

***МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ  
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ***

**ГОУ ВПО Башкирский государственный университет**

**“ФУНДАМЕНТАЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА  
И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ В ЕСТЕСТВОЗНАНИИ”**

**Международная школа-конференция  
для студентов, аспирантов и молодых ученых  
3–7 октября 2010 г.**

**М.А. Шамсутдинов  
В.Н. Назаров  
А.Т. Харисов**

# **Введение в теорию доменных стенок и солитонов в ферромагнетиках**

**УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ**

Уфа – 2010

УДК 537.611.3: 537.62: 530.182

ББК 22.334: 22.311

Ш 19

*Настоящее издание составлено на основе цикла лекций, прочитанных авторами на «Международной школе-конференции для студентов, аспирантов и молодых ученых “Фундаментальная математика и её приложения в естествознании”», проходившей 3 – 7 октября 2010 г. при финансовой поддержке РФФИ (проект № 10-01-06828\_моб\_г) и за счет внебюджетных средств БашГУ.*

***Редакционная коллегия:***

д-р хим. наук, проф. Р.Ф. Талипов (проректор по науке БашГУ);

д-р физ.-мат. наук, проф. Б.Н. Хабибуллин (*редактор*);

д-р физ.-мат. наук, проф. Р.М. Вахитов (*отв. редактор*);

д-р физ.-мат. наук, проф. Е.Г. Екомасов (*редактор*).

**Шамсутдинов М.А., Назаров В.Н., Харисов А.Т.**

Введение в теорию доменных стенок и солитонов в ферромагнетиках. Учебное пособие. Уфа: БашГУ, 2010. – 148 с.

В учебном пособии излагаются основы теории доменной стенки и солитонов в ферромагнетиках. Рассматриваются свойства топологических и динамических солитонов в одно- и двухслойных ферромагнитных материалах.

Пособие предназначается для студентов, магистрантов и аспирантов, специализирующихся в области физики конденсированного состояния, физики магнитных явлений, теоретической и математической физики.

© М.А. Шамсутдинов, В.Н. Назаров, А.Т. Харисов, 2010 г.

© БашГУ, 2010 г.

## ВВЕДЕНИЕ

Учебное пособие посвящено изложению основ нелинейной динамики доменных стенок и магнитных солитонов в ферромагнетиках.

С точки зрения солитонной физики уединенная 180-градусная доменная граница представляет собой односолитонное образование, называемое кинком или топологическим солитоном. Две сильно взаимодействующие доменные стенки представляют собой двухсолитонное образование. К таким образованиям относятся локализованные в пространстве магнитные неоднородности в виде динамической ноль-градусной доменной стенки и динамической 360-градусной доменной стенки. 360-градусную доменную стенку можно рассматривать как зародыш метастабильной фазы в магнитном поле в недрах стабильной. Напротив, ноль-градусную стенку – как зародыш устойчивой фазы в недрах метастабильной. С точки зрения нелинейной физики динамическая 360-градусная доменная стенка представляет собой магнитный  $4\pi$ -вобблер или, по-другому, магнитную неоднородность, образованную двумя сильно взаимодействующими солитонами (180-градусными стенками разной полярности) с одинаковыми топологическими зарядами. Динамическая ноль-градусная доменная стенка представляет собой магнитный бризер, образованный сильно взаимодействующими солитонами с противоположными топологическими зарядами (180-градусными стенками одинаковой полярности).

Необходимость анализа динамики магнитных солитонов с учетом влияния различных внешних воздействий обусловлена использованием временных и пространственных изменений намагниченности во многих технических устройствах, в том числе в устройствах магнитной микроэлектроники. Лежащие в их основе явления связаны с сугубо нелинейными порогами намагниченности на значительные углы.

Изложение динамики намагниченности базируется на результатах известных исследований уравнений Ландау–Лифшица для легкоосных ферромагнетиков, синус-Гордона. Учет диссипации и внешних воздействий основан на использовании физических законов изменения энергии и числа магнонов, входящих в магнитную неоднородность.

## ГЛАВА I. СТРУКТУРА И ДИНАМИКА ДОМЕННЫХ ГРАНИЦ

Магнитный момент ферромагнитного образца в отсутствие внешнего магнитного поля может быть равным нулю. При этом говорят, что ферромагнетик находится в размагниченном состоянии. Такое явление обусловлено разбиением образца на макроскопические области (домены), каждая из которых намагничена до насыщения, причем направление векторов намагниченности в каждой такой области различно. Между соседними доменами существует переходной слой (называемый доменной границей или доменной стенкой), в котором магнитный момент постепенно изменяет свое направление. Если к образцу, находящемуся в размагниченном состоянии, приложить внешнее магнитное поле, то с его увеличением ферромагнитное тело будет намагничиваться.

Намагничивание, например, ферритов-гранатов и редкоземельных ортоферритов, которые на протяжении многих десятилетий остаются широко используемыми в технике материалами, осуществляется преимущественно движением доменных границ.

Начало теоретическому изучению доменных границ было положено в работах [Bloch, 1932; Landau, Lifshitz, 1935; Ландау, Лифшиц, 1969; Neel, 1944] (см. также [Киттель, 1951]), в которых впервые была получена зависимость структуры стенки от материальных параметров в одномерной модели. Уравнение движения намагниченности было предложено в работе [Landau, Lifshitz, 1935; Ландау, Лифшиц, 1969] и впоследствии было названо уравнением Ландау–Лифшица. Это уравнение лежит в основе не только динамики доменных стенок, но и нелинейной динамики различных магнитных неоднородностей.

При исследовании динамических свойств магнитоупорядоченных кристаллов были получены многочисленные точные решения нелинейных уравнений движения для вектора намагниченности – уравнений Ландау–Лифшица. Для основных классов магнетиков – ферромагнетиков [Enz, 1961; Walker, 1963; Ахиезер, Боровик, 1967; Елеонский и др., 1976; 1978; 1979; Бабич, Косевич, 1980; Косевич, 1982] и антиферромагнетиков со слабым ферромагнетизмом [Звездин, 1979; Барьяхтар В.Г. и др., 1979; 1980;

Елеонский и др., 1980; 1981; Барьяхтар В.Г. и др., 1985] – найдены решения, описывающие динамические и топологические солитоны, нелинейные периодические волны намагниченности и т.д. (см. список литературы в книге [Косевич и др., 1983]). Для простейших моделей одноподрешеточного ферромагнетика в рамках метода обратной задачи теории рассеяния доказана точная интегрируемость уравнений Ландау–Лифшица, что позволило построить многосолитонные решения и проанализировать процессы взаимодействия солитонов [Боровик, 1978]. В работах [Боровик, Робук, 1981] и [Sklyanin, 1979] доказано, что уравнения Ландау–Лифшица для одномерного двухосного ферромагнетика являются полностью интегрируемой динамической системой. В случае кубических ферромагнетиков полная интегрируемость не доказана, так как для полной интегрируемости существенно, что свободная энергия является однородной квадратичной формой относительно компонент намагниченности [Елеонский, 1983].

Топологические солитоны намагниченности, то есть доменные границы, имеют предельную скорость стационарного движения. Существование предельной скорости доменных границ в ферромагнетиках теоретически предсказано Уокером [Walker, 1963]. Ахиезер и Боровик показали, что скорость волны поворота магнитных моментов в ферромагнетиках и легкоплоскостных ферромагнетиках ограничена фазовой скоростью спиновых волн [Ахиезер, Боровик, 1967б]. Вопрос о возможности достижения этой предельной скорости [Enz, 1961] долгое время оставался дискуссионным. Предельная скорость доменных границ, обусловленная указанным выше механизмом, впервые была обнаружена в ортоферрите иттрия [Четкин, Де ла Кампа, 1978].

Как известно, уравнение Ландау–Лифшица как для ферромагнетиков, так и для антиферромагнетиков при определенных условиях сводится к уравнению синус-Гордона (см., например: [Звездин, 1979; Барьяхтар В.Г. и др., 1980; Елеонский и др., 1980; 1981; Барьяхтар В.Г. и др., 1985]). Из Лоренц-инвариантности этого уравнения следует существование предельной скорости стационарного движения 180-градусной доменной стенки. Экспериментально определенная величина этой скорости в слабом ферромагнетике  $\text{YFeO}_3$  совпадает с минимальной фазовой скоростью спиновых волн на линейном участке их закона дисперсии и составляет  $c \approx 2 \cdot 10^4$  м/с

[Барьяхтар В.Г. и др., 1985; Четкин, Де ла Кампа, 1978]. Известно, что лоренц-инвариантность уравнений для волн является следствием приближений, допускаемых при решении уравнений Ландау–Лифшица [Звездин, 1979]. Нарушение указанной инвариантности имеет место в узкой окрестности вблизи предельной скорости [Звездин, 1979]. При этом максимальная скорость движения стенки оказывается очень близкой к минимальной фазовой скорости спиновых волн.

Изучение динамики магнитных неоднородностей (доменных границ, доменов, магнитных вихрей и т.д.) представляется в настоящее время одной из важнейших проблем, при решении которой используются методы микромагнетизма [Браун, 1979]. Подробный обзор теоретических и экспериментальных работ по изучению доменной структуры можно найти в ряде известных книг [Вонсовский, 1971; Hubert, Schäfer, 1998; Зайкова и др., 1992; Рандошкин, Червоненкис, 1990] и в обзоре [Кандаурова, 2002]. Теория доменных стенок и обусловленных ими эффектов изложена в монографиях [Хуберт, 1977; Лисовский, 1979; Малоземов, Слонзуски, 1982; Филиппов, Танкеев, 1987; Фарзтдинов, 1981; 1988] и обзорах [Привороцкий, 1972; Барьяхтар В.Г. и др., 1988; Волков, Боков, 2008], а также в учебных пособиях [Кандаурова, Оноприенко, 1977; 1986; Филиппов, 1989].

Прежде чем перейти к рассмотрению динамики магнитных неоднородностей, изложим основные положения феноменологической теории магнетизма, а также приведем уравнение магнитодинамики (ферромагнитодинамики), которое описывает движение вектора намагниченности под действием некоторого эффективного магнитного поля, возникающего из-за целого ряда взаимодействий, существующих в магнитоупорядоченных кристаллах. Рассмотрению этих вопросов, кроме перечисленных выше источников, посвящены множество других, например [Ахизер и др., 1967; Ландау, Лифшиц, 1992; Белов и др., 1979; Тикадзуми, 1987; Крупичка, 1976; Туров и др., 2001]. Положения феноменологической теории магнетизма, излагаемые ниже, основаны на материалах вышеперечисленных источников и являются общепринятыми, в связи с чем приводятся без подробных ссылок. Подробные ссылки можно найти в монографии [Шамсутдинов и др., 2009].

## 1.1. Эффективное магнитное поле

**Магнитное упорядочение. Обменное поле.** Магнетизм твердых тел в основном обязан присутствию в них атомов переходных элементов с не равными нулю магнитными моментами. Это атомы или ионы элементов группы железа, редкоземельных элементов и элементов группы актиноидов. Например, в группе элементов железа заполнение электронами 3d-оболочки атома происходит так, что благодаря электрон-электронному взаимодействию магнитные моменты (спины) электронов располагаются параллельно, образуя отличный от нуля магнитный момент  $\mu_j$  ( $\mu_j$  – магнитный момент  $j$ -го атома). В определенных условиях имеет место магнитное, самопроизвольное упорядочение атомных моментов  $\mu_j$  в кристаллах. Различают следующие типы магнитного упорядочения: ферромагнитное, антиферромагнитное, ферримагнитное. Ферромагнитное упорядочение характеризуется параллельным расположением атомных моментов  $\mu_j$  (Fe, Co, Ni и т.д.).

Антиферромагнитное упорядочение характеризуется антипараллельным расположением атомных моментов. При коллинеарном расположении магнитных моментов, образующих между собой угол, равный  $180^\circ$ , имеет место чисто антиферромагнитное состояние (Mn, Sm, Nd и т.д.). В случае неколлинеарного расположения магнитных моментов соседних атомов, образующих угол, отличный от  $180^\circ$ , имеет место неколлинеарное антиферромагнитное состояние со слабым ферромагнетизмом ( $\alpha$ -Fe<sub>2</sub>O<sub>3</sub>, YFeO<sub>3</sub> и т.д.).

Ферримагнитное упорядочение характеризуется существованием нескольких неэквивалентных магнитных подрешеток с антипараллельным расположением магнитных моментов. Неэквивалентность магнитных подрешеток приводит к существованию отличного от нуля суммарного магнитного момента и может осуществляться как за счет разного числа магнитных ионов в этих подрешетках, так и за счет разной величины атомных моментов  $\mu_j$  магнитных атомов, входящих в данный ферримагнетик (Y<sub>3</sub>Fe<sub>5</sub>O<sub>12</sub>, BaFe<sub>12</sub>O<sub>19</sub> и т.д.).

Взаимодействием, ответственным за упорядочение атомных моментов в кристаллах, является обменное взаимодействие. Существует несколько типов обменных взаимодействий: прямое обменное взаимодействие, косвенное или «сверхобменное» взаимодействие, косвенное обменное взаимодействие через электроны проводимости. Перечисленные взаимодействия носят сложный квантовомеханический характер и по природе являются кулоновскими. Энергия обменного взаимодействия зависит от расстояния между атомами и от взаимной ориентации их магнитных моментов  $\boldsymbol{\mu}_j$ .

В дальнейшем ограничимся микромагнитным описанием магнетиков, то есть описанием в приближении сплошной среды. Введем локальную намагниченность (магнитный момент на единицу объема) в случае ферромагнитного упорядочения

$$\mathbf{M} = \sum_j \boldsymbol{\mu}_j .$$

Для однородных и слабо неоднородных распределений намагниченностей  $\boldsymbol{\mu}_j$  (когда масштаб неоднородностей  $\lambda \gg a_0$  – межатомного расстояния) можно перейти к описанию магнетика в приближении сплошной среды, считая намагниченность  $\mathbf{M}(\mathbf{r})$  непрерывной функцией координат.

В приближении сплошной среды обменная энергия, ответственная за ферромагнетизм, в случае одноосных ферромагнетиков имеет вид

$$F_{обм} = -A_0 \mathbf{m}^2 + A_1 \left( \frac{\partial \mathbf{m}}{\partial z} \right)^2 + A_2 \left[ \left( \frac{\partial \mathbf{m}}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \mathbf{m}}{\partial y} \right)^2 \right], \quad (1.1)$$

где  $A_0$  и  $A_1, A_2$  – константы однородного и неоднородного обменного взаимодействий;  $\mathbf{m} = \mathbf{M}/M_0$ ,  $\mathbf{m}^2 = 1$ ,  $|\mathbf{M}| = M_0$  – намагниченность насыщения.

В кубических кристаллах обменная энергия изотропна и в (1.1) следует положить  $A_1 = A_2 = A$ . Обменное взаимодействие определяет некоторое эффективное обменное поле, с которым намагниченность действует сама на себя. Это поле вычисляется следующим образом:

$$\mathbf{H}_{обм} = -\frac{1}{M_0} \frac{\delta F_{обм}}{\delta \mathbf{m}} = -\frac{1}{M_0} \left\{ \frac{\partial F_{обм}}{\partial \mathbf{m}} - \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial F_{обм}}{\partial \left( \frac{\partial \mathbf{m}}{\partial x_i} \right)} \right) \right\}. \quad (1.2)$$

В случае кубического ферромагнетика имеем

$$\mathbf{H}_{обм} = \frac{2A_0}{M_0} \mathbf{m} + \frac{2A}{M_0} \left( \frac{\partial^2 \mathbf{m}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{m}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{m}}{\partial z^2} \right). \quad (1.3)$$

Первый член представляет собой обычное молекулярное поле Вейсса  $H_E = 2A_0/M_0$ . Члены с производными, приводящими к увеличению обменной энергии в состоянии с неоднородным распределением намагниченности по сравнению с однородным, определяют существование так называемой пространственной дисперсии. Величина обменного поля  $H_E$ , по природе кулоновского, является очень большой:  $H_E \sim 10^6 - 10^7 \text{ Э}$ , а определяющие его константы  $A_0 \cong 10^8 - 10^9 \text{ Дж/м}^3$ ,  $A \cong A_0 a_0^2 \cong 10^{-12} - 10^{-11} \text{ Дж/м}$ .

**Поле магнитокристаллографической анизотропии.** Как было сказано выше, обменное взаимодействие определяет зависимость энергии магнетика от взаимной ориентации его магнитных моментов. Вместе с тем существует зависимость энергии магнетика от ориентации намагниченности  $\mathbf{M}$  относительно кристаллографических осей. Другими словами, существует явление магнитокристаллической анизотропии, которое состоит в том, что ориентация вектора  $\mathbf{M}$  в одних направлениях кристалла будет энергетически более выгодной, чем в других. Главным источником магнитокристаллической анизотропии является так называемая одноионная анизотропия. Она обусловлена тем, что зависимостью энергии от направления магнитного момента обладает уже отдельный магнитный ион, находящийся в электрическом поле кристаллической решетки. Кроме того, в магнитную анизотропию может внести вклад диполь-дипольное взаимодействие магнитных моментов атомов или ионов, а также анизотропное обменное взаимодействие, обусловленное существованием отличного от нуля орбитального момента атома.

Для кубических кристаллов зависимость энергии от направления намагниченности  $\mathbf{M}$  можно представить в форме

$$F_{an} = K(m_x^2 m_y^2 + m_x^2 m_z^2 + m_y^2 m_z^2), \quad (1.4)$$

где  $K$  – константа магнитной анизотропии.

В случае одноосного кристалла имеем

$$F_{an} = -K m_z^2 = K(m_x^2 + m_y^2) + \text{const}. \quad (1.5)$$

Энергия, определяемая (1.4) или (1.5), называется энергией магнитной анизотропии. Плотности энергии анизотропии вида (1.4) и вида (1.5) являются лишь первыми членами разложения свободной энергии по компонентам намагниченности. При необходимости можно учитывать члены и более высокого порядка.

С магнитокристаллической анизотропией связано поле магнитной анизотропии

$$\mathbf{H}_a = -\frac{1}{M_0} \frac{\partial F_{an}}{\partial \mathbf{m}}. \quad (1.6)$$

**Ось легкого намагничивания.** Направление, в котором энергия анизотропии минимальна, называется осью легкого намагничивания (ОЛН). В этом направлении кристалл может быть намагничен до насыщения при более низких внешних магнитных полях. Например, в случае одноосного кристалла при  $K > 0$  энергия минимальна при ориентации вектора намагниченности вдоль оси симметрии кристалла  $\mathbf{c}$ . В этом случае ось  $oz$ , направленная вдоль оси симметрии кристалла  $\mathbf{c}$ , определяет направление оси легкого намагничивания. Величина поля магнитной анизотропии, удерживающая намагниченность вдоль оси симметрии  $\mathbf{c}$ , равна

$$H_a = \frac{2K}{M_0}. \quad (1.7)$$

**Ось трудного намагничивания.** Направление, в котором энергия анизотропии максимальна, называется осью трудного намагничивания. В этом направлении кристалл может быть намагничен в максимальном (для данного кристалла) внешнем магнитном поле.

Плотность энергии магнитной анизотропии в общем случае можно представить в виде разложения в ряд по компонентам вектора намагниченности

$$F_{an} = K_{ij}^{(1)} m_i m_j + K_{ijnl}^{(2)} m_i m_j m_n m_l + \dots,$$

где  $K_{ij}^{(1)}$ ,  $K_{ijnl}^{(2)}$  – первые и вторые константы магнитной анизотропии.

Значения констант магнитной анизотропии могут изменяться в широких пределах ( $10^2 - 10^6$  Дж/м<sup>3</sup>) в зависимости от состава и структуры кристалла, его температуры. Так, для гексагонального кобальта первая константа в области низких гелиевых температур положительна, а в области комнатных температур – отрицательна. Таким образом, с изменением температуры может изменяться не только величина константы магнитной анизотропии, но и ее знак.

**Магнитоориентационные фазовые переходы.** При изменении константы магнитной анизотропии может изменяться и ориентация вектора намагниченности  $\mathbf{m}$ . Например, в случае одноосного кристалла при отрицательной константе анизотропии ( $K < 0$ ) энергия  $F_{ан}$  минимальна не в случае  $\mathbf{m} \parallel \mathbf{c}$ , а при ориентации намагниченности в направлении, перпендикулярном оси симметрии  $\mathbf{c}$ , то есть при  $\mathbf{m} \perp \mathbf{c}$ .

Таким образом, с изменением модуля и знака констант магнитной анизотропии может измениться направление намагниченности, то есть произойти магнитоориентационный или спин-переориентационный переход. Такой переход может происходить спонтанно (при изменении температуры) или вынужденно под влиянием магнитного поля или упругих напряжений. Эти переходы могут быть фазовыми переходами 1-го и 2-го рода.

Таким образом, в случае положительной константы магнитной одноосной анизотропии ( $K > 0$ ) намагниченность в основном однородном состоянии ориентируется вдоль оси легкого намагничивания, совпадающей с осью симметрии кристалла  $\mathbf{c}$ . В этом случае имеет место анизотропия типа «легкая ось». Ферромагнетики с  $K > 0$  будем называть легкоосными или одноосными ферромагнетиками.

При отрицательной константе анизотропии ( $K < 0$ ) вектор намагниченности располагается в плоскости  $xу$ , перпендикулярной оси симметрии кристалла  $\mathbf{c}$ . В этом случае имеет место анизотропия типа «плоскость легкого намагничивания» или, другими словами, «легкая плоскость». Ферромагнетики с  $K < 0$  будем называть легкоплоскостными ферромагнетиками.

При отсутствии анизотропии в легкой плоскости, перпендикулярной оси  $\mathbf{c}$ , направление равновесной ориентации вектора намагниченности остается неопределенным. При наличии ромбической, тетрагональной и т.д. магнитной анизотропии в указанной «легкой» плоскости ситуация меняется и, как будет показано далее, появляется направление равновесной ориентации намагниченности. В этом случае имеет место не изотропная, а анизотропная «легкая» плоскость.

**Магнитостатическое поле.** Магнитостатическую энергию полей рассеяния, учитывающую тот факт, что магнетик может создавать магнитное поле, можно записать в форме

$$W_m = \int F_m dV, \quad (1.8)$$

здесь

$$F_m = -\frac{M_0}{2} \mathbf{H}_m \mathbf{m}$$

при интегрировании в (1.8) по объему образца  $V_0$  и

$$F_m = \frac{\mathbf{H}_m^2}{8\pi}$$

при интегрировании в (1.8) по всему пространству  $V$ ;  $\mathbf{H}_m$  – магнитостатическое поле, определяемое в случае диэлектриков из уравнений магнито-статики

$$\text{rot } \mathbf{H}_m = 0, \quad \text{div } \mathbf{H}_m = -4\pi M_0 \text{div } \mathbf{m}. \quad (1.9)$$

Таким образом, если дивергенция намагниченности отлична от нуля, то возникают источники магнитного поля, так называемые поля рассеяния. Полная энергия этих полей (1.8) определяется путем интегрирования по объему образца  $V_0$  или, соответственно, по всему пространству  $V$ . Полная энергия (1.8), обусловленная существованием полей рассеяния, является положительной величиной. В образцах конечных размеров существование полей рассеяния приводит к энергетической невыгодности однородно намагниченного состояния в отсутствие внешнего поля. В результате такой

образец разбивается на области (домены) с различными направлениями однородной намагниченности, разделенные доменными стенками.

Энергия магнетика во внешнем магнитном поле определяется выражением

$$F_H = -M_0 \mathbf{m} \mathbf{H}, \quad (1.10)$$

где  $\mathbf{H}$  – внешнее магнитное поле.

При наличии только зеемановского взаимодействия, определяемого (1.10), напряженность магнитного поля  $\mathbf{H}$  может быть определена так

$$\mathbf{H} = -\frac{\partial F_H}{\partial \mathbf{M}} = -\frac{1}{M_0} \frac{\partial F_H}{\partial \mathbf{m}}. \quad (1.11)$$

**Эффективное магнитное поле.** Теперь учтем, что в ферромагнетике из-за целого ряда взаимодействий, которые подробно описаны выше, плотность энергии  $F$  зависит от намагниченности  $\mathbf{M}$  более сложным образом. В этом случае производная  $F$  по  $\mathbf{M}$  будет определять уже не внешнее магнитное поле, а некоторое эффективное поле  $\mathbf{H}_{eff}$ . Однако магнитное состояние ферромагнетика не всегда может быть охарактеризовано только намагниченностью  $\mathbf{M}$ . Действительно, согласно сказанному выше, обменное взаимодействие в ферромагнетиках приводит к параллельной ориентации элементарных магнитных моментов. Нарушение такого упорядочения моментов, как было сказано выше, ведет к увеличению энергии обменного взаимодействия (см. выражение (1.1)).

Если бы  $F$  зависела только от  $\mathbf{M}$ , то эффективное поле, о котором речь шла выше, можно было бы определить как

$$\mathbf{H}_{eff} = -\frac{\partial F}{\partial \mathbf{M}} = -\frac{1}{M_0} \frac{\partial F}{\partial \mathbf{m}}.$$

Однако зависимость  $F$  от градиентов намагниченности приводит к необходимости замены простой производной  $\partial F / \partial \mathbf{M}$  на вариационную производную

$$\frac{\delta F}{\delta \mathbf{M}} = \frac{\partial F}{\partial \mathbf{M}} - \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial F}{\partial \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial x_j}} = \frac{1}{M_0} \frac{\delta F}{\delta \mathbf{m}}. \quad (1.12)$$

Таким образом, эффективное поле, действующее на намагниченность, в общем случае определяется следующим образом:

$$\mathbf{H}_{eff} = -\frac{\delta F}{\delta \mathbf{M}} = -\frac{1}{M_0} \frac{\delta F}{\delta \mathbf{m}}, \quad (1.13)$$

где  $F = F_{обм} + F_{ан} + F_m + F_H$  – суммарная плотность энергии ферромагнетика. Выражения для эффективного поля  $\mathbf{H}_{eff}$  конкретных ферромагнитных кристаллов, как было показано выше, могут состоять из полей, связанных с внешними, магнитостатическими, обменными полями и полями магнитокристаллографической анизотропии.

## 1.2. Уравнение движения для вектора намагниченности

В рамках феноменологического описания динамики намагниченности обычно исходят из уравнения Ландау–Лифшица, которое основывается на фундаментальном законе механики – законе изменения момента импульса  $\mathbf{J}$  [Браун, 1979],

$$\frac{d\mathbf{J}}{dt} = \mathbf{T}, \quad (1.14)$$

который утверждает, что скорость изменения момента импульса равна вращающему моменту  $\mathbf{T}$  (моменту силы). Моментом импульса единицы объема магнитной среды, положение которого характеризуется радиус-вектором  $\mathbf{r}$ , является механический момент (спин) электронов в единице объема с учетом поправок на орбитальное движение. Он отличается от вектора намагниченности  $\mathbf{M} = -\gamma\mathbf{J}$  только постоянным коэффициентом пропорциональности, равным  $-\gamma$ . Коэффициент  $\gamma > 0$ , значение которого находится из эксперимента, называется гиромагнитным отношением.

Таким образом, основное уравнение движения для вектора намагниченности  $\mathbf{M}$  можно записать в виде

$$-\frac{1}{\gamma} \frac{d\mathbf{M}}{dt} = \mathbf{T}. \quad (1.15)$$

Можно считать, что любой вращающий момент  $\mathbf{T}$ , действующий на магнитный момент  $\mathbf{M}$ , обусловлен эффективным полем  $\mathbf{H}_{eff}$ ,

$$\mathbf{T} = [\mathbf{M}\mathbf{H}_{eff}],$$

где  $\mathbf{H}_{eff}$  – эффективное поле, действующее на магнитные моменты в образце, определяемое (1.13). Тогда из уравнения (1.15) имеем

$$\frac{d\mathbf{M}}{dt} = -\gamma[\mathbf{M}\mathbf{H}_{eff}], \quad \gamma > 0. \quad (1.16)$$

Если умножить обе части этого уравнения на  $\mathbf{M}$ , то получим

$$\frac{d\mathbf{M}^2}{dt} = 0 \Rightarrow \mathbf{M}^2 = \text{const},$$

то есть длина вектора  $\mathbf{M}$  сохраняется со временем. Аналогично из (1.16) следует, что сохраняется и проекция  $\mathbf{M}$  на направление эффективного магнитного поля  $\mathbf{H}_{eff}$ . Следовательно, изменяются только компоненты  $M_x$ ,  $M_y$ . Все это означает, что намагниченность  $\mathbf{M}$  непрерывно прецессирует вокруг направления эффективного магнитного поля  $\mathbf{H}_{eff}$ .

**Учет затухания.** Прецессия  $\mathbf{M}$ , описанная выше, возможна только, если запасенная в магнитной системе энергия не рассеивается в окружающее пространство. В противном случае должно происходить затухание прецессионного движения вектора намагниченности. За затухание могут быть ответственны как взаимодействия в самой спин-системе, так и взаимодействие спиновой системы с другими системами твердого тела, например, с упругими колебаниями кристаллической решетки, с электронами проводимости и т.д.

Учет затухания видоизменяет уравнения движения вектора  $\mathbf{M}$ . Формально затухание должно приводить к тому, что раствор конуса, по поверхности которого прецессирует намагниченность, должен уменьшаться (см. рис. 1.1). Это означает, что уравнение движения должно содержать слагаемое (релаксационное слагаемое), характеризующее вращательный момент, стремящийся возвратить намагниченность в направление, параллельное  $\mathbf{H}_{eff}$ . Это направление характеризует равновесное расположение намагниченности, в котором  $\mathbf{M}$  не зависит от времени, то есть  $d\mathbf{M}/dt = 0$ , и согласно (1.16)

$$[\mathbf{M}\mathbf{H}_{eff}] = 0.$$

Если учесть, что в общем случае  $\mathbf{M} = \mathbf{M}(\mathbf{r})$ , то уравнение (1.16) позволяет найти равновесное статическое распределение намагниченности в кристалле.

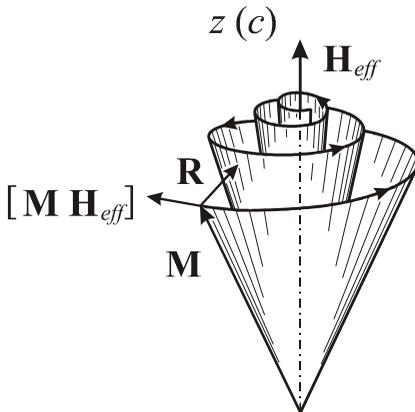
Итак, с одной стороны, необходимо, чтобы вращательный момент  $\mathbf{R}$ , связанный с затуханием (релаксацией) магнитного момента, имел направление, указанное на рис. 1.1, а с другой стороны, необходимо, чтобы наличие этого слагаемого не нарушало условия  $\mathbf{M}^2 = \text{const}$ . Последнее возможно, если

$$(\mathbf{R}\mathbf{M}) = 0. \quad (1.17)$$

Этим требованиям удовлетворяет вращательный момент  $\mathbf{R}$ , выбранный, например, в виде

$$\mathbf{R} = \frac{\alpha}{M_0} [\mathbf{M}\dot{\mathbf{M}}], \quad \alpha > 0. \quad (1.18)$$

Здесь  $\alpha$  – феноменологический параметр затухания,  $\dot{\mathbf{M}} = d\mathbf{M}/dt$ . Уравнение (1.18) называется уравнением Гильберта. Оно очень удобно при рассмотрении динамики доменных стенок.



**Рис. 1.1.** Схема, иллюстрирующая затухание прецессионного движения намагниченности  $\mathbf{M}$ . Векторное произведение  $[\mathbf{M}\mathbf{H}_{eff}]$  направлено по касательной к окружности основания конуса

Таким образом, с учетом затухания уравнение (1.14) принимает вид (см., например, [Гуревич, Мелков, 1994])

$$\dot{\mathbf{M}} = -\gamma[\mathbf{M}\mathbf{H}_{eff}] + \frac{\alpha}{M_0} [\mathbf{M}\dot{\mathbf{M}}]. \quad (1.19)$$

Путем умножения (1.18) или (1.19) на  $\mathbf{M}$  можно убедиться, что квадрат вектора намагниченности остается постоянным (не зависящим от времени). Однако  $z$ -компонента намагниченности теперь не сохраняется, что связано

с учетом затухания прецессии, то есть поворотом  $\mathbf{M}$  к направлению  $\mathbf{H}_{eff} \parallel z$ .

Уравнение движения для намагниченности (1.19) называется уравнением Ландау–Лифшица–Гильберта. Безразмерный параметр затухания  $\alpha$  рассматривается здесь как феноменологический параметр, который может быть определен из экспериментальных данных. Феноменологические уравнения (1.19), очевидно, могут быть строго обоснованы, исходя из микроскопических представлений. Однако следует заметить, что такого обоснования до сих пор не существует. Тем не менее уравнение Ландау–Лифшица–Гильберта имеет достаточно широкую область применимости, что подтверждается многочисленными экспериментальными данными по исследованию динамических, в частности высокочастотных, свойств ферромагнетиков: ферромагнитный резонанс, распространение волн намагниченности, динамика доменных стенок и др.

При исследовании структуры доменных стенок, а также их динамического поведения, удобно пользоваться уравнениями движения намагниченности в сферической системе координат. Поскольку в ферромагнетиках длина вектора  $\mathbf{M}$  остается постоянной, то конец этого вектора описывает в трехмерном пространстве сферическую поверхность. Ориентацию  $\mathbf{M}$  в пространстве можно охарактеризовать только двумя переменными: азимутальным углом  $\varphi$ , отсчитываемым

от оси  $x$  системы координат  $xyz$ , и полярным углом  $\theta$ , отсчитываемым от оси  $z$  (рис. 1.2). Будем считать, что полярная ось совпадает с направлением намагниченности. Компоненты  $M_x$ ,  $M_y$  и  $M_z$  вектора  $\mathbf{M}$  в сферических координатах  $M_0$ ,  $\theta$ ,  $\varphi$  определяется согласно

$$\begin{aligned} M_x &= M_0 \sin \theta \cos \varphi, \\ M_y &= M_0 \sin \theta \sin \varphi, \\ M_z &= M_0 \cos \theta. \end{aligned} \quad (1.20)$$

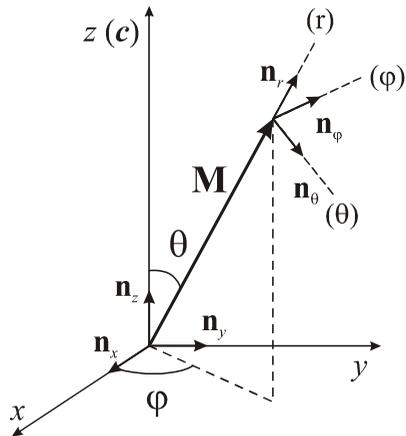


Рис. 1.2. Система координат

Отсюда видно, что в сферической системе координат в силу условия  $\mathbf{M}^2 = M_0^2 = \text{const}$  будут иметься только два уравнения, описывающих изменение углов  $\theta$  и  $\varphi$ .

Разложение вектора намагниченности по ортам сферической системы координат и сами орты определяются формулами:

$$\begin{aligned}\mathbf{M} &= M_0 \mathbf{n}_r, \\ \mathbf{n}_r &= (\mathbf{n}_x \cos \varphi + \mathbf{n}_y \sin \varphi) \sin \theta + \mathbf{n}_z \cos \theta, \\ \mathbf{n}_\theta &= (\mathbf{n}_x \cos \varphi + \mathbf{n}_y \sin \varphi) \cos \theta - \mathbf{n}_z \sin \theta, \\ \mathbf{n}_\varphi &= -\mathbf{n}_x \sin \varphi + \mathbf{n}_y \cos \varphi,\end{aligned}$$

где  $\mathbf{n}_x, \mathbf{n}_y, \mathbf{n}_z$  – орты декартовой системы координат, для которых имеет место равенство  $\mathbf{n}_z = [\mathbf{n}_x, \mathbf{n}_y]$ . Используя определения  $\mathbf{n}_r, \mathbf{n}_\theta$  и  $\mathbf{n}_\varphi$ , можно показать, что

$$[\mathbf{n}_r, \mathbf{n}_\theta] = \mathbf{n}_\varphi.$$

Скорость изменения вектора намагниченности с учетом  $M_0 = \text{const}$  можно представить в виде

$$\dot{\mathbf{M}} = M_0 \dot{\theta} \mathbf{n}_\theta + M_0 \dot{\varphi} \sin \theta \mathbf{n}_\varphi.$$

Эффективное поле определим как

$$\mathbf{H}_{eff} = -\frac{\partial F}{\partial \mathbf{M}} = -\left( \frac{\partial F}{\partial M_x} \mathbf{n}_x + \frac{\partial F}{\partial M_y} \mathbf{n}_y + \frac{\partial F}{\partial M_z} \mathbf{n}_z \right).$$

Переходя к переменным сферической системы, имеем

$$\mathbf{H}_{eff} = H_M \mathbf{n}_r + H_\theta \mathbf{n}_\theta + H_\varphi \mathbf{n}_\varphi,$$

где

$$H_M = -\frac{\partial F}{\partial M_0}, \quad H_\theta = -\frac{1}{M_0} \frac{\partial F}{\partial \theta}, \quad H_\varphi = -\frac{1}{M_0 \sin \theta} \frac{\partial F}{\partial \varphi}.$$

Вычисляя векторные произведения, входящие в уравнение Ландау–Лифшица–Гильберта (1.19), получим

$$\begin{aligned}[\mathbf{M} \mathbf{H}_{eff}] &= M_0 (H_\theta \mathbf{n}_\varphi - H_\varphi \mathbf{n}_\theta), \\ [\mathbf{M} \dot{\mathbf{M}}] &= M_0^2 (\dot{\theta} \mathbf{n}_\varphi - \dot{\varphi} \sin \theta \mathbf{n}_\theta).\end{aligned}$$

Подставляя полученные выражения для  $\dot{\mathbf{M}}$ ,  $[\mathbf{M}\mathbf{H}_{eff}]$  и  $[\mathbf{M}\dot{\mathbf{M}}]$  в уравнение Ландау–Лифшица–Гильберта (1.19), имеем следующее соотношение:

$$\dot{\theta}\mathbf{n}_\theta + \dot{\phi}\sin\theta\mathbf{n}_\phi = \gamma(H_\phi\mathbf{n}_\theta - H_\theta\mathbf{n}_\phi) - \alpha(\dot{\phi}\sin\theta\mathbf{n}_\theta - \dot{\theta}\mathbf{n}_\phi).$$

Приравнивая выражения при одинаковых ортах, находим, что

$$\dot{\theta} = \gamma H_\phi - \alpha \dot{\phi} \sin \theta,$$

$$\dot{\phi} \sin \theta = -\gamma H_\theta + \alpha \dot{\theta}.$$

Для учета зависимости плотности энергии от градиентов намагниченности (а тем самым – от производных углов  $\theta$  и  $\phi$  по координатам) в определении  $H_\theta$  и  $H_\phi$  обычные производные  $\partial F / \partial \theta$ ,  $\partial F / \partial \phi$  следует заменить на вариационные

$$\frac{\delta F}{\delta \theta} = \frac{\partial F}{\partial \theta} - \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial F}{\partial \theta_{x_j}},$$

$$\frac{\delta F}{\delta \phi} = \frac{\partial F}{\partial \phi} - \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial F}{\partial \phi_{x_j}},$$

где

$$\theta_{x_j} = \frac{\partial \theta}{\partial x_j}, \quad \phi_{x_j} = \frac{\partial \phi}{\partial x_j}, \quad x_j = \{x, y, z\}.$$

С учетом вышесказанного уравнение Ландау–Лифшица–Гильберта в угловых переменных можно привести к виду [Малоземов, Слонзуски, 1982]

$$\gamma \frac{\delta F}{\delta \phi} = -\dot{\theta} M_0 \sin \theta - \alpha \sin^2 \theta M_0 \dot{\phi}, \tag{1.21}$$

$$\gamma \frac{\delta F}{\delta \theta} = M_0 \dot{\phi} \sin \theta - M_0 \alpha \dot{\theta}.$$

Именно эти уравнения используют обычно при рассмотрении динамического поведения доменных границ. Пока здесь не конкретизирована соответствующая плотность энергии  $F$ , а потому выписанные уравнения применимы для весьма широкого класса ферромагнетиков. В статическом случае из (1.21) получаем уравнения равновесия

$$\frac{\delta F}{\delta \theta} = 0, \quad \frac{\delta F}{\delta \phi} = 0, \tag{1.22}$$

из которых могут быть получены различные равновесные распределения намагниченности.

