \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \sigma(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}_a(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in S^{(s)}, \\ \mathbf{u}(\mathbf{x}) = 0, \mathbf{x} \in S^{(r)}. \end{aligned} \quad (2)$$

Задача решалась численно методом граничных элементов [2].

Для уравнений Стокса (1) с учётом заданных граничных условий (2) интегральные уравнения имеют вид [1], [2]:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(\mathbf{y}) = \frac{1}{\mu} \int_S \mathbf{G}(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \cdot \mathbf{f}(\mathbf{x}) dS(\mathbf{x}) + \int_{S^{(s)}} \mathbf{K}(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \cdot \mathbf{u}_a(\mathbf{x}) dS(\mathbf{x}), \mathbf{y} \in V \\ \frac{1}{\mu} \int_S \mathbf{G}(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \cdot \mathbf{f}(\mathbf{x}) dS(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \mathbf{u}_a(\mathbf{y}) - \int_{S^{(s)}} \mathbf{K}(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \cdot \mathbf{u}_a(\mathbf{x}) dS(\mathbf{x}), \mathbf{y} \in S \end{aligned} \quad (3)$$

где  $\mathbf{G}$  — фундаментальное решение уравнения Стокса,  $\mathbf{T}$  — тензор напряжений:

$$\begin{aligned} \mathbf{G}(\mathbf{y}, \mathbf{x}) = \frac{1}{8\pi} \left( \frac{\mathbf{I}}{r} + \frac{\mathbf{r}\mathbf{r}}{r^3} \right), \quad \mathbf{T}(\mathbf{y}, \mathbf{x}) = -\frac{3}{4\pi} \frac{\mathbf{r}\mathbf{r}\mathbf{r}}{r^5}, \\ \mathbf{K}(\mathbf{y}, \mathbf{x}) = \mathbf{T}(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{r} = \mathbf{y} - \mathbf{x}, \quad r = |\mathbf{r}|. \end{aligned} \quad (4)$$

Граница канала  $S$  разбивается на  $N$  узлов  $\mathbf{x}_i$ , по которым строим квадратурные формулы граничных интегралов. Далее используя метод коллокаций в центрах элементов дискретизации, последнее уравнение в (3) можно записать:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mu} \sum_{i=1}^N \mathbf{I}_{ji}^G \cdot \mathbf{f}_i = \frac{1}{2} \mathbf{u}_a - \sum_{i=1}^N \mathbf{I}_{ji}^K \cdot \mathbf{u}_a, \quad j = 1, \dots, N \\ \frac{1}{\mu} \mathbf{G} \cdot \mathbf{f} = \frac{1}{2} \mathbf{u}_a - \mathbf{K} \cdot \mathbf{u}_a. \end{aligned} \quad (5)$$

Сингулярные интегралы рассчитывались с помощью известных тождеств для тестовых решений. Таким образом, получаем СЛАУ, решая которую находим компоненты нормального напряжения на границе области.

## § 2. Результаты численного моделирования

В среде Matlab разработан программный продукт, моделирующий течение вязкой жидкости в цилиндрическом канале.

Сравнение численного решения с аналитическим проводилось в несколько этапов:

1. Компоненты нормального напряжения на жесткой границе области, полученные численно (ВЕМ), сравнивались с аналитическими значениями (Analyt). В результате, относительная погрешность составила 0,7 %.

2. Компоненты скорости внутри канала, найденные из первого уравнения (4), используя для вычисления правой части численные значения  $\mathbf{f}(\mathbf{x})$  и точные значения  $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ , сравниваются с аналитическими решениями.
3. Компоненты скорости внутри канала, найденные из первого уравнения (4), используя для вычисления правой части точные значения  $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ ,  $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ , сравниваются с аналитическими решениями.

Результаты сравнения показывают хорошее приближение численных расчетов к аналитическим с некоторой погрешностью порядка 0.8-1.2 %. Данные результаты получены для модификация программы, которая даёт возможность просчитать течение для  $N < 10000$ .

### § 3. Результаты использования GPU

При трехмерном численном моделировании физических процессов для областей со сложной геометрией, например течение эмульсии в микроканалах переменного сечения, необходимо построение сеток с большим количеством узлов. Решение подобных многомасштабных задач требует разработки и применения эффективных численных методов. Для сеток маленького размера при решении СЛАУ (5) применялись прямые методы, но при увеличении масштаба задачи их использование затрудняется. Это связано с тем, что размер необходимой памяти пропорционален квадрату числа узлов сетки, также при их увеличении возрастает время вычислений. При использовании прямых методов, начиная с некоторого количества узлов, возникает нехватка памяти вычислительной системы.

Эту проблему можно решить используя итерационные методы решения, которые существенно снижают затраты памяти и времени. Для эффективной программной реализации этих методов необходимо решить две проблемы: разработать подпрограмму, быстро умножающую матрицу на вектор и ускорить сходимость метода с помощью предобуславливателя.

В рамках данной работы мы подробнее остановимся на первом пункте. Для решения проблем, связанных с использованием памяти, в среде Matlab был разработан программный модуль умножения матрицы на вектор без хранения матрицы в памяти, который используется в GMRES при решении СЛАУ (5). Для ускорения расчетов модуль был распараллелен на центральном многоядерном процессоре (CPU) средствами Matlab Parallel Computing Toolbox.

На рисунке (1) показано сравнение времени выполнения модуля матрично-векторного произведения на одном ядре CPU (fly MV product),

на 8 ядрах CPU (parallel fly MV product) и встроенной функции умножения матрицы на вектор Matlab (Matlab MV product).

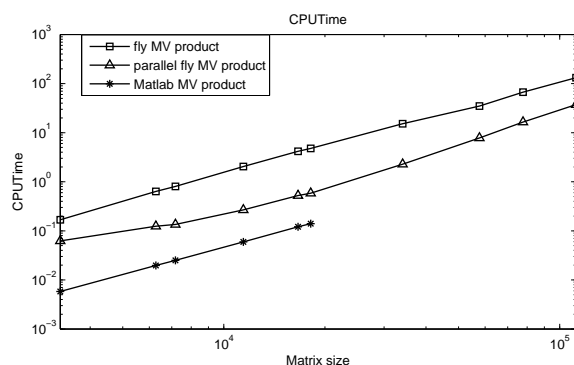


Рис. 1: Время вычисления матрично-векторного произведения

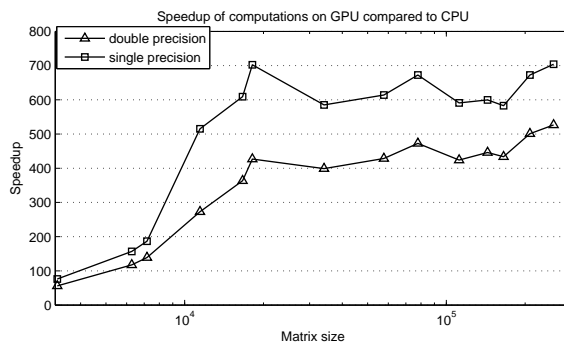


Рис. 2: Ускорение расчетов в зависимости от размера матрицы

Применение модуля матрично-векторного произведения позволяет решить проблему ограничения по памяти вычислительной системы, но время исполнения необходимо уменьшить. Для этих целей модуль был распараллелен с помощью технологии CUDA на графических процессорах (GPU) [4].

На рисунке (2) приведено ускорение расчета на GPU по сравнению с CPU для операций с двойной и одинарной точностью. При расчетах на графической карте NVIDIA Tesla C2050 для количества узлов сетки  $N$  от 1 000 до 100 000 для уравнений Стокса получено ускорение до 520 раз для операций с двойной точностью и до 700 раз для операций с одинарной точностью.

При проведении тестовых расчетов достигнута следующая производительность: до 220 Gflops для операций с двойной точностью и 300 Gflops для операций с одинарной точностью (рисунок (3)). Учитывая что пиковая производительность графической карты Tesla C2050 для чисел с плавающей

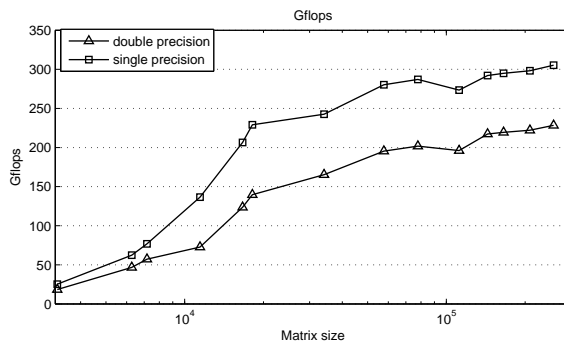


Рис. 3: Производительность в зависимости от размера матрицы

точкой двойной точности составляет 515 Gflops, одинарной точности — 1,03 Tflops, получены хорошие результаты.

Все расчеты проводились на вычислительной системе с CPU Intel Xeon 5660, 2.8GHz, GPU NVIDIA Tesla C2050. Результаты тестов на графической карте NVIDIA Tesla C2050 показали возможность решения граничных задач для уравнений Стокса размером до 100 000 элементов на одной рабочей станции.

#### ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Pozrikidis C.* Boundary Integral and Singularity Methods for Linearized Viscous Flow. 1992(Cambridge University Press, Cambridge, MA).
- [2] *Бреббия К.* Методы граничных элементов. Пер. с англ. М.: Мир, 1987. 524 с.
- [3] *Saad Y.* Iterative Methods for Sparse Linear System. 2000, SIAM.
- [4] *NVIDIA Corporation.* NVIDIA CUDA Compute Unified Device Architecture Programming Guide. Version 3.2.2010.

# О ПРОДОЛЖЕНИИ ОДНОГО СПЕЦИАЛЬНОГО КЛАССА ФУНКЦИЙ КАК СУБГАРМОНИЧЕСКИХ НА ВСЮ КОМПЛЕКСНУЮ ПЛОСКОСТЬ

Талипова Г. Р.

(Уфа, БашГУ)

## Введение

Как обычно,  $\mathbb{N}$ ,  $\mathbb{R}$ ,  $\mathbb{C}$  обозначают одновременно множества натуральных, вещественных, комплексных чисел и их геометрические интерпретации;  $\mathbb{N}_0 := \{0\} \cup \mathbb{N}$ . Кроме того,  $\mathbb{C}_+ := \{z \in \mathbb{C} : \Re z > 0\}$  и  $\mathbb{C}_- := \{z \in \mathbb{C} : \Re z < 0\}$  — соответственно открытые верхняя и нижняя полуплоскости комплексной плоскости  $\mathbb{C}$ , а  $\mathbb{C}_\pm := \mathbb{C}_- \cup \mathbb{C}_+$ ;  $\mathbb{C}_\infty := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$  — сфера Римана;  $\mathbb{D}$  — открытый единичный круг с центром в нуле. Для подмножества  $S \subset \mathbb{C}_\infty$  через  $\overline{S}$  и  $\partial S$  обозначаем соответственно его замыкание и границу в  $\mathbb{C}_\infty$ ;  $\mathbb{C}_A S$  — дополнение  $S$  до множества  $A \subset \mathbb{C}_\infty$ , включающего в себя  $S$ . Через  $C_0^\infty(S)$  обозначаем пространство всех финитных на  $S$  функций  $\psi$ , т.е. с носителем  $\text{supp} \psi \subset S$ , бесконечно дифференцируемых на  $S$  относительно евклидовой топологии, индуцированной с  $\mathbb{C}$ .

Если  $\Omega$  — область в  $\mathbb{C}_\infty$ , то через  $SH(\Omega)$  и  $Har(\Omega)$  обозначаем классы соответственно субгармонических и гармонических функций на  $\Omega$ ; для  $S \subset \mathbb{C}$  классы  $C_{\mathbb{R}}^m(S)$  и  $C_{\mathbb{C}}^m(S)$ , где  $m \in 0 \cup \mathbb{N} \cup \infty$ , — пространства непрерывных вещественнозначных и соответственно комплекснозначных  $m$  раз непрерывно дифференцируемых функций относительно евклидовой топологии, индуцированной с  $\mathbb{C}_\infty$ . Верхний индекс  $m = 0$  (непрерывные функции) или нижний индекс  $\mathbb{R}$  часто опускаем.

*Положительность всюду понимается нестрого как  $\geq 0$ . Аналогичное соглашение — для отрицательности:  $\leq 0$ . Так же нестрого понимается возрастание и убывание.* Так, функция  $\phi: I \rightarrow [-\infty, +\infty]$ ,  $I \subset [-\infty, +\infty]$ , *возрастающая* (соответственно *убывающая*), если для любых  $x_1, x_2 \in I$  неравенство  $x_1 \leq x_2$  влечет за собой *нестрогое* неравенство  $\phi(x_1) \leq \phi(x_2)$  (соответственно  $\phi(x_1) \geq \phi(x_2)$ ).

Для функции или отображения  $f$  на множестве  $A \supset S$  через  $f \Big|_S$  обозначаем сужение  $f$  на подмножество  $S$ .

Для  $a \in [-\infty, +\infty]$  или функции  $f: A \rightarrow [-\infty, +\infty]$ , как обычно, полагаем  $a^+ := \max\{0, a\}$  и  $f^+ : a \mapsto (f(a))^+$ ,  $a \in A$ . Для  $b \in [-\infty, +\infty]$  пишем

также  $f \equiv b$  или  $f \not\equiv b$ , если соответственно  $f(a) \equiv b$  при всех  $a \in A$  или  $f(a) \neq b$  для некоторого  $a \in A$ .

Напомним, что для функции  $\phi \in L^1(\mathbb{R})$ ,  $\phi: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ , *прямое преобразование Гильберта Hil* определяется интегралом

$$(\text{Hil } \phi)(x) := \frac{1}{\pi} PV \int_{\mathbb{R} \setminus \{0\}} \frac{\phi(t)}{x-t} dt, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \quad (1)$$

где  $PV \int$  обозначает главное значение интеграла в смысле Коши. Такая функция  $(\text{Hil } \phi)(x)$  определена почти для всех  $x \in \mathbb{R}$ . *Обратное преобразование Гильберта* отличается только знаком

$$(\text{Hil}^{-1}\phi)(x) := \frac{1}{\pi} PV \int_{\mathbb{R} \setminus \{0\}} \frac{\phi(t)}{t-x} dt = -(\text{Hil } \phi)(x), \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}. \quad (2)$$

### Классы $R\mathcal{P}_0^m$ основных, или тестовых, функций.

Всюду далее рассматриваем только случай

$$\boxed{m \in (\mathbb{N} \setminus \{1\}) \cup \{\infty\}}. \quad (3)$$

**Определение 7.** Подкласс  $R\mathcal{P}_0^m$  положительных непрерывных функций

$$\phi: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow [0, +\infty), \quad Z_\phi := \{x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} : \phi(x) = 0\}, \quad (4)$$

с сужением на  $\mathbb{R} \setminus (\{0\} \cup Z_\phi)$  из класса

$$C^m(\mathbb{R} \setminus (\{0\} \cup Z_\phi)), \quad (5)$$

для которых одновременно выполнены

- *условие финитности*

$$\phi(x) \equiv 0, \quad |x| \geq R_\phi > 0, \quad (6)$$

где  $R_\phi > 0$  — постоянная, зависящая от  $\phi$ ;

- *условие полунормировки в нуле*

$$\limsup_{0 \neq x \rightarrow 0} \frac{\phi(x)}{-\log |x|} \leq 1; \quad (7)$$

- *сопряженное условие положительности* для  $x \in \mathbb{R} \setminus (\{0\} \cup Z_\phi)$  выглядит как

$$(-\text{Hil } \phi)'(x) := \frac{1}{\pi} PV \int_{\mathbb{R} \setminus \{0\}} \frac{\phi(t) - \phi(x)}{(t-x)^2} dt \geq 0, \quad (8)$$

а последнее неравенство после замены переменных можно записать в форме

$$(-\text{Hil } \phi)'(x) = \frac{1}{\pi} PV \int_0^{+\infty} \frac{\phi(x+t) + \phi(x-t) - 2\phi(x)}{t^2} dt \geq 0. \quad (9)$$

Сопряженные условия положительности (8)–(9) эквивалентны *возрастанию обратного преобразования Гильберта*

$$\text{Hil}^{-1}\phi(x) = \frac{1}{\pi} PV \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\phi(t)}{t-x} dt = (-\text{Hil } \phi)(x) \quad (10)$$

отдельно на каждом открытом интервале, являющимся связной компонентой дополнения  $\mathbb{C}_{\mathbb{R}}(\{0\} \cup Z_{\phi})$  замкнутого множества  $\{0\} \cup Z_{\phi}$  до  $\mathbb{R}$ .

Здесь левые части можно заменить на обратное преобразование Гильберта производной  $\phi'$  функции  $\phi$  за счет известного тождества

$$(-\text{Hil } \phi)'(x) \equiv (-\text{Hil } \phi')(x), \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \quad (11)$$

если производная  $\phi'$  принадлежит некоторому  $L^p(\mathbb{R})$ ,  $p > 1$ , или если рассматривать производные и преобразование Гильберта в смысле теории распределений (обобщенных функций) [2, § 3.3].

Для  $\lambda \in \mathbb{C}_{\pm} := \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$  интеграл Пуассона  $P_{\mathbb{C}_{\pm}}\phi$  функции  $\phi \in L^1(\mathbb{R})$ , определяется как

$$(P_{\mathbb{C}_{\pm}}\phi)(\lambda) := \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\Im \lambda|}{(t - \Re \lambda)^2 + (\Im \lambda)^2} \phi(t) dt, \quad \Re \lambda \neq 0. \quad (12)$$

Для  $\lambda \in \mathbb{R}$  полагаем

$$(P_{\mathbb{C}_{\pm}}\phi)(\lambda) := \phi(\lambda), \quad \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}. \quad (13)$$

Интеграл Пуассона из (12) — гармоническая функция на  $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ . Определения (12) и (13) вместе определяют *преобразование Пуассона*  $P_{\mathbb{C}_{\pm}}$ .