Уравнениям (1.21) можно сопоставить функцию Лагранжа с плотностью [Хуберт, 1977]

$$L = \frac{M_0}{\gamma} (C - \cos \theta) \frac{\partial \phi}{\partial t} - F \quad (C = \text{const}) \quad (1.23)$$

и диссипативную функцию с плотностью

$$\tilde{D} = \frac{\alpha}{2} (\dot{\theta}_i^2 + \phi_i^2 \sin^2 \theta) \frac{M_0}{\gamma}. \quad (1.24)$$

Тогда система уравнений (1.21) следует из уравнений Лагранжа II рода:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} \right) - \frac{\delta L}{\delta \phi} &= - \frac{\partial \tilde{D}}{\partial \phi}, \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\delta L}{\delta \theta} &= - \frac{\partial \tilde{D}}{\partial \theta}. \end{aligned} \quad (1.25)$$

Обобщенной координате  $\phi$  соответствует канонически сопряженный импульс

$$p_\phi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = \frac{M_0}{\gamma} (C - \cos \theta). \quad (1.26)$$

Если в основном состоянии  $\theta = \theta_0$  импульс  $p_\phi$  считать равным нулю, то в плотности функции Лагранжа  $L$  константу  $C$  следует положить равной  $\cos \theta_0$ .

### 1.3. Доменные границы Блоха и Нееля

Как было отмечено выше, ферромагнитный образец конечных размеров разбивается на домены с различным направлением намагниченности, разделенные доменными границами. Подробное изложение теории доменных стенок можно найти в монографии [Хуберт, 1977].

Структуру доменных границ рассмотрим для простейшей ситуации, когда имеется магнитоодноосный кристалл с осью легкого намагничивания, направленной вдоль оси  $z$ . Будем предполагать, что в этом кристалле образовались два домена, намагниченность в которых направлена вдоль  $z$  и  $-z$  соответственно. Исследуем распределение намагниченности в переход-

ной области между этими доменами в предположении, что изменение намагниченности происходит лишь вдоль одного направления (модель одномерной доменной границы). Пусть для определенности оно совпадает с направлением оси  $y$ . Для того чтобы учитывать влияние магнитоэлектрических полей на распределение намагниченности в доменной границе, будем полагать, что кристалл имеет достаточно большие размеры.

Плотность полной энергии одноосного кристалла в угловых переменных (1.20) можно представить в виде

$$F = A \left[ \left( \frac{\partial \theta}{\partial y} \right)^2 + \sin^2 \theta \left( \frac{\partial \phi}{\partial y} \right)^2 \right] + K \sin^2 \theta + F_m. \quad (1.27)$$

Здесь первое слагаемое учитывает плотность энергии неоднородной части обменного взаимодействия, второе – плотность энергии анизотропии. Величина  $F_m$  представляет собой энергию магнитоэлектрического поля, которое возникает в случае выхода намагниченности  $\mathbf{M}$  из плоскости доменной границы:

$$F_m = -\frac{1}{2} \mathbf{H}_m \mathbf{M} = -\frac{1}{2} H_m^y M_y. \quad (1.28)$$

Здесь  $H_m^y$  – внутреннее магнитоэлектрическое поле, возникающее при изменении нормальной к плоскости доменной границы компоненты намагниченности  $M_y$ , определяемое из уравнений магнитоэлектрики (1.9). В данном случае имеем

$$\frac{\partial H_m^x}{\partial x} = \frac{\partial H_m^z}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial y} (H_m^y + 4\pi M_y) = 0. \quad (1.29)$$

Из последнего уравнения (1.29) находим, что

$$H_m^y = -4\pi (M_y - M_{1y}),$$

где  $M_{1y}$  – константа интегрирования. Если считать, что поле  $\mathbf{H}_m$  будет сосредоточено в основном в области доменной границы, то есть  $\mathbf{H}_m(y = \pm\infty) = 0$ , то  $M_{1y} = 0$ , а

$$H_m^x = H_m^z = 0, \quad H_m^y = -4\pi M_y(y). \quad (1.30)$$

Плотность энергии размагничивания с учетом (1.30) определяется выражением

$$F_m = 2\pi M_0^2 \sin^2 \theta \sin^2 \varphi. \quad (1.31)$$

Для получения распределения намагниченности необходимо решить следующую вариационную задачу:

$$\delta W = \delta \int_{-\infty}^{\infty} F dy = 0. \quad (1.32)$$

Уравнения Эйлера, соответствующие этой вариационной задаче, имеют вид

$$\frac{\delta F}{\delta \theta} = \frac{\partial F}{\partial \theta} - \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial F}{\partial (\partial \theta / \partial y)} \right) = 0,$$

$$\frac{\delta F}{\delta \varphi} = \frac{\partial F}{\partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial F}{\partial (\partial \varphi / \partial y)} \right) = 0.$$

С учетом (1.27) получим

$$\frac{\delta F}{\delta \theta} = -2A \left[ \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} - \sin \theta \cos \theta \left( \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 \right] + 2K \sin \theta \cos \theta +$$

$$+ 4\pi M_0^2 \sin \theta \cos \theta \sin^2 \varphi = 0, \quad (1.33)$$

$$\frac{\delta F}{\delta \varphi} = -2A \frac{\partial}{\partial y} \left( \sin^2 \theta \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) + 4\pi M_0^2 \sin^2 \theta \sin \varphi \cos \varphi = 0. \quad (1.34)$$

Эти уравнения совпадают с уравнениями равновесия (1.22), следующими из уравнений (1.21). Таким образом, уравнения, определяющие распределение намагниченности, мы можем получить и из уравнения Ландау–Лифшица в статическом случае, и из условия экстремума полной энергии магнетика. Будем считать, что

$$\theta = \theta(y), \quad \varphi = \text{const}. \quad (1.35)$$

Видно, что уравнение (1.34) допускает два типа решения:

$$\varphi = 0, \pi; \quad \varphi = \pm \pi / 2. \quad (1.36)$$

В первом случае ( $\varphi = 0, \pi$ ) направление намагниченности изменяется так, что она все время остается в плоскости доменной границы, перпендикулярной оси  $y$ . В этом случае доменная граница оказывается плоской и на ней не возникают магнитостатические заряды, а поле  $\mathbf{H}_m = 0$ . Доменная граница такого типа называется блоховской (рис. 1.3), намагниченность в ней поворачивается в плоскости  $xz$ , параллельной плоскости границы:

$$M_x = M_0 \sin \theta, \quad M_y = 0, \quad M_z = M_0 \cos \theta,$$

где  $\theta$  – угол между осью  $z$  и вектором  $\mathbf{M}$  в плоскости  $xz$  (см. рис. 1.2).

Во втором случае ( $\varphi = \pm\pi/2$ ) намагниченность поворачивается в плоскости, перпендикулярной плоскости доменной стенки. В выбранной системе координат (см. рис. 1.2) – в плоскости  $zOy$ . Компоненты намагниченности:

$$M_x = 0, \quad M_y = M_0 \sin \theta, \quad M_z = M_0 \cos \theta.$$

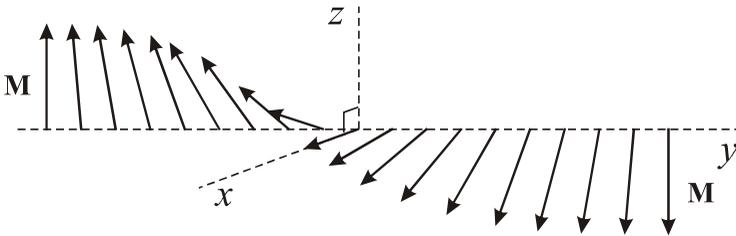
Таким образом, когда нормальная к плоскости доменной границы компонента намагниченности меняется, в доменной стенке возникает внутреннее магнитостатическое поле  $H_m^y$ . Стенки такого типа называются неелевскими (рис. 1.4).

Уравнение (1.33) можно переписать в виде

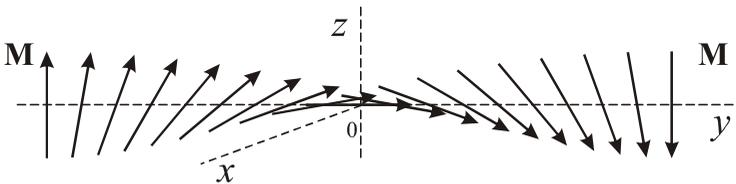
$$\delta^2 \frac{d^2\theta}{dy^2} - \sin \theta \cos \theta = 0, \quad (1.37)$$

где

$$\delta = (A/(K + 2\pi M_0^2 \sin^2 \varphi))^{1/2}. \quad (1.38)$$



**Рис. 1.3.** Структура блоховской доменной стенки



**Рис. 1.4.** Структура неелевской доменной стенки

Здесь  $\delta$  имеет размерность длины и характеризует быстроту изменения намагниченности  $\mathbf{M}$  в пространстве, занятом доменной границей. Соответствующий первый интеграл уравнения (1.37) находим, умножая это уравнение на  $d\theta/dy$  и интегрируя по  $y$ :

$$\delta^2 \left( \frac{d\theta}{dy} \right)^2 - \sin^2 \theta = c. \quad (1.39)$$

Граничные условия при  $|y| \rightarrow \infty$  таковы:

$$\frac{\partial \theta}{\partial y} = 0, \quad (1.40)$$

$$\theta(y \rightarrow -\infty) = 0, \quad \theta(y \rightarrow \infty) = \pi.$$

Используя их, из (1.39) находим, что константа интегрирования  $c = 0$ , откуда можно записать, что

$$\frac{d\theta}{dy} = \pm \frac{1}{\delta} \sin \theta. \quad (1.41)$$

Знаки  $\pm$  возникли при извлечении корня квадратного из  $\sin^2 \theta$ . Вообще говоря, необходимо учитывать оба этих знака, поскольку задание направления намагниченности в доменах никак не определяет направления ее поворота при переходе от домена к домену, а потому разворот вектора  $\mathbf{M}$  вокруг нормали к доменной границе (ось  $y$ ) может происходить как по часовой стрелке, так и против нее, если смотреть в направлении, противоположном  $y$ . В первом случае  $0 < \theta < \pi$ , а во втором  $-\pi < \theta < 0$ . Таким образом, вращениям намагниченности  $\mathbf{M}$  по и против часовой стрелки соответствуют верхний и нижний знаки (1.41) соответственно. Разным поворотам намагниченности соответствуют стенки различной полярности.

Закон распределения  $\theta = \theta(y)$  получим, проводя интегрирование уравнения (1.41):

$$\theta = 2 \arctg(\pm \exp(y/\delta)). \quad (1.42)$$

Эти решения можно представить также в двух следующих формах:

$$\cos \theta = -\operatorname{th} \frac{y}{\delta}, \quad \sin \theta = \pm \operatorname{ch}^{-1} \frac{y}{\delta}, \quad (1.43)$$

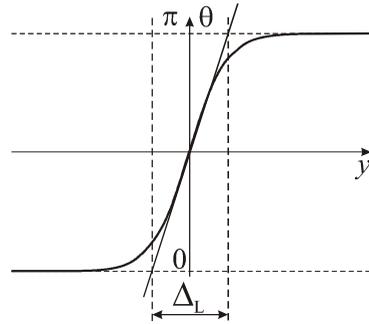
$$\frac{d\theta}{dy} = \pm \frac{1}{\delta} \sin \theta.$$

### Характерная толщина доменной стенки.

Зависимость угла  $\theta$  от координаты в доменной стенке представлен на рис. 1.5. Хотя, как видно, распределение намагниченности происходит плавно, однако основной поворот  $\mathbf{M}$  осуществляется в области, соизмеримой с  $\delta_0$ . В связи с этим произведем оценку  $\delta_0$ . Для тех значений параметров  $K$  и  $A$ , которые использовались при оценке  $\sigma_w$ , получим  $\delta_0 = 10^{-8}$  м или  $\sim 10^2 \text{ \AA}$ . Таким образом, можно утверждать, что весь разворот  $\mathbf{M}$  происходит в очень узкой области пространства порядка  $\delta_0$ . Характерный размер намного больше постоянной решетки  $a_0 \sim 10^{-10}$  м, что оправдывает проводимое выше рассмотрение, основанное на приближении сплошной среды. Обычно величиной  $\delta_0$  характеризуется порядок толщины доменной границы. Из-за плавного изменения  $\mathbf{M}$  введение такого понятия, как толщина доменной границы, является до некоторой степени условным.

Существуют два способа определения толщины доменной границы.

1. **Метод Лилли.** Строится зависимость угла  $\theta$  от координаты  $y$ , затем определяются точки, в которых  $d\theta/dy$  имеет максимум, то есть точки перегиба кривой  $\theta(y)$ . К двум наиболее удаленным друг от друга точкам перегиба строятся касательные и продолжаютя до пересечения с двумя граничными прямыми  $\theta = \theta(\infty)$ ,  $\theta = \theta(-\infty)$  (см. рис. 1.5).



**Рис. 1.5.** Определение толщины доменной границы по Лилли

Пример – одноосные кристаллы.  $\theta(-\infty) = 0$ ,  $\theta(\infty) = \pi$ .

Рассмотрим случай одной точки перегиба, которому соответствует решение, полученное выше.

$$\cos \theta = -\text{th} \frac{y}{\delta_B}, \quad \frac{d\theta}{dy} = \frac{1}{\delta_B} \sin \theta, \quad \delta_B = \sqrt{\frac{A}{K}} \quad (1.44)$$

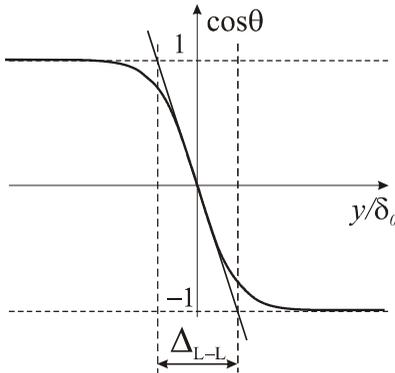
Находим максимум  $d\theta/dy$ , т.е. точку перегиба  $\theta(y)$ . Из (1.44) следует, что это точка  $\theta = \pi/2$ . Тогда, как видно из рис. 1.5,

$$\left. \frac{d\theta}{dy} \right|_{\theta=\pi/2} = \frac{\theta(y=+\infty) - \theta(y=-\infty)}{\Delta_L} = \frac{\pi}{\Delta_L},$$

откуда с учетом (1.44), получим

$$\Delta_L = \pi \delta_B = \pi \sqrt{\frac{A}{K}}. \quad (1.45)$$

**2. Метод Ландау-Лифшица.** Строится компонента направляющего косинуса вдоль направления намагниченности в доменах, то есть вдоль легкой оси. В остальном процедура аналогична предыдущей (см. рис. 1.6)



**Рис. 1.6.** Определение толщины доменной границы по Ландау-Лифшицу

$$m_z = \frac{M_z}{M_0} = \cos \theta(y) = -\text{th} \frac{y}{\delta_B}.$$

При  $\theta(y \rightarrow -\infty) = 0$ ,  $\cos \theta = 1$ ,  
 $\theta(y \rightarrow +\infty) = \pi$ ,  $\cos \theta = -1$ .

$$\left. \frac{d \cos \theta}{dy} \right|_{\theta=\pi/2} = -\frac{2}{\Delta_{L-L}},$$

откуда

$$\Delta_{L-L} = 2\delta_B = 2\sqrt{\frac{A}{K}}. \quad (1.46)$$

Для 180-градусных стенок с одной точкой перегиба справедливо такое соотношение

$$\Delta_{L-L} = \frac{2}{\pi} \Delta_L. \quad (1.47)$$

Видно, что порядок величин  $\Delta_{L-L}$  и  $\Delta_L$  одинаков.

### Энергия доменной стенки.

Энергию доменной границы определяется следующим образом

$$\sigma_w = \int_{-\infty}^{\infty} (F - F_0) dy,$$

где

$$F = A \left( \frac{d\theta}{dy} \right)^2 + (K + 2\pi M_0^2 \sin^2 \varphi) \sin^2 \theta,$$

$$F_0 = F(|y| \rightarrow \infty) = 0.$$

Энергию стенки получаем, используя первый интеграл (1.41)

$$\begin{aligned} \sigma_w &= (K + 2\pi M_0^2 \sin^2 \varphi) \delta \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \left( \frac{d\theta}{d\xi} \right)^2 + \sin^2 \theta \right] d\xi = \\ &= 2\sqrt{A(K + 2\pi M_0^2 \sin^2 \varphi)} \int_0^\pi \sin \theta d\theta \end{aligned}$$

Таким образом, для энергии стенки получаем

$$\sigma_w = 4\sqrt{A(K + 2\pi M_0^2 \sin^2 \varphi)}. \quad (1.48)$$

В отличие от стенки Блоха ( $\varphi = 0, \pi$ ) стенка Нееля ( $\varphi = \pm\pi/2$ ) несет на себе локальные магнитные заряды. Это приводит к тому, что толщина неелевской стенки меньше чем блоховской, а энергия – больше.

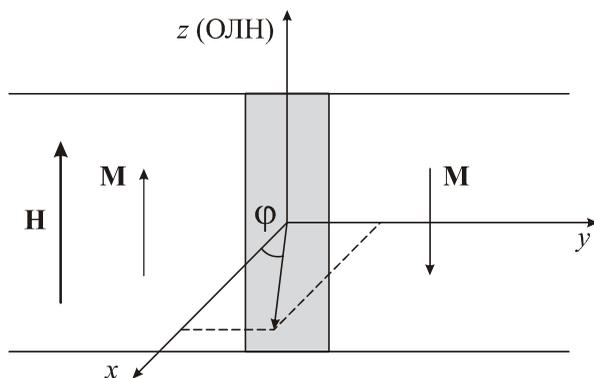
В связи с этим можно сказать, что неелевские плоские стенки невыгодны в массивных образцах. Однако в магнитных материалах с  $2\pi M_0^2 \ll K$  участки доменной границы с неелевским законом изменения намагниченности могут реализоваться в виде переходного слоя между двумя состояниями блоховской стенки с  $\varphi = 0$  и  $\varphi = \pi$  [Малоземов, Слонзуски, 1982]. Кроме того, в тонких магнитных пленках доменная структура с неелевскими стенками может оказаться энергетически более выгодной, чем с блоховскими [Хуберт, 1977].

#### 1.4. Динамика доменной границы в одноосном ферромагнетике

Рассмотрим магнитный кристалл с одной доменной стенкой, помещенный во внешнее магнитное поле  $\mathbf{H} = (0, 0, H)$  (рис. 1.7). В этом случае плотность энергии левой половины образца вдали от стенки равна  $F_H = -M_0 H$ , а правой  $F_H = M_0 H$ . Энергетически выгодная левая фаза

будет расти за счет уменьшения невыгодной правой фазы, причем рост будет происходить за счет смещения доменной границы между этими половинами (фазами). Рассмотрим, каким образом происходит такое движение и какова динамика намагниченности.

Для начала сформулируем задачу. Пусть имеется магнитоодноосный безграничный ферромагнитный кристалл. Ось  $z$  системы координат  $xuz$  направлена вдоль оси легкого намагничивания. Пусть в этом кристалле имеется безграничная блоховская 180-градусная доменная граница, плоскость которой перпендикулярна оси  $y$  и которая разделяет два домена с намагниченностями, направленными по и против оси  $z$  (см. рис. 1.7). Ориентацию вектора намагниченности в указанной доменной границе будем характеризовать полярным углом  $\theta$ , отсчитываемым от оси легкого намагничивания, и азимутальным углом  $\varphi$ , отсчитываемым от оси  $x$ . Будем считать, что  $\theta$  и  $\varphi$  зависят только от координаты  $y$  (модель одномерного распределения намагниченности). Доменная граница движется так, что намагниченность  $\mathbf{M}$ , лежащая в ее плоскости, выходит из этой плоскости, то есть нарушается ее блоховский характер [Хуберт, 1977].



**Рис. 1.7.** Доменная стенка во внешнем магнитном поле

Ранее были выписаны уравнения движения намагниченности в сферической системе координат (см. (1.21)). Эти уравнения можно использовать для описания динамического поведения 180-градусных доменных границ. С этой целью необходимо определить плотность энергии ферромагне-

тика с доменной границей и найти входящие в (1.21) вариационные производные в явном виде.

С учетом сделанных предположений, полная плотность энергии, связанная с движущейся доменной границей, равна

$$F = A \left[ \left( \frac{\partial \theta}{\partial y} \right)^2 + \sin^2 \theta \left( \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 \right] + K \sin^2 \theta + 2\pi M_0^2 \sin^2 \theta \sin^2 \varphi - M_0 H \cos \theta. \quad (1.49)$$

Подставляя плотность энергии  $F$  в уравнения (1.21), получим следующую систему нелинейных уравнений, описывающих движение доменной стенки:

$$\dot{\theta} + \alpha \sin \theta \dot{\varphi} = -\omega_m \sin \theta \sin \varphi \cos \varphi + (\omega_m Q \delta_0^2 / \sin \theta) \frac{\partial}{\partial y} \left( \sin^2 \theta \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right), \quad (1.50)$$

$$\begin{aligned} -\alpha \dot{\theta} + \sin \theta \dot{\varphi} = & \omega_m \sin \theta \cos \theta \sin^2 \varphi + \omega_m Q \sin \theta \cos \theta + \\ & + \omega_H \sin \theta + \omega_m Q \delta_0^2 \left[ \sin \theta \cos \theta \left( \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 - \left( \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} \right) \right], \end{aligned} \quad (1.51)$$

где  $Q = K / 2\pi M_0^2$  – фактор качества материала,

$$\omega_m = 4\pi \gamma M_0, \quad \omega_H = \gamma H, \quad \delta_0 = (A / K)^{1/2}, \quad (1.52)$$

а точки над буквами обозначают производные по времени. Уравнения (1.50) и (1.51) допускают как решения, описывающие стационарное движение доменной границы, так и нестационарные решения при изменении напряженности внешнего магнитного поля в достаточно широких пределах.

Рассмотрим динамику уединенной 180-градусной доменной границы. Решение уравнения Ландау–Лифшица–Гильберта будем искать в виде

$$\varphi = \varphi(t), \quad \theta = \theta(\xi), \quad \xi = (y - q) / \delta(\varphi), \quad (1.53)$$

$$\delta(\varphi) = \delta_0 / (1 + Q^{-1} \sin^2 \varphi)^{1/2}. \quad (1.54)$$

Здесь  $q = q(t)$  – смещение доменной стенки под действием поля. Уравнение (1.51), используя (1.50), представим в виде

$$\theta_{\xi\xi} - \sin \theta \cos \theta = - \frac{(1 + \alpha^2) \sin \theta}{\gamma H_a (1 + Q^{-1} \sin^2 \varphi)} \left[ \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \frac{\gamma H_w}{1 + \alpha^2} \left( \frac{H}{H_w} - \sin 2\varphi \right) \right], \quad (1.55)$$

где

$$H_w = 2\pi \alpha M_0 - \quad (1.56)$$

некоторое поле, называемое полем Уокера.

Соответствующее (1.55) однородное уравнение

$$\theta_{\xi\xi} - \sin \theta \cos \theta = 0 \quad (1.57)$$

по виду совпадает с (1.37), а его решение имеет вид

$$\cos \theta = -\operatorname{th} \frac{y-q}{\delta(\varphi)}, \quad \sin \theta = \frac{1}{\operatorname{ch} \frac{y-q}{\delta(\varphi)}}, \quad (1.58)$$

где  $\delta(\varphi)$  определяется выражением (1.54), а  $\varphi = \varphi(t)$  остается неопределенной функцией времени. Уравнение для определения  $\varphi$  получим, требуя, чтобы решение (1.58) удовлетворяло уравнению (1.55), что возможно при выполнении условия

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{\gamma H_w}{1 + \alpha^2} \left( \frac{H}{H_w} - \sin 2\varphi \right). \quad (1.59)$$

Определим скорость движения такой стенки. Из уравнения (1.50) имеем

$$\theta_t \sin \theta = -(\omega_m \sin \varphi \cos \varphi + \alpha \varphi_t) \sin^2 \theta. \quad (1.60)$$

С другой стороны, используя решение (1.58), получим

$$\theta_t \sin \theta = -\sin^2 \theta \left\{ \frac{\dot{q}}{\delta(\varphi)} - \frac{\xi}{\delta(\varphi)} \cdot \frac{d}{dt} \delta(\varphi) \right\}. \quad (1.61)$$

Из сравнения выражений (1.60) и (1.61) видно, что найденное решение (1.57) тождественно удовлетворяет уравнениям (1.50) и (1.51) при

$$\frac{d}{dt} \delta(\varphi) = 0. \quad (1.62)$$

Такая ситуация имеет место при стационарном движении или в случае нестационарного движения в материале с большим фактором качества ( $Q \rightarrow \infty$ ).

В дальнейшем, отказываясь от тождественного удовлетворения (1.58) уравнениям (1.50) и (1.51), ограничимся более слабым требованием удовлетворения его в среднем по всему интервалу изменения координаты  $\xi$ . Интегрируя (1.60) и (1.61) по переменной  $\xi$  и приравнявая полученные выражения, найдем скорость  $\dot{q} = V$  движения доменной стенки:

$$\dot{q} = (\omega_m \sin \varphi \cos \varphi + \alpha \varphi_t) \delta(\varphi). \quad (1.63)$$

**Стационарное движение.** Сначала рассмотрим стационарное движение ( $\varphi_t = 0$ ,  $q = Vt$ ), проанализированное Уокером [Walker, 1963]. Из (1.59) и (1.63) следует:

$$\sin 2\varphi = H / H_W, \quad (1.64)$$

$$V = \mu_D H \left(1 + Q^{-1} \sin^2 \varphi\right)^{-1/2}, \quad (1.65)$$

где

$$\mu_D = \gamma \delta_0 / \alpha - \quad (1.66)$$

подвижность доменной стенки.

Из (1.64) ясно, что при  $H = 0$  имеется два решения  $\varphi = 0$  и  $\varphi = \pi$ , соответствующих доменным границам с двумя различными направлениями разворота намагниченности  $\mathbf{M}$ . Следовательно, и при  $H \neq 0$  будут существовать два решения вида (1.64). Для определенности рассмотрим решение

$$\varphi = \frac{1}{2} \arcsin \frac{H}{H_W}. \quad (1.67)$$

Видно, что чем больше напряженность внешнего магнитного поля, тем больше угол выхода намагниченности из плоскости доменной границы. Очевидно, что решение (1.67) существует не при любых  $H$ . Действительно, в силу ограниченности  $\sin 2\varphi$  согласно (1.64) находим  $H \leq H_W$ , то есть решение (1.67), а следовательно и решения уравнений (1.50) и (1.51), описывающие стационарное движение доменной границы, возможны только, если

$$0 \leq H \leq H_W. \quad (1.68)$$

Вне этой области стационарного движения доменной границы не существует. Поле  $H_W$  играет роль критического поля, в полях выше которого стенка может двигаться только нестационарно. Очень важно, что согласно (1.56) поле  $H_W$  существенно определяется затуханием. В веществах с очень маленькими параметрами затухания область полей, в которых возможно стационарное движение доменной границы, может быть очень узкой. Стационарное движение доменной границы будет вообще отсутствовать, если  $\alpha = 0$ . При приближении  $H$  к  $H_W$  угол выхода намагниченности из плоскости доменной границы стремится к  $\pi/4$ .

Таким образом, доменная граница, сохраняя структуру, аналогичную статической структуре, движется с постоянной скоростью  $V$  в положительном направлении оси  $y$ . Из (1.58) видно, что  $\delta$  играет роль параметра, характеризующего толщину доменной границы, причем эта величина зависит от скорости движения доменной границы. Из (1.54) следует, что толщина доменной границы при движении сокращается, причем это сокращение тем больше, чем больше угол выхода  $\mathbf{M}$  из плоскости доменной стенки. Ясно, что это сокращение неограничено и происходит вплоть до полей, при которых стационарное движение доменной границы становится невозможным. Наименьшая толщина доменной стенки, соответствующая  $H = H_W$ , равна

$$\delta_{\min} = \delta_0 / \sqrt{1 + 1/2Q}. \quad (1.69)$$

Из (1.69) видно также, что чем меньше фактор качества  $Q$ , тем большее сокращение толщины доменной границы происходит в процессе ее движения. Используя (1.64), выражение (1.54) для  $\delta$  можно представить также в виде

$$\delta = \delta_0 \left[ 1 + (2Q)^{-1} \left( 1 - \sqrt{1 - (H/H_W)^2} \right) \right]^{-1/2}. \quad (1.70)$$

Учет этого выражения для  $\delta$ , а также выражения (1.65) позволяет найти явную зависимость скорости  $V$  от напряженности внешнего магнитного поля  $H$ :

$$V = \frac{V_W H}{H_W} \left[ 1 + (2Q)^{-1} \right]^{1/2} \cdot \left[ 1 + \frac{1}{2Q} \left( 1 - \sqrt{1 - (H/H_W)^2} \right) \right]^{-1/2}, \quad (1.71)$$

где

$$V_W = 2\pi M_0 \delta_0 \left[ 1 + (2Q)^{-1} \right]^{1/2}. \quad (1.72)$$

Отсюда видно, что в поле, равном полю Уокера  $H = H_W$ , скорость стационарного движения стенки становится равной  $V = V_W$ , то есть  $V_W$  имеет смысл критической скорости (скорости Уокера), приобретаемой стенкой в ситуации, когда внешнее магнитное поле достигает значения критического поля  $H_W$ .

Из (1.71) видно, что в общем случае даже при стационарном движении доменной границы ее скорость может зависеть от поля существенно нелинейным образом. Анализ (1.71) показывает, что линейный закон вида

$$V = \mu_D H, \quad (1.73)$$

соответствующий стационарному движению ДГ, возможен лишь в следующих ситуациях:

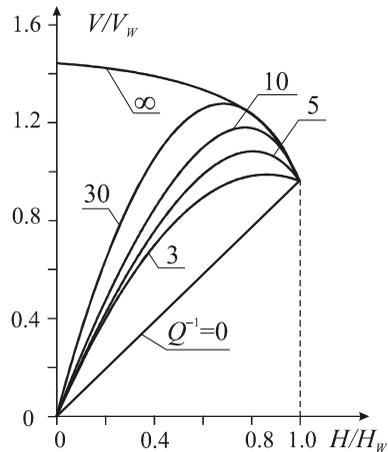
$$Q \gg 1, \quad 0 \leq H \leq H_W,$$

$$Q \geq 1, \quad H \ll H_W,$$

$$Q \ll 1, \quad H \ll 2\sqrt{Q}H_W.$$

Линейная зависимость  $V$  от  $H$  должна существовать во всей области полей, где существует стационарное движение доменных границ, если  $Q \gg 1$ . Впервые зависимость (1.73) была получена Ландау и Лифшицем [Landau, Lifshitz, 1935].

Используя выражение (1.73), можно построить зависимость  $V$  от  $H$  графически. Такая зависимость представлена на рис. 1.8 для различных значений фактора качества материала.



**Рис. 1.8.** Зависимость относительной скорости стационарного движения доменной границы от приведенной величины внешнего магнитного поля при разных значениях фактора качества  $Q$

Видно, что в материалах с любым фактором качества относительное значение критической скорости (скорость при  $H = H_W$ ) оказывается одним и тем же. Характерно, что фактор качества  $Q$  оказывает существенное влия-

ние на зависимость  $V$  от  $H$ . Если в материалах с  $Q \gg 1$  почти во всех областях изменения  $V$  линейно зависит от  $H$ , то в веществах с  $Q < 1$  эта зависимость может оказаться не только линейной, но и немонотонной: на кривых  $V$  от  $H$  появляется максимум, который смещается в область малых магнитных полей с уменьшением  $Q$ . Величина скорости доменной стенки, соответствующая этому максимуму, имеет большее значение, чем скорость, соответствующая критическому полю  $H_W$ , при котором происходит разрушение стационарного движения доменной границы. Таким образом, помимо критической скорости стационарного движения, доменная стенка может обладать также максимальной (предельной) скоростью стационарного движения  $V_m$ . Значение  $H_m$ , при котором возникает указанное предельное значение скорости доменной границы, можно легко найти, приравняв к нулю производную  $\partial V / \partial H$ , вычисленную согласно (1.71).

Выполняя несложные преобразования, получим

$$H_m = H_W \left( 4\sqrt{Q(1+Q)}[1+2Q-2\sqrt{Q(1+Q)}] \right)^{1/2}. \quad (1.74)$$

Учитывая выражение (1.74), из (1.71) для предельной скорости имеем

$$V_m = \omega_m \delta_0 Q \left( \sqrt{1+Q^{-1}} - 1 \right). \quad (1.75)$$

Это выражение справедливо при любых  $Q$ . Отсюда при  $Q \gg 1$  имеем

$$V_m = \frac{1}{2} \omega_m \delta_0 = 2\pi M_0 \gamma \delta_0, \quad (1.76)$$

что, как и следовало ожидать, при  $Q \gg 1$  совпадает с критической скоростью. При  $Q \ll 1$  предельная скорость

$$V_m = \omega_m \delta_0 \sqrt{Q} = \frac{2\gamma}{M_0} \sqrt{A \cdot 2\pi M_0^2}. \quad (1.77)$$

Видно, что предельная скорость стационарного движения в ферромагнетиках с малым фактором качества определяется обменным параметром и энергией магнитоэлектронного взаимодействия. Аналогичная ситуация, как будет показано ниже, может иметь место и в ферромагнетиках типа «легкая плоскость».

**Нестационарное движение.** В случае нестационарного движения в полях  $H$ , меньших полей Уокера, интегрируя уравнения движения (1.59) с начальным условием

$$\varphi(t=0) = 0, \quad (1.78)$$

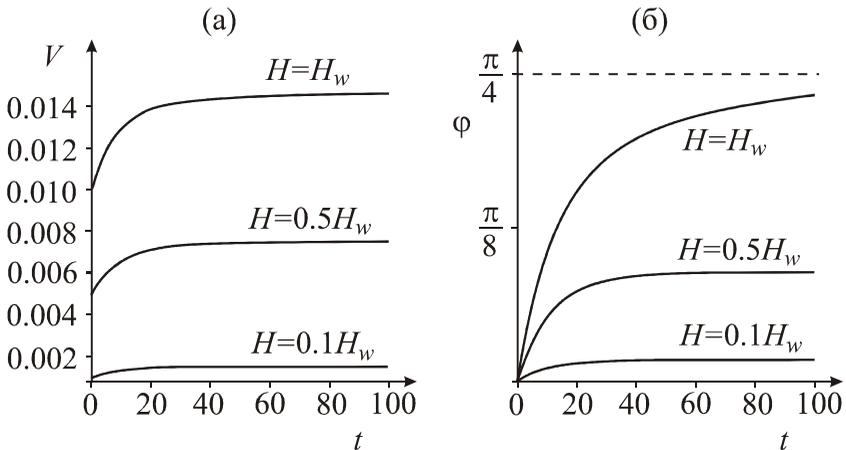
получим

$$\operatorname{ctg} \varphi = \frac{H_w}{H} + \sqrt{\left(\frac{H_w}{H}\right)^2 - 1} \operatorname{cth} \left( \frac{\gamma H t}{1 + \alpha^2} \sqrt{\left(\frac{H_w}{H}\right)^2 - 1} \right). \quad (1.79)$$

Из (1.79) следует, что при  $t \rightarrow \infty$

$$\sin 2\varphi \rightarrow \frac{H}{H_w}.$$

Сравнение с (1.64) показывает, что стенка в полях  $H < H_w$  с течением времени выходит на стационарный режим движения, скорость при этом определяется выражением (1.65). Как показывает анализ уравнения (1.79), с приближением к уокеровскому пределу ( $H \rightarrow H_w$ ) время выхода на стационарный режим возрастает (см. рис. 1.9).



**Рис. 1.9.** Зависимость скорости (а) и угла прецессии намагниченности (б) от времени в случае нестационарного движения 180-градусной доменной стенки в полях, меньших критического, для различных  $H < H_w$

Перейдем к анализу скорости нестационарного движения доменной стенки в полях, больших полей Уокера  $H_W$ . В полях  $H > H_W$ , интегрируя (1.59) при том же начальном условии (1.78), что и при  $H < H_W$ , имеем

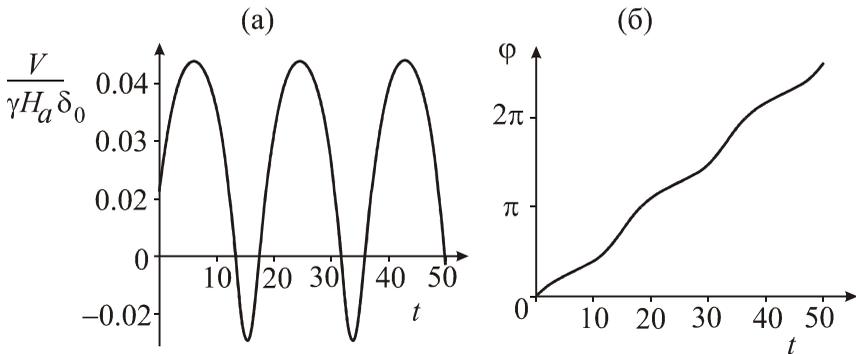
$$\operatorname{ctg} \varphi = \frac{H_W}{H} + \sqrt{1 - \left(\frac{H_W}{H}\right)^2} \operatorname{ctg} \left( \frac{\gamma H t}{1 + \alpha^2} \sqrt{1 - \left(\frac{H_W}{H}\right)^2} \right). \quad (1.80)$$

Используя выражение (1.59), скорость (1.63) можно представить в виде

$$\dot{q} = \frac{2\pi\gamma M_0 \delta_0 (\alpha^2 H / H_W + \sin 2\varphi)}{(1 + \alpha^2) \sqrt{1 + Q^{-1} \sin^2 \varphi}}. \quad (1.81)$$

В полях  $H > H_W$ , как следует из (1.80) и (1.81), доменная стенка совершает сложное движение. Стенка движется вдоль оси  $y$ , одновременно совершая осциллирующее движение. При этом структура стенки периодически меняется от блоховской к неелевской и обратно (см. рис. 1.10).

Впервые выражения для скорости  $\dot{q}$  и зависимости  $\varphi = \varphi(t)$  в случае нестационарного движения при  $Q \gg 1$  были получены Слончевским (см., например, [Хуберт, 1977]).



**Рис. 1.10.** Зависимость скорости (а) движения доменной стенки и угла прецессии намагниченности (б) от времени в полях  $H > H_W$ , больших критического для  $\alpha = 0.1$  и  $Q = 10$ ,  $H / H_W = 2$

Усредняя скорость (1.81) по прецессионному движению угла  $\varphi = \varphi(t)$ , описываемому выражением (1.80), при  $Q \gg 1$  найдем

$$\langle \dot{q} \rangle = 2\pi\gamma M_0 \delta_0 \frac{\alpha^2}{1+\alpha^2} \left( \frac{H}{H_W} + \frac{\alpha^{-2} H_W}{H + \sqrt{H^2 - H_W^2}} \right). \quad (1.82)$$

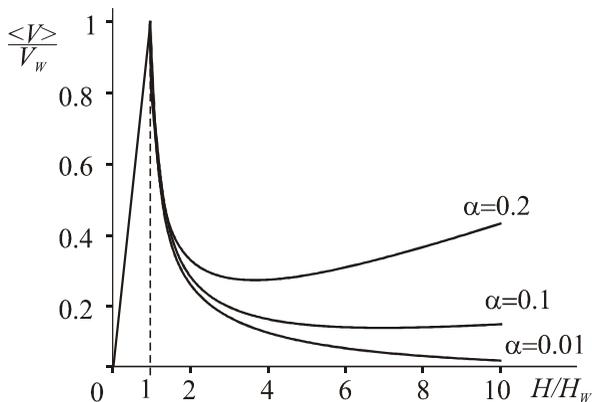
В области сильных полей  $H \gg H_W$

$$\langle \dot{q} \rangle = \mu_D^* H, \quad \mu_D^* = \frac{\alpha \delta_0 \gamma}{1+\alpha^2}. \quad (1.83)$$

Эффективная подвижность границы  $\mu_D^*$  в области сильных полей при  $\alpha \ll 1$  уменьшается по сравнению с подвижностью стационарного движения (см. рис. 1.11):

$$\mu_D^* = \alpha^2 \mu_D.$$

Из рис. 1.11 видно, что максимальная скорость ( $Q \rightarrow \infty$ ) достигается при критическом поле  $H = H_W$ . В полях, больших критического, существует область отрицательной дифференциальной подвижности, где скорость с ростом поля уменьшается.



**Рис. 1.11.** Зависимость скорости движения доменной стенки от внешнего магнитного поля для различных значений параметра затухания  $\alpha$

Проанализируем поведение доменной стенки в отсутствие затухания. Из (1.59) найдем, что изменение азимутального угла  $\varphi$  определяется выражением

$$\varphi = \gamma H(t - t_0),$$

а скорость стенки

$$\dot{q} = 2\pi\gamma M_0 \delta_0 \sin 2\gamma H(t - t_0). \quad (1.84)$$

Средняя скорость  $\langle \dot{q} \rangle = 0$ . Таким образом, в среднем стенка не смещается, а совершает чисто колебательное движение относительно положения равновесия.

Определим энергию движущейся доменной стенки. Интегрируя (1.49) и полагая  $H = 0$ , найдем

$$\sigma_W = 4\sqrt{AK(1 + Q^{-1} \sin^2 \varphi)}. \quad (1.85)$$

Поверхностная плотность импульса движущейся доменной границы, определяемая как плотность импульса поля намагниченности [Косевич и др., 1983], задается выражением

$$P = \frac{M_0}{\gamma} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi \frac{d \cos \theta}{dy} dy.$$

В результате вычисления интеграла получим

$$P = \frac{2M_0}{\gamma} \varphi. \quad (1.86)$$

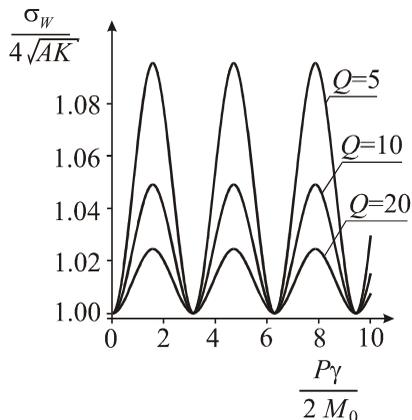
Энергию стенки можно выразить через поверхностную плотность импульса следующим образом:

$$\sigma_W = 4\sqrt{AK} \left( 1 + Q^{-1} \sin^2 \frac{\gamma P}{2M_0} \right)^{1/2}. \quad (1.87)$$

Видно, что энергия является периодической функцией импульса (рис. 1.12).

В заключение можно сказать, что осцилляторный характер движения доменной границы в постоянном магнитном поле всецело обусловлен (как было показано в [Косевич и др., 1983]) периодической зависимостью энергии стенки от ее импульса. Такое движение было названо блоховскими осцилляциями.

**Рис. 1.12.** Зависимость энергии движущейся 180-градусной стенки от ее импульса для различных значений фактора качества  $Q$



Учет торможения доменной границы во внешнем поле, меньшем, чем критическое поле  $H_W$ , приводит к возможности стационарного движения доменной границы с постоянной скоростью, описанной впервые Уокером. В сильных магнитных полях ( $H > H_W$ ) реализуется осциллирующее движение доменной границы, при котором средняя скорость при малых затуханиях меньше предельной скорости стационарного движения  $V_W$ .

### 1.5. Динамика доменной границы в легкоплоскостном ферромагнетике

**Структура 180-градусной доменной стенки.** Рассмотрим массивный ферромагнитный образец с поверхностью, параллельной плоскости  $xu$  и перпендикулярной оси  $\mathbf{c} \parallel z$ . Пусть магнитные неоднородности, возникающие в таком образце, перпендикулярны оси  $z$ . В случае одномерной неоднородности намагниченность считаем функцией координаты  $z$ , то есть  $\mathbf{m} = \mathbf{m}(z, t)$ . В этом случае решение уравнения магнитостатики (1.9) имеет вид:  $\mathbf{H}_m = -4\pi M_0 m_z \mathbf{n}_z$ . С учетом этого плотность энергии двухосного ферромагнетика в магнитном поле можно записать в виде

$$F = A \left( \frac{\partial \mathbf{m}}{\partial z} \right)^2 - K m_z^2 + K_p m_y^2 + 2\pi M_0^2 m_z^2 - M_0 \mathbf{H} \mathbf{m}, \quad (1.88)$$

где  $\mathbf{m} = \mathbf{M}/M_0$ ,  $K$ ,  $K_p$  – константы одноосной и ромбической магнитной анизотропии. Переходя к угловым переменным  $\mathbf{m} = (\sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \theta)$  (см. рис. 1.2), плотность энергии в магнитном поле  $\mathbf{H} = (-H, 0, 0)$  можно переписать в виде

$$F = A \left[ \left( \frac{\partial \theta}{\partial z} \right)^2 + \sin^2 \theta \left( \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2 \right] + (K - 2\pi M_0^2) \sin^2 \theta + K_p \sin^2 \theta \sin^2 \varphi + M_0 H \sin \theta \cos \varphi. \quad (1.89)$$

При  $K < 0$  и  $K_p = 0$  имеем дело с ферромагнетиком типа «легкая плоскость», где в основном состоянии  $\theta_0 = \pi/2$ , а угол  $\varphi$  не определен. Рассмотрим случай  $K < 0$ ,  $K_p > 0$ . Анализ выражения (1.89) показывает, что энергия анизотропии минимальна при  $\theta_0 = \pi/2$ ,  $\varphi_0 = 0, \pi$ , а вектор намагниченности в легкой плоскости ориентируется вдоль оси  $x$ .

Следует отметить, что в тонких магнитных пленках такая ситуация может реализоваться и при  $K > 0$ , если  $K - 2\pi M_0^2 < 0$ . Структура доменных стенок в таких пленках является двумерной и вихреподобной [Хуберт, 1977]. Существует серия работ посвященных точному исследованию нелинейной динамики таких доменных стенок с полным учетом магнитостатического взаимодействия. Случай таких пленок далее не рассматривается, а анализируется только структура и динамика одномерных магнитных неоднородностей в пластинах с  $K < 0$ .

В доменной стенке ферромагнетика типа «легкая плоскость» намагниченность в равновесном состоянии будет поворачиваться в анизотропной «легкой» плоскости  $xy$ . Структура доменной стенки в отсутствие поля определяется решением уравнения Эйлера

$$A \frac{d^2 \varphi}{dz^2} - K_p \sin \varphi \cos \varphi = 0$$

с граничными условиями

$$\varphi(z \rightarrow -\infty) = 0, \quad \varphi(z \rightarrow +\infty) = \pi, \quad \varphi_z(|z| \rightarrow \infty) = 0.$$

Решая уравнение, как и в случае одноосного ферромагнетика, имеем

$$\frac{d\varphi}{dz} = \pm \frac{1}{\delta_0} \sin \varphi, \quad \cos \varphi = -\operatorname{th} \frac{z}{\delta_0}, \quad \sin \varphi = \pm \frac{1}{\operatorname{ch}(z/\delta_0)},$$

$$\delta_0 = \sqrt{A/K_p}.$$

Энергия стенки при этом равна

$$\sigma_w = 2\sqrt{AK_p} \int_0^{\pi} \sin \varphi d\varphi = 4\sqrt{AK_p}.$$

Видно, что энергия и характерный размер доменной стенки определяются не одноосной анизотропией  $K$ , а анизотропией в «легкой» плоскости  $K_p$ .

**Динамика 180-градусной доменной стенки.** Результаты исследований динамики магнитной неоднородности с анизотропной «легкой» плоскостью в отсутствие поля и затухания изложены в монографии [Косевич и др., 1983].

Рассмотрим зависимость скорости 180-градусной доменной стенки от внешнего магнитного поля и затухания.

Уравнение (1.21), подставляя плотность энергии (1.89), приведем к виду

$$\begin{aligned} \dot{\theta} \sin \theta = & -\frac{\gamma}{M_0} \left[ K_p \sin^2 \theta \sin 2\varphi - M_0 H \sin \theta \sin \varphi - 2A \frac{\partial}{\partial z} \left( \sin^2 \theta \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) \right] - \alpha \sin^2 \theta \dot{\varphi}, \\ \dot{\varphi} \sin \theta = & -\frac{\gamma}{M_0} \left[ 2(|K| + 2\pi M_0^2) \sin \theta \cos \theta - 2K_p \sin^2 \varphi \sin \theta \cos \theta - M_0 H \cos \varphi \cos \theta + \right. \\ & \left. + 2A \left( \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} - \sin \theta \cos \theta \left( \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2 \right) \right] + \alpha \dot{\theta}. \end{aligned} \quad (1.90)$$

При

$$|K| + 2\pi M_0^2 \gg M_0 H, K_p$$

можно положить  $\theta = \pi/2 + \theta_1$ , где  $\theta_1 \ll 1$ . Считая  $\theta_1 = \theta_1(z, t)$ ,  $\varphi = \varphi(z, t)$ , из (1.90) получим:

$$\begin{aligned} \dot{\theta}_1 = & -\frac{\gamma}{M_0} \left[ 2K_p \sin \varphi \cos \varphi - M_0 H \sin \varphi - 2A \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \right] - \alpha \dot{\varphi}, \\ \dot{\varphi} = & \frac{2\gamma}{M_0} (|K| + 2\pi M_0^2) \theta_1 + \alpha \dot{\theta}_1. \end{aligned} \quad (1.91)$$

Эту систему при малых затуханиях ( $\alpha \ll 1$ ) можно переписать в виде

$$u_{tt} - u_{xx} + \sin u = 2h \sin \frac{u}{2} - \beta u_t. \quad (1.92)$$

Здесь  $u = 2\varphi$ ,  $h = M_0 H / 2K_p$  и проведена замена

$$z / \delta_0 \rightarrow x, \quad tc / \delta_0 = t\omega_{FM} \rightarrow t, \quad (1.93)$$

где

$$c = 2\gamma \sqrt{A(2\pi M_0^2 + |K|)} / M_0 -$$

предельная скорость стационарного движения, а

$$\omega_{FM} = 2\gamma \sqrt{K_p(2\pi M_0^2 + |K|)} / M_0 -$$

характерная частота. Угол  $\varphi$  определяет положение вектора намагниченности  $\mathbf{M}$  в легкой плоскости  $xu$  относительно оси  $x$ . В основном состоянии при  $K_p > 0$ ,  $H = 0$  вектор  $\mathbf{M} \parallel x$ , то есть  $\theta = \pi/2$ ,  $\varphi = 0, \pi$ . В уравнении (1.92)

$$\beta = \alpha \sqrt{(2\pi M_0^2 + |K|)} / K_p - \quad (1.94)$$

перенормированный параметр затухания.

Следует отметить, что свойства уравнения (1.88) при  $h = \beta = 0$  подробно изучены во многих работах и изложены в ряде книг (см., например, [Додд и др., 1988]).

**Стационарное движение.** Рассмотрим стационарное движение доменной стенки в случае  $\mathbf{H} \parallel x$  ( $h < 0$ ). При этом угол отклонения  $\varphi$ , определяемый решением уравнения (1.92), следует считать функцией координаты и времени следующего вида:

$$u = u(X) = u(x - Vt),$$

где  $V$  – скорость стационарного движения в единицах предельной скорости  $c$  (см. (1.93)). Находя производные  $u_{tt} = V^2 u_{XX}$ ,  $u_{xx} = u_{XX}$  и вводя переменную

$$\xi = \frac{X}{\sqrt{1 - V^2}},$$

уравнение (1.92) можно переписать в виде

$$u_{\xi\xi} - \sin u = -\frac{\beta V}{\sqrt{1-V^2}} u_{\xi} - 2h \sin \frac{u}{2}. \quad (1.95)$$

Граничные условия задачи:

$$u(\xi \rightarrow -\infty) = 0, \quad u(\xi \rightarrow \infty) = 2\pi, \quad u_{\xi}(\xi \rightarrow \pm\infty) = 0. \quad (1.96)$$

Рассмотрим решение уравнения в отсутствие затухания и внешнего магнитного поля, то есть

$$u_{\xi\xi} - \sin u = 0. \quad (1.97)$$

Решение этого уравнения проводится аналогично решению уравнения (1.37), в результате чего получим

$$\begin{aligned} \cos \frac{u}{2} &= -\operatorname{th} \xi = -\operatorname{th} \frac{x-Vt}{\sqrt{1-V^2}}, \\ \sin \frac{u}{2} &= \frac{1}{2} u_{\xi} = \frac{1}{\operatorname{ch} \xi} \end{aligned} \quad (1.98)$$

или

$$u = 4 \arctg \left( \exp \frac{x-Vt}{\sqrt{1-V^2}} \right). \quad (1.99)$$

Используя полученное решение, первую производную  $u$  по времени можно представить в виде

$$\frac{du}{dt} = -\frac{2V}{\sqrt{1-V^2}} \sin \frac{u}{2}. \quad (1.100)$$

Здесь скорость  $V$  может принимать значения из интервала  $0 < V < 1$ . Потребуем, чтобы найденное решение удовлетворяло уравнению (1.92) с отличной от нуля правой частью. В этом случае скорость будет принимать вполне определенное значение, удовлетворяющее уравнению

$$\frac{\beta V}{\sqrt{1-V^2}} - |h| = 0. \quad (1.101)$$

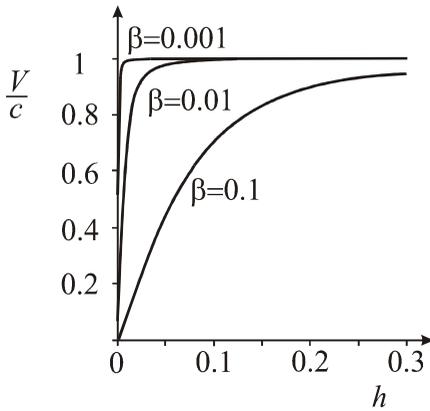
Это уравнение следует из (1.95) после подстановки выражений для  $\sin(u/2)$  и  $u_{\xi}$ . Решая полученное уравнение относительно скорости  $V$ , найдем (рис. 1.13)

$$V = \pm \frac{h}{\sqrt{\beta^2 + h^2}}. \quad (1.102)$$

В размерных переменных

$$V = c \frac{H}{\sqrt{H^2 + (2\alpha/M_0)^2 K_p (2\pi M_0^2 + |K|)}}. \quad (1.103)$$

С ростом внешнего магнитного поля скорость возрастает и стремится к предельной скорости  $V \rightarrow 1$  (в размерных переменных  $V \rightarrow c$ ) при  $h \rightarrow \infty$ .



**Рис. 1.13.** Зависимость скорости стационарного движения стенки от поля при различных значениях параметра затухания  $\beta$

Вычислим энергию стационарно движущейся доменной стенки согласно определению

$$\sigma_w(V) = \int_{-\infty}^{+\infty} (F - F_0) dz,$$

где  $F_0$  – константа, равная энергии однородно намагниченного (основного) состояния. В отсутствие затухания из (1.91) находим

$$\theta_1 = \frac{1}{\omega_0} \dot{\phi}, \quad \omega_0 = \frac{2\gamma}{M_0} (|K| + 2\pi M_0^2).$$

Подставляя  $\theta = \pi/2 + \theta_1$  в плотность энергии (1.89) и пренебрегая малыми слагаемыми, найдем

$$F - F_0 = A \left( \frac{d\varphi}{dz} \right)^2 + \frac{|K| + 2\pi M_0^2}{\omega_0^2} \dot{\varphi}^2 + K_p \sin^2 \varphi. \quad (1.104)$$

Вводя безразмерные время  $t$  и координату  $x$ , имеем

$$F - F_0 = \frac{1}{2} K_p \left\{ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + 2 \sin^2 \frac{u}{2} \right\},$$

где  $u = 2\varphi$ . Вычисляя интеграл, переходя при этом к безразмерной переменной  $\xi$  и используя (1.98) и (1.100), нетрудно показать, что энергия стационарно движущейся со скоростью  $V$  доменной стенки равна

$$\sigma_w(V) = \frac{\sigma_w}{\sqrt{1-V^2}}, \quad (1.105)$$

где  $\sigma_w = 4\sqrt{AK_p}$  – энергия неподвижной 180-градусной стенки. В размерных переменных эта энергия примет вид

$$\sigma_w(V) = \frac{\sigma_w}{\sqrt{1-(V/c)^2}}.$$

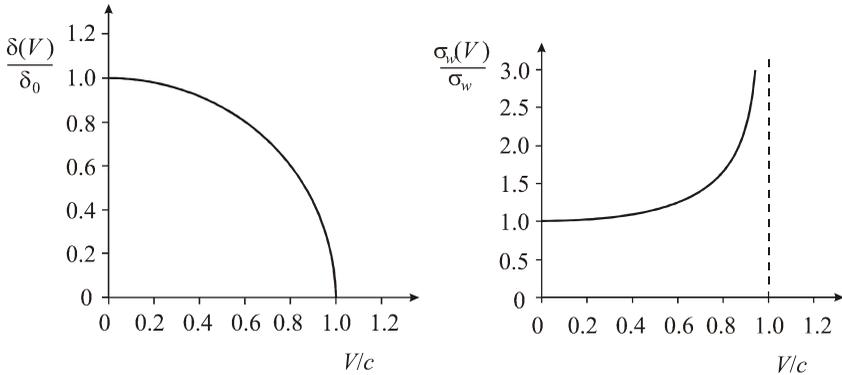
Характерный размер доменной стенки, как следует из (1.98) и (1.100), в размерных переменных равен

$$\delta(V) = \delta_0 \sqrt{1-V^2/c^2}. \quad (1.106)$$

Видно, что при  $V \rightarrow c$  характерный размер доменной стенки стремится к нулю ( $\delta(V) \rightarrow 0$ ), а энергия стенки  $\sigma_w(V)$  – к бесконечности ( $\sigma_w(V) \rightarrow \infty$ ) (см. рис. 1.14). Это связано с тем, что при  $V \rightarrow c$  нарушается условие применимости уравнений микромагнетизма ( $\delta(V) \gg a_0$ , где  $a_0$  – постоянная решетки). Следовательно, полученные результаты справедливы при таких скоростях  $V$  стенки, когда  $\delta(V) \gg a_0$ , то есть пока

$$\frac{c-V}{c} \gg \left( \frac{a_0}{\delta_0} \right)^2.$$

Динамика доменных стенок в слабых ферромагнетиках, таких как ортоферриты, как показано в [Звездин, 1979; Барьяхтар В.Г. и др., 1980], также описывается возмущенным уравнением синус-Гордона вида (1.88). Экспериментальные исследования Четкина и др. (см. [Барьяхтар В.Г. и др.,



**Рис. 1.14.** Зависимость характерного размера и энергии стенки от скорости ее стационарного движения

1985]) показывают, что зависимость скорости от поля хорошо описывается выражением (1.99), а предельная скорость стационарного движения доменной стенки в ортоферритах составляет 20 км/с.

**Нестационарное движение.** Определим скорость нестационарного движения. Для этого положим

$$u_t = -2\varepsilon(t) \sin \frac{u}{2}. \quad (1.107)$$

В отличие от предыдущего случая стационарного движения одной стенки (см. (1.100)) параметр  $\varepsilon(t)$  в (1.107) считаем не постоянным, а зависящим от времени. Подстановка (1.107) в (1.92) приводит к уравнению

$$u_{xx} - (1 + \varepsilon^2) \sin u = -2(h + \beta\varepsilon + \varepsilon_t) \sin \frac{u}{2}. \quad (1.108)$$

Решение соответствующего однородного уравнения при движении стенки со скоростью  $V$  можно искать в виде  $u = u(x - Vt) = u(X)$ . С учетом  $u_{xx} = u_{XX}$  решение можно представить в виде

$$\begin{aligned} \cos \frac{u}{2} &= -\text{th}((x - Vt)(1 + \varepsilon^2)^{1/2}), \\ \sin \frac{u}{2} &= \frac{1}{\text{ch}((x - Vt)(1 + \varepsilon^2)^{1/2})}. \end{aligned} \quad (1.109)$$

Это решение удовлетворяет (1.108) при

$$\varepsilon_t = -h - \beta\varepsilon.$$

Решая полученное уравнение с начальным условием

$$\varepsilon(t=0) = 0,$$

имеем

$$\varepsilon = -\frac{h}{\beta}(1 - e^{-\beta t}).$$

Параметризируя  $\varepsilon$  следующим образом:

$$\varepsilon = \frac{V}{\sqrt{1-V^2}},$$

решение (1.109) можно переписать в уже найденном ранее виде (1.98).

Скорость теперь представляет функцию времени и при  $h < 0$  имеет вид

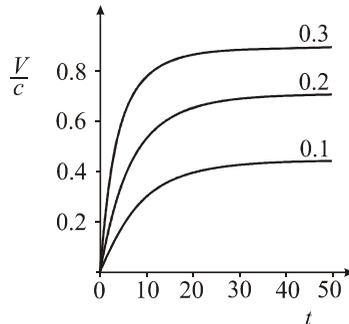
$$V(t) = \frac{|h|(1 - e^{-\beta t})}{\sqrt{\beta^2 + h^2(1 - e^{-\beta t})^2}}. \quad (1.110)$$

Видно, что при  $t \rightarrow \infty$  скорость  $V(t)$  стремится к значению, определяемому выражением (1.102). Таким образом, с течением времени доменная стенка выходит на стационарный режим движения. С ростом поля время выхода на стационарный режим уменьшается (рис. 1.15).

При малых величинах поля и затухания  $\beta \ll 1$ ,  $|h| \ll 1$  имеем

$$V(t) \approx |h|t, \quad \frac{\partial V}{\partial t} \approx |h| \ll 1.$$

**Рис. 1.15.** Зависимость скорости нестационарного движения доменной стенки от времени при различных полях  $|h|$  в случае  $\beta = 0.01$



Таким образом, полученное решение справедливо при достаточно медленном изменении  $\varepsilon$  (а тем самым и скорости  $V$ ) со временем, что имеет место в малых полях и при малых затуханиях.

## ГЛАВА II. СТРУКТУРА И ДИНАМИКА ЗАРОДЫШЕЙ ПЕРЕМАГНИЧИВАНИЯ В ЛЕГКООСНОМ ФЕРРОМАГНЕТИКЕ

Экспериментальные исследования показывают, что перемагничивание ферромагнетиков связано с ростом зародышей обратной намагниченности, возникновением и последующим исчезновением неравновесной динамической доменной структуры. Достаточно подробный обзор экспериментальных и теоретических исследований по этому вопросу можно найти в ряде книг (см., например, [Вонсовский, 1971; Крупицка, 1976; Рандошкин, Червоненкис, 1990]).

Перемагничивание может быть как однородным, так и неоднородным. Однородное перемагничивание осуществляется когерентным вращением векторов намагниченности по образцу. Процесс неоднородного перемагничивания в начальной и конечной стадиях сопровождается зарождением домена обратной намагниченности, образованием ограничивающих его взаимодействующих 180-градусных доменных стенок, их движением и последующей аннигиляцией 180-градусных стенок или образованием 360-градусной доменной стенки [Рандошкин, Червоненкис, 1990].

Теоретическое описание особенностей перемагничивания пленок ферритов-гранатов, а также наблюдаемых в них новых явлений в низкочастотной динамике магнитных неоднородностей [Кандаурова, 2002] может иметь успех только при детальном исследовании динамики взаимодействующих 180-градусных стенок как одинаковой, так и разной полярности.

Неоднородное перемагничивание можно рассматривать как фазовый переход, происходящий путем образования и роста зародышей, активными центрами которых являются дефекты как в объеме, так и на поверхности образца. Можно указать на следующие возможные механизмы образования таких зародышей новой фазы. В магнетике даже при насыщении остаются небольшие участки прежних доменов, например, в виде 360-градусных стенок. Эти доменные стенки, в центре которых намагниченность антипараллельна внешнему магнитному полю, могут служить зародышами перемагничивания. На образование зародышей может оказать существенное влияние размагничивающее поле поверхностей образца или поле рассеяния

внутренних неоднородностей намагниченности вблизи различных дефектов, способствующих образованию малых областей с направлением намагниченности, близкой к направлению поля, вызывающего перемагничивание. Кроме того, причиной, способствующей образованию зародышей, могут служить тепловые флуктуации, приводящие к появлению небольших областей с намагниченностью, обратной полю. Однако эти флуктуации только тогда могут стать макроскопическими зародышами, когда их размеры превышают некоторую минимальную критическую величину. Такие зародыши могут образоваться в тех местах образца, где имеются благоприятные условия для их образования, например, на участках с пониженной магнитной анизотропией. Зародыши новой фазы через некоторое время могут преобразоваться в домены обратной намагниченности [Рандошкин, Червоненкис, 1990]. В одноосных ферромагнетиках с большим фактором качества домены обратной намагниченности зарождаются в виде цилиндрических магнитных доменов, имеющих разнообразную форму: круговую, вытянутую, треугольную и т.д. Наблюдаются также зародыши в виде очень узкого полосового домена ограниченной длины. Условия роста и уничтожения зародышей перемагничивания в виде сфер и эллипсоидов вращения в образцах ограниченных размеров исследованы Филипповым и Лебедевым, где дано описание качественной картины скачкообразного изменения намагниченного состояния.

В некоторых работах отмечается, что начальная стадия возникновения доменов нового направления намагниченности до формирования цилиндрического магнитного домена хорошо согласуется с моделью «конденсации» магнонов в «магнонную каплю». Эта модель позволяет проанализировать как малоамплитудные, так и большеамплитудные локализованные магнитные неоднородности без учета магнитостатического взаимодействия. Динамику большеамплитудных магнитных неоднородностей, то есть следующую стадию возникновения домена обратной намагниченности, с учетом магнитостатического взаимодействия можно было бы исследовать в одномерной солитонной модели (см., например, [Косевич и др., 1983]). Этими авторами поведение локализованной магнитной неоднородности анализируется только в случае отсутствия внешнего магнитного поля и затухания.

Подробный обзор теоретических работ и изложение результатов исследования двухсолитонных образований в ферромагнетиках можно найти в монографии [Косевич и др., 1983] и ряде статей (например, [Бабич, Косевич, 1980]). Однако в этих работах недостаточно освещена роль затухания и внешнего магнитного поля при учете магнитостатического взаимодействия, что объясняется сложностью динамических уравнений, следующих из теории возмущений, основанной на методе обратной задачи рассеяния.

В настоящей главе динамика двухсолитонных образований излагается с учетом диссипативных процессов, внешнего магнитного поля, а также магнитостатического взаимодействия, которые оказывают определяющее влияние [Шамсутдинов и др., 2009]. Одномерные зародыши перемангничивания рассматриваются как некоторые образования, состоящие из двух взаимодействующих 180-градусных доменных стенок. Локализованные в пространстве магнитные неоднородности в виде динамической ноль-градусной доменной стенки и динамической 360-градусной доменной стенки представляют собой двухсолитонное образование из двух сильно взаимодействующих доменных стенок. 360-градусную доменную стенку можно рассматривать как зародыш метастабильной фазы в магнитном поле в недрах стабильной. Напротив, ноль-градусную стенку – как зародыш устойчивой фазы в недрах метастабильной. С точки зрения нелинейной физики динамическая 360-градусная доменная стенка представляет собой магнитный  $4\pi$ -вобблер, или магнитную неоднородность, образованную двумя сильно взаимодействующими солитонами (180-градусными стенками разной полярности) с одинаковыми топологическими зарядами. Динамическая ноль-градусная доменная стенка представляет собой магнитный бризер, образованный сильно взаимодействующими солитонами с противоположными топологическими зарядами (180-градусными стенками одинаковой полярности). Следует отметить еще тот факт, что как динамическая ноль-градусная, так и динамическая 360-градусная доменные стенки обладают внутренними степенями свободы, связанными с возможностью движения образующих их 180-градусных стенок относительно центра системы.

Рассматриваемые процессы связаны с большими изменениями намагниченности, происходящими в течение времени порядка или более обратной частоты ферромагнитного (антиферромагнитного) резонанса на рас-

расстояниях меньше  $10^{-6}$  м. Например, время перемагничивания феррит-гранатов может составлять доли микросекунд и более, а время жизни зародышей обратной намагниченности – наносекунды и более [Рандошкин, Червоненкис, 1990].

## 2.1. Структура одномерных зародышей перемагничивания

Исследуем структуру магнитной неоднородности, которую можно представить в виде двух сильно взаимодействующих доменных стенок (см. рис. 2.1). Сначала рассмотрим одномерный зародыш перемагничивания. Будем исходить из следующей плотности энергии для одноосного ферромагнетика в магнитном поле  $\mathbf{H} = (0, 0, -H)$ :

$$F = A \left( \frac{d\theta}{dy} \right)^2 + K \sin^2 \theta + M_0 H \cos \theta. \quad (2.1)$$

Определим направления ориентации вектора намагниченности в одноосном ферромагнетике ( $K > 0$ ) в магнитном поле, параллельном оси легкого намагничивания  $\mathbf{z} \parallel \mathbf{c}$ . Эти направления можно найти из условия минимума энергии в однородно намагниченном состоянии, то есть из условия

$$\frac{\partial F_0}{\partial \theta} = 0, \quad \frac{\partial^2 F_0}{\partial \theta^2} > 0,$$

где  $F_0 = F(\theta_y = 0)$ ,  $\theta_y = d\theta/dy$ .

Анализ показывает, что в магнитном поле, параллельном оси легкого намагничивания, вектор  $\mathbf{M}$  может ориентироваться следующим образом:

- I)  $\theta_1 = 0, 2\pi$  при  $H < H_a$ ,
- II)  $\theta_2 = \pi, 3\pi$  при  $H > -H_a$ ,

где  $H_a = 2K/M_0$  – поле магнитной анизотропии. Области существования состояний I и II в интервале полей  $(-H_a, H_a)$  перекрываются. При  $H = 0$  указанные магнитные состояния имеют одинаковую энергию. Переход между ними при  $H = 0$  можно рассматривать как фазовый переход первого рода.

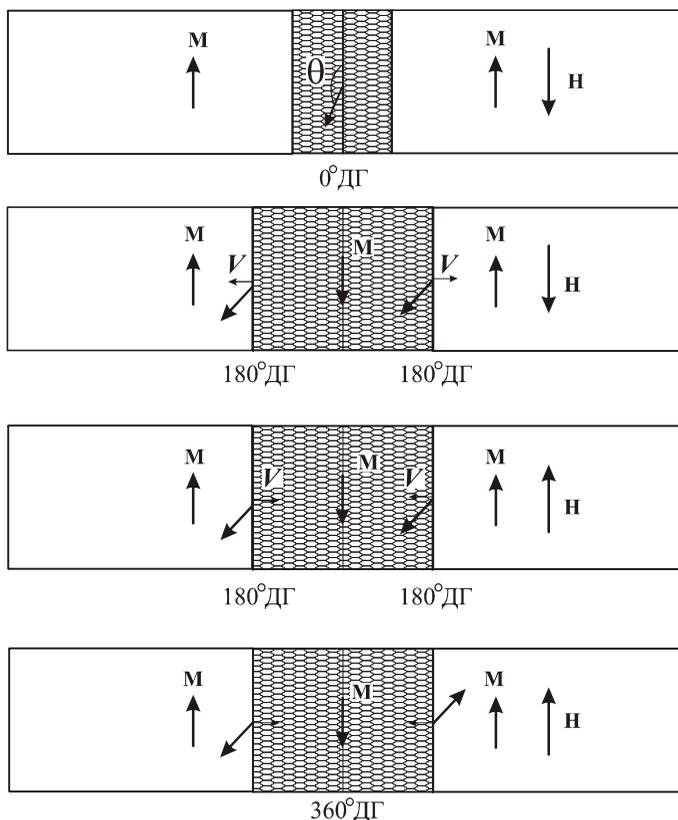
Остановимся на рассмотрении влияния магнитных неоднородностей на такой переход. Уравнение Эйлера задачи имеет вид

$$2A\theta_{yy} - 2K \sin \theta \cos \theta + M_0 H \sin \theta = 0, \quad (2.2)$$

а его первый интеграл –

$$\theta_{\xi}^2 = \sin^2 \theta + 2h \cos \theta + c, \quad (2.3)$$

где  $\xi = y/\delta_0$ ,  $\delta_0 = \sqrt{A/K}$ ,  $h = M_0 H / 2K = H/H_a$ . Интегральные кривые уравнения (2.3) применительно к ферромагнетикам были описаны Широковым.



**Рис. 2.1.** Неоднородное магнитное образование в виде двух взаимодействующих 180-градусных границ (ДГ) в магнитном поле (схематически)

Как видно, такие неоднородности должны удовлетворять граничному условию

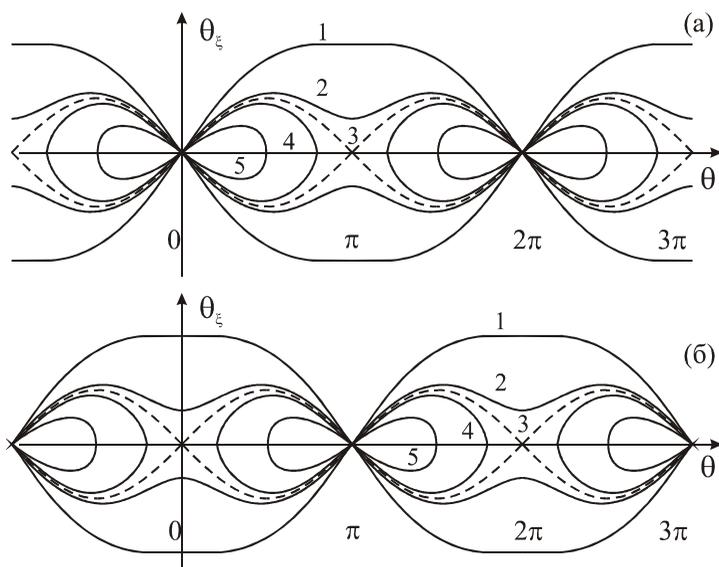
$$\theta_{\xi} (|\xi| \rightarrow \infty) = 0. \quad (2.4)$$

В полях  $-1 < h < 1$  отдельно рассмотрим первый интеграл для устойчивых и метастабильных состояний. На рис. 2.2 изображены кривые, которые являются сепаратрисами семейства интегральных траекторий уравнения (2.2).

Интегральные кривые для случая устойчивых состояний, кроме кривых, лежащих внутри штриховых, получены, полагая  $c = -2h$  при  $h < 0$  и  $c = 2h$  при  $h > 0$ . Сепаратрисы описывают доменную границу, а ее седловые точки (точки пересечения сепаратрисы с осью  $\theta_{\xi} = 0$ ) отвечают доменам, соответствующим состояниям I и II. Из рис. 2.2а видно, что в фазе I ( $\theta_1 = 0, 2\pi$ ) при  $h < -1$  сепаратриса описывает обычную 360-градусную доменную границу, при  $-1 < h < 0$  на сепаратрисах появляются экстремумы. Это означает, что в центре 360-градусной стенки появляются и растут перегибы («перетяжки») и, следовательно, расширяется область, занимаемая спинами, направление которых близко к тому, которое должно быть в состоянии II ( $\theta_2 = \pi, 3\pi$ ) (см. рис. 2.3). Эту «перетяжку» можно рассматривать как зародыш состояния II, который начинает расти еще в недрах магнетика, находящегося в состоянии I, то есть до того, как система достигнет точки равновесного перехода. В точке перехода  $h = 0$  зародыш превращается в домен обратной намагниченности, соответствующий состоянию с  $\theta_2 = \pi, 3\pi$ .

На рис. 2.2 изображены также интегральные кривые для случая, когда седловые точки соответствуют метастабильным состояниям (кривые, лежащие внутри штриховых линий), полученные, полагая  $c = -2h$ , при  $0 < h < 1$  (рис. 2.2а) и  $c = 2h$  при  $-1 < h < 0$  (рис. 2.2б). Фазовые траектории, лежащие внутри штриховой линии, являются замкнутыми. Эти траектории соответствуют уединенным магнитным неоднородностям типа статических солитонов или 0-градусных стенок, представляющих собой зародыш устойчивого состояния в недрах метастабильного. Особенностью такого зародыша перемагничивания является то, что он может образоваться только после того, как система перешла точку равновесного перехода. Ме-

тастабильное состояние с  $\mathbf{M} \uparrow \downarrow \mathbf{H}$  неустойчиво по отношению к достаточно крупным возмущениям. В магнетике, находящемся в метастабильном состоянии, возникающий зародыш устойчивого состояния достаточно большой амплитуды может вырасти и дать начало двум удаляющимся друг от друга 180-градусным доменным границам. После разбегания таких стенок магнетик переходит в наиболее устойчивое стационарное состояние.



**Рис. 2.2.** Фазовые портреты уравнения (2.3) для:  
 (а)  $c = -2h$ : (1) –  $h = -1$ , (2) –  $h = -0.1$ , (3) –  $h = 0$ , (4) –  $h = 0.1$ , (5) –  $h = 0.5$ ;  
 (б)  $c = 2h$ : (1) –  $h = 1$ , (2) –  $h = 0.1$ , (3) –  $h = 0$ , (4) –  $h = -0.1$ , (5) –  $h = -0.5$

Прежде чем приступить к изложению динамики зародыша перемангничивания, рассмотрим его форму в одномерной модели в стационарном состоянии.

**360-градусная доменная граница.** Устойчивость 360-градусной доменной стенки во внешнем магнитном поле в одноосном ферромагнетике рассматривалась в работах Ходенкова и Куделькина. Граница области устойчивости и динамика начальной формы 360-градусной стенки для произвольных значений фактора качества исследованы Островской. Влияния магнитоэлектростатического взаимодействия на структуру и статические характе-

ристики 360-градусной стенки в тонких пленках в случае малого фактора качества детально рассмотрено Муратовым и Осиповым. В дальнейшем ограничимся рассмотрением случая большого фактора качества и массивных образцов.

Граничные условия в случае магнитной неоднородности в виде 360-градусной доменной стенки таковы:

$$\theta(\xi \rightarrow -\infty) = \theta_1 = 0, \quad \theta(\xi \rightarrow +\infty) = \theta_1 = 2\pi, \quad \theta_\xi(|\xi| \rightarrow \infty) = 0. \quad (2.5)$$

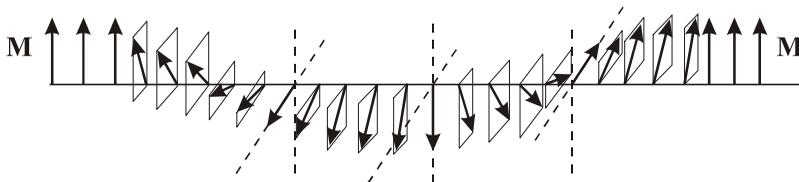
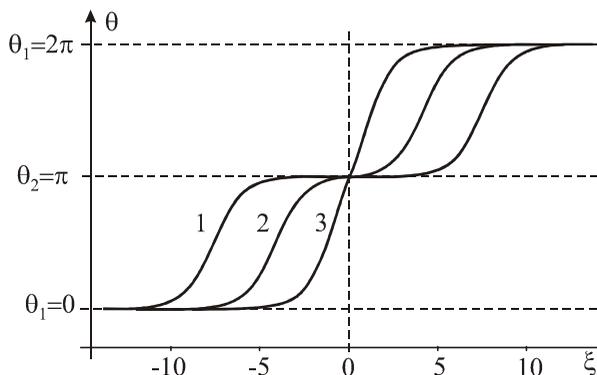
Решение уравнения (2.3), соответствующее граничным условиям (2.5), имеет вид (см. рис. 2.3):

$$\operatorname{ctg}^2 \frac{\theta}{2} = \frac{-h}{1-h} \operatorname{sh}^2 \xi \sqrt{1-h}, \quad (h < 0). \quad (2.6)$$

Из рисунка видно, что при  $|h| \rightarrow 0$  360-градусная доменная стенка распадается на две 180-градусные доменные стенки разной полярности (см. рис. 2.4) с одинаковыми топологическими зарядами, образуя домен фазы II ( $\theta_2 = \pi$ ).