## Продолжение основных функций класса $R\mathcal{P}_0^m$ в $\mathbb{C}_{\pm}$

Основную роль в этом параграфе будет играть

**Предложение 1.** Пусть  $A$  — замкнутое подмножество на  $\mathbb{R}$  и функция  $V$  непрерывная на некотором открытом подмножестве  $S \supset \mathbb{R} \setminus A$  из  $\mathbb{C}$ , дважды непрерывно дифференцируемая на  $\mathbb{R} \setminus A$  и гармоническая на  $S \setminus \mathbb{R}$ .

Функция  $V$  субгармоническая на  $S$ , если и только если выполнено условие

$$\begin{aligned} & \left( \frac{\partial V}{\partial \bar{n}_+^{\text{in}}} + \frac{\partial V}{\partial \bar{n}_-^{\text{in}}} \right) (x) \\ &= \lim_{0 < y \rightarrow 0} \frac{V(x + iy) - V(x)}{y} \\ &+ \lim_{0 > y \rightarrow 0} \frac{V(x + iy) - V(x)}{-y} \geq 0, \quad x \in \mathbb{R} \setminus A, \end{aligned} \quad (14)$$

где  $\frac{\partial}{\partial \bar{n}_+^{\text{in}}}$  и  $\frac{\partial}{\partial \bar{n}_-^{\text{in}}}$  — операторы дифференцирования по внутренней единичной нормали соответственно в  $\mathbb{C}_+ \cap S$  и  $\mathbb{C}_- \cap S$ . При этом плотность меры Рисса  $\nu_V$  функции  $V \in SH(S)$  с носителем  $\text{supp} \nu_V \subset \mathbb{R} \setminus A$  совпадает с левой частью неравенства

$$\frac{\partial V}{\partial \bar{n}_+^{\text{in}}}(t) + \frac{\partial V}{\partial \bar{n}_-^{\text{in}}}(t) \geq 0, \quad t \in \mathbb{R} \setminus A. \quad (15)$$

Если дополнительно функция  $V$  положительна, полунепрерывна сверху в открытой в  $\mathbb{C}$  окрестности  $S_0$  подмножества  $A_0 \subset A$ , субгармонична на  $S_0 \setminus A_0$  и  $V(x) \equiv 0$  при  $x \in A_0$ , то при условии (14) функция  $V$  субгармоническая и непрерывная в открытой окрестности  $S \cup S_0$  подмножества  $(\mathbb{R} \setminus A) \cup A_0$ .

## Гармоническое продолжение

Пусть  $m \geq 2$ . По функции  $\phi \in K\mathcal{P}_0^m$  построим функцию на  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$  (см. (12)–(13))

$$V^\phi(\zeta) := (P_{\mathbb{C}_\pm} \phi)(\zeta), \quad \zeta \neq 0. \quad (16)$$

**Предложение 2.** Функция  $V^\phi$  — положительная субгармоническая в проколотой плоскости  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ , ее сужение  $V^\phi \Big|_{\mathbb{R} \setminus \{0\}}$  совпадает с функцией  $\phi$ , функция  $V^\phi$  удовлетворяет условию полунормировки в нуле

$$\limsup_{\zeta \rightarrow 0} \frac{V^\phi(\zeta)}{-\log |\zeta|} \leq 1 \quad (17)$$

и с постоянной  $R_\phi$  из условия финитности (6) имеем оценку

$$V^\phi(\zeta) \leq \text{const} \left| \Im \frac{1}{\zeta} \right|, \quad |\zeta| \geq 2R_\phi. \quad (18)$$



*Доказательство.* Из положительности функции  $\phi$  следует положительность  $V^\phi$  всюду вне нуля. Функция  $V^\phi$  непрерывна в точках непрерывности функции  $\phi$  и

$$\lim_{\zeta \rightarrow x_0} V^\phi(\zeta) = \phi(x_0), \quad x_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \quad (19)$$

по известным свойствам интеграла Пуассона (см., например, [3, гл. I, Лемма 3.3]) и в  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$  как гармоническая в  $\mathbb{C}_\pm$ . Более того, эта функция бесконечно дифференцируемая в  $\mathbb{C}_\pm$ . Нам потребуется следующая, формулируемая здесь только для плоскости  $\mathbb{C}$ ,

**Лемма 4.** [4, гл. I, § 8, Теорема] Пусть в окрестности точки  $z_0 \in \mathbb{C}$  задана дважды непрерывно дифференцируемая кривая  $\Sigma$  и пусть с одной стороны от  $\Sigma$  в окрестности  $z_0$  (т. е. в некоторой компоненте множества  $(z_0 + r\mathbb{D}) \cap (\mathbb{C} \setminus \Sigma)$  при достаточно малом  $r$ ) задана гармоническая функция  $V$ , имеющая в каждой точке  $z$  границы  $\partial((z_0 + r\mathbb{D}) \cap \Sigma)$  предел  $\lim_{\zeta \rightarrow z} V(\zeta) = \psi(z)$ , причем функция  $\psi$  на  $\Sigma$  дважды непрерывно дифференцируема. Тогда градиент  $\text{grad } V$  имеет конечный предел в каждой точке границы  $\partial((z_0 + r\mathbb{D}) \cap \Sigma)$  и может быть непрерывно продолжен на  $(z_0 + r\mathbb{D}) \cap \Sigma$ .

Рассматриваем в качестве  $z_0$  точки  $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ,  $\Sigma = (x_0 - r, x_0 + r)$  — открытые интервалы, где  $r < |x_0|$ ,  $V := V^\phi$  на  $\mathbb{C}_\pm$  и  $\psi = \phi$  согласно (19). По Лемме 1 функция  $V^\phi$  непрерывна на  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ , дважды непрерывно дифференцируема на  $\mathbb{C}_\pm$  и непрерывно дифференцируема в замкнутой верхней и нижней полуплоскостях без нуля, т. е. в  $\overline{\mathbb{C}_+} \setminus \{0\}$  и  $\overline{\mathbb{C}_-} \setminus \{0\}$ .

Для доказательства субгармоничности вне нуля функции  $V^\phi$  воспользуемся Леммой 2, которая после [5, Лемма 3.8.1] была независимо передоказана П. Бланше [6, Теоремы 3.1] (см. также [7, Лемма 4.1]).

**Лемма 5.** Пусть  $D$  — область в  $\mathbb{C}$  и пусть  $S$  — кривая класса  $C^1$ , которая разбивает  $D$  на две подобласти  $D_1$  и  $D_2$ .

Пусть  $V \in C_{\mathbb{R}}(D) \cap C^2(D_1 \cup D_2)$  и  $V \in SH(D_k)$ ,  $k = 1, 2$ . Если

$$V \Big|_{D_k \cup S} =: V_k \in C^1(D_k \cup S), \quad k = 1, 2, \quad (20)$$

а также

$$\frac{\partial V_1}{\partial \vec{n}_1^{\text{in}}} + \frac{\partial V_2}{\partial \vec{n}_2^{\text{in}}} \geq 0 \quad (21)$$

на  $S$ , где  $\frac{\partial}{\partial \vec{n}_k^{\text{in}}}$  — операторы дифференцирования по внутренней единичной нормали в  $D_k \cup S$ ,  $k = 1, 2$ , то  $V$  — субгармоническая в  $D$  функция.

Рассмотрим в качестве  $D$  произвольный круг  $x_0 + r\mathbb{D}$ ,  $0 < r < |x_0|$ ,  $S = (x_0 - r, x_0 + r)$  — открытый интервал,

$$D_1 = D_+ := (x_0 + r\mathbb{D}) \cap \mathbb{C}_+, \quad D_2 = D_- := (x_0 + r\mathbb{D}) \cap \mathbb{C}_- \quad (22)$$

— верхний и нижний открытые полукруги. Положим  $V := V^\phi \Big|_{x_0+r\mathbb{D}}$ . Эта функция гармонична вне интервала  $S = (x_0 - r, x_0 + r)$  и, тем более, субгармонична вне него. Проверим условие (21). Функция  $V^\phi(x + iy)$ ,  $\zeta = x + iy$ ,  $x, y \in \mathbb{R}$ , четная по  $y$  при каждом фиксированном  $x$  по построению (16), (12). Следовательно, сумма (21) производных по внутренним нормальям от  $V$  для точек при  $x \in (x_0 - r, x_0 + r)$  в данном случае совпадает с удвоенным пределом

$$\begin{aligned} & 2 \lim_{\substack{y \rightarrow 0 \\ y > 0}} \frac{1}{y} \left( V^\phi(x + iy) - \phi(x) \right) \\ &= 2 \lim_{\substack{y \rightarrow 0 \\ y > 0}} \frac{1}{y} \left( \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{y}{(t-x)^2 + y^2} \phi(t) dt - \phi(x) \right) \\ &= 2 \lim_{\substack{y \rightarrow 0 \\ y > 0}} \frac{1}{y} \left( \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{y}{(t-x)^2 + y^2} \phi(t) dt - \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{y}{(t-x)^2 + y^2} \phi(x) dt \right) \\ &= \frac{2}{\pi} \lim_{\substack{y \rightarrow 0 \\ y > 0}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\phi(t) - \phi(x)}{(t-x)^2 + y^2} dt = \frac{2}{\pi} PV \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\phi(t) - \phi(x)}{(t-x)^2} dt \quad (23) \end{aligned}$$

Ввиду условия возрастания обратного преобразования Гильберта в виде сопряженного условия положительности (8) правая часть в (23) положительна при любом  $x$ . Следовательно, выполнено условие (21) Леммы 2 и функция  $V^\phi$  субгармонична в окрестности каждой точки  $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ . Из локальной субгармоничности непрерывной функции  $V^\phi$  в  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$  следует ее субгармоничность всюду в  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ .

Перейдем к доказательству условия полунормировки вида (7) Определения 1. Из условия полунормировки в нуле (7) следует, что для *произвольного*  $\varepsilon > 0$  при  $\alpha \in (0, 1]$ , зависящем от  $\varepsilon$  и  $\phi$ , справедливо неравенство

$$\phi(x) \leq (1 + \varepsilon) \log \frac{1}{|x|}, \quad |x| \leq \alpha. \quad (24)$$

Кроме того, в силу условия финитности (6), где можно считать, что  $R_\phi \geq 1$ , найдется постоянная  $C_1 \geq 0$ , с которой выполнена оценка

$$\phi(x) \leq C_1, \quad |x| \geq \alpha. \quad (25)$$

Оценки (24) и (25) с учетом условия финитности можно, несколько огрубляя, объединить в одну:

$$\phi(x) \leq (1 + \varepsilon) \log^+ \frac{e^{C_1} R_\phi}{|x|} =: (1 + \varepsilon) \log^+ \frac{C}{|x|}, \quad C := e^{C_1} R_\phi, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}. \quad (26)$$

В силу условия положительности ядра Пуассона в (12) из последней оценки следует

$$V^\phi(\zeta) = (P_{\mathbb{C}_\pm} \phi)(\zeta) \leq (1 + \varepsilon) \left( P_{\mathbb{C}_\pm} \log^+ \frac{C}{|\cdot|} \right)(\zeta), \quad \zeta \in \mathbb{C} \setminus \{0\}. \quad (27)$$

Пусть  $\zeta = x + iy$ ,  $x, y \in \mathbb{R}$ ,  $|\zeta| = r$  и  $y > 0$ . Перепишем преобразование Пуассона из правой части (27) в виде

$$\begin{aligned} \left( P_{\mathbb{C}_\pm} \log^+ \frac{C}{|\cdot|} \right)(\zeta) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{y}{(t-x)^2 + y^2} \log^+ \frac{C}{|t|} dt \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-C}^C \log^+ \frac{C}{|t|} \frac{1}{1 + \left(\frac{t-x}{y}\right)^2} d\frac{t-x}{y} = \frac{1}{\pi} \int_{-C}^C \log^+ \frac{C}{|t|} d \operatorname{arctg} \frac{t-x}{y} \\ &= \frac{1}{\pi} PV \int_{-C}^C \operatorname{arctg} \frac{t-x}{y} \frac{dt}{t} = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{\pi} \left( \int_{-C}^{-\delta} + \int_{\delta}^{-C} \right) \operatorname{arctg} \frac{t-x}{y} \frac{dt}{t} \\ &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{\pi} \int_{\delta}^C \left( \operatorname{arctg} \frac{x+t}{y} - \operatorname{arctg} \frac{x-t}{y} \right) \frac{dt}{t} \\ &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{\pi} \left( \int_{\delta}^{r/2} + \int_{r/2}^C \right) \left( \operatorname{arctg} \frac{x+t}{y} - \operatorname{arctg} \frac{x-t}{y} \right) \frac{dt}{t} \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{r/2} \operatorname{arctg} \frac{2t/y}{1 + \frac{x^2-t^2}{y^2}} \frac{dt}{t} + \frac{1}{\pi} \int_{r/2}^C \left( \operatorname{arctg} \frac{x+t}{y} - \operatorname{arctg} \frac{x-t}{y} \right) \frac{dt}{t} \\ &=: \frac{1}{\pi} I_r + \frac{1}{\pi} I_C, \quad (28) \end{aligned}$$

где  $I_r$  и  $I_C$  — соответственно первый и второй интегралы из предыдущей суммы. Для первого имеем оценку

$$I_r \leq \int_0^{r/2} \frac{2y dt}{r^2 - t^2} = 2y \cdot \frac{1}{2r} \log \left| \frac{r+t}{r-t} \right| \Big|_0^{r/2} = \frac{y}{r} \log 3 \leq \log 3, \quad (29)$$

а для второго —

$$I_C \leq \int_{r/2}^C \left( \left| \operatorname{arctg} \frac{x+t}{y} \right| + \left| \operatorname{arctg} \frac{x-t}{y} \right| \right) \frac{dt}{t} \leq \pi \int_{r/2}^C \frac{dt}{t} = \pi \log \frac{2C}{r}. \quad (30)$$

Из (27), (28), (29) и (30) получаем

$$V^\phi(\zeta) := (P_{\mathbb{C}_\pm} \phi)(\zeta) \leq \frac{1 + \varepsilon}{\pi} \log 3 + (1 + \varepsilon) \log 2C - (1 + \varepsilon) \log |\zeta| \quad (31)$$

при  $y > 0$ , а значит и при  $y < 0$  в силу четности по  $y$  левой части. Отсюда

$$\limsup_{\zeta \rightarrow 0, \zeta \neq 0} \frac{V^\phi(\zeta)}{-\log|\zeta|} \leq 1 + \varepsilon \quad (32)$$

и ввиду произвола в выборе  $\varepsilon > 0$  получаем условие полунормировки (17).

Перейдем, наконец, к доказательству оценки (18). При  $\zeta = x + iy$ ,  $|\zeta| = r \geq 2R_\phi$  рассмотрим отдельно случаи  $|x| \geq y$  и  $y > |x|$ . Достаточно ограничиться доказательством для замкнутой верхней полуплоскости, т. е.  $y \geq 0$ . При  $|x| \geq y$  для  $|t| \leq r_\phi$  имеем

$$(t - x)^2 \geq (|x| - |t|)^2 \geq (r/\sqrt{2} - R_\phi)^2 \geq (r/\sqrt{2} - r/2)^2 = \frac{\sqrt{2} - 1}{2} r^2.$$

Отсюда при  $|x| \geq y$  и  $r \geq 2R_\phi$

$$V^\phi(\zeta) \leq \frac{1}{\pi} \int_{-R_\phi}^{R_\phi} \phi(t) \frac{y}{(t-x)^2} dt \leq \text{const} \int_{-R_\phi}^{R_\phi} \phi(t) dt \cdot \frac{y}{r^2} = \text{const} \left| \Im \frac{1}{\zeta} \right|.$$

При  $|x| < y$  и  $r \geq 2R_\phi$  аналогично получаем

$$V^\phi(\zeta) \leq \frac{1}{\pi} \int_{-R_\phi}^{R_\phi} \phi(t) \frac{y}{y^2} dt \leq \text{const} \int_{-R_\phi}^{R_\phi} \phi(t) dt \cdot \frac{2y}{r^2} = \text{const} \left| \Im \frac{1}{\zeta} \right|.$$

Оценка (18) доказана.  $\square$

*Замечание.* Наше основное Предложение 2 — подготовительная работа к исследованию распределения подпоследовательностей нулей для функций из специальных классов целых функций с ограничениями на их рост вдоль вещественной прямой.

Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований, гранты № 09-01-00046а и № 11-01-06831-моб-г.

## Список литературы

- [1] Havin V. P., Jöricke B., *The uncertainly principle in harmonic analysis*, Berlin–Heidelberg: Springer-Verlag, 1994.
- [2] Pandey J. N. *The Hilbert transform of Schwartz distributions and applications*, Wiley-Interscience, 1996.
- [3] Гарнетт Дж., *Ограниченные аналитические функции*, Мир, М., 1984.
- [4] Брело М., *Основы классической теории потенциала*, Мир, М., 1964.

- [5] Хабибуллин Б. Н., *Распределение нулей целых функций и выметание*, Дисс. . . . доктора физ.-мат. наук, Харьков, 1993.
- [6] Blanchet P., *On removable singularities of subharmonic and plurisubharmonic functions*, Complex Variables, **26** (1995), 311–322.
- [7] Хабибуллин Б. Н., *Полнота систем целых функций в пространствах голоморфных функций*, Матем. заметки, **66** (1999), Вып. 4, 603–616.