**Рис. 2.3.** 360-градусная доменная граница

- (1)  $h = -10^{-6}$ ,
- (2)  $h = -10^{-3}$ ,
- (3)  $h = -0.3$



**Рис. 2.4.** Распределение намагниченности в 360-градусной доменной стенке (схематически)

**Ноль-градусная доменная граница** (рис. 2.5). Граничные условия в случае магнитной неоднородности, образующейся в недрах метастабильной фазы I ( $\theta_1 = 0$ ,  $\mathbf{M} \uparrow \downarrow \mathbf{H}$ ), должны выбираться в виде

$$\theta(\xi \rightarrow \pm\infty) = 0, \quad \theta_\xi(|\xi| \rightarrow \infty) = 0. \quad (2.7)$$

Решение (2.3), удовлетворяющее (2.7), имеет вид

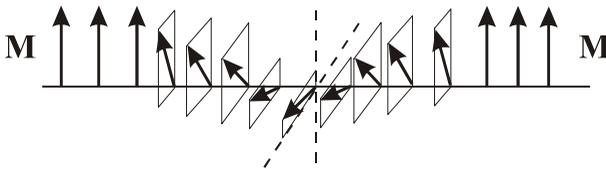
$$\operatorname{tg}^2 \frac{\theta}{2} = \frac{1-h}{h} \cdot \frac{1}{\operatorname{ch}^2 \xi \sqrt{1-h}}, \quad (0 < h < 1). \quad (2.8)$$

Решение для 0-градусных стенок (2.8) описывает одномерный зародыш устойчивого состояния с  $\mathbf{M} \uparrow \uparrow \mathbf{H}$  внутри метастабильного с  $\mathbf{M} \uparrow \downarrow \mathbf{H}$ . Характеристики таких стенок в зависимости от поля подробно были исследованы Сабитовым. Выражение (2.8) при  $h \rightarrow 0$  описывает две взаимодействующие 180-градусные доменные стенки с противоположными топологическими зарядами, разделяющие домен устойчивой фазы II (см. рис. 2.6).

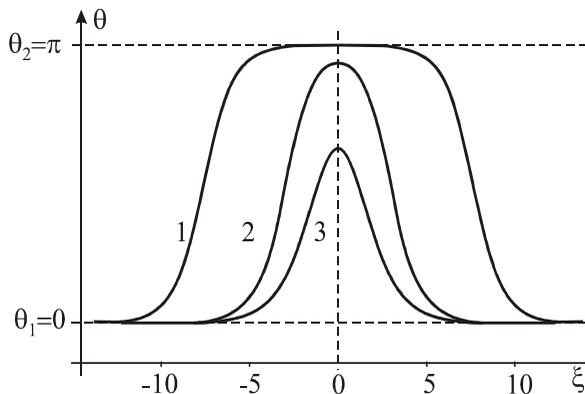
Можно показать, что решение (2.8), кроме (2.7), удовлетворяет дополнительному условию

$$\theta_\xi(\xi = 0) = 0. \quad (2.9)$$

Неоднородность (2.8), удовлетворяющая условиям (2.7) и (2.9), представляет собой критический зародыш перемагничивания, который достаточен, чтобы инициировать переход всей системы из метастабильного в абсолютно устойчивое однородное состояние. Из рис. 2.6 видно, что с приближением к точке перехода ( $|h| \rightarrow 0$ ) размер критического одномерного зародыша перемагничивания растет.



**Рис. 2.5.** Распределение намагниченности в 0-градусной доменной стенке (схематически)



**Рис. 2.6.** Критический зародыш: (1)  $h = 10^{-5}$ , (2)  $h = 0.01$ , (3)  $h = 0.3$

Динамика рассмотренных выше локализованных магнитных неоднородностей, представляющих собой сильно взаимодействующие доменные стенки (двухсолитонные образования), с учетом затухания и внешнего магнитного поля будет изложена далее.

## 2.2. Интегралы движения. Законы изменения энергии и числа спиновых отклонений

**Легкоосный ферромагнетик.** Сначала рассмотрим изменение полной энергии

$$W = \int F d^3x$$

при наличии возмущений в легкоосном ферромагнетике. Изменение энергии равно

$$\delta W = \int \delta F dx = \int \left( \frac{\delta F}{\delta \theta} \delta \theta + \frac{\delta F}{\delta \varphi} \delta \varphi \right) d^3x.$$

С учетом уравнения Ландау-Лифшица в форме (1.21) получим

$$\delta W = \frac{M_0}{\gamma} \int \left\{ [\dot{\varphi} \sin \theta - \alpha \dot{\theta}] \delta \theta - [\dot{\theta} \sin \theta + \alpha \dot{\varphi} \sin^2 \theta] \delta \varphi \right\} d^3x, \quad (2.10)$$

откуда находим

$$\frac{dW}{dt} = -2D, \quad (2.11)$$

$$D = \int \tilde{D} dx = \frac{1}{2} \frac{\alpha M_0}{\gamma} \int (\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta) d^3 x.$$

В случае наличия затухания ( $\alpha \neq 0$ ) полная энергия уменьшается, то есть перестает быть интегралом движения.

Когда угол  $\phi$  не зависит от координаты, из (2.10) имеем

$$\frac{\partial W}{\partial \phi} = -\frac{M_0}{\gamma} \int (\dot{\theta} \sin \theta + \alpha \dot{\phi} \sin^2 \theta) d^3 x. \quad (2.12)$$

Введем величину

$$N = \frac{M_0}{2\mu_0} \int (1 - m_z) d^3 x = \frac{M_0}{2\mu_0} \int (1 - \cos \theta) d^3 x, \quad (2.13)$$

имеющую смысл среднего числа элементарных линейных возбуждений, то есть числа спиновых отклонений [Косевич и др., 1983]. Здесь  $\mu_0 = \gamma \hbar / 2$  – магнетон Бора,  $\hbar$  – постоянная Планка. Если число спиновых отклонений велико ( $N \gg 1$ ), то его можно положить равным целому числу. Уравнение (2.12) с учетом выражения (2.13) можно переписать в виде

$$\hbar \frac{dN}{dt} = -\frac{\partial W}{\partial \phi} - \frac{M_0}{\gamma} \alpha \int \dot{\phi} \sin^2 \theta d^3 x. \quad (2.14)$$

Это уравнение описывает изменение среднего числа спиновых отклонений. В одноосных ферромагнетиках при  $\partial W / \partial \phi = 0$  и в отсутствие затухания среднее число спиновых отклонений  $N$  является интегралом движения. Однако в одноосных ферромагнетиках учет магнитостатического взаимодействия при исследовании динамики магнитных неоднородностей приводит к разрушению этого интеграла движения.

Следует отметить, что уравнения (2.11) и (2.14) могут быть использованы при изучении влияния возмущений, нарушающих интегрируемость уравнения Ландау–Лифшица, на характеристики солитонов.

**Ферромагнетик типа «легкая плоскость».** Перейдем к рассмотрению изменения полной энергии одномерной магнитной неоднородности в случае легкоплоскостного ферромагнетика

$$W = \frac{1}{8} \sigma_w \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{F}(u, u_x, u_t) dx, \quad (2.15)$$

$$\tilde{F}(u, u_x, u_t) = \left[ \frac{1}{2} u_t^2 + \frac{1}{2} u_x^2 + 2 \sin^2 \frac{u}{2} - 8h \sin^2 \frac{u}{4} \right].$$

Изменение энергии равно

$$\delta W = \frac{\sigma_w}{8} \int \left\{ \frac{\delta \tilde{F}}{\delta u} \delta u + \frac{\delta \tilde{F}}{\delta \dot{u}} \delta \dot{u} \right\} dx, \quad (2.16)$$

где

$$\frac{\delta \tilde{F}}{\delta \dot{u}} = \dot{u}.$$

Для дальнейшего преобразования выражения (2.16) рассмотрим возмущенное уравнение синус-Гордона (1.92), которое можно записать в виде:

$$u_{tt} + \frac{\delta \tilde{F}}{\delta u} + \beta u_t = 0.$$

С учетом этого уравнение, описывающее изменение энергии (2.15), можно представить следующим образом:

$$\frac{dW}{dt} = -\beta \frac{\sigma_w}{8} \int \dot{u}^2 dx. \quad (2.17)$$

Выражение для среднего числа элементарных линейных возбуждений, приходящихся на единицу площади,

$$N = \frac{M_0}{2\mu_0} \int_{-\infty}^{+\infty} (1 - m_x) dz, \quad (2.18)$$

или числа магнонов, входящих в локализованную магнитную неоднородность, в угловых переменных  $\varphi = u/2$  после замены  $z/\delta_0 \rightarrow x$  принимает вид

$$N = \frac{M_0 \delta_0}{2\mu_0} \int \left( 1 - \cos \frac{u}{2} \right) dx = \frac{M_0 \delta_0}{\mu_0} \int \sin^2 \frac{u}{4} dx. \quad (2.19)$$

Дифференцируя  $N$  по времени, получим

$$\frac{dN}{dt} = \frac{M_0 \delta_0}{2\gamma} \int \dot{u} \sin \frac{u}{2} dx. \quad (2.20)$$

Это выражение можно переписать в виде

$$\frac{d}{dt} \int \sin^2 \frac{u}{4} dx = \frac{1}{4} \int \dot{u} \sin \frac{u}{2} dx. \quad (2.21)$$

Уравнения изменения энергии (2.17) и среднего числа спиновых отклонений (2.20) могут быть использованы при исследовании влияния различных возмущений на динамику магнитных неоднородностей, в том числе магнитных солитонов в легкоплоскостном ферромагнетике.

### 2.3. Динамические и топологические магнитные солитоны

Рассмотрим динамические и топологические однопараметрические солитоны. Для простоты и наглядности проиллюстрируем эти понятия на примере одноосного ферромагнетика. К топологическим солитонам можно отнести стационарно движущиеся 180-градусные доменные стенки в одноосном ферромагнетике, в котором существуют два вырожденных основных состояния с  $\theta = 0$  и  $\theta = \pi$ . Решение уравнения Ландау–Лифшица, соединяющее два основных состояния ( $\theta|_{y \rightarrow -\infty} = 0$  и  $\theta|_{y \rightarrow \infty} = \pi$ ) в одноосном кристалле, разделенных потенциальным барьером ( $\theta = \pm\pi/2$ ), называется топологическим магнитным солитоном.

Следует отметить, что топологический солитон (или кинк), структура которого определяется конкуренцией пространственной дисперсии (обменное взаимодействие) и нелинейности (кристаллографическая магнитная анизотропия), является «базовым» для построения реальных моделей доменных стенок. Такое построение подразумевает последующий учет нелокальной части магнитного диполь-дипольного взаимодействия, размерных эффектов (через граничные условия), магнитупругого взаимодействия и т.д. Поэтому реальная доменная граница в ограниченном образце, как правило, имеет тонкую внутреннюю структуру (скрученные участки, вертикальные и горизонтальные блоховские линии, блоховские точки и т.д.). Заметим, что для описания свойств динамических свойств массивных ферромагнетиков при определенных условиях тонкой структурой доменных границ можно пренебречь и аппроксимировать их топологическими магнитными солитонами [Додд и др., 1988; Косевич и др. 1983].

Топологический солитон описывает такое неоднородное распределение намагниченности, которое никакими непрерывными деформациями поля намагниченности не может быть сведено к основному состоянию. Иногда такой солитон называют кинком. Это связано с тем, что в теории дислокаций динамика топологического солитона описывает движение перегибов на дислокации (или кинка – от англ. kink) [Додд и др., 1988]. На фазовой плоскости  $(\theta, \theta_\xi)$  топологическим солитонам отвечает сепаратриса 1 или 1' (см. рис. 2.7), соединяющая разные особые точки  $(\theta = 0$  и  $\theta = \pi)$ , соответствующие вырожденному основному состоянию.

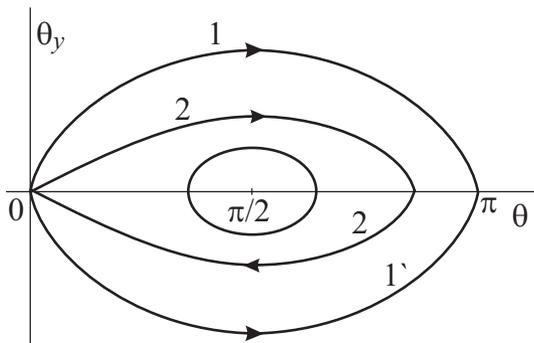
Топологический солитон, соответствующий движущейся 180-градусной стенке, разделяет два находящиеся в равновесии магнитных домена с противоположными направлениями намагниченности (рис. 2.8).

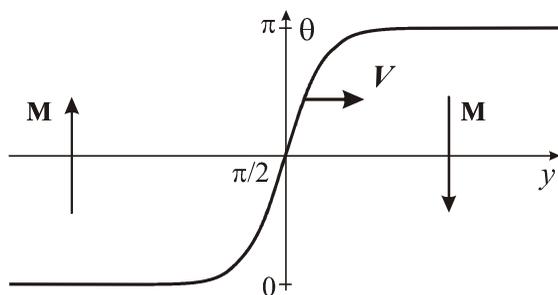
Существуют также нелинейные уединенные волны намагниченности другого типа, называемые динамическими солитонами (рис. 2.9), для которых справедливо

$$\theta(y - Vt \rightarrow -\infty) = \theta(y - Vt \rightarrow +\infty) = 0.$$

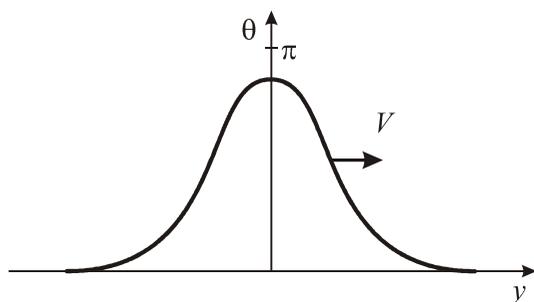
На фазовой плоскости динамическому солитону соответствует замкнутая сепаратрисная петля 2 (рис. 2.7). Эта петля непрерывно путем деформации может быть стянута в точку  $\theta = 0$ . В результате динамический солитон непрерывным образом переходит в состояние, соответствующее основному  $(\theta = 0)$ , при котором намагниченность однородна во всей рассматриваемой области. В этом случае говорят, что динамический солитон топологически эквивалентен состоянию с однородным распределением намагниченности.

**Рис. 2.7.** Фазовый портрет уравнения Ландау–Лифшица легкоосного ферромагнетика в отсутствие затухания и магнитостатического поля





**Рис. 2.8.** Топологический солитон (180-градусная доменная стенка)



**Рис. 2.9.** Динамический солитон (динамическая 0-градусная доменная стенка)

В легкоосном ферромагнетике, как было показано выше, энергия является интегралом движения. В случае отсутствия магнитостатического поля плотность энергии не зависит от угловой переменной  $\varphi$ . При этом существует дополнительный интеграл движения  $N$ , определяемый выражением (2.13), имеющий смысл среднего числа спиновых отклонений от основного состояния  $\theta = 0$  в локализованном магнитном возбуждении.

Если существование топологических солитонов связано с наличием нескольких равноценных однородно намагниченных состояний, то существование динамических магнитных солитонов обусловлено наличием некоторых динамических интегралов движения нелинейного уравнения Ландау–Лифшица, таких как энергия, полевой импульс и число спиновых отклонений. Включение в уравнение движения сколь угодно малых возмущений, разрушающих эти интегралы движения, приводит к ликвидации динамических солитонов. При этом магнетик из неоднородного состояния должен непрерывным образом переходить в топологически эквивалентное однородно намагниченное состояние. Решение для динамического солитона в

одноосном ферромагнетике при отсутствии магнитостатического взаимодействия, внешнего магнитного поля и диссипации было получено в работе [Ахиезер, Боровик, 1967] и с тех пор интерес к магнитным солитонам сильно возрос.

Если топологические солитоны в одноосном ферромагнетике мы называем 180-градусными стенками, то по аналогии динамические солитоны можно назвать динамическими ноль-градусными доменными стенками.

В случае легкоосного ферромагнетика уравнение Ландау–Лифшица в отсутствие затухания и внешнего магнитного поля допускает, кроме односолитонного, как двухсолитонные, так и многосолитонные решения [Косевич и др., 1983; Sklyanin, 1979]. Линейные «псевдопотенциалы» и законы сохранения для уравнения Ландау–Лифшица, описывающего нелинейную динамику ферромагнетика с одноосной анизотропией, описаны в работе [Боровик, Робук, 1981].

**Топологический заряд.** Существует так называемый топологический интеграл движения или топологический заряд [Додд и др., 1988]. Например, в случае уравнения синус-Гордона

$$u_{tt} - u_{xx} + \sin u = 0,$$

с помощью которого можно описать динамику вектора намагниченности, топологический заряд определяется выражением

$$q = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial u}{\partial x} dx = \frac{1}{2\pi} \{u(+\infty) - u(-\infty)\}. \quad (2.22)$$

Для солитонного решения

$$u = 4 \operatorname{arctg} \exp \left\{ \pm \frac{(x - Vt)}{\sqrt{1 - V^2}} \right\} \quad (2.23)$$

со знаком «+», удовлетворяющего граничному условию

$$u(-\infty) = 0, \quad u(+\infty) = 2\pi,$$

топологический заряд  $q = 1$ . Для антисолитона, то есть солитона противоположного направления (со знаком «-»), топологический заряд  $q = -1$ . Если в движущейся 180-градусной доменной стенке (в магнитном солитоне) намагниченность поворачивается против часовой стрелки и заряд равен

$q = 1$ , то в стенке, где вектор  $\mathbf{M}$  поворачивается по часовой стрелке (то есть в антисолитоне), заряд  $q = -1$ .

Уравнение синус-Гордон допускает еще решение, соответствующее солитон-солитонной паре:

$$\operatorname{ctg} \frac{u}{4} = V \cdot \frac{\operatorname{sh}(x/\sqrt{1-V^2})}{\operatorname{ch}(V(t-t_0)/\sqrt{1-V^2})}.$$

Это решение описывает взаимодействие двух стенок с одинаковыми направлениями поворота намагниченности, в частности динамическую 360-градусную стенку. Динамическая 360-градусная доменная стенка представляет собой две взаимодействующие 180-градусные стенки, обладающие одинаковыми топологическими зарядами, и имеет топологический заряд, равный двум. Действительно, согласно граничным условиям

$$u(-\infty) = 0, \quad u(+\infty) = 4\pi,$$

имеем

$$q = \frac{1}{2\pi} \{u(+\infty) - u(-\infty)\} = 2. \quad (2.24)$$

Топологический заряд динамической 0-градусной стенки, представляющей собой взаимодействующие доменные стенки с противоположными топологическими зарядами, равен нулю, так как, согласно граничным условиям,  $u(\pm\infty) = 0$ . Топологический заряд решения уравнения синус-Гордона, соответствующего однородному основному состоянию, также равен нулю.

Неоднородные решения уравнения синус-Гордона, топологический заряд которых равен нулю (бризер, солитон-антисолитонная пара), топологически эквивалентны однородному основному состоянию.

Таким образом, если в магнетике имеется локализованная магнитная неоднородность в форме бризера

$$\operatorname{tg} \frac{u}{4} = \sqrt{\frac{1-\omega^2}{\omega^2}} \cdot \frac{\sin(\omega(t-t_0))}{\operatorname{ch}(x\sqrt{1-\omega^2})} \quad (0 < \omega^2 < 1), \quad (2.25)$$

где  $\omega$  – частота его колебаний относительно неподвижного центра, то при определенных условиях следует ожидать непрерывного перехода системы в однородное основное состояние. Аналогично, если имеются взаимодействующие стенки (солитон-антисолитонная пара)

$$\operatorname{tg} \frac{u}{4} = \frac{1}{V} \cdot \frac{\operatorname{sh}(V(t-t_0)/\sqrt{1-V^2})}{\operatorname{ch}(x/\sqrt{1-V^2})} \quad (0 < V < 1), \quad (2.26)$$

где  $V$  – скорость движения стенок, то, согласно закону сохранения топологического заряда, возможна их аннигиляция.

В силу топологического характера, топологические солитоны могут рождаться только парами. При этом из однородного состояния должно возникать топологически ему эквивалентное, бризерное состояние (то есть динамическая 0-градусная доменная стенка). В свою очередь, такая ноль-градусная стенка может распасться на солитон-антисолитонную пару, то есть две взаимодействующие доменные стенки с противоположными направлениями поворота намагниченности. Условия зарождения, аннигиляции бризера, солитон-антисолитонной пары, как будет показано далее, определяются внешними воздействиями и диссипацией в системе.

Более детально вопрос о решении уравнения синус-Гордона в отсутствие внешних воздействий и топологическом заряде изложен в многочисленных монографиях по теории солитонов и нелинейной динамике (см., например, [Додд и др., 1988]).

## **2.4. Вывод уравнений эволюции параметров магнитных солитонов**

Наличие внешнего магнитного поля и диссипации, как было отмечено ранее, нарушает интегрируемость уравнения Ландау–Лифшица. В работе [Kivshar, 1989] на основе обратной задачи рассеяния развита теория возмущений для многосолитонных решений уравнения Ландау–Лифшица, в рамках которой рассмотрены такие образования, как доменная стенка и магнитный солитон.

Ниже изложен эффективный приближенный метод анализа двухсолитонных решений уравнения Ландау–Лифшица–Гильберта, основанный на сведении задачи об интегрировании нелинейного волнового уравнения к исследованию динамической системы, описывающей эволюцию параметров солитонов.

Рассмотрим одноосный ферромагнетик достаточно больших размеров и ограничимся изучением одномерных солитонов, зависящих от координаты  $y$ , считая  $z$  направленной вдоль оси легкого намагничивания.

Плотность энергии можно представить в виде

$$F = A \left( \frac{\partial \mathbf{m}}{\partial y} \right)^2 - K m_z^2 + 2\pi M_0^2 m_y^2 - M_0 \mathbf{H} \mathbf{m}. \quad (2.27)$$

В дальнейшем поле считаем направленным вдоль оси легкого намагничивания, то есть  $H_x = H_y = 0$ ,  $H_z = -H$ .

Уравнение Ландау–Лифшица–Гильберта с учетом (2.27) в угловых переменных

$$m_x = \sin \theta \cos \varphi, \quad m_y = \sin \theta \sin \varphi, \quad m_z = \cos \theta$$

можно представить в виде

$$\begin{aligned} \theta_{\xi\xi} - (1 + \varphi_{\xi}^2 + Q^{-1} \sin^2 \varphi) \sin \theta \cos \theta + h \sin \theta &= \alpha \theta_{\tau} - \varphi_{\tau} \sin \theta, \\ (\sin^2 \theta \cdot \varphi_{\xi})_{\xi} - Q^{-1} \sin^2 \theta \sin \varphi \cos \varphi &= \theta_{\tau} \sin \theta + \alpha \varphi_{\tau} \sin^2 \theta. \end{aligned} \quad (2.28)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \xi &= y / \delta_0, \quad \delta_0 = \sqrt{A / K}; \quad \tau = \gamma H_a t, \\ H_a &= 2K / M_0, \quad Q = K / 2\pi M_0^2, \quad h = M_0 H / 2K, \end{aligned}$$

где  $\gamma$  – гиромагнитное отношение,  $\alpha$  – параметр затухания. Заметим, что систему уравнений (2.28) можно получить из (1.50) и (1.51), производя замену  $H \rightarrow -H$ .

Рассмотрим магнитный солитон с неподвижным центром. Для нахождения решения, описывающего такой солитон, будем считать, что

$$\varphi = \varphi(\tau), \quad \theta = \theta(\xi, \tau).$$

В этом случае второе уравнение (2.28) можно переписать в виде

$$\theta_{\tau} = -\alpha \varphi_{\tau} \sin \theta - Q^{-1} \sin \theta \sin \varphi \cos \varphi. \quad (2.29)$$

Первое уравнение в (2.28) с учетом (2.29) принимает вид

$$\theta_{\xi\xi} - (1 + Q^{-1} \sin^2 \varphi) \sin \theta \cos \theta + [(1 + \alpha^2) \varphi_{\tau} + \alpha Q^{-1} \sin \varphi \cos \varphi + h] \sin \theta = 0. \quad (2.30)$$

Уравнение (2.30) можно рассматривать как обыкновенное дифференциальное уравнение для  $\theta$ , в котором коэффициенты зависят от  $\tau$  как

от параметра через зависимость  $\sin \varphi(\tau)$  и  $\varphi_\tau$ . Используя граничные условия

$$\theta(\xi \rightarrow \infty) = 0, \quad \theta_\xi(\xi \rightarrow \infty) = 0, \quad (2.31)$$

первый интеграл уравнения (2.30) можно записать так:

$$\theta_\xi = \pm 2\sqrt{1 + Q^{-1} \sin^2 \varphi} \cdot \sin \frac{\theta}{2} \left\{ \cos^2 \frac{\theta}{2} - \frac{\Omega + Q^{-1} \sin^2 \varphi}{1 + Q^{-1} \sin^2 \varphi} \right\}^{1/2}, \quad (2.32)$$

где

$$\Omega = (1 + \alpha^2)\varphi_\tau + \alpha Q^{-1} \sin \varphi \cos \varphi + h - Q^{-1} \sin^2 \varphi. \quad (2.33)$$

Решение (2.32), удовлетворяющее граничному условию (2.31), существует при

$$\Omega + Q^{-1} \sin^2 \varphi > 0$$

и имеет вид

$$\operatorname{tg}^2 \frac{\theta}{2} = \frac{1 - \Omega}{\Omega + Q^{-1} \sin^2 \varphi} \cdot \frac{1}{\operatorname{ch}^2(\sqrt{1 - \Omega} \cdot \xi)}, \quad (-Q^{-1} \sin^2 \varphi < \Omega < 1). \quad (2.34)$$

В решении (2.34) параметр  $\Omega$ , как и  $\varphi$ , является функцией времени.

Для однозначного определения  $\Omega$  и  $\varphi$  наряду с уравнением (2.33) необходимо еще одно уравнение. Для его получения поступим следующим образом. Исходя из (2.34), можно найти

$$\begin{aligned} \theta_\tau^* = \frac{d\theta}{d\tau} = & -\frac{Q^{-1} \sin \varphi \cos \varphi}{\Omega + Q^{-1} \sin^2 \varphi} \sin \theta \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial \tau} - \\ & - \frac{\sin \theta}{2(1 - \Omega)} \left( \frac{1 + Q^{-1} \sin^2 \varphi}{\Omega + Q^{-1} \sin^2 \varphi} - \xi \sqrt{1 - \Omega} \cdot \operatorname{th} \xi \sqrt{1 - \Omega} \right) \frac{\partial \Omega}{\partial \tau} \end{aligned} \quad (2.35)$$

и показать, что выражение (2.35) для  $\theta_\tau^*$  и выражение (2.29) для  $\theta_\tau$  совпадают только при  $h = 0$ ,  $\alpha = 0$ ,  $\Omega_\tau = 0$ . Это означает, что решение (2.34) при  $\alpha \neq 0$ ,  $h \neq 0$  тождественно не удовлетворяет (2.28). В дальнейшем, отказываясь от тождественного выполнения уравнений (2.28), в случае малых полей, затухания и  $\Omega_\tau \neq 0$  в адиабатическом приближении ограничимся более слабым требованием о выполнении его в среднем по всему интервалу изменения координаты  $\xi$ . Для этого (2.29) и (2.35) умножим на  $\sin \theta$ , проинтегрируем по переменной  $\xi$  и приравняем их друг другу:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \theta_{\tau} \sin \theta d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} \theta_{\tau}^* \sin \theta d\xi. \quad (2.36)$$

Вычисляя интегралы в (2.36) с учетом (2.32)–(2.34), можно получить еще одно уравнение, связывающее  $\Omega$  и  $\varphi$ . В результате имеем следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} \Omega_{\tau} &= \frac{2(1-\Omega)}{(1+\alpha^2)(1+Q^{-1}\sin^2\varphi)} \times \\ &\times \left\{ \alpha(\Omega+Q^{-1}\sin^2\varphi)(\Omega+Q^{-1}\sin^2\varphi-h) + \frac{1}{2Q} \left( h + \frac{\alpha}{2Q} \sin 2\varphi \right) \sin 2\varphi \right\} \times \\ &\times \left\{ 1 + \frac{\Omega+Q^{-1}\sin^2\varphi}{2\sqrt{(1-\Omega)(1+Q^{-1}\sin^2\varphi)}} \ln \frac{(\sqrt{1-\Omega} + \sqrt{1+Q^{-1}\sin^2\varphi})^2}{\Omega+Q^{-1}\sin^2\varphi} \right\}, \\ \varphi_{\tau} &= \frac{1}{1+\alpha^2} \left( \Omega+Q^{-1}\sin^2\varphi-h - \frac{\alpha}{2Q} \sin 2\varphi \right). \end{aligned} \quad (2.37)$$

Полученная система (2.37) из двух обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка определяет эволюцию со временем параметров  $\varphi$  и  $\Omega$  солитонов, определяемых решениями системы (2.28) в виде (2.34).

Эта система представляет собой неконсервативную динамическую систему.

Эту систему (2.37) можно также получить, используя законы изменения энергии и числа спиновых отклонений.

Уравнение изменения среднего числа спиновых отклонений в безразмерных переменных в одномерной модели представим в следующем виде:

$$\frac{dn}{d\tau} = - \int_{-\infty}^{\infty} (\alpha\varphi_{\tau} + Q^{-1} \sin \varphi \cos \varphi) \sin^2 \theta d\xi, \quad (2.38)$$

где

$$n(\varphi, \Omega) = \frac{1}{\sqrt{1+Q^{-1}\sin^2\varphi}} \ln \frac{(\sqrt{1-\Omega} + \sqrt{1+Q^{-1}\sin^2\varphi})^2}{|\Omega+Q^{-1}\sin^2\varphi|} - \quad (2.39)$$

среднее число спиновых отклонений, приходящихся на единицу площади.

Для плотности энергии солитона, приходящейся на единицу площади, исходя из (2.27) и (2.32)–(2.34), получим

$$W = \frac{\sigma_w}{8} E_0 - \gamma \hbar H n(\varphi, \Omega), \quad (2.40)$$

$$E_0 = 16\sqrt{1-\Omega}, \quad (2.41)$$

где  $\sigma_w = 4\sqrt{AK}$  – величина, равная энергии 180-градусной блоховской доменной стенки (см. (1.48)). Уравнение изменения энергии солитона (2.11) в безразмерных переменных можно представить в виде

$$\frac{dE_0}{d\tau} = -2D + \Delta E_h, \quad (2.42)$$

$$D = 2\alpha \int_{-\infty}^{\infty} (\theta_\tau^2 + \varphi_\tau^2 \sin^2 \theta) d\xi,$$

$$\Delta E_h = 4h \int_{-\infty}^{\infty} \theta_\tau \sin \theta d\xi.$$

Вычисление интегралов с использованием (2.29) и (2.32), считая  $\Omega$  и  $\varphi$  функциями времени  $\tau$ , снова приводит к системе уравнений (2.37). Эволюция параметров солитона под действием поля и затухания приводит, как видно из (2.38)–(2.42), к изменению со временем как числа магновов  $N(\varphi, \Omega)$ , так и энергии солитона.

Таким образом, исследование динамики различных локализованных магнитных неоднородностей в ферромагнетике сводится к решению системы из двух обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений первого порядка с заданными начальными условиями, то есть к решению задачи Коши.

## **2.5. Влияние внешнего магнитного поля и диссипации на характеристики солитонов**

Сначала рассмотрим случай отсутствия затухания и внешнего магнитного поля. При  $\alpha = 0$ ,  $h = 0$  из (2.37) следует, что

$$\begin{aligned}\Omega_\tau &= 0, \\ \varphi_\tau &= \Omega + Q^{-1} \sin^2 \varphi.\end{aligned}\tag{2.43}$$

Из первого уравнения имеем  $\Omega = \text{const}$ , а второе допускает несколько типов решений в зависимости от знака и величины  $\Omega$ . Рассмотрим случай  $0 < \Omega < 1$ , при этом для  $\varphi$  существует следующее решение:

$$\text{ctg } \varphi = -\frac{\omega}{\Omega} \text{tg } \omega(\tau - \tau_0), \quad \omega = \sqrt{\Omega(\Omega + Q^{-1})}.\tag{2.44}$$

При  $-Q^{-1} \sin^2 \varphi < \Omega < 0$  решение для  $\varphi$  имеет вид

$$\text{ctg } \varphi = -\frac{v}{|\Omega|} \text{th } v(\tau - \tau_0), \quad v = \sqrt{|\Omega|(Q^{-1} - |\Omega|)}.\tag{2.45}$$

Выражение (2.34) в случае периодического решения (2.44) описывает локализованные в пространстве периодические колебания намагниченности, а в случае  $\Omega \rightarrow +0$  – периодические колебания двух 180-градусных доменных стенок одинаковой полярности с противоположными топологическими зарядами относительно общего неподвижного центра системы. При этом стенки периодически превращаются из неелевских ( $\varphi = \pi/2 + n\pi$ ) в блоховские ( $\varphi = n\pi$ ) и обратно. Как уже отмечалось, блоховская доменная стенка представляет собой переходный слой между двумя доменами, в котором вектор намагниченности поворачивается в плоскости доменной стенки (см. рис. 1.3), тогда как в неелевской имеет место выход намагниченности из плоскости доменной границы (см. рис. 1.4). Выражение (2.34) в случае аperiodического решения (2.45) при  $\Omega \rightarrow -0$  ( $v \rightarrow 0$ ) описывает сближение и рассеяние двух блоховских стенок ( $\varphi(\tau \rightarrow -\infty) = 0$ ). В момент наибольшего сближения структура стенок является неелевской ( $\varphi(\tau = \tau_0) = \pi/2$ ), а после рассеяния намагниченность в стенках поворачивается на 180 градусов ( $\varphi(\tau \rightarrow +\infty) = \pi$ ). В случае  $\Omega \rightarrow -Q^{-1}$  ( $v \rightarrow 0$ ) имеет место рассеяние двух неелевских стенок практически без изменения направления намагниченности в доменной стенке.

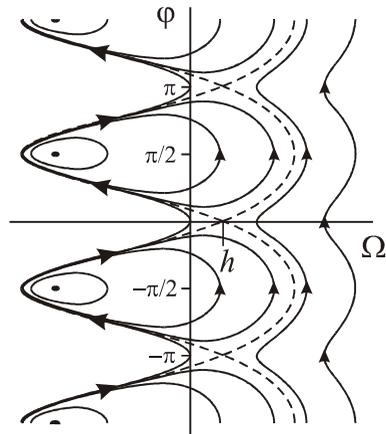
Во внешнем поле при наличии затухания и  $0 < \Omega < 1$  бризеру, определяемому выражениями (2.34) и (2.44), можно сопоставить зародыш перемагничивания. В случае  $-Q^{-1} \sin^2 \varphi < \Omega < 0$  солитон-антисолитонной паре,

определяемой (2.34) и (2.45), можно сопоставить домен обратной намагниченности, ограниченный двумя доменными стенками. В случае отсутствия поля и затухания параметр  $\Omega$  в решениях (2.34), (2.44) и (2.45) может принимать значения, удовлетворяющие неравенству

$$-Q^{-1} \sin^2 \varphi < \Omega < 1,$$

оставаясь неопределенной постоянной величиной. При наличии затухания и внешнего магнитного поля параметр  $\Omega$  является функцией времени и в каждый момент может принимать вполне определенные значения из вышеуказанного интервала, что можно показать на основании численных исследований системы уравнений (2.37) [Шамсутдинов и др., 2009].

Прежде чем изложить результаты численного анализа (2.37), проведем качественное исследование динамической системы (2.37) на фазовой плоскости  $(\Omega, \varphi)$ . При отсутствии затухания ( $\alpha = 0$ ) полная энергия  $W$  является интегралом движения. Строя изоэнергетические кривые  $W = \text{const}$  на плоскости  $(\Omega, \varphi)$ , получим фазовые траектории системы (2.37) в отсутствие затухания (см. рис. 2.10). Далее тип особых точек на этой плоскости, то есть положений равновесия динамической системы (2.37), определим с учетом затухания.



**Рис. 2.10.** Фазовые траектории динамической системы (2.37)

Особая точка динамической системы

$$\varphi_0 = n\pi, \quad (n = 0, \pm 1, \dots), \quad \Omega_0 = h \quad (2.46)$$

соответствует седлу. Кривые, проходящие через седловые точки, играют роль сепаратрис. Решение (2.34), соответствующее этой седловой точке, принимает вид

$$\operatorname{tg}^2 \frac{\theta}{2} = \frac{1-h}{h} \frac{1}{\operatorname{ch}^2 \xi \sqrt{1-h}}, \quad (0 < h < 1). \quad (2.47)$$

Это решение описывает ноль-градусную доменную стенку (2.35), рассмотренную ранее. Поворот намагниченности в такой стенке представлен (схематически) на рис. 2.5. Рассмотренное решение описывает критический зародыш состояния  $\theta = \pi$ , то есть зародыш домена с противоположным направлением намагниченности, или зародыш перемагниченного состояния. Критический зародыш является неустойчивым. В случае, когда начальная амплитуда солитона меньше амплитуды критического зародыша перемагничивания, что имеет место при  $\Omega(0) > \Omega_0 = h$ ,  $\varphi(0) = \varphi_0 = 0$ , происходят нелинейные колебания сильно взаимодействующих доменных стенок одинаковой полярности и с противоположными топологическими зарядами (см. рис. 2.11). При этом стенки, ограничивающие зародыш перемагничивания, периодически превращаются из блоховских в неелевские и обратно (см. рис. 2.11а), что сопровождается периодическим изменением полярности стенок.

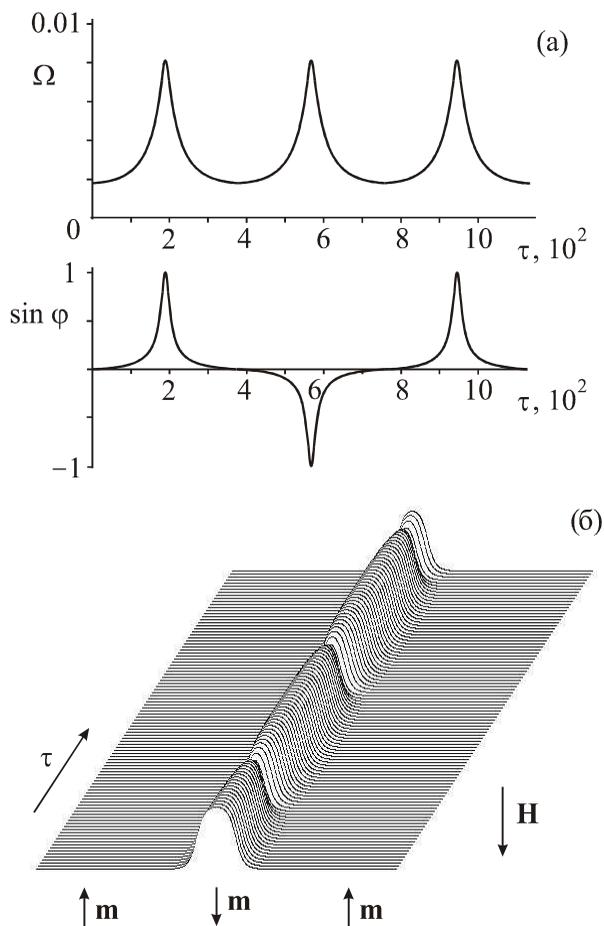
В случае отсутствия затухания ( $\alpha = 0$ ) для заданного поля и фактора качества  $Q$  частота таких превращений является постоянной величиной. Эта частота, как видно из рис. 2.12, увеличивается с ростом поля и уменьшается с ростом фактора качества, а также зависит от начальной амплитуды зародыша перемагничивания. Частота изменения параметра  $\Omega$  равна удвоенной частоте динамической перестройки структуры стенки (см. рис. 2.11а).

Частота, с которой стенки периодически сближаются, превращаясь в неелевские, с ростом фактора качества уменьшается, что особенно хорошо видно на рис. 2.12.

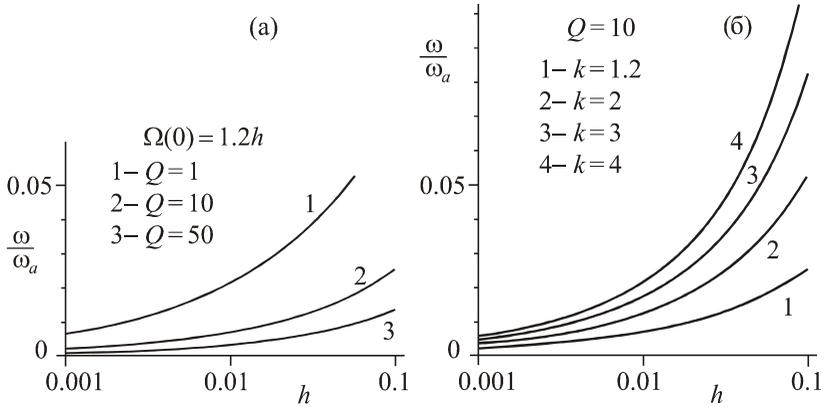
Расстояние между стенками, определяемое как расстояние между точками перегиба кривой  $\theta = \theta(\xi)$ , задаваемой (2.34), равно

$$T = \frac{2}{\sqrt{1-\Omega}} \operatorname{arcsch} \sqrt{\frac{1+Q^{-1} \sin^2 \varphi}{\Omega+Q^{-1} \sin^2 \varphi}}.$$

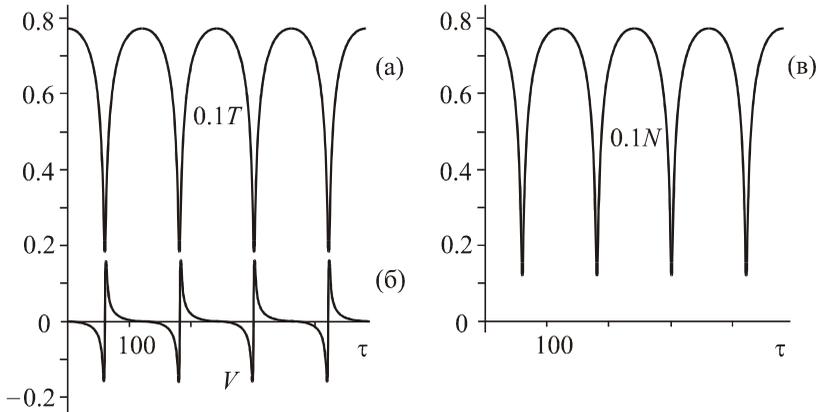
Зависимость расстояния между стенками  $T$  от времени приведена на рис. 2.13, где также показано изменение скорости стенок  $V$  и числа спиновых отклонений  $N$ .



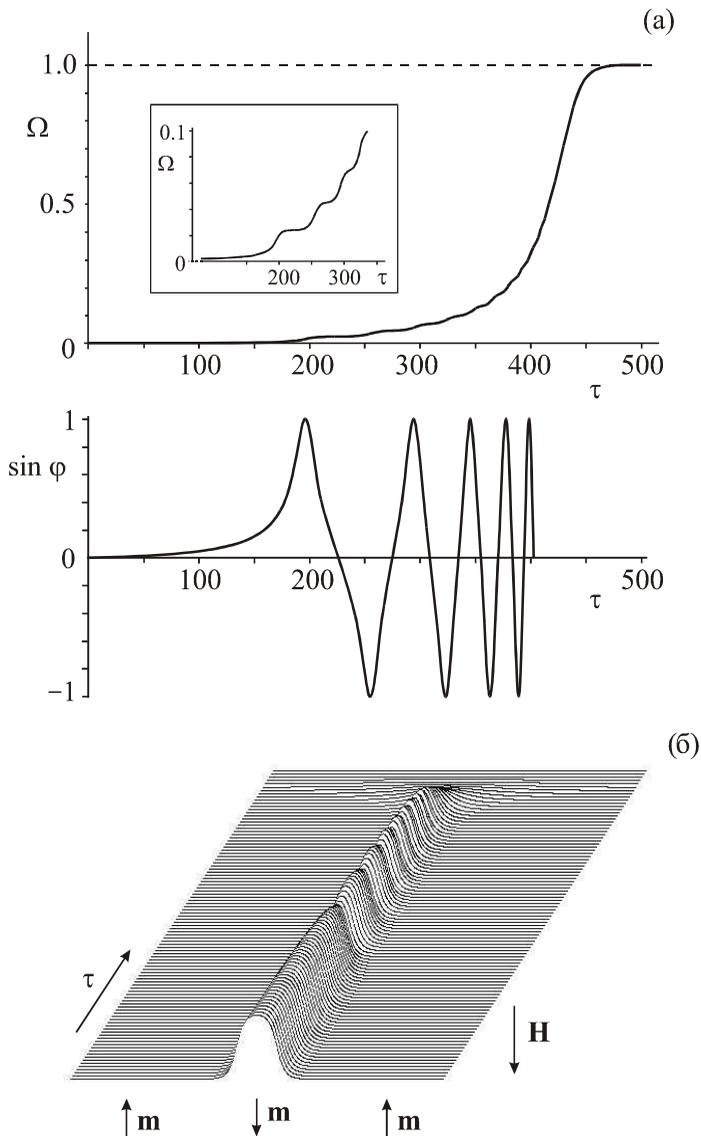
**Рис. 2.11.** Эволюция параметров бризера (а) и нелинейные колебания зародыша перемagnичивания (б) в отсутствие затухания при  $Q = 10$ ,  $h = 0.0015$ ,  $\Omega(0) = 1.2h$ ,  $\varphi(0) = 0$



**Рис. 2.12.** Зависимость частоты колебаний бризера  $\omega$  в единицах  $\omega_a = \gamma H_a$  от величины внешнего магнитного поля в отсутствие затухания при разных значениях фактора качества (а) и начальной амплитуды (б), где  $\Omega(0) = kh$ ,  $\varphi(0) = 0$



**Рис. 2.13.** Зависимость ширины бризера  $T$  (а), скорости  $V$  (б) стенок и числа спиновых отклонений  $N$  (в) от времени в отсутствие затухания при  $h = 0.0015$ ,  $Q = 1$ ,  $\Omega(0) = 1.2h$ ,  $\varphi(0) = 0$



**Рис. 2.14.** Эволюция параметров бризера (а) и затухающие нелинейные колебания зародыша перемagnичивания (б) при  $\alpha = 0.03$ ,  $Q = 10$ ,  $h = 0.0015$ ,  $\Omega(0) = 1.2h$ ,  $\varphi(0) = 0$

**Затухающие колебания.** При наличии диссипации нелинейные колебания зародыша перемагничивания являются затухающими (рис. 2.14). Учет затухания приводит со временем к увеличению частоты колебаний зародыша перемагничивания, то есть частоты превращения структуры стенок из блоховской в неелевскую и обратно (см. рис. 2.14). Видно, что со временем параметр  $\Omega \rightarrow 1$ . При этом амплитуда зародыша перемагничивания уменьшается, а область локализации увеличивается. Изменение частоты при уменьшении амплитуды колебаний, как известно, является характерной особенностью нелинейных колебаний. Вблизи  $\Omega \sim 1$  закон изменения этого параметра, как следует из (2.37), при  $Q^{-1}$ ,  $h$ ,  $\alpha \ll 1$ , имеет вид

$$1 - \Omega = (1 - \Omega_0) \exp[-2\alpha(\tau - \tau_0)]. \quad (2.48)$$

Другая особая точка динамической системы (2.37)

$$\varphi_0 = \frac{\pi}{2}(2n+1), \quad \Omega_0 = h - Q^{-1}, \quad (n = 0, \pm 1, \dots)$$

в отсутствие затухания является центром (см. рис. 2.10), а при наличии затухания – неустойчивым фокусом. Отклонение системы от этой особой точки при  $\Omega_0 > 0$  ( $h > Q^{-1}$ ), как показывают численные исследования, приводит к затуханию бризера ( $\Omega \rightarrow 1$ ). При этом имеет место преобразование неелевской структуры в блоховскую и обратно. Частота преобразования при наличии затухания со временем также возрастает.

## **2.6. Распад зародыша перемагничивания на две 180-градусные стенки одинаковой полярности**

В дальнейшем подробно проанализируем поведение зародыша перемагничивания, состояние которого в начальный момент времени близко к ноль-градусной доменной стенке, описываемой (2.46), (2.47).

При начальных амплитудах, больших критической ( $\Omega(0) < \Omega_0 = h$ ,  $\varphi(0) = \varphi_0 = 0$ ), наблюдается распад солитона (бризера) на две 180-градусные доменные стенки (солитон и антисолитон) одинаковой полярности с противоположными топологическими зарядами. В зависимости от

величины магнитного поля существуют два режима распада. В полях  $H$ , меньших полей Уокера  $H_W = 2\pi M_0 \alpha$ , имеет место поступательный характер движения доменных границ (рис. 2.15). Доменные стенки со временем приближаются к состоянию, определяемому особой точкой динамической системы (2.37)

$$\sin 2\varphi_0 = -\frac{2hQ}{\alpha} = -\frac{H}{H_W}, \quad \Omega_0 = -Q^{-1} \sin^2 \varphi_0. \quad (2.49)$$

Эта особая точка, существующая в полях  $H$ , меньших полей Уокера, является устойчивым узлом при  $h > 0$ , а при  $h < 0$  представляет собой седло.

Вблизи точки  $\Omega + Q^{-1} \sin^2 \varphi \rightarrow 0$  решение (2.34) принимает вид

$$\theta = 2 \operatorname{arctg} \left\{ \exp \left[ (1 + Q^{-1} \sin^2 \varphi)^{1/2} (\xi + X_0) \right] \right\} - \\ - 2 \operatorname{arctg} \left\{ \exp \left[ (1 + Q^{-1} \sin^2 \varphi)^{1/2} (\xi - X_0) \right] \right\}, \quad (2.50)$$

$$X_0 = \frac{1}{2\sqrt{1 + Q^{-1} \sin^2 \varphi}} \ln \frac{4(1 + Q^{-1} \sin^2 \varphi)}{|\Omega + Q^{-1} \sin^2 \varphi|}.$$

Решение (2.50) описывает две взаимодействующие 180-градусные доменные стенки, расстояние между которыми при  $h > 0$  возрастает ( $T = 2X_0 \rightarrow \infty$ ,  $\tau \rightarrow \infty$ ) (см. рис. 2.16, 2.17).

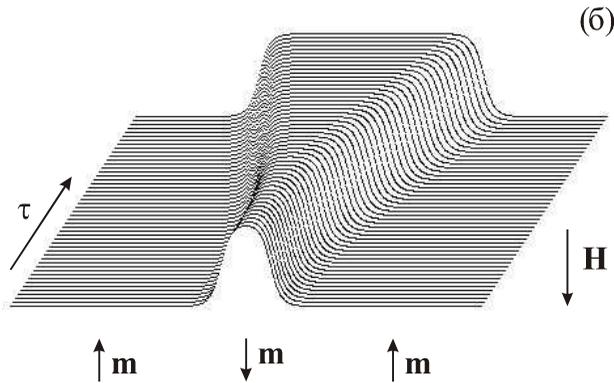
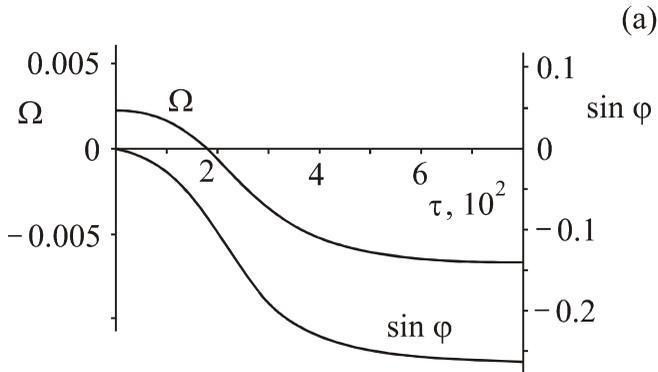
В полях, меньших полей Уокера,

$$\varphi \approx \varphi_0, \quad X_0 \approx V\tau, \quad V = -\frac{Q^{-1} \sin \varphi_0 \cos \varphi_0}{\sqrt{1 + Q^{-1} \sin^2 \varphi_0}}, \quad (2.51)$$

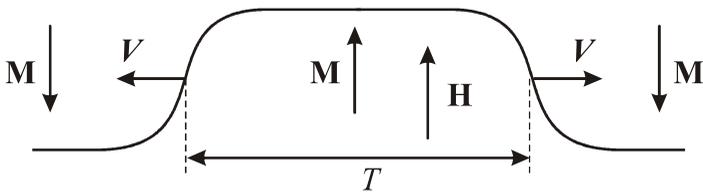
где  $V$  – скорость одиночной доменной границы в единицах  $\gamma H_A \delta_0$ ;  $\varphi_0$  определяется первым уравнением (2.49). Скорость в (2.51) в размерных переменных можно представить в виде

$$V = \mu_D H \left( 1 + Q^{-1} \sin^2 \varphi_0 \right)^{-1/2}.$$

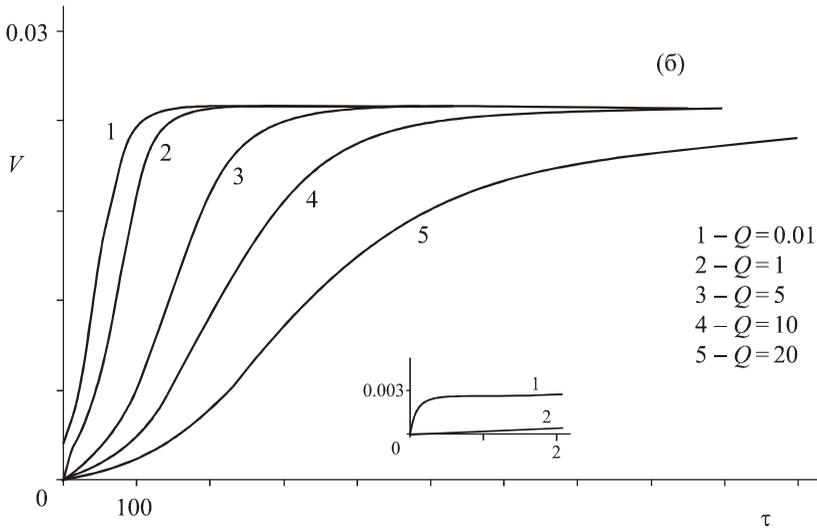
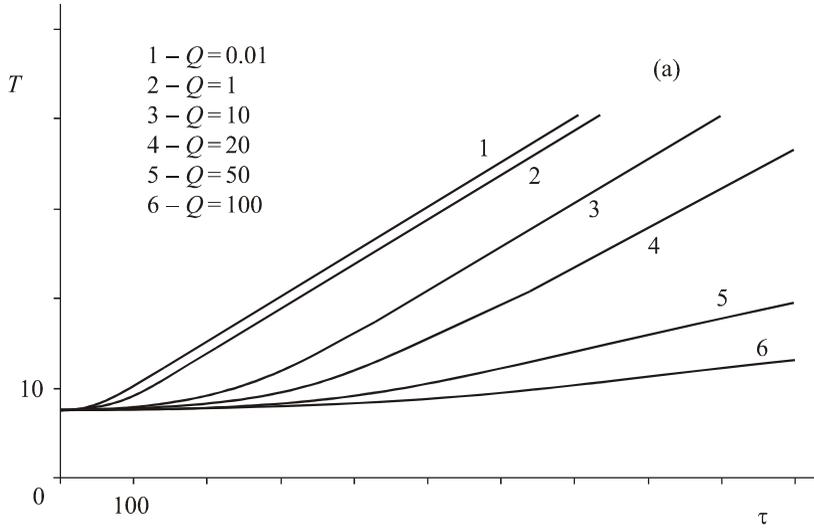
Видно, что эта скорость совпадает со скоростью движения одиночной 180-градусной стенки (см. (1.65)).



**Рис. 2.15.** Эволюция параметров солитона (а) и образование домена обратной намагниченности (б) в полях, меньших полей Уокера, при  $\alpha = 0.1$ ,  $Q = 10$ ,  $\Omega(0) = 0.9h$ ,  $\varphi(0) = 0$ ,  $h_w = 0.005$ ,  $h = 0.0025$

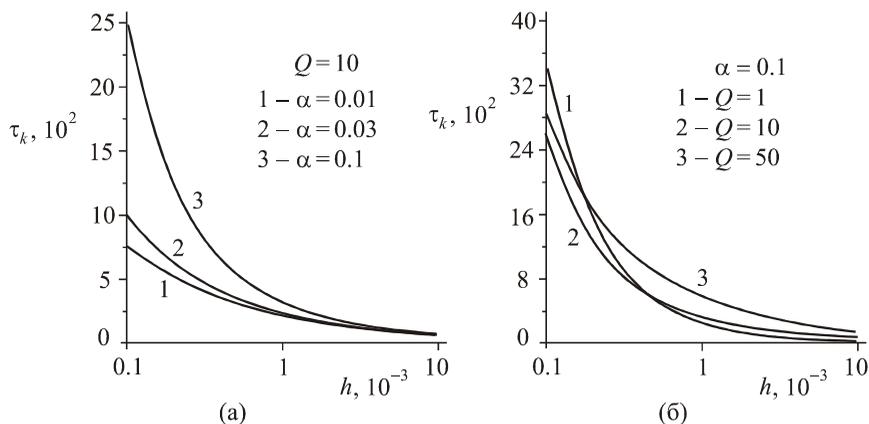


**Рис. 2.16.** Взаимодействующие доменные стенки (схематически)



**Рис. 2.17.** Зависимость ширины бризера  $T$  (а) и скорости  $V$  (б) стек-  
 нок от времени в полях, меньших полей Уокера, при  $\alpha=0.1$ ,  $h=0.0015$ ,  
 $\Omega(0)=1.2h$ ,  $\varphi(0)=0$

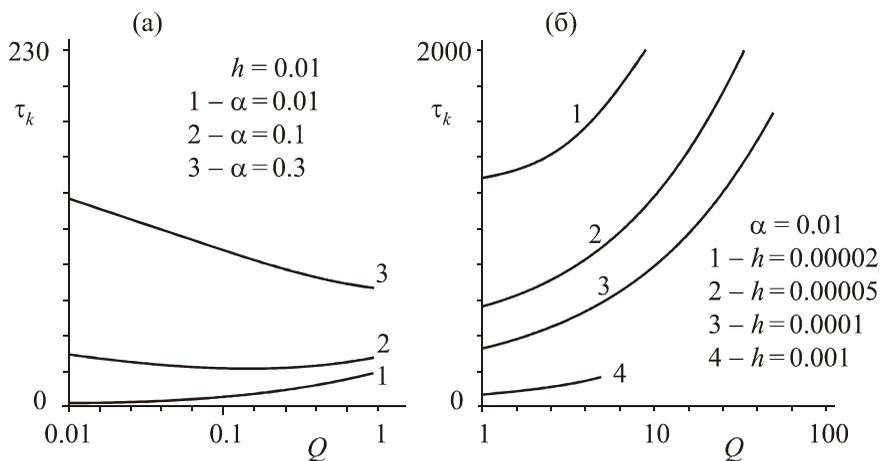
Рост внешнего магнитного поля приводит к уменьшению времени распада бризера на солитон-антисолитонную пару (рис. 2.18) и тем самым к уменьшению времени образования домена обратной намагниченности. Последнее находится в хорошем качественном согласии с результатом экспериментального исследования времени образования домена обратной намагниченности от величины импульсного магнитного поля.



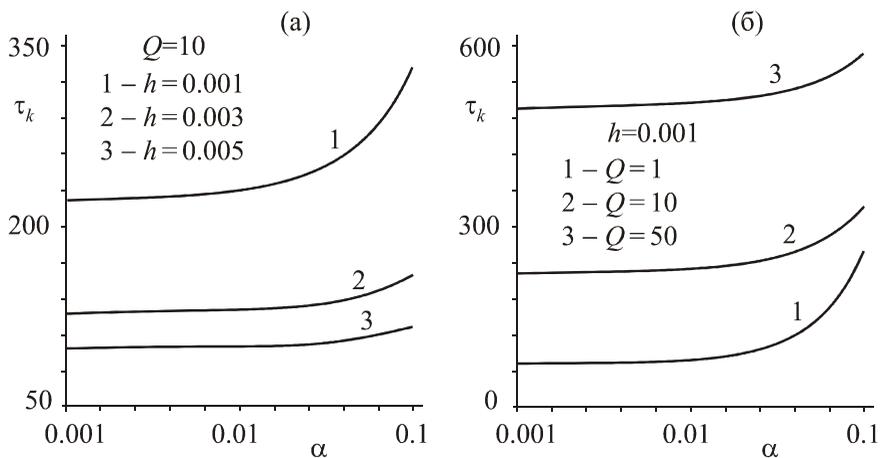
**Рис. 2.18.** Зависимость времени распада бризера на солитон-антисолитонную пару (времени обращения в нуль параметра  $\Omega$ ) от внешнего поля при заданном факторе качества (а) и заданном затухании (б)

Из рис. 2.19 видно, что с ростом фактора качества время распада локализованной магнитной неоднородности на слабо взаимодействующие стенки увеличивается.

С увеличением затухания время распада зародыша перемагничивания в форме бризера на домен обратной намагниченности, ограниченной двумя доменными стенками с противоположными топологическими зарядами, возрастает (рис. 2.20).

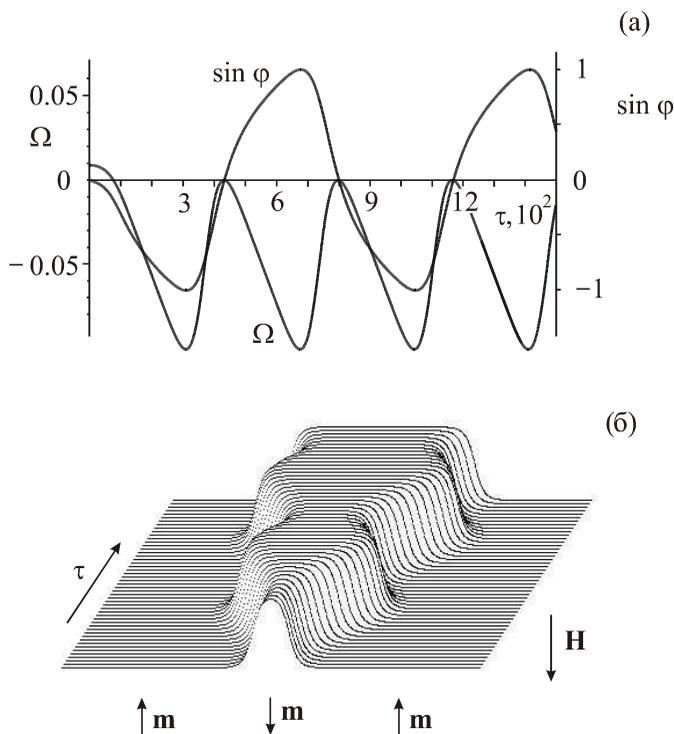


**Рис. 2.19.** Зависимость времени распада бризера на солитон-антисолитонную пару от фактора качества при заданном внешнем поле (а) и заданном затухании (б)

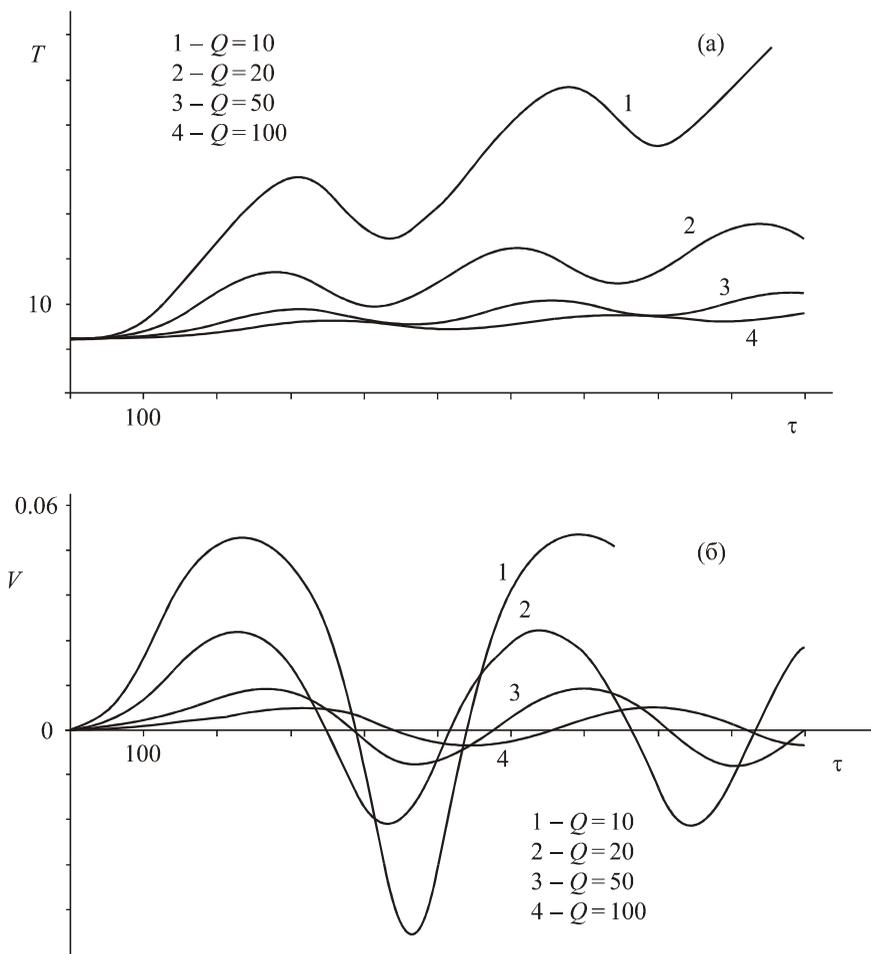


**Рис. 2.20.** Зависимость времени распада бризера на солитон-антисолитонную пару (времени обращения в нуль параметра  $\Omega$ ) от параметра затухания при заданном внешнем поле (а) и заданном факторе качества (б)

В полях, больших поля Уокера  $H_W$ , в процессе распада взаимодействующие доменные стенки, как видно из рис. 2.21, наряду с поступательным совершают осциллирующее движение, при этом структура стенок периодически превращается из блоховской в неелевскую и обратно. На рис. 2.22 приведена зависимость расстояния  $T$  между взаимодействующими 180-градусными стенками и их скорости  $V$  относительно центра системы от времени в полях, больших полей Уокера. Видно, что увеличение расстояния между стенками носит осциллирующий характер, а средняя скорость движения стенок отлична от нуля.



**Рис. 2.21.** Блоховские осцилляции солитон-антисолитонной пары и образование домена обратной намагниченности в полях, больших полей Уокера, при  $\alpha = 0.1$ ,  $Q = 10$ ,  $\Omega(0) = 0.9h$ ,  $\varphi(0) = 0$ ,  $h_W = 0.005$ ,  $h = 0.01$



**Рис. 2.22.** Зависимость ширины бризера  $T$  и скорости  $V$  стенок от времени в полях, больших полей Уокера, при  $\alpha=0.1$ ,  $h=0.01$ ,  $\Omega(0)=1.2h$ ,  $\varphi(0)=0$

В моменты наибольшего сближения структура стенок становится не-левской.

Полную энергию (2.41) образовавшегося домена обратной намагниченности с осциллирующими доменными стенками при  $\Omega + Q^{-1} \sin^2 \varphi \rightarrow 0$  можно представить как функцию угла прецессии намагниченности  $\varphi$ . Углу  $\varphi$  можно сопоставить импульс локализованной магнитной неоднородности. Действительно, импульс каждой стенки относительно неподвижного центра такой локализованной неоднородности имеет вид

$$P = \pm \frac{M_0 \varphi}{\gamma} \int d(\cos \theta) = \pm \frac{2M_0 \varphi}{\gamma} \frac{1 - \Omega}{1 + Q^{-1} \sin^2 \varphi}, \quad (2.52)$$

а в случае  $\Omega + Q^{-1} \sin^2 \varphi \rightarrow 0$

$$P = \pm \frac{2M_0 \varphi}{\gamma}. \quad (2.53)$$

При этом полная энергия (2.41) может быть представлена в виде

$$W = \text{const} + 2E_B \sqrt{1 + Q^{-1} \sin^2 \varphi} \frac{\gamma}{2M_0} P.$$

Отсюда видно, что после распада ноль-градусной доменной стенки на две 180-градусные доменные границы энергия таких стенок становится периодической функцией импульса. Периодическая зависимость энергии от импульса, как отмечает Косевич в случае одиночной стенки, свидетельствует о наличии блоховских осцилляций. Таким образом, можно сделать вывод, что в рассматриваемом случае имеют место блоховские осцилляции удаляющихся друг от друга доменных стенок.

## **2.7. Взаимодействие двух 180-градусных стенок одинаковой полярности**

Рассмотрим теперь движение 180-градусных стенок одинаковой полярности, разнесенных на расстояние  $X_0 \rightarrow \infty$ , вблизи точки  $\Omega + Q^{-1} \sin^2 \varphi_0 \rightarrow 0$  (см. (2.50)). В поле  $h$  с ростом  $\Omega + Q^{-1} \sin^2 \varphi$  две 180-

градусные стенки одинаковой полярности сближаются, и может произойти рассеяние или аннигиляция доменных стенок в зависимости от соотношения величин поля  $h$  и параметра затухания  $\alpha$ .

Для анализа процесса рассеяния систему (2.37) перепишем в новых переменных  $V$  и  $\Phi$  согласно выражению

$$\Omega = -\frac{2QV^2}{1-QV^2 + \sqrt{(1-QV^2)^2 - 4Q^2V^2}},$$

$$\sin^2 \Phi = -\frac{\Omega}{\Omega + Q^{-1}} \cdot \frac{\text{cth}^2 \Phi}{1 - \Omega / (\Omega + Q^{-1}) \text{cth}^2 \Phi}.$$

Здесь  $V$  – скорость солитона и антисолитона относительно их общего центра,  $\Phi$  – характеризует расстояние между ними. Эти параметры являются медленно меняющимися функциями времени и определяются из уравнений

$$\Phi_\tau = -\frac{1}{V(1+\alpha^2)} \left[ \sqrt{1-\Omega} J_3 + \frac{2 \text{sh} \Phi \text{ch} \Phi J_2}{1-QV^2 + J_1} \right],$$

$$V_\tau = -\frac{2J_1 J_2}{(1+\alpha^2)(1-QV^2 + J_1) J_4}. \quad (2.54)$$

Здесь

$$J_1 = \sqrt{(1-QV^2)^2 - 4Q^2V^2},$$

$$J_2 = \left( \alpha V \left( h + \frac{V^2(1-\Omega)}{\Omega - Q^{-1} \text{sh}^2 \Phi} \right) + \frac{1}{Q\sqrt{1-\Omega}} \left( h + \frac{\alpha}{Q} \frac{V\sqrt{1-\Omega}}{\Omega - Q^{-1} \text{sh}^2 \Phi} \text{sh} \Phi \text{ch} \Phi \right) \text{sh} \Phi \text{ch} \Phi \right) \times$$

$$\times \left( 1 - \frac{\Omega}{2\sqrt{(1-\Omega)J_4 J_5}} \ln \frac{(\sqrt{(1-\Omega)J_5} + \sqrt{J_4})^2}{\Omega} \right),$$

$$J_3 = V^2 + h \frac{\Omega - Q^{-1} \text{sh}^2 \Phi}{1-\Omega} + \frac{\alpha}{Q} \frac{V}{\sqrt{1-\Omega}} \text{sh} \Phi \text{ch} \Phi,$$

$$J_4 = \text{sh}^2 \Phi - (1+Q^{-1}) \frac{\Omega}{\Omega + Q^{-1}} \text{ch}^2 \Phi, \quad J_5 = \text{sh}^2 \Phi - \frac{\Omega}{\Omega + Q^{-1}} \text{ch}^2 \Phi.$$

Из этой системы можно получить следующее уравнение, определяющее зависимость скорости  $V$  стенок от расстояния  $\Phi$  между ними, то есть  $V = V(\Phi)$ :

$$\frac{dV}{d\Phi} = \frac{2VJ_1J_2}{\sqrt{1-\Omega}(1-QV^2+J_1)J_3J_4+2\text{sh}\Phi\text{ch}\Phi J_2}. \quad (2.55)$$

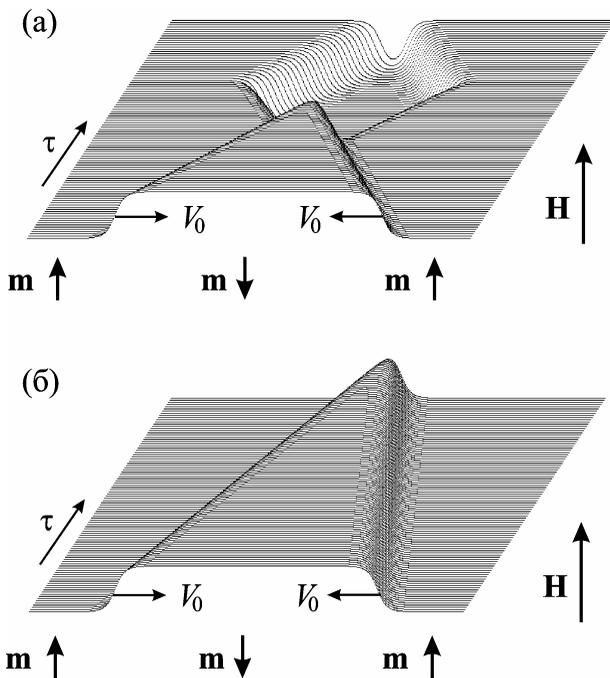
Численное исследование уравнения (2.55) с начальными условиями

$$\Phi_0 \rightarrow -\infty, V_0 = \frac{h/\alpha}{\sqrt{1+\left(1+\sqrt{1-4Q^2h^2/\alpha^2}\right)/2Q}}$$

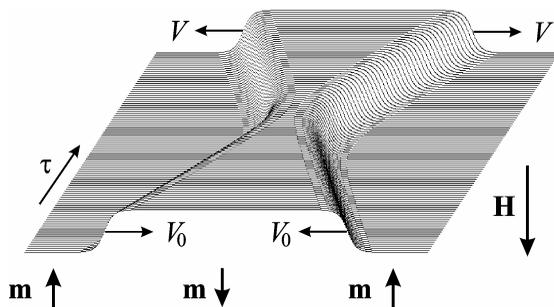
показывает сильную зависимость процесса взаимодействия стенок от величины и направления магнитного поля, а также от затухания. Эволюция формы взаимодействующих доменных стенок одинаковой полярности для различных параметров затухания в поле  $h < 0$  приведена на рис. 2.23. При заданном поле существует некоторое критическое значение параметра затухания, ниже которого солитон-антисолитонная пара (пара 180-градусных стенок одинаковой полярности) прежде чем аннигилировать, испытывает многократный процесс рассеяния, сопровождающийся сменой знака  $\Phi$ , то есть полярности 180-градусных стенок. После каждого последующего акта рассеяния максимальное расстояние, на которое разойдутся стенки, то есть ширина домена обратной намагниченности, уменьшается.

В случае поля  $h > 0$ , то есть противоположного направления  $0 < H < H_w$ , на движущиеся навстречу друг другу стенки кроме диссипативной силы действует еще отталкивающая сила со стороны поля. При этом доменные стенки сближаются на минимальное расстояние, после чего начинается обратный процесс их разбегания друг от друга (рис. 2.24).

Таким образом, можно сказать, что при взаимодействии двух 180-градусных стенок одинаковой полярности в зависимости от направления поля может иметь место аннигиляция стенок в результате либо одноактного, либо многократного процесса рассеяния, или сближение, отталкивание и последующее разбегание стенок.



**Рис. 2.23.** Взаимодействие 180-градусных доменных стенок, сопровождающееся их аннигиляцией, при  $h = -0.9h_w$ ,  $Q = 10$ , начальной скорости  $V_0 = 0.04$  и параметрах затухания  $\alpha = 0.011$  (а) и  $\alpha = 0.3$  (б)



**Рис. 2.24.** Взаимодействие 180-градусных доменных стенок в поле  $h > 0$  с начальными условиями, что и на рис. 2.23

## 2.8. Динамика 360-градусной доменной стенки в ферромагнетике

Для произвольного фактора качества в ряде работ была показана возможность движения (колебаний) двух 180-градусных доменных границ относительно неподвижного центра образованной ими 360-градусной стенки. Локализованные магнитные неоднородности в полях параллельных оси легкого намагничивания [111] и близких к полю насыщения наблюдались в пластинах ферритов-гранатов с развитой поверхностью (111). Настоящий параграф посвящен изложению динамики 360-градусной стенки в массивном ферромагнетике с большим фактором качества во внешнем магнитном поле с учетом диссипации.

### 2.8.1. Основные уравнения

Рассмотрим одноосный ферромагнетик, плотность энергии которого имеет вид (2.27). Решение уравнения Ландау–Лифшица–Гильберта, соответствующее 360-градусной доменной стенке, удовлетворяющее граничному условию

$$\theta(\xi \rightarrow -\infty) = 0, \quad \theta(\xi \rightarrow +\infty) = 2\pi, \quad \theta_\xi(|\xi| \rightarrow \infty) = 0, \quad (2.56)$$

имеет вид

$$\operatorname{ctg}^2 \frac{\theta}{2} = \left( \frac{\Omega + Q^{-1} \sin^2 \varphi}{\Omega - 1} \right) \operatorname{sh}^2(\sqrt{1 - \Omega} \cdot \xi). \quad (2.57)$$

Здесь  $\xi = y/\delta_0$ ,  $\delta_0 = \sqrt{A/K}$ ,  $Q = K/2\pi M_0^2$ , а параметр  $\Omega$  удовлетворяет условию

$$-\infty < \Omega < -Q^{-1} \sin^2 \varphi. \quad (2.58)$$

В случае  $\varphi = 0$ ,  $\Omega = -h$  решение (2.57) совпадает с решением, описывающим структуру статической 360-градусной доменной стенки. Поэтому в случае малых полей и малых затуханий решение в адиабатическом приближении ищем в виде (2.57), где  $\varphi = \varphi(\tau)$  – неопределенная функция

времени, а  $\Omega = \Omega(\tau)$  – медленно меняющаяся функция времени, удовлетворяющая условию (2.58).