УДК 519.688

## ПРИМЕНЕНИЕ ОПТИМИЗАЦИИ ПРЯМОУГОЛЬНОГО РАСКРОЯ ДЛЯ СОВЕРШЕНСТВОВАНИЯ СИСТЕМЫ ТЕХНОЛОГИЧЕСКОЙ ПОДГОТОВКИ РАСКРОЙНО-ЗАГОТОВИТЕЛЬНЫХ ПРОИЗВОДСТВ В СУДОСТРОЕНИИ

**Телицкий С.В.**

Уфимский государственный авиационный технический университет,  
г. Уфа, Россия

Традиционно судостроительная отрасль обеспечивает интересы обороны и безопасности, морского и речного транспорта и других сфер экономики. Судостроение является материалоемкой отраслью промышленности, поэтому проблема ресурсосбережения для нее стоит в ряду первоочередных задач. Важным фактором снижения материалоемкости и рационального использования материальных ресурсов является совершенствование системы технологической подготовки раскроя промышленных материалов. Большие отходы конструктивных материалов (до 30% в материалоемких производствах) требуют коренной перестройки технологии проектирования процесса раскроя, его автоматизации. Создание и широкое внедрение системы автоматизированного проектирования (САПР) технологической подготовки раскроя, представляющей собой новые, ресурсосберегающие технологии, обеспечивает снижение расхода материала, трудоемкости технологической подготовки и сроков проектирования.

В настоящее время существует значительное количество прикладного программного обеспечения для инженерного состава проектных бюро и

верфей, это и программы, написанные самими работниками предприятий, и объемные специализированные системы, охватывающие полный цикл проектирования и технологической обработки производственного процесса.

Однако во многих программных продуктах наблюдается некая несогласованность между практикой и научной мыслью, которая заключается в том что, с одной стороны – в САПР раскроя почти везде отсутствует оптимизационное ядро; с другой стороны, многие ученые заняты разработкой точных и приближенных методов расчета раскроя и размещения деталей без учета каких-либо ограничений на производственные факторы.

Такая ситуация характерна и для ОАО "Судостроительный завод "Северная верфь". Используя специализированные системы, охватывающие полный цикл проектирования и технологической обработки производственного процесса, для подготовки раскроя используются функциональные программы, написанные самими работниками предприятий, но не включающие оптимизационных алгоритмов.

Анализ производственного процесса показал, что для данного производства наиболее подходящей является задача прямоугольного нерегулярного раскроя/упаковки листов в условиях единичного и мелкосерийного производства с учетом разворотов заготовок. Данная задача по международной классификации задач раскроя/упаковки относится к задаче *2 Dimensional Bin Packing Problem (2DBPP)* [1].

Заготовки прямоугольной формы вырезаются из стандартных листов исходного металла с использованием станков термической резки, на которых выполняютсярезы произвольной длины, что говорит о прямоугольном нерегулярном раскрое. Исходя из особенностей единичного производства, оптимальным вариантом следует признать полностью автоматический подход к формированию раскройных карт и управляющих программ для станков с ЧПУ, только в этом случае будет достигнута производительность, удовлетворяющая условиям единичного производства.

По сути в задаче двумерной упаковки/раскроя *2DBPP* необходимо расположить элементы известной формы и размеров в прямоугольных областях заданных характеристик (рис. 1). Учитывая специфику предметной области, задача получает ряд дополнительных ограничений, усложняющих её решение.

В задачах планирования оптимального раскроя обязательным условием для единичного и мелкосерийного производства является целочисленность раскройного плана. В массовом производстве в силу цикличности его характера этим требованием удается пренебречь. В качестве основной рассматривается следующая ситуация.

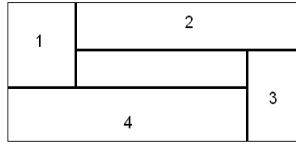


Рис. 1: Негильотинная упаковка

Заданы габариты раскраиваемого материала  $C$  – ширина листа;  $D$  – длина листа; и размеры получаемых из него заготовок  $c_i, d_i, b_i$ , где:

$c = (c_1, c_2, \dots, c_i, \dots, c_m)$ ,  $c_i$  – ширина заготовки,  $i = \overline{1, m}$ ;

$d = (d_1, d_2, \dots, d_i, \dots, d_m)$ ,  $d_i$  – длина заготовки  $i = \overline{1, m}$ ;

$b = (b_1, b_2, \dots, b_i, \dots, b_m)$ ,  $b_i$  – количество заготовок типа  $i$ ,  $i = \overline{1, m}$ .

Требуется составить наиболее экономичный план раскроя. Каждому раскрою  $r$  сопоставим вектор  $a(r) = (a_1(r), a_2(r), \dots, a_i(r), \dots, a_m(r))$ , компоненты  $a_i(r)$  которого указывают количество деталей  $i$ -го вида, получаемых при реализации раскроя.

Раскрой будем называть реализуемым, если выдержаны размеры и технологические параметры для всех получаемых заготовок. Реализуемый раскрой назовем допустимым в задаче целочисленного раскроя, если для него выполняется условие  $a_i(r) \leq b_i$ ,  $i \in I = \{1, 2, \dots, m\}$ .

Рассматриваемая задача раскроя сводится к следующей целочисленной модели.

При заданных исходных данных для рассматриваемой задачи требуется найти совокупность раскроев  $r_1, r_2, \dots, r_j, \dots, r_n$ , и неотрицательный вектор  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  с целочисленными компонентами  $x_j$ ,  $j = 1, \dots, n$ , удовлетворяющими условиям

$$y_i^1 = \frac{k_i^1 c_i}{c}; \quad y_i^2 = \frac{k_i^2 d_i}{c}; \quad y_i^3 = \frac{k_i^3 c_i}{c}; \quad y_i^4 = \frac{k_i^4 d_i}{c};$$

и минимизирующими функцию

$$\mu(x) = \sum_{j=1}^n x_j.$$

Разработка автоматизированных методов проектирования рационального раскроя особо остро стоит для единичного производства. Данная задача относится к классу так называемых  $NP$ -полных, т.е. точное решение этой задачи можно получить только методом полного перебора всех возможных вариантов. Очевидно, что при большом количестве элементов, которые необходимо расположить, даже при использовании мощных вычисли-



тельных систем время решения задачи будет неприемлемым в условиях реального производства.

На сегодняшний день следует признать, что существующие методы построения рациональных раскройных карт могут соперничать с раскройными картами, построенными только для специализированных задач раскроя. Например, современные исследования позволили достичь высоких результатов в области гильотинного раскроя [2]. Алгоритмы, работающие с данной номенклатурой заготовок, уже давно успешно применяются в производстве.

Совершенно иначе обстоит дело с алгоритмами укладки заготовок произвольной формы. Большинство существующих разработок в этом направлении решают небольшие подзадачи, возникающие в глобальной задаче оптимального раскроя, и не способны эффективно работать на любой предложенной номенклатуре заготовок, что составляет неотъемлемую часть единичного производства.

Поэтому предлагается решать данную задачу в два этапа:

Сначала решается задача генерирования гильотинного раскроя.

Генерирование гильотинного раскроя является частным случаем задачи *2DBPP* и относится к задаче *2DCSP* (*Two-Dimensional Cutting Stock Problem*), является *NP*-трудной задачей комбинаторной оптимизации.

Таким образом, в задаче *2DBPP* добавляется условие гильотинности.

Для любого прямоугольника  $P \subseteq R_k$  (рис. 2) с размерами  $(c, d) : c \neq c_i \vee d \neq d_i$ , выполнено условие разделения на два прямоугольника  $P'(c', d')$  и  $P''(c'', d'')$ :

$$(c' = c'' = c) \wedge (d' + d'' = d) \vee (c' + c'' = c) \wedge (d' = d'' = d),$$

если  $(c_i, d_i) \in P'$ , то  $(c_i, d_i) \notin P''$ , если  $(c_i, d_i) \in P''$ , то  $(c_i, d_i) \notin P'$ .

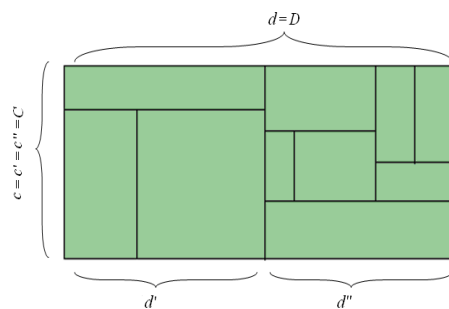


Рис. 2: Условие гильотинности раскроя листового материала



На втором этапе снимается условие гильотинности и заготовки уплотняются на листах.

Таким образом, в результате анализа выявлено, что задача прямоугольного нерегулярного раскроя/упаковки листов в условиях единичного и мелкосерийного производства с учетом разворотов заготовок наилучшим образом моделирует производственный процесс рассматриваемого предприятия. Решение задачи производится в два этапа.