Пользуясь уравнениями изменения энергии (2.42) и числа спиновых отклонений (2.38), для определения  $\Omega(\tau)$  и  $\varphi(\tau)$  в случае малых магнитного поля и затухания в адиабатическом приближении, используя (2.57), можно получить следующую систему обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \Omega_\tau &= \frac{2(1-\Omega)}{(1+\alpha^2)(1+Q^{-1}\sin^2\varphi)} \times \\ &\times \left\{ \alpha(\Omega+Q^{-1}\sin^2\varphi)(\Omega+Q^{-1}\sin^2\varphi+h) + \frac{1}{2Q} \left( -h + \frac{\alpha}{2Q} \sin 2\varphi \right) \sin 2\varphi \right\} \times \\ &\times \left\{ 1 + \frac{\Omega+Q^{-1}\sin^2\varphi}{2\sqrt{(1-\Omega)(1+Q^{-1}\sin^2\varphi)}} \ln \frac{\left( \sqrt{1-\Omega} + \sqrt{1+Q^{-1}\sin^2\varphi} \right)^2}{|\Omega+Q^{-1}\sin^2\varphi|} \right\}, \\ \varphi_\tau &= \frac{1}{1+\alpha^2} \left( \Omega+Q^{-1}\sin^2\varphi+h - \frac{\alpha}{2Q} \sin 2\varphi \right). \end{aligned} \quad (2.59)$$

Перейдем к анализу решения (2.57) в отсутствие затухания и поля, удовлетворяющего граничному условию (2.56). Такое решение описывает внутреннюю динамику 360-градусной доменной стенки ( $4\pi$ -кинка) с неподвижным центром, представляющей собой связанное состояние двух 180-градусных стенок разной полярности и топологическими зарядами одинакового знака. В отсутствие затухания и поля зависимость  $\varphi = \varphi(\tau)$  можно найти также из второго уравнения системы (2.59). В результате решение при  $\Omega < -Q^{-1}$  можно представить в виде

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \varphi &= -\frac{|\Omega|}{\omega} \operatorname{tg} \omega(\tau - \tau_0), \quad \omega = \sqrt{|\Omega|(|\Omega| - Q^{-1})}, \quad (2.60) \\ \operatorname{ctg} \frac{\theta}{2} &= -\sqrt{\frac{|\Omega|}{1+|\Omega|} \frac{|\Omega| - Q^{-1}}{|\Omega| - Q^{-1} \cos^2 \omega(\tau - \tau_0)}} \cdot \operatorname{sh} \sqrt{1+|\Omega|} \xi. \end{aligned}$$

Данное периодическое решение описывает связанные колебания двух 180-градусных стенок разной полярности, имеющих одинаковые топологиче-

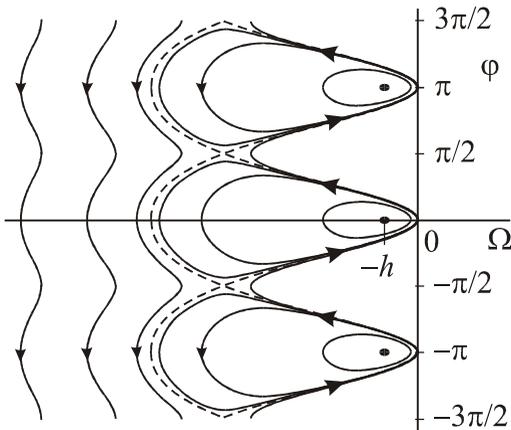
ские заряды. При  $|\Omega| \rightarrow Q^{-1}$  ( $\omega \rightarrow 0$ ) стенки периодически превращаются из блоховских в неелевские и обратно. При максимальном удалении структура стенок является чисто неелевской, а при максимальном сближении – чисто блоховской.

В случае  $-Q^{-1} < \Omega < -\varepsilon \sin^2 \varphi$  имеется решение вида

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \varphi &= -\frac{|\Omega|}{\nu} \operatorname{th} \nu(\tau - \tau_0), \quad \nu = \sqrt{|\Omega| (Q^{-1} - |\Omega|)}, \quad (2.61) \\ \operatorname{ctg} \frac{\theta}{2} &= -\sqrt{\frac{|\Omega|}{1 + |\Omega|} \frac{Q^{-1} - |\Omega|}{Q^{-1} \operatorname{ch}^2 \nu(\tau - \tau_0) - |\Omega|}} \cdot \operatorname{sh} \sqrt{1 + |\Omega|} \xi. \end{aligned}$$

Это решение в случае  $|\Omega| \rightarrow Q^{-1}$  ( $\nu \rightarrow 0$ ) описывает рассеяние неелевских стенок друг на друге с изменением их полярности на 180 градусов, а при  $\Omega \rightarrow -0$  ( $\nu \rightarrow 0$ ) описывает рассеяние двух блоховских стенок без изменения их полярности.

При наличии поля ситуация, как покажем ниже, может измениться из-за того, что параметр  $\Omega$  становится функцией времени.



**Рис. 2.25.** Фазовые траектории динамической системы (2.61) при  $\alpha = 0$ . Штриховые линии соответствуют сепаратрисе

В отсутствие затухания ( $\alpha = 0$ ) полная энергия  $W$  является интегралом движения. Строя изоэнергетические кривые на плоскости  $(\Omega, \varphi)$ , получим фазовые траектории системы (2.59) в отсутствие затухания (рис. 2.25). Особые точки динамической системы  $\Omega_0 = -h$ ,  $\varphi_0 = n\pi$

( $n = 0, \pm 1, \dots$ ) являются центрами. Замкнутые траектории в их окрестности на фазовой плоскости ( $\Omega$ ,  $\varphi$ ) в отсутствие затухания соответствуют периодическому движению 180-градусных стенок относительно центра системы.

### 2.8.2. Малые колебания взаимодействующих 180-градусных доменных стенок

Рассмотрим влияние затухания на поведение системы вблизи особой точки. Полагая в (2.59)

$$\Omega = -h + \Omega_1, \quad \varphi = n\pi + \varphi_1,$$

где  $\Omega_1$ ,  $\varphi_1$  – малые отклонения, можно получить линеаризованную систему уравнений

$$\begin{aligned} \Omega_{1\tau} &= -\frac{2h(1+h)}{1+\alpha^2} (\alpha\Omega_1 + \varepsilon\varphi_1) \left( 1 - \frac{h}{2\sqrt{1+h}} \ln \frac{(\sqrt{1+h}+1)^2}{h} \right), \\ \varphi_{1\tau} &= \frac{1}{1+\alpha^2} (\Omega_1 - \alpha\varepsilon\varphi_1). \end{aligned} \quad (2.62)$$

Из анализа этой системы можно получить собственную частоту колебаний 180-градусных стенок относительно центра 360-градусной стенки или, по-другому, частоту пульсационных колебаний 360-градусной стенки, то есть узкого полосового домена. Для частоты свободных колебаний имеем

$$\omega_0 = \left\{ \frac{2Q^{-1}h(1+h)}{1+\alpha^2} \left( 1 - \frac{h}{2\sqrt{1+h}} \ln \frac{(\sqrt{1+h}+1)^2}{h} \right) \right\}^{1/2}. \quad (2.63)$$

В общем случае это выражение для частоты  $\omega_0$  отличается от результата, полученного во втором порядке теории возмущений, а в линейном приближении по  $h$  оно совпадает. При наличии диссипации собственная частота колебаний определяется выражением

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}, \\ \delta &= \frac{\alpha(Q^{-1} + 2h(1+h))}{2(1+\alpha^2)} \left( 1 - \frac{h}{2\sqrt{1+h}} \ln \frac{(\sqrt{1+h}+1)^2}{h} \right). \end{aligned} \quad (2.64)$$

В случае малых  $\alpha \ll 1$ ,  $h \ll 1$  имеем

$$\omega_0 = \sqrt{2hQ^{-1}}, \quad \delta = \alpha \left( \frac{1}{2Q} + h \right). \quad (2.65)$$

Возвращаясь к размерным параметрам, получим

$$\omega_0 = 2\gamma [2\pi M_0 H]^{1/2}, \quad \delta = \frac{\alpha\gamma}{M_0} (2\pi M_0^2 + M_0 H)^{1/2}. \quad (2.66)$$

При  $\omega_0 > \delta_0$  в постоянном поле  $H$  имеем затухающие колебания:

$$\begin{aligned} \varphi &= \varphi_{10} \cos(\omega_1 \tau + \gamma_0) \exp(-\delta \tau), \\ \Omega &= -h - \varphi_{10} \omega_0 \sin(\omega_1 \tau + \gamma_0 - \beta) \exp(-\delta \tau), \\ \operatorname{tg} \beta &= \delta / \omega_1. \end{aligned}$$

Здесь  $\varphi_{10}$ ,  $\varphi_{20}$ ,  $\beta$  – вещественные постоянные.

В случае  $\omega_0 < \delta$  имеем дело с движением, называемым аperiodическим затуханием

$$\begin{aligned} \varphi &= \varphi_{10} \exp[-(\delta - \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}) \tau] + \varphi_{20} \exp[-(\delta + \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}) \tau], \\ \Omega &= -h + \varphi_{10} \exp[-(\delta - \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}) \tau] + \varphi_{20} \exp[-(\delta + \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}) \tau]. \end{aligned}$$

При  $\delta = \omega_0$  решение имеет вид

$$\begin{aligned} \varphi &= (\varphi_{10} + \varphi_{20} \tau) \exp(-\delta \tau), \\ \Omega &= -h + [\delta \varphi_{10} + \varphi_{20} (1 + \delta \tau)] \exp(-\delta \tau), \end{aligned}$$

что также соответствует затухающему движению.

Переходя от безразмерной к размерной частоте, получим

$$\omega_1 = 2\gamma \sqrt{1 + Q^{-1} \sqrt{2\pi M_0 H_0 - \alpha^2 (\pi^2 M_0^2 + H_0^2)}}. \quad (2.67)$$

Из (2.67) видно, что в полях  $H > H_{cr}$  имеют место затухающие колебания, а при  $H < H_{cr}$  – аperiodическое движение взаимодействующих стенок. Критическое поле  $H_{cr}$ , определяемое из условия  $\omega_0 = \delta$ , равно

$$H_{cr} = \frac{\pi}{2} M_0 \alpha^2. \quad (2.68)$$

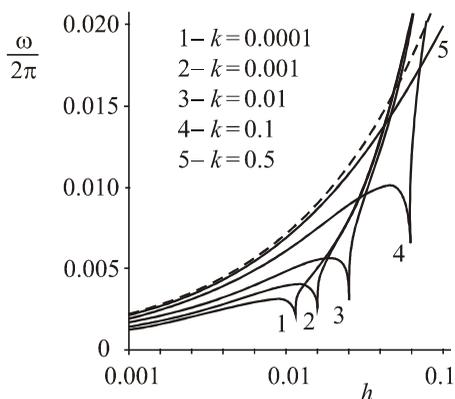
Таким образом, в полях  $H \gg H_{cr}$  ( $\omega_0 \gg \delta$ ) имеют место слабозатухающие колебания. С уменьшением поля при  $H \rightarrow H_{cr}$  ( $\omega_0 \rightarrow \delta$ ) колеба-

ния становятся сильно затухающими, а в полях, меньших некоторого критического  $H_{cr}$ , движение 180-градусных стенок относительно центра системы носит аperiодический характер. С течением времени из-за затухания две взаимодействующие 180-градусные стенки разной полярности, образующие динамическую 360-градусную стенку, переходят в статическую 360-градусную стенку, структура которой определяется (2.6).

### 2.8.3. Динамическое преобразование структуры стенок

Проведем численное исследование поведения взаимодействующих доменных стенок вблизи и вдали от особой точки системы. Как видно из рис. 2.26 (кривая 5), при малых начальных амплитудах ( $k < 1$ ), что соответствует окрестности особой точки, частота, полученная численным экспериментом в полях  $h < 0.1$ , хорошо согласуется с теоретической кривой (штриховая на рис. 2.26), определяемой выражением (2.63). Особенно это хорошо подтверждается в малых магнитных полях  $h < 0.01$ . Анализ показывает, чем меньше начальная амплитуда ( $k \sim 1$ ), тем кривая зависимости частоты от поля, полученная численным экспериментом, будет ближе к теоретической, оставаясь всегда при этом ниже ее. На фазовой плоскости кривая 5 (рис. 2.26) соответствует замкнутой кривой вокруг особой точки

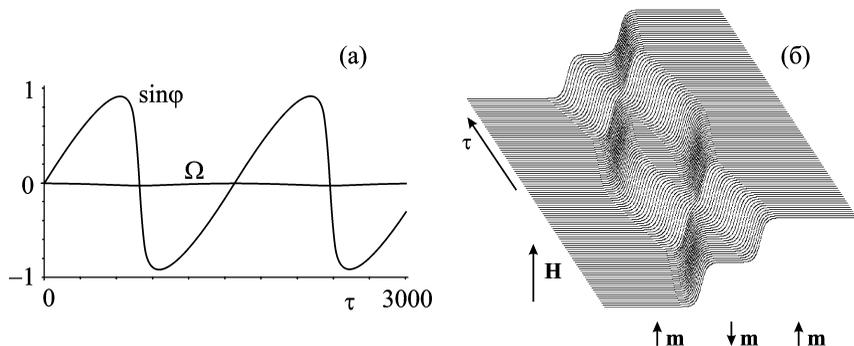
**Рис. 2.26.** Зависимость частоты пульсационных колебаний 360-градусной стенки от поля: штриховая линия – вычисленная по формуле (2.63), сплошные – полученные численным методом с начальными условиями  $\Omega(0) = -kh$ ,  $\varphi(0) = 0$



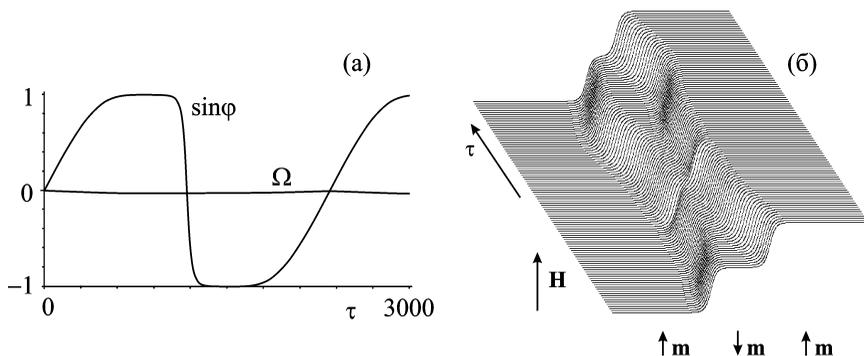
$\Omega_0 = -h$ ,  $\varphi_0 = n\pi$  (рис. 2.25). Кривые 1–4 (рис. 2.26) соответствуют замкнутым кривым на фазовой плоскости (рис. 2.25), лежащим ближе к сепаратрисе. Эти кривые получены путем численного эксперимента при больших начальных амплитудах ( $k \ll 1$ ) и лежат ниже теоретической, особенно в полях  $0.01 < h < 0.1$ .

Следует отметить, что при начальных данных, лежащих внутри сепаратрисы (штриховая линия на рис. 2.25) справа от особой точки ближе к точке  $\Omega = 0$ , имеем две 180-градусные блоховские стенки, разнесенные на достаточно большое расстояние (рис. 2.27). Поскольку на фазовой плоскости сплошные кривые не доходят до точек  $\varphi = \pm\pi/2$ , оставаясь при этом замкнутыми, и периоды изменений  $\Omega$  и  $\sin\varphi$  по времени совпадают (рис. 2.27), можно сделать вывод, что при сближении стенок структура становится почти неелевской. Переход от одной почти неелевской структуры  $\varphi \leq \pi/2$  к другой –  $\varphi \geq -\pi/2$  происходит через блоховскую структуру ( $\varphi = n\pi$ ), и в этот момент имеет место наибольшее сближение стенок (рис. 2.27).

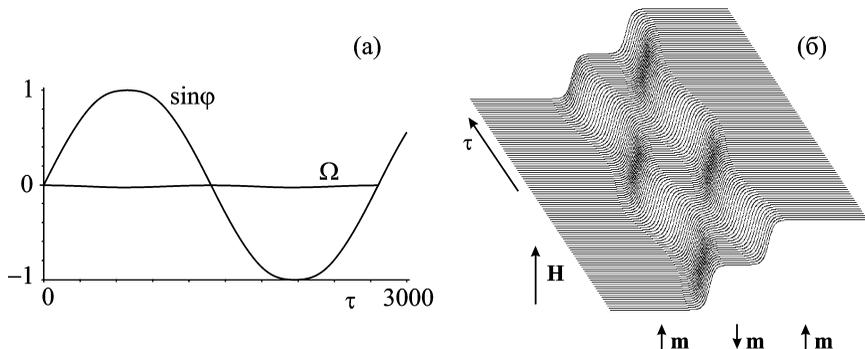
При некотором значении внешнего поля, как видно из рис. 2.26, частота резко уменьшается, что соответствует стремлению фазовой траектории к сепаратрисе (рис. 2.25). Минимум на зависимости частоты от поля на рис. 2.26 соответствует сепаратрисе (рис. 2.25). В этом случае происходит достаточно быстрый переход от одной неелевской структуры  $\varphi \approx \pi/2$  к другой –  $\varphi \approx -\pi/2$  (см. рис. 2.28). Численные расчеты показывают, что после прохождения сепаратрисы при движении слева направо на фазовой плоскости 180-градусные стенки при удалении друг от друга являются блоховскими, а при сближении – чисто неелевскими (рис. 2.29). На фазовой плоскости этот режим соответствует непрерывной кривой (указанной крупными стрелками), лежащей справа от замкнутых кривых. Как видно из рис. 2.29, периодическое движение сопровождается непрерывным вращением вектора намагниченности. При этом частота колебаний стенок, соответствующая кривым за сепаратрисой, с ростом поля увеличивается быстрее, чем в случае замкнутых кривых внутри сепаратрисы.



**Рис. 2.27.** Эволюция параметров солитонного решения (а) и колебательное движение двух взаимодействующих 180-градусных стенок разной полярности (б), образующих 360-градусную стенку, при  $\alpha = 0$ ,  $Q = 50$ ,  $h = 0.002$  и начальных данных  $\varphi(0) = 0$ ,  $\Omega(0) = -0.0001h$



**Рис. 2.28.** Эволюция параметров солитонного решения (а) и колебательное движение двух взаимодействующих 180-градусных стенок разной полярности (б), образующих 360-градусную стенку, при  $\alpha = 0$ ,  $Q = 50$ ,  $h = 0.0024$  и начальных данных  $\varphi(0) = 0$ ,  $\Omega(0) = -0.0001h$



**Рис. 2.29.** Эволюция параметров солитонного решения (а) и колебательное движение двух взаимодействующих 180-градусных стенок разной полярности (б), образующих 360-градусную стенку, при  $\alpha=0$ ,  $Q=50$ ,  $h=0.0025$  и начальных данных  $\varphi(0)=0$ ,  $\Omega(0)=-0.0001h$

Переходим к рассмотрению влияния затухания на эволюцию 360-градусной стенки, когда в начальном состоянии 180-градусные стенки, разнесенные на достаточно большое расстояние, как было показано выше, являются блоховскими. В случае малых затуханий ( $\alpha \ll 1$ ), малых полей ( $h \ll 1$ ) и большого фактора качества ( $Q \gg 1$ ) систему уравнений (2.61) можно переписать так

$$\begin{aligned}\varphi_\tau &= \Omega + Q^{-1} \sin^2 \varphi + h, \\ \Omega_\tau &= 2\alpha\varphi_\tau(\varphi_\tau - h) - hQ^{-1} \sin 2\varphi.\end{aligned}\quad (2.69)$$

Далее в системе уравнений (2.69) положим

$$\Omega + Q^{-1} \sin^2 \varphi = -\varepsilon(\tau), \quad (2.70)$$

где  $0 < \varepsilon \ll 1$ . Теперь (2.69) перепишем в виде

$$\begin{aligned}\varphi_\tau &= h - \varepsilon(\tau), \\ \varepsilon_\tau - \varepsilon[2\alpha(h - \varepsilon) + Q^{-1} \sin 2\varphi] &= 0.\end{aligned}\quad (2.71)$$

В случае  $\varepsilon \ll h$  решение (2.71) имеет вид

$$\varepsilon(\tau) = \varepsilon_0 \exp\left\{2\alpha h(\tau - \tau_0) + \frac{1}{hQ} \sin^2 h(\tau - \tau_0)\right\}. \quad (2.72)$$

Условию  $\varepsilon \ll h$  на конечных временах  $\tau - \tau_0 \sim (2\alpha h)^{-1}$  можно удовлетворить выбором  $\varepsilon_0$  как

$$\varepsilon_0 = kh \quad (0 < k < 1). \quad (2.73)$$

В этом случае эволюция динамической 360-градусной доменной стенки на конечных временах определится выражением

$$\operatorname{ctg} \frac{\theta}{2} = \frac{\sqrt{kh} \operatorname{sh} \sqrt{1 + \varepsilon(\tau) + Q^{-1} \sin^2 h(\tau - \tau_0)} \cdot \xi}{\exp\left\{-\alpha h(\tau - \tau_0) - \sin^2 h(\tau - \tau_0) / 2hQ\right\}}. \quad (2.74)$$

Со временем расстояние  $L$  между 180-градусными взаимодействующими стенками из-за затухания уменьшается, осциллируя согласно выражению

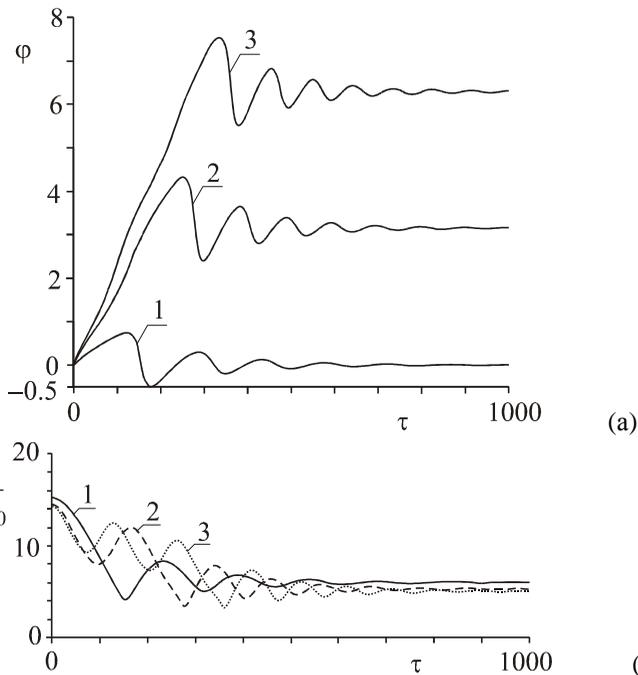
$$L \approx \frac{2\sqrt{A/K} \operatorname{Arcsh} 1 / \sqrt{\varepsilon(\tau)}}{\sqrt{1 + Q^{-1} \sin^2 h(\tau - \tau_0) + \varepsilon(\tau)}}. \quad (2.75)$$

Зависимости  $\varphi(\tau)$ ,  $\varepsilon(\tau)$ ,  $\theta(\tau)$  с учетом затухания, определяемые (2.72)–(2.74), справедливы пока  $\varepsilon(\tau) \ll h$ . О характере решения с ростом  $\varepsilon$  можно привести только качественные рассуждения. С ростом  $\varepsilon(\tau)$ , как видно из первого уравнения (2.71), пока  $\varepsilon < h$ , производная  $\varphi_\tau > 0$ . При этом наряду с ростом  $\varepsilon$  будет увеличиваться и угол  $\varphi$ . По достижении условия  $\varepsilon = h$  производная  $\varphi_\tau$  обращается в нуль и даже может стать отрицательной. На далеких временах ( $\tau \rightarrow \infty$ ) решения уравнений (2.71) имеют вид

$$\varepsilon \approx h, \quad \varphi \approx n\pi, \quad \Omega \approx -h, \quad (2.76)$$

а структура 360-градусной стенки стремится к (2.6). Приближение решения к (2.76) на далеких временах описывается системой уравнений (2.62), проанализированной выше. Параметр  $\Omega$  вследствие малости  $Q^{-1}$ ,  $h$ ,  $\alpha$ , как следует из анализа (2.69), является почти постоянной и малой величиной, близкой к  $-h$  (рис. 2.27–2.29).

Результаты вышеприведенного асимптотического анализа подтверждаются численным решением системы уравнений (см. рис. 2.30). Время и характер приближения решения к (2.76) сильно зависят от соотношения параметра затухания  $\alpha$  и поля  $h$  (рис. 2.30). В зависимости от величины поля может иметь место многократная смена полярности, то есть  $n$  принимает значения  $n = 0, 1, 2, \dots$  (рис. 2.30, а). В полях  $h < h_W = \alpha / 2Q$  значение  $n$  равно нулю. Расстояние между 180-градусными стенками при любых  $h \ll 1$ , осциллируя, уменьшается со временем (рис. 2.30, б).



**Рис. 2.30.** Зависимость угла  $\varphi$  (а) и расстояния  $L$  между центрами 180-градусных стенок (б) от времени при  $\varphi(0)=0$ ,  $\Omega(0)=-0.0001h$ , где  $h=2h_W$  (1),  $h=4h_W$  (2),  $h=5h_W$  (3)

Переходим к рассмотрению движения стенок, расположенных в начальный момент много ближе, чем в состоянии, соответствующем особой точке системы. Этому состоянию отвечают точки на фазовой диаграмме  $\varphi = n\pi$ ,  $\Omega = -kh$  ( $k > 1$ ), лежащие слева от сепаратрисы (рис. 2.25). В этом случае колебания стенок являются также периодическими (рис. 2.31). При достаточном удалении от сепаратрисы колебания являются близкими к гармоническим, а частота колебаний стенок растет с увеличением поля по линейному закону. При этом угол  $\varphi$  меняется по закону  $\varphi \sim h\tau$ . Параметр  $\Omega$  при этом слабо меняется со временем (рис. 2.31).

Для аналитического описания такого движения, согласно результатам численного исследования, положим

$$\Omega = \Omega_0 + \Omega_1(\tau), \quad \Omega_0 = \text{const}, \quad |\Omega_1| \ll |\Omega_0|,$$

$$\varphi = \psi(\tau) + \varphi_1(\tau), \quad |\varphi_1| \ll |\psi(\tau)|,$$

где  $\varphi_1$  и  $\Omega_1$  – малые отклонения. Систему уравнений, пренебрегая малыми отклонениями, можно переписать в следующем виде:

$$\psi_{\tau\tau} + |\Omega_0| Q^{-1} \sin 2\psi - 2Q^{-2} \sin^3 \psi \cos \psi = 0. \quad (2.77)$$

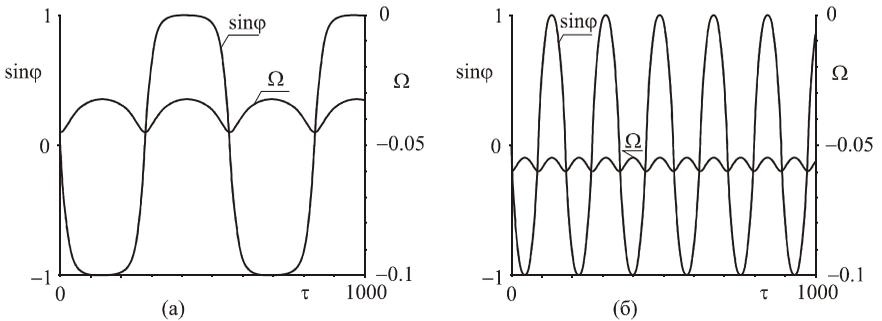
Решение этого нелинейного уравнения осциллятора можно представить в виде

$$\sin \psi = -\frac{a \operatorname{sn}(\tau', \mu)}{\left[1 + (a^2 - 1) \operatorname{sn}^2(\tau', \mu)\right]^{1/2}}, \quad (2.78)$$

$$\tau' = \tau \frac{|\Omega_0| \sqrt{1-c}}{a}, \quad 0 < c < 1, \quad a^2 = \frac{1 + \sqrt{c}}{1 - q + \sqrt{c}},$$

$$q = \frac{1}{|\Omega_0| Q}, \quad |\Omega_0| Q > 1, \quad \mu^2 = \frac{2q\sqrt{c}}{(1-q+\sqrt{c})(1-\sqrt{c})}, \quad 0 < \mu < 1.$$

При  $c \rightarrow 1 - q$  модуль эллиптического интеграла  $\mu \rightarrow 1$ ,  $K(\mu) \rightarrow \infty$ , а период колебаний  $T \rightarrow \infty$ , то есть переход стенок из одного блоховского состояния в другое будет происходить за достаточно долгое время, что имеет место при приближении к левой ветви сепаратрисы (рис. 2.25).



**Рис. 2.31.** Эволюция параметров 360-градусной стенки при  $\varphi(0) = 0$ ,  $\Omega(0) = -kh$ ,  $h = 0.01$ , где  $k = 4.5$  (а),  $k = 6$  (б)

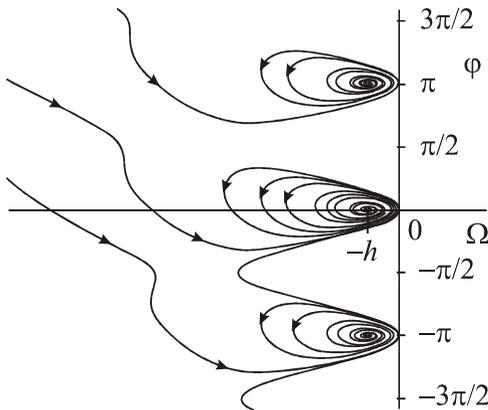
В случае  $\mu < 1$  зависимость  $\sin \psi$  от времени, определяемая (2.78), сильно отличается от обычного синусоидального закона. При  $k = 3.9$ ,  $c = (1 - q)^2 + 0.01$  имеет место удовлетворительное согласие (2.78) с численными решениями уравнения (2.61), полученными при  $k = 4.5$  (рис. 2.31).

При  $c \rightarrow 0$  параметр  $\mu \rightarrow 0$ ,  $K(\mu) \rightarrow \pi/2$ , а частота колебаний принимает вид

$$\omega_0 \approx \left( |\Omega_0| (|\Omega_0| - Q^{-1}) \right)^{1/2}.$$

Это выражение для частоты по виду совпадает с частотой  $\omega$  в отсутствие поля (2.59). Однако в этом случае  $\omega_0$  принимает вполне определенное значение, равное начальной величине  $|\Omega_0| = kh$ ,  $k > 1$ . При достаточном удалении от сепаратрисы налево  $Q^{-1} \ll |\Omega_0|$  частота колебаний  $\omega_0$  в главном приближении является линейной функцией поля  $h$ , что согласуется с результатами численного решения системы уравнений (2.61).

Влияние затухания в этом случае можно исследовать только численными методами, которые показывают, что с течением времени фазовая траектория на плоскости  $(\Omega, \varphi)$  приближается к особой точке  $\Omega_0 = -h$ ,  $\varphi_0 = n\pi$ , являющейся устойчивым узлом (рис. 2.32).



**Рис. 2.32.** Фазовые траектории системы (2.61) с учетом диссипации при  $\alpha = 0.1$ ,  $Q = 50$

Рассмотренные выше нелинейные движения 180-градусных стенок относительно центра 360-градусной стенки, сопровождаемые динамиче-

скими преобразованиями структуры стенок от блоховских до неелевских и обратно, могут быть обнаружены экспериментально в ферромагнетиках с малым затуханием и большим фактором качества, например, в ферритах-гранатах. Для обнаружения таких движений необходимы достаточно быстрые (по сравнению со скоростью изменения структуры 360-градусной стенки) изменения величины поля  $H$  в некоторые моменты времени, которые нужны для создания требуемых начальных условий. При увеличении поля возможно движение, описываемое в первой части раздела 2.8.3, а в случае уменьшения поля – движение, описываемое во второй части этого же раздела.

Таким образом, колебательное движение взаимодействующих 180-градусных стенок противоположной полярности, образующих в магнитном поле 360-градусную стенку, сопровождается непрерывным изменением их структуры. В отсутствие затухания структура стенок может меняться от блоховской до неелевской и обратно. Характер преобразования структуры сильно зависит от начального состояния 360-градусной стенки и величины внешнего магнитного поля. Частота преобразования структуры и дальнейшая ее эволюция определяется величиной магнитного поля и затухания. Такая зависимость обуславливает существование критического поля, разделяющего различные режимы движения. Затухание приводит к тому, что с течением времени взаимодействующие 180-градусные стенки (топологические солитоны или  $2\pi$ -кинки), образующие динамическую 360-градусную стенку, переходят в статическую 360-градусную стенку, то есть в состояние неподвижного  $4\pi$ -кинка с застывшей структурой. В такой ситуации наблюдение движения взаимодействующих топологических солитонов, сопровождаемых преобразованием их внутренней структуры, наиболее вероятно в некотором промежутке времени непосредственно после достаточно быстрых изменений величины магнитного поля.

# ГЛАВА III.

## СТРУКТУРА И ДИНАМИКА ЗАРОДЫША ПЕРЕМАГНИЧИВАНИЯ И ДВУХ ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИХ 180-ГРАДУСНЫХ СТЕНОК В ЛЕГКОПЛОСКОСТНОМ ФЕРРОМАГНЕТИКЕ

### 3.1. Уравнение эволюции параметров локализованных магнитных неоднородностей

Перейдем к рассмотрению динамики локализованной магнитной неоднородности в виде взаимодействующих 180-градусных доменных стенок в ферромагнетике с анизотропной легкой плоскостью во внешнем магнитном поле  $\mathbf{H} = (-H, 0, 0)$ . Считаем, что рассматриваемая магнитная неоднородность параллельна легкой плоскости. Динамика одной 180-градусной доменной стенки рассматривалась в первой главе, где было показано, что в случае легкоплоскостного ферромагнетика уравнение Ландау–Лифшица сводится к возмущенному уравнению синус-Гордона (1.92)

$$u_{tt} - u_{xx} + \sin u = 2h \sin \frac{u}{2} - \beta u_t,$$

где  $t$ ,  $x$  – безразмерные время и координата, полученные заменой переменных (1.93). Определяя  $u_t$  в виде (1.107), снова приходим к уравнению (1.108). Первый интеграл этого уравнения –

$$\frac{u_x^2}{2} - 2(1 + \varepsilon^2) \sin^2 \frac{u}{2} + 8(h + \beta\varepsilon + \varepsilon_t) \sin^2 \frac{u}{4} = c(t). \quad (3.1)$$

Решения будем искать с граничными условиями

$$u(|x| \rightarrow \infty) = 0, \quad u_x(|x| \rightarrow \infty) = 0. \quad (3.2)$$

Граничные условия (3.2) удовлетворяются при нулевой константе интегрирования  $c(t) = 0$ . Из (3.1) имеем

$$u_x^2 = 16(1 + \varepsilon^2) \sin^2 \frac{u}{4} \left( \cos^2 \frac{u}{4} - \frac{\varepsilon_t + \beta\varepsilon + h}{1 + \varepsilon^2} \right). \quad (3.3)$$

Результат интегрирования (3.3) зависит от знака  $\varepsilon_t + \beta\varepsilon + h$ . В случае

$$\varepsilon_t + \beta\varepsilon + h > 0$$

имеем

$$\operatorname{tg}^2 \frac{u}{4} = \frac{1 + \varepsilon^2 - \varepsilon_t - \beta \varepsilon - h}{\varepsilon_t + \beta \varepsilon + h} \cdot \frac{1}{\operatorname{ch}^2 \left( x \sqrt{1 + \varepsilon^2 - \varepsilon_t - \beta \varepsilon - h} \right)}. \quad (3.4)$$

Введем новый параметр  $\Omega = \Omega(t)$ , зависящий от времени следующим образом:

$$\Omega = \varepsilon_t + \beta \varepsilon + h - \varepsilon^2, \quad (3.5)$$

тогда решение (3.4) можно переписать в виде

$$\operatorname{tg}^2 \frac{u}{4} = \frac{1 - \Omega}{\Omega + \varepsilon^2} \cdot \frac{1}{\operatorname{ch}^2(x \sqrt{1 - \Omega})}, \quad (3.6)$$

откуда видно, что

$$-\varepsilon^2 < \Omega < 1. \quad (3.7)$$

Таким образом, решение (3.6) содержит два неизвестных параметра  $\varepsilon(t)$  и  $\Omega(t)$ , которые связаны уравнением (3.5). Для однозначного решения задачи следует получить еще одно уравнение. Для этого воспользуемся уравнением (2.17), которое можно переписать в следующем виде:

$$\frac{dE_0}{dt} = I, \quad (3.8)$$

где

$$E_0 = \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \frac{1}{2} u_x^2 + \frac{1}{2} u_t^2 + 1 - \cos u \right) dx, \quad (3.9)$$

$$I = - \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \beta u_t^2 - 2hu_t \sin \frac{u}{2} \right) dx. \quad (3.10)$$

Уравнение (3.8) определяет изменение энергии с течением времени под действием внешнего поля и затухания. Используя (1.107), (3.3) из (3.9), (3.10) получим

$$E_0 = 16\sqrt{1 - \Omega}, \quad (3.11)$$

$$I = - \frac{16\varepsilon(h + \beta\varepsilon)\sqrt{1 - \Omega}}{1 + \varepsilon^2} \left[ 1 + \frac{\Omega + \varepsilon^2}{2\sqrt{(1 + \varepsilon^2)(1 - \Omega)}} \ln \frac{\left( \sqrt{1 + \varepsilon^2} + \sqrt{1 - \Omega} \right)^2}{|\Omega + \varepsilon^2|} \right]. \quad (3.12)$$

Подставляя полную энергию (3.11), считая при этом параметр  $\Omega$  медленной функцией времени, и интеграл возмущения (3.12) в закон изменения энергии (3.8), можно получить выражение, определяющее  $\Omega_t$ . В результате, переписывая еще (3.5), получим систему уравнений для определения эволюции параметров  $\varepsilon$  и  $\Omega$  со временем:

$$\Omega_t = \frac{2\varepsilon(h + \beta\varepsilon)}{1 + \varepsilon^2} (1 - \Omega) \left[ 1 + \frac{\Omega + \varepsilon^2}{2\sqrt{(1 + \varepsilon^2)(1 - \Omega)}} \ln \frac{(\sqrt{1 + \varepsilon^2} + \sqrt{1 - \Omega})^2}{|\Omega + \varepsilon^2|} \right], \quad (3.13)$$

$$\varepsilon_t = \Omega + \varepsilon^2 - \beta\varepsilon - h.$$

Система уравнений (3.13) определяет эволюцию параметров  $\varepsilon$  и  $\Omega$  решения (3.6) под действием поля  $h$  и затухания  $\beta$ .

Сначала покажем, что из (3.6) и (3.13) можно получить известные решения. Рассмотрим случай отсутствия поля и затухания  $h = 0, \beta = 0$ . Из первого уравнения системы (3.13) имеем

$$\Omega_t = 0, \quad \Rightarrow \quad \Omega = \text{const}.$$

Из второго уравнения (3.13) получим уравнение Риккати

$$\varepsilon_t = \Omega + \varepsilon^2. \quad (3.14)$$

Интегрируя (3.14), определим  $\varepsilon$ :

$$\varepsilon = -\sqrt{\Omega} \operatorname{ctg}(\sqrt{\Omega}(t - t_0)) \quad \text{при } 0 < \Omega < 1; \quad (3.15)$$

$$\varepsilon = -\sqrt{-\Omega} \operatorname{cth}(\sqrt{-\Omega}(t - t_0)) \quad \text{при } -\varepsilon^2 < \Omega < 0. \quad (3.16)$$

Решение (3.6) переходит к виду, рассмотренному в п. 2 главы II:

$$\operatorname{tg} \frac{u}{4} = \sqrt{\frac{1 - \Omega}{\Omega}} \cdot \frac{\sin(\sqrt{\Omega}(t - t_0))}{\operatorname{ch}(x\sqrt{1 - \Omega})} \quad (0 < \Omega < 1), \quad (3.17)$$

$$\operatorname{tg} \frac{u}{4} = \sqrt{\frac{1 - \Omega}{-\Omega}} \cdot \frac{\operatorname{sh}(\sqrt{-\Omega}(t - t_0))}{\operatorname{ch}(x\sqrt{1 - \Omega})} \quad (-\varepsilon^2 < \Omega < 0). \quad (3.18)$$

Первое из этих решений описывает бризер с неподвижным центром и частотой колебаний

$$\omega = \sqrt{\Omega} \quad (3.19)$$

относительно центра, что соответствует колебаниям зародыша перемагничивания. При  $\Omega \ll 1$  такие колебания переходят в колебания двух взаимодей-

ствующих 180-градусных доменных стенок одинаковой полярности относительно неподвижного центра зародыша. Второе решение (3.18) описывает солитон-антисолитонную пару, то есть две взаимодействующие доменные стенки одинаковой полярности. Скорость движения солитонов (доменных границ) относительно их общего центра определяется выражением

$$V = \sqrt{-\Omega/(1-\Omega)}. \quad (3.20)$$

Теперь перейдем к рассмотрению решения (3.3) в случае

$$\varepsilon_t + \beta\varepsilon + h = \Omega + \varepsilon^2 < 0 \quad (3.21)$$

при следующих граничных условиях:

$$u(x \rightarrow -\infty) = 0, \quad u(x \rightarrow +\infty) = 4\pi, \quad u_x(|x| \rightarrow \infty) = 0. \quad (3.22)$$

Уравнение (3.3) имеет решение:

$$\operatorname{ctg}^2 \frac{u}{4} = \frac{-(\Omega + \varepsilon^2)}{1 - \Omega} \operatorname{sh}^2(x\sqrt{1 - \Omega}) \quad (-\infty < \Omega < -\varepsilon^2). \quad (3.23)$$

Повторяя вышеизложенную процедуру получения уравнений для  $\varepsilon$  и  $\Omega$ , снова приходим к системе (3.13), где теперь  $\Omega + \varepsilon^2 < 0$ .

В отсутствие поля и затухания параметр  $\Omega = \text{const}$  ( $\Omega < -\varepsilon^2$ ), а уравнение Риккати (3.14) имеет решение:

$$\varepsilon = -\sqrt{-\Omega} \operatorname{th}(\sqrt{-\Omega}(t - t_0)), \quad (3.24)$$

а выражение (3.23) принимает вид

$$\operatorname{ctg}^2 \frac{u}{4} = \frac{-\Omega}{1 - \Omega} \cdot \frac{\operatorname{sh}^2(x\sqrt{1 - \Omega})}{\operatorname{ch}^2(\sqrt{-\Omega}(t - t_0))} \quad (\Omega < -\varepsilon^2), \quad (3.25)$$

где

$$\Omega = \frac{-V^2}{1 - V^2}, \quad (3.26)$$

$V$  – скорость движения топологических солитонов (доменных границ). Решение (3.23) описывает солитон-солитонную пару, что соответствует двум взаимодействующим 180-градусным доменным границам разной полярности (с противоположным направлением намагниченности в центре стенки).

**Обобщенный метод Ван-дер-Поля.** Изложенный выше метод получения уравнений эволюции параметров солитона обобщим на случай произвольного возмущения  $P_0(u) \ll 1$ , исчезающего на бесконечности:

$$P_0(u(|x| \rightarrow \infty)) \rightarrow 0. \quad (3.27)$$

Рассмотрим возмущенное уравнение синус-Гордон вида

$$u_{tt} - u_{xx} + \sin u = P_0(u). \quad (3.28)$$

Если ограничиться исследованием влияния возмущения на локализованные неоднородности, то в качестве невозмущенного состояния естественно выбрать бризер. Такое состояние представляется посредством специфического решения невозмущенного уравнения синус-Гордона [Додд и др., 1988]:

$$u = 4 \operatorname{arctg} \left( \sqrt{\frac{1-\Omega}{\Omega+\varepsilon^2}} \cdot \frac{1}{\operatorname{ch}(x\sqrt{1-\Omega})} \right), \quad (3.29)$$

$$u_t = -2\varepsilon \sin \frac{u}{2}, \quad (3.30)$$

$$\varepsilon = -\sqrt{\Omega} \operatorname{ctg} \chi, \quad (3.31)$$

где  $\chi = \sqrt{\Omega} \cdot t + \chi_0$ ;  $\chi_0 = \operatorname{const}$ .

При наличии возмущения, стремящегося к нулю на бесконечности, в (3.29)–(3.31) полагаем параметры решения  $\Omega = \Omega(t)$ ,  $\varepsilon = \varepsilon(t)$  неизвестными функциями времени. Причем, как и ранее,  $\Omega$  считаем медленно изменяющейся с течением времени. Уравнения для определения  $\Omega$  и  $\varepsilon$  могут быть получены на основе приближенного метода, представляющего по своей сути обобщение методов Ван-дер-Поля на случай распределенных систем. Такое обобщение основывается на законах изменения энергии и скорости изменения числа элементарных линейных возбуждений (спиновых волн), изложенных во второй главе. Так же как и в случае метода Ван-дер-Поля, дифференцируя выражение (3.29) по времени, получим

$$u_t^* = -2\varepsilon \sin \frac{u}{2} \left\{ \frac{\varepsilon_t}{\Omega + \varepsilon^2} + \left( \frac{1 + \varepsilon^2}{2\varepsilon(\Omega + \varepsilon^2)(1 - \Omega)} - \frac{x \operatorname{th}(x\sqrt{1 - \Omega})}{2\varepsilon\sqrt{1 - \Omega}} \right) \Omega_t \right\}. \quad (3.32)$$

Для обобщения метода Ван-дер-Поля на случай распределенных систем, прежде чем приравнять (3.30) и (3.32), умножим их на  $\sin(u/2)$  и проинтегрируем по координате:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} u_t^* \sin \frac{u}{2} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} u_t \sin \frac{u}{2} dx. \quad (3.33)$$

Также это соотношение можно представить в виде (2.20). В результате вычисления интегралов получим следующее уравнение:

$$\varepsilon_t = \Omega + \varepsilon^2 - \frac{1 + \varepsilon^2}{2\varepsilon(1 - \Omega)(1 + \Gamma)} \Omega_t, \quad (3.34)$$

где

$$\Gamma = \frac{\Omega + \varepsilon^2}{\sqrt{(1 + \varepsilon^2)(1 - \Omega)}} \operatorname{arsh} \sqrt{\frac{1 - \Omega}{\Omega + \varepsilon^2}}. \quad (3.35)$$

Для получения второго уравнения, связывающего параметры  $\varepsilon$  и  $\Omega$ , поступим следующим образом. Умножим исходное уравнение на  $u_t$ , определяемое (3.30), и проинтегрируем по координате  $x$ , что приведет к выражению

$$\frac{dE_0}{dt} = -2\varepsilon I_1, \quad (3.36)$$

$$I_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} P_0(u) \sin \frac{u}{2} dx, \quad (3.37)$$

где полная энергия  $E_0$  определяется выражением (3.9) и равна (3.11). Уравнение (3.36) определяет закон изменения энергии в случае произвольного возмущения  $P_0(u)$ , исчезающего на бесконечности. С учетом выражения для полной энергии (3.11) законы изменения энергии (3.36) и параметра  $\varepsilon$  (3.34) перепишем как систему:

$$\begin{aligned} \Omega_t &= \frac{1}{4} \varepsilon \sqrt{1 - \Omega} \cdot I_1, \\ \varepsilon_t &= \Omega + \varepsilon^2 - \frac{1 + \varepsilon^2}{8\sqrt{1 - \Omega}} \frac{I_1}{1 + \Gamma}. \end{aligned} \quad (3.38)$$

При малых возмущениях, как видно из первого уравнения системы (3.38), параметр  $\Omega$  становится медленно меняющейся функцией времени, то есть

$\Omega_t \ll 1$ . Из системы (3.38) следует, что в отсутствие возмущения условие (3.32) выполняется тождественно, откуда следует уравнение Риккати (3.14).

Покажем, что умножение выражений для  $u_t$  (3.30) и  $u_t^*$  (3.32) на  $\sin(u/2)$  при получении закона изменения (3.38) параметра  $\varepsilon$  имеет вполне определенный физический смысл. Вводя число элементарных линейных возбуждений

$$N = \frac{M_0}{2\mu_0} \int_{-\infty}^{\infty} (1 - m_x) dz,$$

входящих в локализованную магнитную неоднородность, выражение (3.33) можно переписать в виде

$$\hbar \frac{dN}{dt} = \frac{M_0 \delta_0}{2\gamma} \int u_t \sin \frac{u}{2} dx, \quad (3.39)$$

где величина  $N$  в случае решения (3.6) и (3.23) определяется выражением

$$N = \frac{M_0 \delta_0}{\mu_0 \sqrt{1 + \varepsilon^2}} \ln \frac{(\sqrt{1 - \Omega} + \sqrt{1 + \varepsilon^2})^2}{|\Omega + \varepsilon^2|},$$

где  $\mu_0 = \gamma \hbar / 2$  – магнетон Бора.

Таким образом, условие (3.33) означает требование постоянства скорости изменения числа элементарных линейных возбуждений, входящих в локализованную магнитную неоднородность, как в случае отсутствия, так и наличия возмущений. Итак, если в обычном методе Ван-дер-Поля для колебательной системы приравниваются скорости отклонения системы от положения равновесия, то в случае распределенных систем следует приравнять скорости изменения числа элементарных возбуждений (в данном случае магнонов).

Отметим, что при

$$P_0(u) = 2h \sin \frac{u}{2} - \beta u_t$$

система (3.38) переходит к системе (3.13). Изложенный выше метод в отличие от теории возмущений указывает на физическое допущение, при котором являются справедливыми результаты теории возмущений в адиабатическом приближении. Это допущение сводится к требованию постоянства

скорости изменения числа элементарных линейных возбуждений как в возмущенной, так и в невозмущенной системе, что возможно при малой интенсивности излучаемых волн.

### **Гамильтонова формулировка исследования параметров одно- и двухсолитонных решений возмущенного уравнения синус-Гордона**

Прежде чем приступить к анализу динамики магнитных неоднородностей, покажем, что системы уравнений (2.17) и (2.21), описывающие изменение энергии и числа спиновых отклонений, можно получить в рамках гамильтонова подхода. Отметим, что нижеприведенные результаты можно рассматривать как продолжение раздела 2.2 главы II.

Вместо уравнения (1.92) рассмотрим возмущенное уравнение синус-Гордона вида

$$u_{tt} - u_{xx} + \sin u = P_1(u, x, t) - \beta u_t, \quad (3.40)$$

где  $0 < P_1 \ll 1$  – малое слагаемое. Этому уравнению можно сопоставить систему уравнений Гамильтона

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\delta H}{\delta p_u}, \\ \frac{\partial p_u}{\partial t} &= -\frac{\delta H}{\delta u} - \beta u_t, \end{aligned} \quad (3.41)$$

где  $p_u = u_t$  – канонически сопряженная к  $u$  переменная (обобщенный импульс),  $H = H_0 + H_1$  – функция Гамильтона,

$$\begin{aligned} H_0 &= \int dx \left[ \frac{1}{2} (u_x^2 + p_u^2) + 1 - \cos u \right], \\ H_1 &= -\int P_1 \delta u dx. \end{aligned}$$

Каждое уравнение системы (4.41) умножим на  $u_t$  и проинтегрируем по координате  $x$ . Из второго уравнения получим закон изменения энергии

$$\frac{dE_0}{dt} = -\beta \int_{-\infty}^{+\infty} u_t^2 dx + \int_{-\infty}^{+\infty} P_1 u_t dx, \quad (3.42)$$

где  $E_0 = H_0(p_u \rightarrow u_t)$ . Из первого уравнения имеем

$$\int u_t^2 dx = \int p_u u_t dx. \quad (3.43)$$

Воспользуемся тем, что в отсутствие возмущения для одно- и двух-солитонных решений уравнения синус-Гордона с неподвижным центром справедливо равенство (см. главы I и III)

$$u_t = -2\varepsilon \sin \frac{u}{2}. \quad (3.44)$$

С учетом (3.44) равенство (3.43) можно представить так:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p_u \sin \frac{u}{2} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} u_t \sin \frac{u}{2} dx$$

или

$$\frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{+\infty} (1 - \cos \frac{u}{2}) dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} u_t \sin \frac{u}{2} dx. \quad (3.45)$$

В отсутствие возмущения уравнение (3.45) превращается в тождество, как и уравнение (3.42). При наличии возмущения соотношение (3.45) и уравнение (3.42) следует рассматривать как уравнения, описывающие изменение параметров солитона под действием возмущений ( $H_1$  и  $\beta u_t$ ). Следует заметить, что уравнение (3.45) совпадает с уравнением (2.21), ранее полученным на основе обобщения метода Ван-дер-Поля на случай распределенных систем. Уравнение (3.45), как было показано ранее, переходит к уравнению (2.20), определяющему скорость изменения числа элементарных линейных возбуждений. Из сравнения (3.45) и (2.21) видно, что рассмотрение закона изменения числа элементарных линейных возбуждений (спиновых отклонений) (2.20) является необходимым при исследовании характеристик солитонов и является логически последовательным этапом при гамильтоновом подходе.

### 3.2. Динамика локализованной магнитной неоднородности

Как было показано выше, система (3.13), полученная с учетом внешнего магнитного поля и диссипации, при  $0 < \Omega < 1$  описывает эволюцию со

временем параметров бризера, то есть динамику зародыша перемагничивания, а при  $-\varepsilon^2 < \Omega < 0$  – солитон-антисолитонной пары, то есть динамику взаимодействующих 180-градусных доменных стенок одинаковой полярности с противоположными топологическими зарядами, определяемой решением (3.6). В случае  $-\infty < \Omega < -\varepsilon^2$  система уравнений (3.13) описывает изменение со временем параметров солитон-солитонной пары, отвечающей связанному состоянию двух 180-градусных доменных стенок разной полярности с одинаковыми топологическими зарядами, определяемой решением (3.23) в виде  $4\pi$ -кинка.

Перейдем к качественному исследованию фазовых траекторий системы (3.13) на плоскости  $(\Omega, \varepsilon)$ . В отсутствие затухания ( $\beta = 0$ ) полная энергия системы в магнитном поле с учетом (1.104) может быть представлена в виде

$$W = \frac{1}{8} \sigma_w \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \frac{1}{2} u_t^2 + \frac{1}{2} u_x^2 + 2 \sin^2 \frac{u}{2} - 8h \sin^2 \frac{u}{4} \right] dx. \quad (3.46)$$

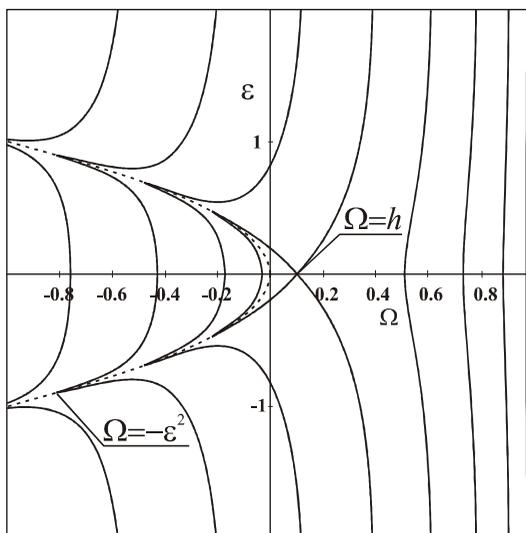
Эта величина является интегралом движения. Здесь  $\sigma_w = 4\sqrt{AK_p}$  – поверхностная плотность энергии неподвижной 180-градусной доменной стенки (см. главу I). Вычисляя  $W$  с учетом  $u_t$  (1.107) и первого интеграла  $u_x$  (3.3), получим

$$W = 2\sigma_w \sqrt{1 - \Omega} - 2\mu_0 NH. \quad (3.47)$$

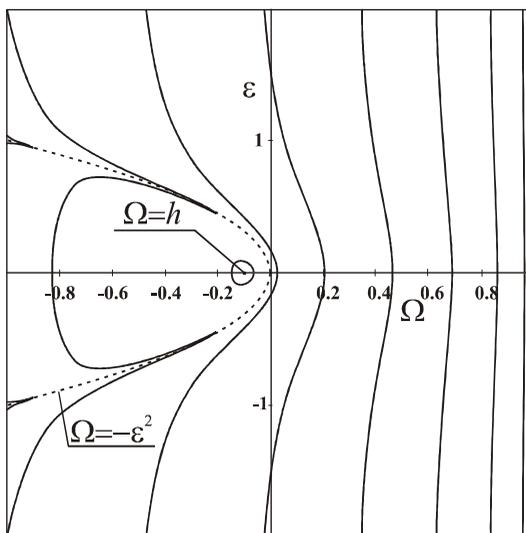
Строя изоэнергетические кривые  $W = \text{const}$  на плоскости  $(\Omega, \varepsilon)$ , получим фазовые траектории в отсутствие затухания (см. рис. 3.1). Проанализируем тип особых точек, то есть положений равновесия динамической системы (3.13), при наличии затухания. Сначала рассмотрим случай  $\Omega + \varepsilon^2 > 0$ , соответствующий решению (3.6). Положения равновесия динамической системы (3.13), определяемые условиями  $\Omega_t = 0$  и  $\varepsilon_t = 0$ , при  $h \ll 1$ ,  $\alpha \ll 1$  имеют вид

$$\Omega_0 = h, \quad \varepsilon_0 = 0; \quad (3.48)$$

$$\Omega_0 + \varepsilon_0^2 = 0, \quad \varepsilon_0 = -h/\beta. \quad (3.49)$$



(a)



(б)

**Рис. 3.1.** Фазовые траектории на плоскости  $(\Omega, \varepsilon)$  в отсутствие затухания при  $h > 0$  (а),  $h < 0$  (б)

Поведение фазовых траекторий на фазовой плоскости параметров  $\varepsilon$  и  $\Omega$  в окрестности особых точек определяется типом особых точек. Анализ показывает, что первая особая точка (3.48) при  $h > 0$  является седлом (см. рис. 3.1а). Состояние, соответствующее седлу, неустойчиво. Решение (3.6) в этом случае с учетом  $u = 2\varphi_0$  принимает вид

$$\operatorname{tg}^2 \frac{\varphi_0}{2} = \frac{1-h}{h} \cdot \frac{1}{\operatorname{ch}^2(x\sqrt{1-h})}, \quad 0 < h < 1 \quad (3.50)$$

и описывает критический зародыш состояния  $\varphi_0 = \pi$  (см. главу II). Амплитуда критического зародыша равна

$$\varphi_{cr} = 2 \operatorname{arctg}((1-h)/h)^{1/2}.$$

Полагая

$$\Omega = \omega^2, \quad \varepsilon = -\omega \operatorname{ctg} \chi, \quad (3.51)$$

систему уравнений (3.13) можно привести к виду

$$\begin{aligned} \frac{d\omega}{dt} &= \left( \beta - \frac{h \operatorname{tg} \chi}{\omega} \right) \cdot \frac{\omega(1-\omega^2) \cos^2 \chi}{(1-\omega^2) \sin^2 \chi + \omega^2} \cdot (1 + I(\omega, \chi)), \\ \frac{d\chi}{dt} &= \omega + \left( \beta - \frac{h \operatorname{tg} \chi}{\omega} \right) \cdot \frac{\cos \chi \sin \chi}{(1-\omega^2) \sin^2 \chi + \omega^2} \cdot (1 + (1-\omega^2) \cos^2 \chi \cdot I(\omega, \chi)), \end{aligned} \quad (3.52)$$

где

$$\begin{aligned} I(\omega, \chi) &= \frac{\omega^2}{\sqrt{1-\omega^2} \sin \chi \sqrt{(1-\omega^2) \sin^2 \chi + \omega^2}} \times \\ &\times \ln \left[ \frac{1}{\omega} \left( \sqrt{(1-\omega^2) \sin^2 \chi + \omega^2} + \sqrt{1-\omega^2} \sin \chi \right) \right]. \end{aligned} \quad (3.53)$$

Решение (3.6), соответствующее особой точке (3.48)

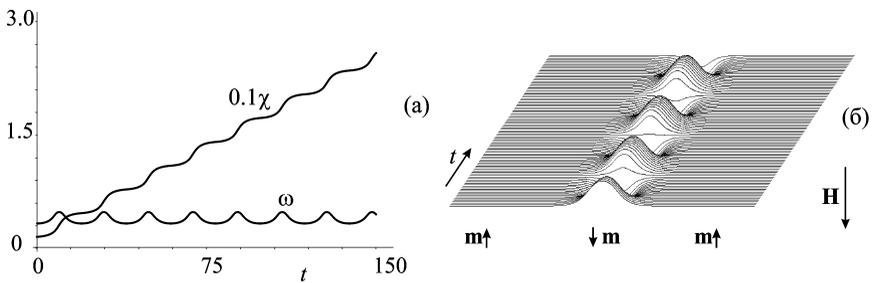
$$\omega_0 = \sqrt{h}, \quad \chi_0 = \pi/2,$$

описывает критический зародыш перемагничивания, который достаточен, чтобы инициировать переход всей системы из метастабильного в абсолютно устойчивое однородное состояние. При начальных амплитудах, меньших критической амплитуды  $\varphi_{cr}$ , бризер совершает нелинейные колебания (рис. 3.2), которые при наличии диссипации являются затухающими (рис. 3.3).

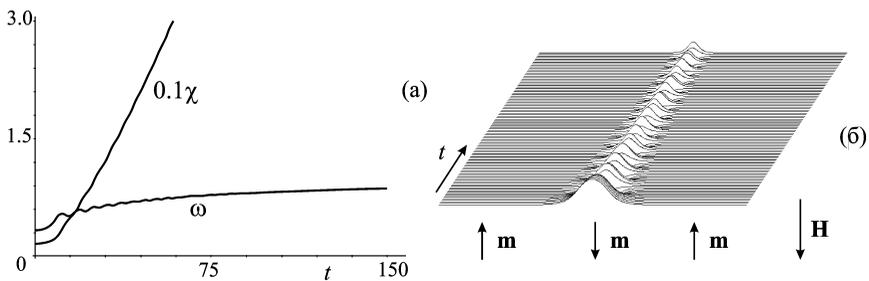
Такое движение имеет место, когда начальная частота бризера больше  $\sqrt{h}$ , а в размерных переменных больше

$$\omega_b^{FM} = \sqrt{(4\pi M_0 + H_a)H}^{1/2}, \quad (3.54)$$

$H_a = 2|K_u|/M_0$  соответственно. Анализ показывает, что в отсутствие затухания частота колебаний растет с ростом поля, кроме того, существует ее сильная зависимость от начальной амплитуды зародыша перемагничивания, имеющего форму бризера.



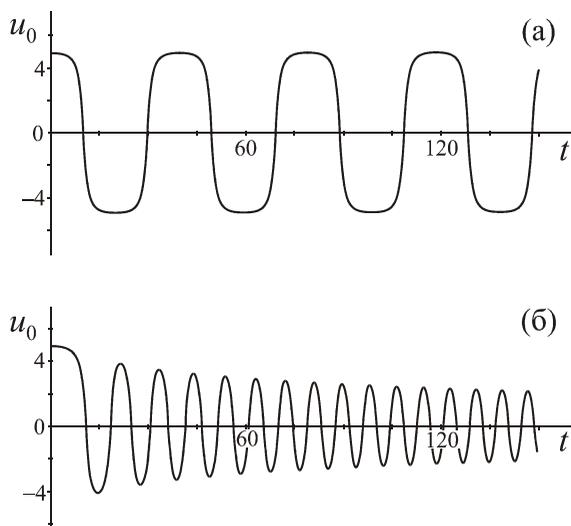
**Рис. 3.2.** Нелинейные колебания зародыша перемагничивания при  $h = 0.1$ ,  $\beta = 0$  и начальных данных  $\chi_0 = \pi/2$ ,  $\omega_0 = 0.332$



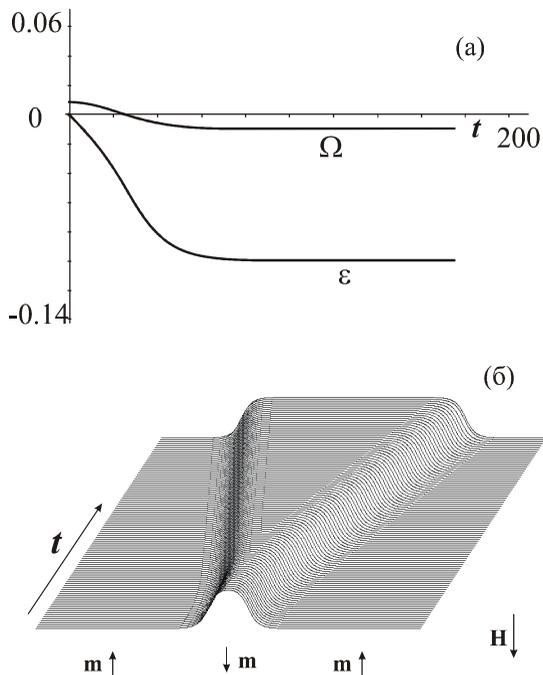
**Рис. 3.3.** Нелинейные затухающие колебания зародыша в случае  $h = 0.1$ ,  $\beta = 0.1$  при небольших временах для начальных данных  $\chi_0 = \pi/2$ ,  $\omega_0 = 0.332$

Наличие диссипации с течением времени приводит к уменьшению амплитуды и увеличению частоты колебаний (рис. 3.3–3.4). Причем уменьшение амплитуды и возрастание частоты происходит тем быстрее, чем больше величина затухания. Как показывает численное исследование, при достаточно больших временах амплитуда бризера уменьшается, а частота  $\omega \rightarrow 1$ , что в размерных переменных при малых затуханиях соответствует частоте ферромагнитного резонанса  $\omega_{FM}$ .

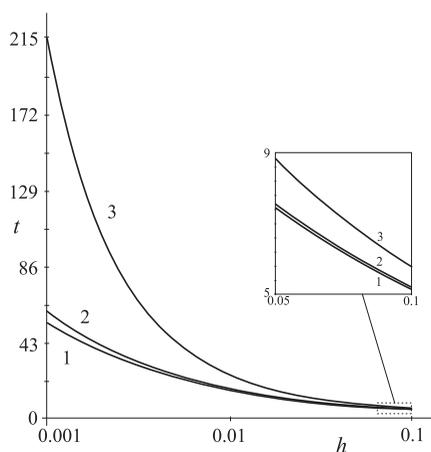
При амплитудах, больших  $\phi_{cr}$ , зародыш перемагничивания, имеющий форму бризера, распадается на две удаляющиеся друг от друга 180-градусные стенки (рис. 3.6). Из анализа результатов численного решения (3.46) следует, что время распада бризера зависит от затухания и внешнего магнитного поля. Время распада бризера возрастает с увеличением параметра затухания и уменьшается с ростом внешнего магнитного поля.



**Рис. 3.4.** Зависимость угла отклонения ( $\phi = u_0 / 2$ ) намагниченности в центре зародыша перемагничивания в форме бризера от времени при  $h = 0.1$  и  $\beta = 0$  (а),  $\beta = 0.1$  (б)



**Рис. 3.5.** Распад зародыша перемангничивания и образование домена обратной намагниченности, ограниченного 180-градусными доменными стенками для начальных данных  $\epsilon_0 = 0$ ,  $\Omega_0 = 0.8h$  при  $h = 0.01$ ,  $\beta = 0.1$



**Рис. 3.6.** Полевая зависимость времени превращения зародыша перемангничивания в форме бризера в две сильно связанные доменные стенки при  $\epsilon_0 = 0$ ,  $\Omega_0 = 0.8h$ ,  $\beta$ : 1 – 0.001; 2 – 0.01; 3 – 0.1

### 3.3. Взаимодействующие доменные стенки одинаковой полярности

Во внешнем магнитном поле  $\mathbf{H} = (-H, 0, 0)$  решение (3.6) описывает зародыш устойчивого состояния  $\mathbf{M} \uparrow \uparrow \mathbf{H}$  в недрах метастабильной фазы  $\mathbf{M} \uparrow \downarrow \mathbf{H}$ . При этом, как отмечалось выше, если амплитуда такого зародыша превышает критическое значение, он распадается на две взаимодействующие 180-градусные доменные стенки одинаковой полярности, ограничивающие домен обратной намагниченности. Проанализируем решение (3.6) при  $h > 0$  в случае распада первоначальной магнитной неоднородности. Образующие ее доменные стенки со временем приближаются к равновесному состоянию, в котором решение (3.6) принимает вид (см. рис. 3.5)

$$\varphi_0 \approx 2 \operatorname{arctg} \exp[(1 + \varepsilon^2)^{1/2}(x + X_0)] - 2 \operatorname{arctg} \exp[(1 + \varepsilon^2)^{1/2}(x - X_0)],$$

$$X_0 = \frac{1}{2\sqrt{1 + \varepsilon^2}} \ln \frac{4(1 + \varepsilon^2)}{|\Omega + \varepsilon^2|}, \quad (\Omega \rightarrow -\varepsilon^2). \quad (3.55)$$

Это решение описывает взаимодействующие 180-градусные стенки одинаковой полярности с противоположными топологическими зарядами, расстояние  $T = 2X_0$  между центрами которых в случае  $h > 0$  бесконечно растет при  $\varepsilon \rightarrow \varepsilon_0$ ,  $\Omega \rightarrow -\varepsilon_0^2$ .

Для описания взаимодействия стенок систему (3.13) удобно переписать в новых переменных  $V$  и  $\Phi$ :

$$\Omega = -V^2 / (1 - V^2), \quad \varepsilon = -V \operatorname{cth} \Phi / \sqrt{1 - V^2}. \quad (3.56)$$

Здесь  $V$  – скорость стенок (солитона и антисолитона) относительно их общего центра,  $\Phi$  – величина, пропорциональная расстоянию между ними. Тогда система (3.13) примет вид

$$\frac{dV}{dt} = - \left( \beta - h \frac{\sqrt{1 - V^2} \operatorname{th} \Phi}{V} \right) \frac{V(1 - V^2) \operatorname{ch}^2 \Phi (1 + J)}{V^2 + \operatorname{sh}^2 \Phi},$$

$$\frac{d\Phi}{dt} = \frac{V}{\sqrt{1 - V^2}} - \left( \beta - h \frac{\sqrt{1 - V^2} \operatorname{th} \Phi}{V} \right) \cdot \frac{(1 - V^2) \operatorname{ch} \Phi \operatorname{sh} \Phi}{V^2 + \operatorname{sh}^2 \Phi} \left[ 1 + \frac{\operatorname{ch}^2 \Phi}{1 - V^2} J \right], \quad (3.57)$$

$$J = \frac{\ln\left(V^{-1}(\sqrt{V^2 + \text{sh}^2 \Phi} + \text{sh} \Phi)\right)}{\text{sh} \Phi \sqrt{V^2 + \text{sh}^2 \Phi}}.$$

Здесь скорость  $V$  является медленно меняющейся функцией времени.

При  $X_0 \rightarrow \infty$  в (3.55) (что в (3.57) соответствует  $\Phi \rightarrow \infty$ ), то есть когда первоначальная магнитная неоднородность распадается на две слабо-взаимодействующие доменные стенки, из (3.57) можно определить скорость стационарного движения этих стенок относительно неподвижного центра системы:

$$V = \frac{h}{\sqrt{h^2 + \beta^2}},$$

$$\Phi = \frac{Vt}{\sqrt{1-V^2}} \rightarrow \infty \quad (t \rightarrow \infty).$$

Отсюда видно, что выражение для скорости совпадает со скоростью (1.102) стационарного движения изолированной 180-градусной стенки.

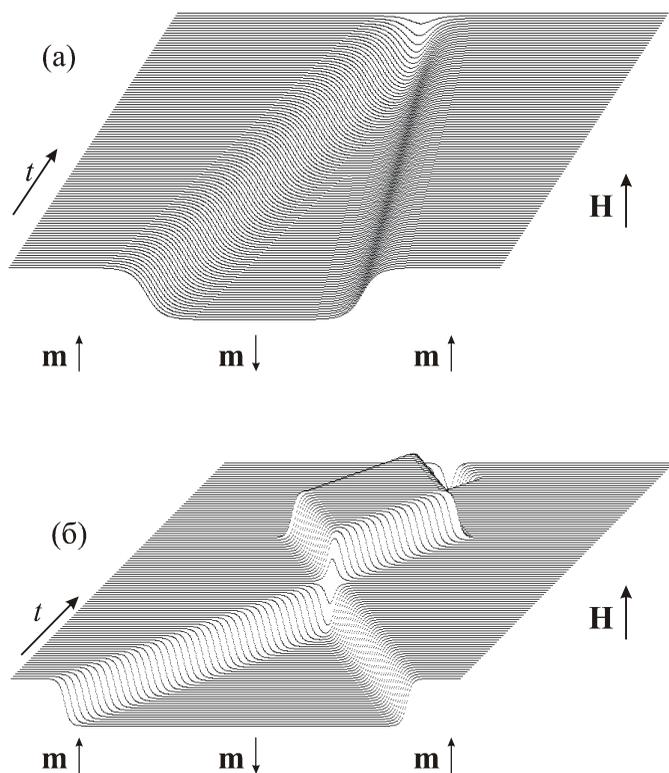
Перейдем к рассмотрению динамики сближения двух 180-градусных стенок. В случае  $h < 0$  с ростом  $\Phi$  180-градусные стенки одинаковой полярности, имеющие топологические заряды противоположных знаков, сближаются и в результате взаимодействия могут аннигилировать (см. рис. 3.7).

Для численного исследования системы (3.57) необходимо задать начальные условия, налагаемые на величины скорости  $V$  и параметра  $\Phi$ . Будем считать, что при  $h < 0$  доменные стенки, бесконечно удаленные друг от друга (невзаимодействующие), движутся со скоростью стационарного движения (1.102). Тогда начальные условия следует задать в виде

$$\Phi_0 \rightarrow -\infty, \quad V_0 = |h|/\sqrt{h^2 + \beta^2}.$$

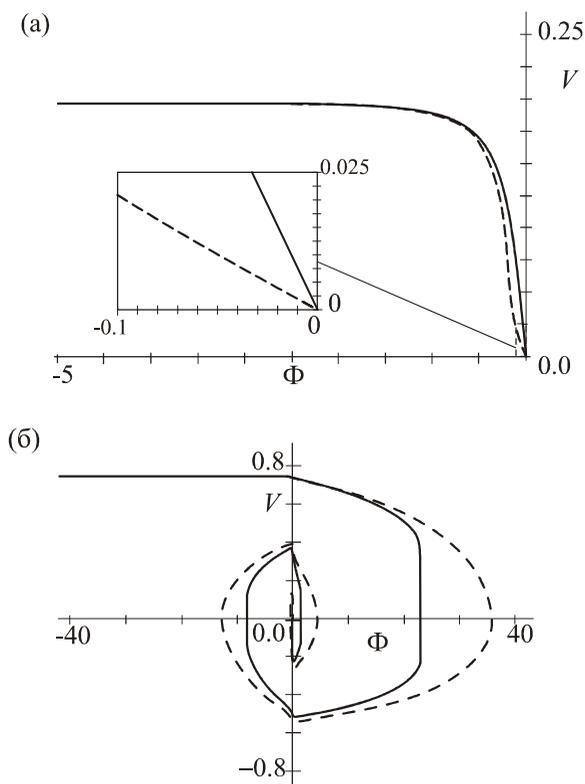
Численное интегрирование системы (3.57) показывает сильную зависимость процесса взаимодействия стенок в магнитном поле от затухания. Эволюция формы взаимодействующих доменных стенок одинаковой полярности для различных параметров затухания приведена на рис. 3.7. При заданном поле существует некоторое критическое значение параметра за-

тухания, ниже которого солитон-антисолитонная пара (пара 180-градусных стенок одинаковой полярности), прежде чем аннигилировать, испытывает многократный процесс рассеяния, сопровождающийся сменой знака  $\Phi$  (рис. 3.8). Штриховые линии на этом рисунке получены, пренебрегая во втором уравнении (3.51) затуханием и внешним полем. Смена знака  $\Phi$  соответствует изменению полярности 180-градусных стенок, то есть изменению направления намагниченности в центре доменных стенок.



**Рис. 3.7.** Взаимодействующие 180-градусные стенки одинаковой полярности при  $h = -0.01$ ,  $\beta = 0.05$  (а) и  $\beta = 0.009$  (б)

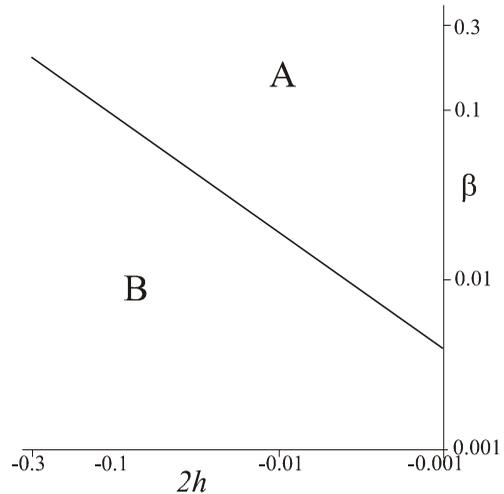
Можно показать, что в магнитном поле противоположного направления ( $h > 0$ ) при начальных условиях  $\Phi_0 \rightarrow -\infty, V_0 > 0$  в зависимости от соотношения между  $V_0, h$  и  $\beta$  при сближении двух удаленных друг от друга стенок может иметь место как явление отталкивания, так и их переход в состояние бризера. В последнем случае в зависимости от соотношения между  $V_0, h$  и  $\beta$  может иметь место как распад бризера на две удаляющиеся друг от друга стенки, так и затухание бризера и переход системы в состояние, соответствующее однородному распределению намагниченности.



**Рис. 3.8.** Траектории в фазовой плоскости  $(\Phi, V)$ , соответствующие данным рис. 3.7

На рис. 3.9 приведена линия на плоскости  $(h, \beta)$ , разделяющая области аннигиляции доменных стенок одинаковой полярности, сопровождаемых однократным и многократным рассеянием.

**Рис. 3.9.** Диаграмма характера аннигиляции стенок в плоскости  $(h, \beta)$ . А – область одноактного, В – многоактного процесса рассеяния взаимодействующих 180-градусных стенок одинаковой полярности



### 3.4. Взаимодействующие доменные стенки разной полярности. 360-градусная доменная стенка

Перейдем к рассмотрению динамики взаимодействующей солитон-солитонной пары, то есть динамики  $4\pi$ -кинка возмущенного двойного уравнения синус-Гордон (1.92). Решение (3.25) описывает взаимодействующие 180-градусные стенки разной полярности с одинаковыми топологическими зарядами, причем расстояние  $2X_0$  между стенками, определяемое выражением (3.49), в случае  $h > 0$  растет с уменьшением  $|\Omega + \varepsilon^2|$  и стремится к бесконечности при

$$|\Omega + \varepsilon^2| \rightarrow |\Omega_0 + \varepsilon_0^2| = 0,$$

и решение (3.25) принимает вид

$$\varphi_0 \approx 2 \operatorname{arctg} \exp[(1 + \varepsilon^2)^{1/2}(x + X_0)] + 2 \operatorname{arctg} \exp[(1 + \varepsilon^2)^{1/2}(x - X_0)].$$

В случае  $h < 0$  состояние

$$\varepsilon_0 = |h|/\beta, \quad \Omega_0 + \varepsilon_0^2 = 0$$

неустойчиво. Поэтому стенки, разнесенные на расстояние  $2X_0$ , сближаются, в результате чего происходит их рассеяние. Этот процесс имеет место вблизи состояния, соответствующего другой особой точке

$$\Omega_0 = h < 0, \quad \varepsilon_0 = 0$$

динамической системы (3.13). Вблизи этой точки

$$\Omega = -|h| + \Omega_1, \quad \varepsilon = \varepsilon_1, \quad (3.58)$$

где  $\Omega_1, \varepsilon_1$  – малые отклонения, а систему при  $|h| \ll 1$  можно привести к виду

$$\ddot{\varepsilon}_1 + 2\lambda_0 \dot{\varepsilon}_1 + \omega_{10}^2 \varepsilon_1 = 0, \quad (3.59)$$

$$\dot{\Omega} = -\omega_{10}^2 \varepsilon_1, \quad (3.60)$$

$$2\lambda_0 = \beta, \quad \omega_{10}^2 = 2|h|. \quad (3.61)$$

Из анализа (3.59) следует, что при  $|h| \leq \beta^2/8$  малые отклонения  $\varepsilon_1$  и  $\Omega_1$  со временем затухают, а решение, описывающее структуру  $4\pi$ -кинка (солитон-солитонной пары), стремится к решению, описывающему статическую  $360^\circ$ -градусную доменную стенку, определяемую выражением

$$\operatorname{ctg}^2 \frac{\varphi}{2} = \frac{|h|}{1+|h|} \operatorname{sh}^2(x\sqrt{1+|h|}). \quad (3.62)$$

На рис. 3.10 и 3.11 приведены различные режимы затухающего движения взаимодействующих  $180^\circ$ -градусных стенок разной полярности с одинаковыми топологическими зарядами и образования из них  $360^\circ$ -градусной доменной стенки с «перетяжкой».