### **Литература**

1. Мухачева А.С., Валеева А.Ф., Картак В.М. Задачи двумерной упаковки в контейнеры: новые подходы к разработке методов локального поиска оптимума – М.: МАИ, 2000. – 192 с.

2. Мухачева Э.А., Валеева А.Ф., Мухачева А.С. Методы локального поиска в задачах оптимального распределения ресурса: учебное пособие. – Уфа: УГАТУ, 2001. – 75 с.

## **ИССЛЕДОВАНИЯ ЭФФЕКТИВНОСТИ ПАРАМЕТРОВ ГЕНЕТИЧЕСКОГО АЛГОРИТМА НА ОСНОВЕ ЗАДАЧИ РАЗМЕЩЕНИЯ**

**Тимергалина Л.З.**

Уфимский государственный авиационный технический университет,  
г. Уфа, Россия

Задачи размещения имеют широкую область применения в различных отраслях деятельности. В статье рассматривается задача размещения элементов в электронном модуле трехмерной компоновки (ЭМТК). Базовой для нее является NP- полная задача двумерной упаковки с целевой функцией учитывающей нагрев ЭМТК, оптимизация которой позволяет снизить вероятность отказа электронной аппаратуры (ЭА).

В современных условиях важной задачей стоящей перед разработчиками электронной аппаратуры, является получение максимально возможной плотности компоновки с сохранением высоких показателей надежности аппаратуры.

На сегодняшний день разработано множество алгоритмов позволяющих решать задачи размещения в соответствии с различными критериями оптимизации. В большинстве эти алгоритмы ориентированы на проектирование электронной аппаратуры двумерной компоновки. Автоматизация “теплого” размещения в электронном модуле трехмерной компоновки может быть реализован с помощью генетического алгоритма.

Генетический алгоритм широко применяется для решения различных задач оптимизации. Он основан на случайном подборе, комбинировании и вариации искомым параметров с использованием механизмов, напоминающих биологическую эволюцию. Отличительной особенностью генетического алгоритма является акцент на использование оператора “скрещивания”, который производит операцию рекомбинации решений, роль которой аналогична роли скрещивания в живой природе.

Рассматривается электронный модуль трехмерной компоновки платы в котором расположены параллельно друг другу. Элементы на платах размещаются по методу нижний левый угол с величиной зазора  $k$  единиц.

Для минимизации нагрева электронного модуля трехмерной компоновки используется следующая функция

$$\{\lambda_{\Sigma} = K \cdot \sum_{\lambda_i} (t_i) \cdot \alpha \cdot \xi\} \rightarrow \min$$

где  $m$ – количество элементов в электронном модуле трехмерной компоновки,  $\alpha$ – коэффициент нагрева проводника,  $K$  – коэффициент учитывающий особенности электронного модуля трехмерной компоновки,  $\xi$ – длина проводника.

При размещении элементов на платах необходимо учитывать следующие условия пересечения элементов между собой и краями плат:

$$((x_i^k = x_i) \cup (x_i^k = x_i + l_i)) \cap ((y_i^k = y_i) \cap (y_i^k + w_i)) \quad \forall i = \overline{1, m}$$

$$((x_i \geq x_i + l_j) \cup (x_i \geq x_i + l_i)) \cap ((y_i \geq y_j + w_j) \cap (y_j \geq y_i + w_i)) \\ i \neq j : i, j = \overline{1, m}$$

$$(x_i \geq 0) \cap (y_i \geq 0) \cap ((y_i + w_i) \leq W) \cap ((x_i + l_i) \leq L) \quad \forall i = \overline{1, m}$$

где  $w_i$ - ширина элемента  $l_i$ - длина элемента, ,  $m$  – количество прямоугольников,  $W_p$ – ширина платы.  $L_p$ – длина платы

Данная задача представляет собой комбинаторную труднорешаемую задачу, относящуюся к классу NP – полных задач. Оптимальное решение такой задачи, на сегодняшний день, может быть найдено только путем полного перебора за экспоненциальное время.

При решении данной задачи в генетическом алгоритме исследовалось эффективность следующих операторов: кроссовер двух видов, кроссовер с одним потомком и кроссовер с двумя потомками, а также N – точечная мутация.

Генетический алгоритм для задачи размещения элементов в электронном модуле трехмерной компоновки был реализован в виде программного продукта. На его основе был проведен вычислительный эксперимент, и получены следующие результаты:

для задачи произвольного размещения элементов в электронном модуле трехмерной компоновки (500 элементов в диапазоне длины и ширины от 10 единиц до 100 единиц, на 8 платах габаритов 300 на 300 единиц) лучшие результаты получены при начальной популяции равной 13 особей, кроссовер с двумя потомками и одна точечной мутацией, так как значение функции пригодности при этих операторах в среднем улучшилась в 1,1065 раз от первоначального значения, что означает, что нагрев электронного модуля будет наименьшим.

УДК 517.956

## СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННАЯ ЗАДАЧА ДИРИХЛЕ ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ОПЕРАТОРА ВТОРОГО ПОРЯДКА

Черданцева К. И.

(Уфа, БашГУ)<sup>1</sup>

Пусть  $n \geq 3$ ,  $\Omega$  – ограниченная, связная область в  $\mathbb{R}^n$ , содержащая начало координат, с границей  $\partial\Omega \in C^\infty$ ,  $\omega$  – ограниченная, связная область в  $\mathbb{R}^n$  с границей  $\partial\omega \in C^\infty$ , также содержащая начало координат. Обозначим  $\omega_\varepsilon = \{x : \varepsilon^{-1}x \in \omega\}$ , где  $0 < \varepsilon \ll 1$ ,  $\Omega_\varepsilon = \Omega \setminus \bar{\omega}_\varepsilon$ . Рассмотрим следующую

---

<sup>1</sup>Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ (01-09-00350-а), гранта Правительства России для Ведущих научных школ (НШ - 6249.2610.1) и ФЦП ("Научные и научно-педагогические кадры инновационной России" контракт 02.740.11.0612)

эллиптическую краевую задачу на собственные значения

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\psi_0 &:= - \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left( a_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j} \psi_0 \right) + a\psi_0 = \lambda_0\psi_0 \quad \text{при } x \in \Omega, \\ \psi_0 &= 0 \quad \text{при } x \in \partial\Omega, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $x = (x_1, \dots, x_n)$ ,  $a_{ij}, a \in C^\infty(\bar{\Omega})$ ,  $a_{ij} = a_{ji}$ , а оператор  $\mathcal{L}$  – эллиптический, то есть существуют положительные постоянные  $\mu_1$  и  $\mu_2$  такие, что

$$\mu_1|\xi|^2 \leq \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \leq \mu_2|\xi|^2$$

для любых  $x \in \Omega$  и  $\xi \in \mathbb{R}^n$ . Не ограничивая общности, будем считать, что при  $x = 0$ , оператор  $\mathcal{L}$  имеет вид оператора Лапласа. Задачу (1) будем называть предельной.

А краевую задачу

$$\begin{aligned} - \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left( a_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j} \psi_\varepsilon \right) + a\psi_\varepsilon &= \lambda_\varepsilon\psi_\varepsilon \quad \text{при } x \in \Omega_\varepsilon, \\ \psi_\varepsilon &= 0 \quad \text{при } x \in \partial\Omega_\varepsilon \end{aligned} \quad (2)$$

будем называть возмущенной.

В этой статье, используя метод согласования асимптотических разложений, мы построим главный член асимптотики при  $\varepsilon \rightarrow 0$  простого собственного значения возмущенной задачи (2) на формальном уровне.

Для удобства введём единые обозначения. Всюду в дальнейшем  $r = |x|$ . Функция  $Y_k(x)$  означает однородный гармонический полином степени  $k$ . При этом тождественный нуль можно считать однородным полиномом произвольной степени. Удобно считать  $Y_k(x)$  определённой для всех целых значений индексов, считая равной нулю, если индекс отрицателен.

Обозначим через  $\tilde{A}$  множество рядов вида

$$\begin{aligned} \tilde{U}(x) &= r^{2-n}Y_0 + r^{2-n} \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{l=0}^{[3j/2]} r^{-2j+2l} Y_{3j-2l}(x) + \\ &+ b(r) \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{[(j+2-n)/2]} r^{2l} Y_{j+2-n-2l}(x), \end{aligned}$$

где  $b(r) \equiv 0$  при нечётном  $n$  и  $b(r) = \ln r$  при чётном  $n$ .

В работе [5] была доказана теорема, которую мы приведем в удобной нам формулировке.

**Лемма 6.** Для  $n \geq 3$  и  $\tilde{F}(x) \in \tilde{A}$ , существует асимптотическое решение (при  $x \rightarrow 0$ )  $\tilde{U}(x) \in \tilde{A}$  уравнения  $(\mathcal{L} - \lambda)\tilde{U}(x) = \tilde{F}(x)$ , имеющее главный член  $\alpha r^{2-n}$ .

Через  $A$  обозначим множество функций из  $C^\infty(\bar{\Omega} \setminus \{0\})$ , равных нулю на  $\partial\Omega$  и имеющих асимптотики  $F(x) = \tilde{F}(x)$  при  $x \rightarrow 0$ , где  $\tilde{F}(x) \in \tilde{A}$ .

**Теорема 10.** Для  $n \geq 3$  и  $F(x) \in A$  существуют постоянная  $\Lambda$  и функция  $U \in A$ , которая является решением краевой задачи

$$\begin{aligned} (\mathcal{L} - \lambda)U(x) &= F(x) + \Lambda\psi && \text{при } x \in \Omega \setminus \{0\}, \\ U(x) &= 0 && \text{при } x \in \partial\Omega, \end{aligned}$$

а ее главный член асимптотики при  $r \rightarrow 0$  имеет вид  $\alpha r^{2-n}$ .

**Доказательство.** Пусть  $N \geq 0$ , ряд  $\tilde{U}$  удовлетворяет утверждению леммы 1 и  $\tilde{U}_N$  – его частичная сумма до членов  $O(r^N)$  включительно. Будем искать  $U$  в виде  $\tilde{U}_N + V_N$ . В этом случае получаем следующую краевую задачу для  $V_N$

$$\begin{aligned} (\mathcal{L} - \lambda)V_N &= F_N + \Lambda\psi && \text{при } x \in \Omega \setminus 0, \\ V_N &= h_N && \text{при } x \in \partial\Omega, \end{aligned} \tag{3}$$

где  $F_N \in C^{N-3}(\bar{\Omega} \setminus \{0\})$  и  $h_N \in C^{N-1}(\partial\Omega)$ . Из условия разрешимости (3) получаем, что существует  $\Lambda = \Lambda_N$ , при котором (3) разрешима, а из гладкости правой части уравнения и граничного условия следует, что  $V_N \in C^{N-1}(\bar{\Omega} \setminus \{0\})$ . Тогда  $U^{(N_1, N_2)} = (\tilde{U}_{N_1} + V_{N_1}) - (\tilde{U}_{N_2} + V_{N_2}) \in C^{\min\{N_1, N_2\}-1}(\bar{\Omega} \setminus \{0\})$  и является решением краевой задачи

$$\begin{aligned} (\mathcal{L} - \lambda)U^{(N_1, N_2)} &= (\Lambda_{N_1} - \Lambda_{N_2})\psi && \text{при } x \in \Omega \setminus \{0\}, \\ U^{(N_1, N_2)} &= 0 && \text{при } x \in \partial\Omega. \end{aligned}$$

Следовательно,  $\Lambda_{N_1} = \Lambda_{N_2}$  и  $U^{(N_1, N_2)} = b^{(N_1, N_2)}\psi$ . Таким образом, величина  $\Lambda$  не зависит от  $N$ . Легко видеть, что если при  $N \geq 3$  нормализовать  $V_N$  условием  $\int_{\Omega} U^{(N, 3)}\psi dx = 0$ , то  $U = \tilde{U}_N + V_N$  не зависит от  $N$  также.

Произвол в выборе  $N$  влечёт, что  $U \in A$ . Теорема доказана.

Приступим к построению первых членов внешнего и внутреннего разложений. В работе [2] была показана сходимость  $\lambda_\varepsilon \rightarrow \lambda_0$ ,  $\psi_\varepsilon \rightarrow \psi_0$ , где  $\lambda_\varepsilon$  – собственное значение, а  $\psi_\varepsilon$  – соответствующая нормированная в  $L_2(\Omega_\varepsilon)$  собственная функция возмущённой задачи (2) и  $\lambda_0$  – собственное значение, а  $\psi_0$  – соответствующая нормированная в  $L_2(\Omega)$  собственная функция предельной задачи (1).

Вне окрестности отверстия решение задачи (2) естественно искать в виде

$$\psi_\varepsilon^{ex}(x) = \psi_0 + o(1) \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow 0. \quad (4)$$

А в окрестности  $\omega_\varepsilon$  решение, естественно, искать зависящим от "внутренних" переменных  $\xi = x\varepsilon^{-1}$

$$\psi_\varepsilon^{in}(x) = v_\varepsilon(\xi). \quad (5)$$

Так как  $\psi_0(x) \in C^\infty(\overline{\Omega})$ , следовательно в окрестности нуля функция  $\psi_0(x)$  разлагается в ряд Тейлора

$$\psi_0(x) = \psi_0(0) + O(x).$$

Всюду далее будем считать, что  $\psi_0(0) \neq 0$ .

Переписывая теперь данное разложение в переменных  $\xi = x\varepsilon^{-1}$ , видим, что при  $\varepsilon\xi \rightarrow 0$  выполнено

$$\psi_0(x) = \psi_0(0) + O(\varepsilon\xi).$$

Тогда из требования согласования представлений (4) и (5) следует, что представление (5) надо искать в виде

$$v_\varepsilon(\xi) = v_0(\xi) + \dots, \quad (6)$$

где

$$v_0(\xi) = \psi_0(0) + o(1).$$

А асимптотику собственного значения будем строить в виде

$$\lambda_\varepsilon = \lambda_0 + \dots \quad (7)$$

Подставим (6), (7) и вместо функций  $a_{ij}(x)$ ,  $a(x)$  их разложения в ряд Тейлора в окрестности нуля в уравнение (2), перейдем к переменным  $\xi$  и соберем коэффициенты при одинаковых степенях  $\varepsilon$ , получим следующую краевую задачу

$$\begin{aligned} \varepsilon^{-2} : \Delta_\xi v_0(\xi) &= 0 & \text{при } \xi \in \mathbb{R}^n \setminus \overline{\omega}, \\ v_0 &= 0 & \text{при } \xi \in \partial\omega. \end{aligned} \quad (8)$$

Согласно ([4], 28, п. 4, теорема 3) задача (8) имеет решение с асимптотикой

$$v_0(\xi) = \psi_0(0) \left( 1 - c(\omega) \rho^{-n+2} - \sum_{p=1}^{\infty} \rho^{-2p-n+2} Z_p(\xi) \right) \quad \text{при } \rho \rightarrow \infty, \quad (9)$$

где  $c(\omega) > 0$  – гармоническая емкость области  $\omega$ .

Перепиывая, теперь (9) при  $\rho \rightarrow \infty$  в переменных  $x = \varepsilon\xi$ , получаем, что

$$v_0(\xi) = \psi_0(0) - \varepsilon^{n-2}c(\omega)\psi_0(0)r^{-n+2} + \dots, \quad \text{при } \varepsilon^{-1}r \rightarrow \infty. \quad (10)$$

Следовательно, внешнее разложение (4) должно иметь вид

$$\psi_\varepsilon^{ex}(x) = \psi_0(x) + \varepsilon^{n-2}\psi_{n-2}(x) + \dots, \quad (11)$$

где

$$\psi_{n-2}(x) = -c(\omega)\psi_0(0)r^{-n+2} + o(r^{-n+2}), \quad \text{при } r \rightarrow 0. \quad (12)$$

Тогда и асимптотику собственного значения будем строить в виде

$$\lambda_\varepsilon = \lambda_0 + \varepsilon^{n-2}\lambda_{n-2} + \dots, \quad (13)$$

Подставим (11), (13) в (2) и выпишем отдельно равенства при одинаковых степенях  $\varepsilon$ , получим краевую задачу (1) для  $\psi_0$  и следующую краевую задачу для  $\psi_{n-2}$

$$\begin{aligned} & - \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left( a_{ij}(x) \frac{\partial}{\partial x_j} \psi_{n-2}(x) \right) + a(x)\psi_{n-2}(x) = \\ & = \lambda_0\psi_{n-2}(x) + \lambda_{n-2}\psi_0(x) \quad \text{при } x \in \Omega \setminus \{0\}, \\ & \psi_{n-2} = 0 \quad \text{при } x \in \partial\Omega \end{aligned} \quad (14)$$

Функция  $\psi_0$  заранее была выбрана как решение краевой задачи (1). А из теоремы 1 следует, что существует решение задачи (14), в которой  $U = \psi_{n-2}$ ,  $F = 0$ ,  $\Lambda = \lambda_{n-2}$ , имеющее асимптотику (12). Получим наглядное представление коэффициента  $\lambda_{n-2}$ . Домножим обе части уравнения в (14) на  $\psi_0$ , дважды проинтегрируем по частям левую часть равенства по области  $\Omega \setminus S(R)$ , где  $S(R)$  –  $n$ -мерный шар радиуса  $R$  с центром в начале координат и учитывая, что функции  $\psi_0$  и  $\psi_{n-2}$  являются решением задач (1) и (14), соответственно, то получим уравнение на  $\lambda_{n-2}$

$$\lambda_{n-2} = \int_{r=R} \left( \frac{\partial\psi_0}{\partial\nu}\psi_{n-2} - \psi_0\frac{\partial\psi_{n-2}}{\partial\nu} \right) ds.$$

Переходя в этом равенстве к пределу при  $R \rightarrow 0$  и подставляя вместо  $\psi_0$  и  $\psi_{n-2}$  их асимптотики, получаем формулу для  $\lambda_{n-2}$ :

$$\lambda_{n-2} = c(\omega)\psi_0^2(0)(n-2)|\partial S(1)|, \quad (15)$$

где  $|\partial S(1)|$  – площадь поверхности сферы единичного радиуса. Итак, мы получили, что формальная асимптотика простого собственного значения

возмущенной задачи (2) имеет вид (13), где  $\lambda_{n-2}$  находится по формуле (15).

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Гадьильшин Р.Р.* Метод согласования асимптотических разложений в сингулярно возмущённой краевой задаче для оператора Лапласа. Итоги науки и техники. Совр. математика и ее приложение. Тематические обзоры. 2003. Т. 5, с. 3 – 32.
- [2] *Гадьильшин Р.Р.* Спектр эллиптических краевых задач при сингулярном возмущении граничных условий. Асимптотические свойства решений дифференциальных уравнений. Уфа: БНЦ УрО АН СССР, 1988, с. 4 – 16.
- [3] *Ильин А.М.* Согласование асимптотических разложений решений краевых задач. М.: Наука, 1989, 336 с.
- [4] *Владимиров В.С.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1981, 421 с.
- [5] *Черданцева К.И.* Асимптотическое решение эллиптического уравнения с заданной особенностью. Сборник научных статей физико-математического факультета „Ученые записки“, выпуск 12. Уфа 2011.

## CERTAIN TECHNICAL MISTAKES IN CALCULUS.

**Y. Cherniavsky, A. Mouftakhov**

Department of CS and Mathematics, Ariel University Center of Samaria,  
Israel; Sami Shamoon Engineering College, Israel

Any course in Calculus involves a big amount of technical, i.e. computational, exercises such as finding limits, derivatives, definite integrals and so on. Indeed, the purpose of studying Calculus in engineering colleges is to develop certain technical skills which the students will use in their studies of physics, electronics and other subjects of their major studies. However, all technical exercises must be considered as illustrations of certain theorems and if the students forget it, it may cause mistakes some of which are discussed in this note.



(1) Consider the limit:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 .$$

Now let us ask the students to check this fact, i.e. to substitute a close to zero number  $x$  into the expression  $\frac{\sin x}{x}$ , for example take  $x = 0.001$ . Surprisingly, instead of obtaining something close to 1, many of the students get the result 0.01745... It is not difficult to notice that this result is close to  $\frac{\pi}{180}$ . It means that many of the students often forget that in all the formulas of Calculus the angles must be taken in radians, not in degrees.

(2) Ask the students to find the derivative of  $f(x) = \ln(x - 1 - x^2)$ . Many of the students will give the answer:

$$f'(x) = \frac{1 - 2x}{x - 1 - x^2} .$$

However, the function  $f(x)$  doesn't exist since  $x - 1 - x^2 < 0$  for any real  $x$ . Therefore, the derivative also doesn't exist. Notice that the function  $g(x) = \frac{1-2x}{x-1-x^2}$  is defined for all  $x \in \mathbb{R}$  and its primitive is, of course,  $G(x) = \ln(x^2 - x + 1)$  since  $G'(x) = g(x)$  for all  $x \in \mathbb{R}$ .

(3) A lot of students are sure that when they evaluate indeterminate forms  $\left[\frac{0}{0}\right]$  or  $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$  using the l'Hôpital's rule, the non-existence of  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$  implies that  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)}$  also doesn't exist. The typical students' mistake of this kind can look like the following:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x - \cos x}{4x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(3x - \cos x)'}{(4x)'} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3 + \sin x}{4} .$$

The last limit doesn't exist and a typical wrong conclusion from this fact is that the first limit also does not exist. The correct calculation is, of course, the following:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x - \cos x}{4x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{3}{4} - \frac{\cos x}{4x} \right) = \frac{3}{4} - 0 = \frac{3}{4} .$$

Certainly, it is well known that the l'Hôpital's rule works only in one direction: if  $\frac{f(x)}{g(x)}$  is an indeterminate form  $\left[\frac{0}{0}\right]$  or  $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$  when  $x \rightarrow \infty$  and if  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$  exists, then  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)}$  also exists and  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ .

(4) Ask the students to find the value of the integral  $\int_{-1}^1 \frac{1}{x^2} dx$ . Likely you will get the following solution:  $\int_{-1}^1 \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x} \Big|_{-1}^1 = -\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{-1}\right) = -2$ . Few of the students will notice that the definite integral of a positive function can't be negative. However, even when they notice it, they try to find a computational

mistake and don't pay attention to the fact that the function  $f(x) = \frac{1}{x^2}$  is not integrable on  $[-1, 1]$  and its improper integral diverges.

(5) Ask the students to find the value of the integral  $\int_0^\pi \frac{dx}{5+\cos^2 x}$ . Of course, they will try to do it using the Newton-Leibniz formula and therefore they first find the indefinite integral  $\int \frac{dx}{5+\cos^2 x}$  using the recommended in such cases change of variable:  $u = \tan x$ ,  $dx = \frac{du}{u^2+1}$ . Then the identity  $1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$  implies

$$\frac{1}{5 + \cos^2 x} = \frac{1}{5 + \frac{1}{1+u^2}} = \frac{u^2 + 1}{5u^2 + 6}.$$

Thus, our students probably continue as follows:

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{5 + \cos^2 x} &= \int \frac{du}{5u^2 + 6} = \frac{1}{\sqrt{5}} \int \frac{d(\sqrt{5}u)}{(\sqrt{5}u)^2 + (\sqrt{6})^2} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{30}} \arctan\left(\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}}u\right) + C = \frac{1}{\sqrt{30}} \arctan\left(\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}}\tan x\right) + C. \end{aligned}$$

And finally the conclusion:

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \frac{dx}{5 + \cos^2 x} &= \frac{1}{\sqrt{30}} \arctan\left(\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}}\tan x\right) \Big|_0^\pi = \\ &= \frac{1}{\sqrt{30}} \left( \arctan\left(\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}}\tan \pi\right) - \arctan\left(\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}}\tan 0\right) \right) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{30}} (\arctan(0) - \arctan(0)) = 0. \end{aligned}$$

At this point some of the students will notice that the function  $f(x) = \frac{1}{5+\cos^2 x}$  is integrable on  $[0, \pi]$  and positive and therefore the integral can not be zero. But they will try to find a computational mistake disregarding the real reason for the mistake. The mistake in this example as well as in the previous one is caused by incorrect using of the Newton-Leibniz formula. The fundamental theorem of Calculus states: if  $f$  is a continuous function on  $[a, b]$  and  $F'(x) = f(x)$  for any  $x \in (a, b)$ , then  $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$ . (This formula is called the Newton-Leibniz formula.) In the previous example the function  $f(x) = \frac{1}{x^2}$  is not defined at  $x = 0$  and it can not be defined at  $x = 0$  to be continuous. In the current example the function  $f(x) = \frac{1}{5+\cos^2 x}$  is continuous on  $[0, \pi]$ , however  $g(x) = \frac{1}{\sqrt{30}} \arctan\left(\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}}\tan x\right)$  is not defined at  $x = \frac{\pi}{2}$ . Indeed, an antiderivative

(a primitive) of the function  $f(x) = \frac{1}{5+\cos^2 x}$  on  $(0, \pi)$  is, for example,

$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{30}} \arctan\left(\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}} \tan x\right) & \text{for } 0 \leq x < \frac{\pi}{2} \\ \frac{\pi}{2\sqrt{30}} & \text{for } x = \frac{\pi}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{30}} \arctan\left(\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}} \tan x\right) + \frac{\pi}{\sqrt{30}} & \text{for } \frac{\pi}{2} < x \leq \pi \end{cases} .$$

It can be easily checked that the defined in such a way function  $F(x)$  is smooth on  $(0, \pi)$  and  $F'(x) = f(x) = \frac{1}{5+\cos^2 x}$  for all  $x \in (0, \pi)$ . Now the Newton-Leibniz formula can be applied correctly:

$$\int_0^\pi \frac{dx}{5 + \cos^2 x} = F(\pi) - F(0) = \frac{\pi}{\sqrt{30}} - 0 = \frac{\pi}{\sqrt{30}} .$$

By the way, if we present this example to the students, it might be useful to notice that since  $\frac{1}{6} \leq \frac{1}{5+\cos^2 x} \leq \frac{1}{5}$  for any  $x \in \mathbb{R}$ , we have  $\frac{\pi}{6} \leq \int_0^\pi \frac{dx}{5+\cos^2 x} \leq \frac{\pi}{5}$ , and the result that we obtained meets this condition: indeed,  $\frac{\pi}{6} < \frac{\pi}{\sqrt{30}} < \frac{\pi}{5}$ .

The presented examples, which are taken from the teaching practice of the authors, show that even in the tasks that are usually considered as purely technical we should never forget about the main point of the subject we work with and always check the correctness of using certain methods and formulas.