В случае  $|h| \gg \beta^2/8$  имеют место слабозатухающие колебания связанных  $180^\circ$ -градусных доменных стенок разной полярности относительно их общего центра с частотой

$$\omega_1 = \sqrt{\omega_{10}^2 - \lambda_0^2}. \quad (3.63)$$

При  $\beta = 0$  имеют место только гармонические колебания (рис. 3.12), частота которых

$$\omega_{10} = \sqrt{2|h|}. \quad (3.64)$$

Это выражение совпадает с результатом работы [Буллаф и др., 1983], где впервые была получена частота колебаний  $4\pi$ -воблера в отсутствие затухания.

Произведем оценки, переходя от безразмерной частоты к размерной

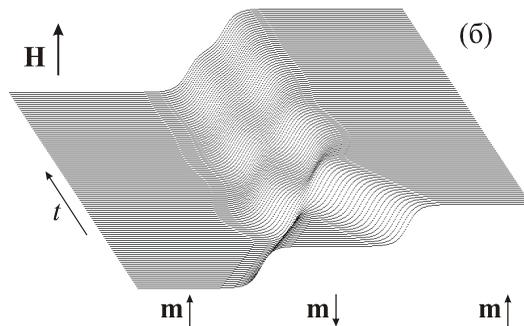
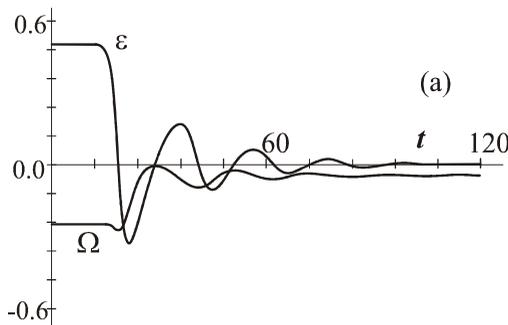
$$\omega_{4\pi}^{FM} = \omega_1 \omega_{FM},$$

где

$$\omega_{FM} = 2\gamma \sqrt{K_p(2\pi M_0^2 + |K_u|) / M_0} -$$

частота однородного ферромагнитного резонанса. Ее можно записать в виде

$$\omega_{4\pi}^{FM} = \frac{2\gamma}{M_0} \left( (2\pi M_0^2 + |K_u|) \left( M_0 H - \frac{1}{4} \alpha^2 (2\pi M_0^2 + |K_u|) \right) \right)^{1/2}. \quad (3.65)$$

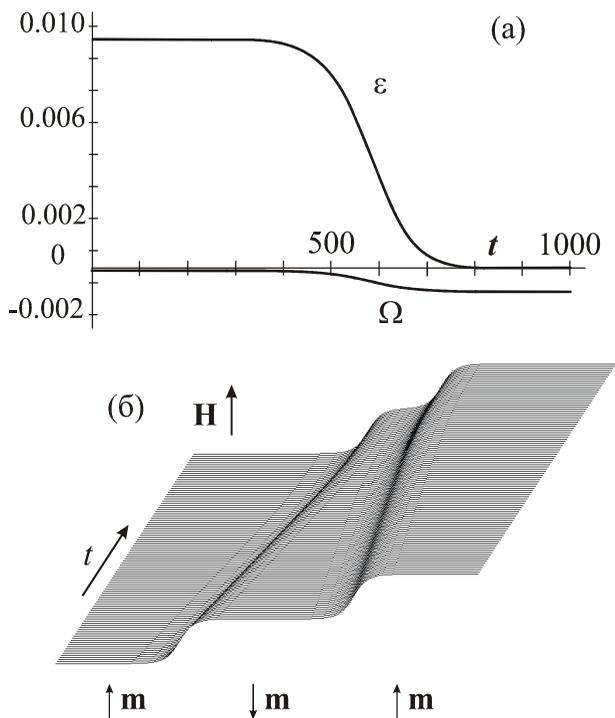


**Рис. 3.10.** Затухающие осцилляции двух  $180^\circ$ -градусных стенок при  $h = -0.05$ ,  $\beta = 0.1$ ,  $\varepsilon_0 = 0.5$ ,  $\Omega_0 = -\varepsilon_0^2 - 10^{-8}$

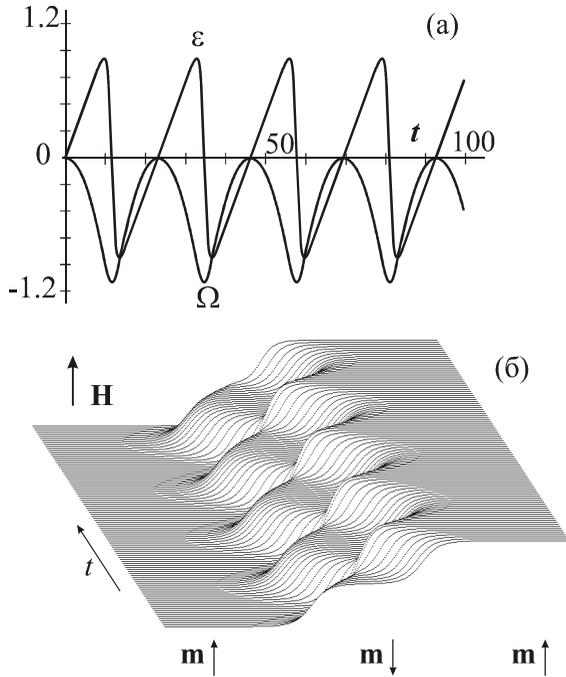
Отсюда следует, что в полях  $H > H_1^{FM}$  имеют место затухающие колебания, а при  $H < H_1^{FM}$  – аperiodическое движение взаимодействующих стенок, где

$$H_1^{FM} = \alpha^2 (2\pi M_0^2 + |K_u|) / 4M_0. \quad (3.66)$$

В ферромагнетиках типа «легкая плоскость» в полях, близких к полю  $H \sim 2\pi M_0$ , при  $\alpha < 1$  должны наблюдаться слабозатухающие колебания. Частота этих колебаний при  $|K_u| + 2\pi M_0^2 \sim 10^4$  Дж/м<sup>3</sup> составляет  $\omega_{4\pi}^{FM} \leq 10^{11}$  с<sup>-1</sup>. Критическое поле при  $M_0 \sim 10^2$  Гс,  $|K_u| + 2\pi M_0^2 \sim 10^4$  Дж/м<sup>3</sup>,  $\alpha = 0.1$  составляет  $H_1^{FM} \sim 1$  Э.



**Рис. 3.11.** Аperiodическое затухающее движение двух 180-градусных стенок при  $h = -0.001$ ,  $\beta = 0.1$ ,  $\epsilon_0 = 0.01$ ,  $\Omega_0 = -\epsilon_0^2 - 10^{-8}$



**Рис. 3.12.** Свободное колебательное движение двух взаимодействующих 180-градусных стенок при  $h = -0.1$ ,  $\Omega_0 = -0.1$ ,  $\epsilon_0 = 0.316$

Таким образом, численный анализ полученной динамической системы позволил установить возможность колебательного движения двух 180-градусных стенок относительно их общего центра и определить зависимость частоты колебаний от внешнего магнитного поля, а также показать существование критического поля, разделяющего режимы затухающего движения периодического и аperiodического характера.

Следует отметить, что излагаемый в настоящей книге подход исследования динамики локализованных магнитных неоднородностей предполагает отсутствие излучения спиновых волн. Оправданием использования приближенных методов служит то, что уравнения (3.46), (3.51) можно получить с помощью теории возмущений и основанной на методе обратной задачи рассеяния.

Отметим следующее. Как и в случае легкоосного ферромагнетика, динамика зародыша перемагничивания в форме бризера определяется величиной его начальной амплитуды. При амплитудах, меньших амплитуды критического зародыша, бризер намагниченности совершает нелинейные колебания, которые при наличии диссипации являются затухающими. Такие колебания зародыша перемагничивания имеют место при начальной частоте, большей некоторой критической, зависящей от поля как  $\sqrt{H}$ . В случае отсутствия затухания частота нелинейных колебаний зародыша перемагничивания возрастает с ростом поля. При наличии диссипации со временем амплитуда колебаний уменьшается, а частота возрастает и при малом затухании стремится к частоте ферромагнитного резонанса.

В постоянном магнитном поле, противоположном намагниченности ферромагнетика, пространственно локализованная одномерная магнитная неоднородность с начальной амплитудой, большей амплитуды критического зародыша, растет и распадается на две удаляющиеся друг от друга 180-градусные стенки, образуя домен с вектором намагниченности, параллельным полю. В отличие от случая легкоосного ферромагнетика, имеет место только один режим распада первоначальной магнитной неоднородности, которому соответствует поступательное движение доменных стенок. Время распада зародыша перемагничивания на 180-градусные стенки одинаковой полярности с противоположными топологическими зарядами возрастает с увеличением параметра затухания и уменьшается с ростом поля. Такие стенки в поле противоположного направления сближаются и аннигилируют. При заданном поле существует некоторое критическое значение параметра затухания, ниже которого доменные стенки одинаковой полярности, прежде чем аннигилировать, испытывают многократное рассеяние, сопровождающееся сменой полярности стенок.

Доменные стенки разной полярности с одинаковыми топологическими зарядами при сближении образуют 360-градусную доменную стенку, в которой 180-градусные стенки совершают колебания относительно их общего центра. С уменьшением напряженности магнитного поля частота колебаний уменьшается. В полях, много больших некоторого критического, зависящего от диссипации, такие колебания стенок являются слабозатухающими, а в полях, меньших критического, движение 180-градусных стенок носит характер аperiodического затухания.

## **ГЛАВА IV. ДИНАМИКА ТОПОЛОГИЧЕСКОГО МАГНИТНОГО СОЛИТОНА В ОБМЕННО-СВЯЗАННЫХ МАГНИТНЫХ СЛОЯХ**

Реальные ферромагнетики содержат различного типа пространственные неоднородности (дефекты), вызывающие изменение их основных физических свойств, таких как коэрцитивная сила, структура доменных границ, динамические характеристики и т.д. [Вонсовский, 1971; Браун, 1979]. Перестройка структуры доменной границы и ее динамического состояния в результате взаимодействия с дефектами может быть весьма существенной, поскольку происходит локальное изменение практически всех материальных характеристик магнетика: параметра обменного взаимодействия, намагниченности, констант магнитной анизотропии и др. Обычно влияние такой неоднородности на структуру и динамику доменных стенок исследуется с помощью моделирования зависимостей указанных параметров от пространственных координат [Браун, 1979]. К настоящему времени разработан богатый арсенал различных методов исследования изменений статических и динамических характеристик доменных стенок, обусловленных дефектами. К ним можно отнести теорию возмущений для солитонов, включая ее версию, основанную на обратной задаче рассеяния, численные и вариационные подходы, а также оригинальную аналитическую процедуру, предложенную Шамсутдиновым, с помощью которой удастся построить такой вид неоднородности материальных параметров, что соответствующее уравнение Эйлера становится интегрируемым.

Немаловажный интерес представляют неоднородности принципиально другого типа, влияние которых на структуру и динамическое состояние доменной границы еще мало изучено. Известно, что некоторые магнитные материалы могут обладать определенной текстурой с преимущественной ориентацией кристаллитов или, например, блочной (слоистой) структурой. В слоистой системе возникает дополнительная степень свободы, связанная с возможностью относительного движения намагниченностей в соседних слоях, которой обычно пренебрегают. Возросшее внимание к антимагнетонам в двухподрешеточных, а также в двухслойных ферромагнетиках вызывает повышенный интерес к исследованию влияния относи-

тельных колебаний намагниченностей на межслойной границе на динамику нелинейного объекта – топологического солитона.

Исследование особенностей динамического состояния топологического магнитного солитона, обусловленных его взаимодействием с «дефектом» в виде межслойной границы, с использованием хорошо разработанных методов теории возмущений для солитонов является непростой задачей.

Настоящая глава посвящена изучению динамики магнитного кинка в двухслойных ферромагнетиках с учетом относительного движения намагниченностей в слоях. Определяются условия прохождения кинков через межслойную границу и критическая скорость их поглощения, а также зависимость времени задержки кинка на дефекте от его скорости. Показывается, что при скорости движения, выше критической, межслойная граница, поглощая кинк, испускает антикинк. При этом используется давно сформировавшаяся в математической физике концепция «интегрируемого дефекта», где в соответствии с общей схемой полагается, что уравнение синус-Гордона, описывающее динамику магнитного топологического солитона, нарушается в каждой «дефектной» точке, принадлежащей межслойной границе. В этой точке записываются условия шивки, связывающие скачок полевой переменной и ее производных при прохождении через дефект.

#### 4.1. Основные уравнения. Граничные условия

Рассмотрим двухосный ферромагнетик, состоящий из двух взаимодействующих слоев с одинаковыми параметрами. Исходим из плотности энергии

$$F = F_1 + F_2 + F_{12}. \quad (4.1)$$

Здесь

$$F_i = A \left( \frac{\partial \mathbf{m}_i}{\partial z} \right)^2 - K_u m_{iz}^2 + K_p m_{iy}^2, \quad (i = 1, 2), \quad (4.2)$$

$$F_{12} = -A_{12}(z) \mathbf{m}_1 \mathbf{m}_2 + K_{12}(z) m_{1y} m_{2y}, \quad (4.3)$$

$$\mathbf{m}_i = \mathbf{M}_i / M_0, \quad \mathbf{M}_i^2 = M_0^2,$$

где  $M_0 = |\mathbf{M}_i|$  – намагниченность насыщения;  $A, K_u, K_p$  – параметры неоднородного обменного взаимодействия и магнитной анизотропии в слоях;  $A_{12}(z), K_{12}(z)$  – параметры межслойного обменного взаимодействия. Каждый из слоев будем считать двухосным ферромагнетиком с анизотропной легкой плоскостью, параллельной плоскости  $xu$ , что имеет место при

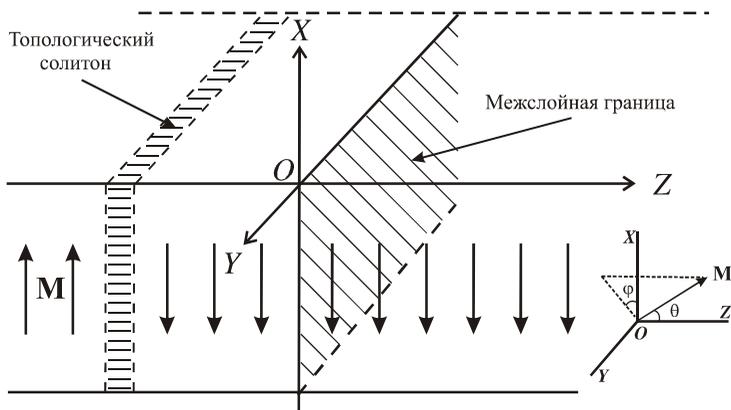
$$K_u < 0, |K_u| \gg K_p > 0. \quad (4.4)$$

В этом случае ось легкого намагничивания совпадает с осью  $Ox$  (рис. 4.1). Считая энергию взаимодействия между слоями отличной от нуля только в тонком приповерхностном слое, сравнимым по толщине с межатомными расстояниями, полагаем

$$A_{12}(z) = A_{12} \delta\left(\frac{z}{\delta_0}\right), \quad K_{12}(z) = K_{12} \delta\left(\frac{z}{\delta_0}\right), \quad (4.5)$$

где  $\delta(z/\delta_0)$  – дельта-функция Дирака,  $\delta_0 = \sqrt{A/K_p}$  – характерный размер неподвижного кинка вдали от границы слоев. Подробно рассмотрим случай ферромагнитного взаимодействия между слоями ( $A_{12} > 0$ ). В дальнейшем исследуем случай

$$|K_u| \gg K_p, A_{12} > K_{12} > 0. \quad (4.6)$$



**Рис. 4.1.** Бесконечный двухслойный ферромагнетик, разделенный плоской бесконечно тонкой межслойной границей. Далее в тексте проведено переобозначение  $z/\delta_0 \rightarrow x$

Динамику намагниченности в невзаимодействующих слоях можно исследовать, исходя из уравнения Ландау–Лифшица:

$$\dot{\mathbf{M}}_i = -\gamma[\mathbf{M}_i, \mathbf{H}_{eff}^{(i)}] \quad (i = 1, 2), \quad (4.7)$$

$$\mathbf{H}_{eff}^{(i)} = -\frac{\delta W}{\delta \mathbf{M}_i}, \quad W = \int F dz, \quad (4.8)$$

где  $\gamma$  – гиромагнитное отношение. Введем угловые переменные

$$\mathbf{M}_i = M_0(\sin \theta_i \cos \varphi_i, \sin \theta_i \sin \varphi_i, \cos \theta_i) \quad (i = 1, 2),$$

где  $\theta_i, \varphi_i$  – полярные и азимутальные углы вектора намагниченности  $\mathbf{M}_i$  в слоях. Пользуясь условием (4.4), можно положить

$$\theta_i = \frac{\pi}{2} + v_i, \quad |v_i| = |v_i(z, t)| \ll 1, \quad \varphi_i = \varphi_i(z, t). \quad (4.9)$$

При этом уравнения (4.7) можно переписать в виде

$$u_{tt}^{\pm} - u_{xx}^{\pm} + \sin u^{\pm} = 0. \quad (4.10)$$

Здесь

$$u^- = 2\varphi_1(x \leq 0, t), \quad u^+ = 2\varphi_2(x \geq 0, t) \quad (4.11)$$

и произведена замена  $z/\delta_0 \rightarrow x$ ,  $tc/\delta_0 = t\omega_0 \rightarrow t$ , где

$$c = \frac{2\gamma}{M}\sqrt{A|K_u|}, \quad \omega_0 = \frac{2\gamma}{M}\sqrt{K_p|K_u|}. \quad (4.12)$$

Поверхностная плотность энергии равна

$$W_0 = \int_{-\infty}^0 F_1 dz + \int_0^{\infty} F_2 dz = \frac{1}{8}\sigma_w^0(H_0^- + H_0^+), \quad (4.13)$$

$$H_0^- = \int_{-\infty}^0 \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u^-}{\partial t} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u^-}{\partial x} \right)^2 + (1 - \cos u^-) \right] dx,$$

$$H_0^+ = \int_0^{\infty} \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u^+}{\partial t} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u^+}{\partial x} \right)^2 + (1 - \cos u^+) \right] dx,$$

где  $\sigma_w = 4\sqrt{AK_p}$  – энергия неподвижного топологического солитона ( $2\pi$ -кинка) внутри слоев. Поверхностную энергию взаимодействия между

слоями при выполнении условия (4.6) можно представить следующим образом:

$$W_{12} = \int_{-\infty}^{+\infty} F_{12} dz = \frac{1}{8} \sigma_w H_{12},$$

$$H_{12} = -2a \cos \frac{u^-(0) + u^+(0)}{2} - 2e \cos \frac{u^-(0) - u^+(0)}{2}, \quad (4.14)$$

где

$$a = K_{12} / (2K_p), \quad e = (2A_{12} - K_{12}) / (2K_p). \quad (4.15)$$

Отметим, что при параллельной ориентации намагниченностей в слоях при ферромагнитном взаимодействии между слоями ( $u^-(0) = u^+(0) = 2\pi n$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ ) межслойная граница обладает минимальной энергией  $H_{12}$ , а при антипараллельной ( $u^-(0) = 2\pi n$ ,  $u^+(0) = 2\pi(n+1)$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ ) – максимальной энергией. Сначала определим величину критической скорости  $2\pi$ -кинка, падающего на межслойную границу, необходимую для перевода межслойной границы («дефекта») из состояния с минимальной энергией в состояние с максимальной энергией. Суммарная энергия изолированного  $2\pi$ -кинка

$$u^- = 4 \operatorname{arctg} \left( \exp \frac{x - Vt - x_0^-}{\sqrt{1 - V^2}} \right)$$

и дефекта с параллельной ориентацией намагниченностей равна

$$W_1 = \frac{\sigma_w}{8} (H_0^- + H_{12}) = \frac{\sigma_w}{8} \left[ \frac{8}{\sqrt{1 - V^2}} - 2(a + e) \right]. \quad (4.16)$$

Энергия дефекта с антипараллельной ориентацией намагниченностей определяется выражением

$$W_2 = \frac{\sigma_w}{4} (a + e) = \frac{\sigma_w}{4} \frac{A_{12}}{K_p}. \quad (4.17)$$

Из условия равенства значений энергии  $W_1 = W_2$  можно определить величину критической скорости:

$$V_k = \left\{ 1 - \left( \frac{2}{a + e} \right)^2 \right\}^{1/2} = \left\{ 1 - \left( \frac{2K_p}{A_{12}} \right)^2 \right\}^{1/2}. \quad (4.18)$$

Заметим, что при выполнении условия  $a + e > 2$ , что соответствует случаю  $A_{12} > 2K_p$ , критическая скорость положительна, то есть  $V_k > 0$ .

Таким образом, при скорости падающего кинка, равной критической скорости  $V_k$ , должно происходить поглощение  $2\pi$ -кинка межслойной границей и, как следствие, ее переход в высокоэнергетическое (возбужденное) состояние с антипараллельной ориентацией намагниченностей.

Заметим, что в дальнейшем критическая скорость может служить определенным критерием правильности условий шивки решений  $u^-$  и  $u^+$  уравнения (4.10) на межслойной границе ( $x = 0$ ).

К уравнению (4.10), описывающему распространение солитона в слоях, следует дописать уравнения для величин  $u^\pm(x, t)$  на границе слоев. Для этого воспользуемся вариационным принципом:

$$\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = 0.$$

Функцию Лагранжа представим в виде

$$L = L_0^- + L_0^+ + L_{12}, \quad (4.19)$$

$$L_0^- = \int_{-\infty}^0 \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u^-}{\partial t} \right)^2 - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u^-}{\partial x} \right)^2 - (1 - \cos u^-) \right] dx, \quad (4.20)$$

$$L_0^+ = \int_0^{\infty} \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u^+}{\partial t} \right)^2 - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u^+}{\partial x} \right)^2 - (1 - \cos u^+) \right] dx, \quad (4.21)$$

$$L_{12} = \frac{\rho}{2} \left( u^-(0, t) \frac{\partial u^+(0, t)}{\partial t} - u^+(0, t) \frac{\partial u^-(0, t)}{\partial t} \right) - H_{12}, \quad (4.22)$$

где  $\rho$  – неопределенный параметр. Выбор  $L_{12}$  в виде (4.22) согласуется с положением, что разложение функции Лагранжа по  $u_i$  для магнитных переменных в общем случае должно начинаться с линейного члена [Туров и др., 2001].

Из условия экстремума функции действия  $S$ , наряду с уравнением (4.10), следуют еще два уравнения в точке  $x = 0$ :

$$\begin{aligned} \rho u_t^+(0, t) &= u_x^-(0, t) + \frac{\partial H_{12}}{\partial u^-(0, t)}, \\ \rho u_t^-(0, t) &= u_x^+(0, t) - \frac{\partial H_{12}}{\partial u^+(0, t)}. \end{aligned} \quad (4.23)$$

Эти уравнения представляют собой динамические условия сшивки, которые отличаются от ранее полученных из условия экстремума функционала энергии и достаточно широко используемых в литературе тем, что в них содержатся дополнительные слагаемые  $u_t^+$  и  $u_t^-$ . Наличие таких слагаемых можно установить и с помощью методов необратимой термодинамики (подхода Онсагера).

#### 4.2. Взаимодействие топологического солитона с межслойной границей

При падении волны на границу между слоями в общем случае имеет место ее прохождение, отражение, а также и поглощение. Рассмотрим случай отсутствия отраженных волн. Для уравнения синус-Гордона соответствующий потенциал в задаче рассеяния является безотражательным [Додд и др., 1988]. Закон дисперсии линейных волн в слоях, соответствующий непрерывному спектру, определяется выражением

$$\omega^2 = 1 + k^2. \quad (4.24)$$

Отраженная волна может отсутствовать при сохранении этого закона дисперсии и на границе между слоями. Это означает, что уравнения, определяющие  $u^-(x \leq 0, t)$ ,  $u^+(x \geq 0, t)$ , должны быть совместными. Линеаризуя уравнения (4.10) и (4.23), получим

$$\begin{aligned} u_{xx}^\pm - u_{tt}^\pm + u^\pm &= 0, \\ \rho u_t^-(0, t) &= \left. \frac{\partial u^+}{\partial x} \right|_{x=0} - b_1 u^+(0, t) + b_2 u^-(0, t), \end{aligned} \quad (4.25)$$

$$\rho u_i^+(0, t) = \frac{\partial u^-}{\partial x} \Big|_{x=0} - b_2 u^+(0, t) + b_1 u^-(0, t), \quad (4.26)$$

где  $b_1 = A_{12}/(2K_p)$ ,  $b_2 = (A_{12} - K_{12})/(2K_p)$ . В случае ортоферритов в (4.26) и далее следует произвести замену  $K_p \rightarrow K_{ac}$ .

Решение ищем в виде  $u^\pm = u_0^\pm \exp[i(kx - \omega t)]$ . Из уравнения (4.25) следует закон дисперсии, определяемый выражением (4.24). С другой стороны, из системы (4.25) следует, что

$$\begin{aligned} \rho^2 \omega^2 &= b_1^2 - b_2^2 + k^2, \\ b_1^2 - b_2^2 &= \frac{K_{12}}{4K_p^2} (2A_{12} - K_{12}) = ae. \end{aligned} \quad (4.27)$$

Требую сохранения закона дисперсии в точке  $x=0$ , получим искомое условие совместности:

$$\rho^2 = 1, \quad b_1^2 - b_2^2 = ae = 1.$$

Последнее условие накладывает ограничение на параметр  $A_{12}$ , которое выполняется при

$$A_{12} = A_{12}^0, \quad A_{12}^0 = \frac{1}{2K_{12}} (4K_p^2 + K_{12}^2). \quad (4.28)$$

С учетом найденного условия совместности (4.29), уравнения для величин  $u^\pm$  (4.25) на границе слоя при  $\rho=1$  принимают вид

$$\begin{aligned} u_i^-(0, t) &= u_x^+(0, t) - p(t) - g(t), \\ u_i^+(0, t) &= u_x^-(0, t) + p(t) - g(t), \end{aligned} \quad (4.29)$$

где

$$p(t) = a \sin \left( \frac{1}{2} (u^+(0, t) + u^-(0, t)) \right), \quad (4.30)$$

$$g(t) = a^{-1} \sin \left( \frac{1}{2} (u^+(0, t) - u^-(0, t)) \right). \quad (4.31)$$

Таким образом, задача исследования механизма прохождения солитонов через границу между слоями сводится к решению уравнения синус-Гордона (4.10) с учетом условий сшивки (4.29) на границе слоев  $x=0$ . Заметим, что условия сшивки в виде (4.23) переходят в (4.29) при  $e = a^{-1}$ .

Важно отметить, что полученные условия (4.29)–(4.31) совпадают с преобразованием Бэклунда, связывающим решения уравнения синус-Гордона в различных областях.

Задача взаимодействия солитона уравнения синус-Гордона с «дефектом», описываемая уравнениями (4.10) и преобразованием Бэклунда (4.29), исследовалась ранее и является вполне интегрируемой. Было показано, что при взаимодействии солитона с дефектом могут реализоваться три события: а) прохождение солитона через дефект, б) захват его дефектом и, наконец, в) превращение солитона в антисолитон. Рассмотрим условия реализации указанных событий в зависимости от величины скорости солитона и параметров межслойного взаимодействия.

Решение уравнения (4.10), соответствующее топологическому солитону, можно представить в виде

$$u^- = 4 \arctg(\exp \xi), \quad u^+ = 2\pi n + 4 \arctg(Y \exp \xi), \quad (4.32)$$

$$Y = \sigma \exp\left(\frac{x_0^- - x_0^+}{\sqrt{1-V^2}}\right), \quad \xi = \frac{x - Vt - x_0^-}{\sqrt{1-V^2}}, \quad (4.33)$$

где  $V$  – скорость,  $x_0^-$  – параметр, определяющий фазу солитона,  $Y$  – величина, связанная со сдвигом фазы солитона  $x_0^+ - x_0^-$ , возникающим в результате взаимодействия солитона с дефектом. В (4.32)  $n=0$  при ферромагнитном,  $n=1$  при антиферромагнитном взаимодействии между слоями.

При  $n=0$  условия сшивания (4.23) с учетом (4.32) и (4.33) после несложных преобразований можно привести к двум уравнениям:

$$\left( \frac{(1+V)}{\sqrt{1-V^2}}(1+Y) - (Y-1)e \right) (1+Y \exp(2\xi_0)) = 0, \\ \left( \frac{1-V}{\sqrt{1-V^2}}(Y-1) - (1+Y)a \right) (1-Y \exp(2\xi_0)) = 0, \quad (4.34)$$

где  $e = (2A_{12} - K_{12})/(2K_p) = a^{-1} + \Delta a_{12}$ ,  $\Delta a_{12} = (A_{12} - A_{12}^0)/K_p$ ,  $\xi_0 = \xi(x=0)$ .

При  $e = a^{-1}$  ( $\Delta a_{12} = 0$ ) уравнение (4.34) соответствует условиям сшивки в виде (4.29), то есть интегрируемому случаю. Тогда система уравнений (4.34) имеет решение

$$e^{-2\xi_0} = \sigma Y,$$

$$Y = \frac{\sqrt{1-V} + a\sqrt{1+V}}{\sqrt{1-V} - a\sqrt{1+V}}. \quad (4.35)$$

Здесь  $\sigma = 1$  при  $V < V_k$ ,  $\sigma = -1$  при  $V > V_k$ , где

$$V_k = \frac{1-a^2}{1+a^2}. \quad (4.36)$$

Анализ выражений (4.32) и (4.33) в точке сшивания  $x = 0$  с учетом (4.35) показывает, что  $\sigma = 1$  соответствует топологическому солитону,  $\sigma = -1$  – топологическому антисолитону.

В результате взаимодействия с дефектом солитон приобретает сдвиг фазы

$$x_0^+ - x_0^- = 2\xi_0 \sqrt{1-V^2} = -\sqrt{1-V^2} \ln \left( \sigma \frac{\sqrt{1-V} + a\sqrt{1+V}}{\sqrt{1-V} - a\sqrt{1+V}} \right). \quad (4.37)$$

В случае солитона при  $a \ll 1$ ,  $V \ll 1$  имеем

$$x_0^+ - x_0^- = -2a(1+V). \quad (4.38)$$

Видно, что сдвиг фазы, являясь отрицательным, увеличивается (по модулю) с ростом скорости.

В случае антисолитона ( $V > V_k$ ) при  $\sqrt{(1-V)/(1+V)} \ll a$  сдвиг фазы равен

$$x_0^+ - x_0^- = -2a^{-1}(1-V), \quad (4.39)$$

откуда следует, что с приближением скорости к предельной ( $V \rightarrow 1$ ), сдвиг фазы антисолитона уменьшается, приближаясь к нулю снизу.

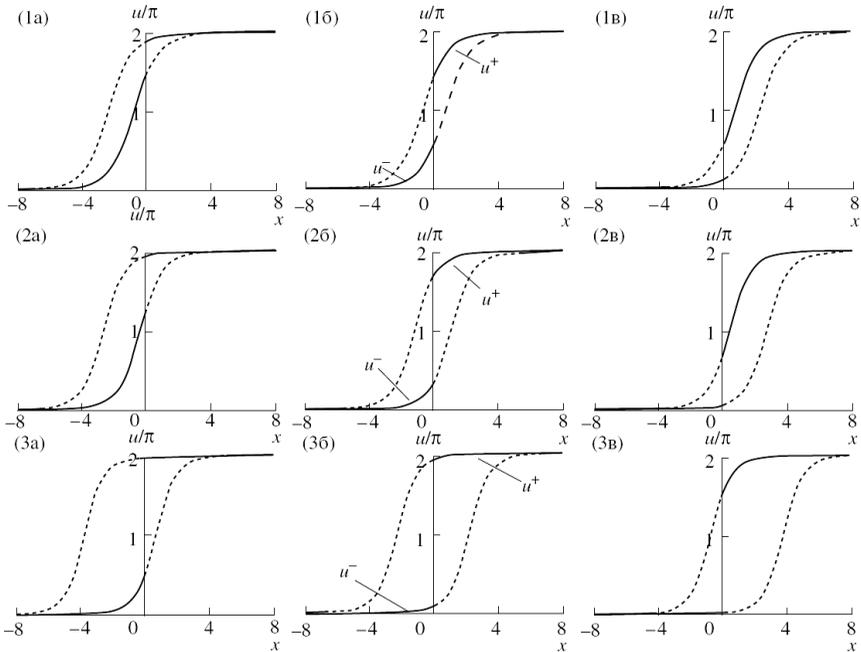
Момент времени  $t_0$ , когда падающий солитон ( $x \leq 0$ ) с фазой  $x_0^-$  (произвольным параметром в интегрируемом случае) оказывается в точке  $x = 0$ , определяется из уравнения

$$Vt_0 + x_0^- = -\xi_0 \sqrt{1-V^2}.$$

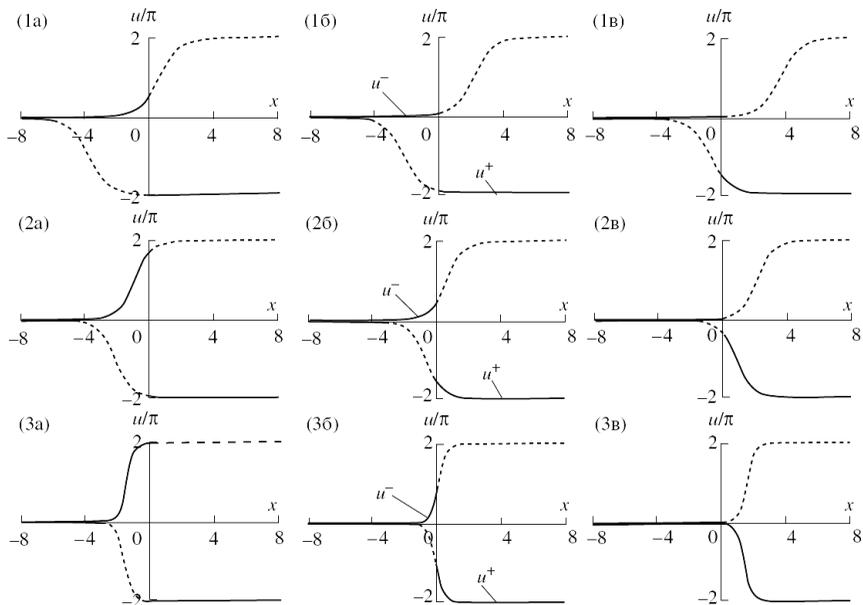
Легко рассчитать время задержки кинка при его прохождении через дефект:

$$\Delta t = \frac{1}{V} (x_0^- - x_0^+) = \frac{\sqrt{1-V^2}}{V} \left| \ln \left( \frac{\sqrt{1-V} + a\sqrt{1+V}}{\sqrt{1-V} - a\sqrt{1+V}} \right) \right|.$$

Оценим порядок времени задержки. При  $a \sim 0.1$ ,  $V \sim 0.1$ ,  $\Delta t \sim 2$ , что соответствует  $\Delta t = 2/\omega_0$  в размерных переменных ( $\omega_0$  определяется (4.12)). Таким образом, вдали от критической скорости время задержки порядка периода ферромагнитного резонанса. Время задержки кинка растет ( $\Delta t \rightarrow \infty$ ) с приближением скорости к критической ( $V \rightarrow V_k$ ), а также при  $V \rightarrow 0$ . На рис. 4.2–4.3 показана эволюция магнитного кинка (рис. 4.2) и антикинка (рис. 4.3) при  $a = e^{-1} = 0.5$ , откуда видно, что при приближении скорости  $V$  кинка к критической  $V_k$ , сдвиг фаз увеличивается. При уменьшении параметра  $a$ , сдвиг фаз уменьшается.



**Рис. 4.2.** Эволюция магнитного кинка (сплошная жирная линия), соответствующего решению (4.32) в интегрируемом случае в моменты времени: (а)  $t_0 - 1.5/V$ ; (б)  $t_0$ ; (в)  $t_0 + 1.5/V$ , при  $a = e^{-1} = 0.5$ , критической скорости  $V_k = 0.6$ , при скоростях, меньших критической, причем  $V$ : (1) 0.3; (2) 0.5; (3) 0.595



**Рис. 4.3.** Эволюция магнитного кинка (сплошная жирная линия), соответствующего решению (4.32) в интегрируемом случае в моменты времени: (а)  $t_0 - 1.5/V$ ; (б)  $t_0$ ; (в)  $t_0 + 1.5/V$ , при  $a = e^{-1} = 0.5$ , критической скорости  $V_k = 0.6$ , при скоростях, больших критической, причем  $V$ : (1) 0.605; (2) 0.75; (3) 0.95

Таким образом, солитон при скоростях  $V < V_k$  проходит через межслойную границу, приобретая отрицательный сдвиг фазы. Это указывает на отставание  $2\pi$ -кинка при прохождении через межслойную границу (задержку кинка дефектом) по сравнению со случаем, когда такой границы нет (см. рис. 4.2). Имеет место своеобразный эффект «переползания» солитона через дефект. С ростом скорости ( $V \rightarrow 1$ ) отставание (задержка) антисолитона уменьшается и стремится к нулю.

При приближении скорости к критической, т.е. при  $V \rightarrow V_k \pm 0$  сдвиг фазы растет по модулю,  $\xi_0 \rightarrow -\infty$ . Для выяснения физического смысла последствий такого поведения сдвига фазы исследуем энергию взаимодейст-

вующего  $2\pi$ -кинка с межслойной границей. Суммарная энергия, вычисленная с учетом (4.32) и (4.33), равна

$$\begin{aligned}
 W &= \frac{\sigma_w}{8} (H_0^- + H_0^+ + H_{12}) = \\
 &= \frac{\sigma_w}{8} \left\{ \frac{8}{\sqrt{1-V^2}} \left( 1 + \frac{1}{2} \cos \frac{u^+(0)}{2} - \frac{1}{2} \cos \frac{u^-(0)}{2} \right) - \right. \\
 &\quad \left. - 2a \cos \frac{u^+(0) + u^-(0)}{2} - 2e \cos \frac{u^+(0) - u^-(0)}{2} \right\}. \quad (4.40)
 \end{aligned}$$

При  $e = a^{-1}$  с учетом (4.25), (4.32) и (4.35) при  $V < V_k$  получим:

$$W = \frac{\sigma_w}{8} \left[ \frac{8(1 + \text{th} \xi_0)}{\sqrt{1-V^2}} + 2(a - a^{-1}) + 4a^{-1} \text{th}^2 \xi_0 \right]. \quad (4.41)$$

При  $\xi_0 \rightarrow -\infty$  ( $V \rightarrow V_k$ ) имеем

$$W = \frac{\sigma_w}{4} (a + a^{-1}).$$

Эта энергия равна энергии дефекта в высокоэнергетическом состоянии (см. (4.17)). Отсюда следует, что при скорости  $2\pi$ -кинка, равной  $V_k$ , межслойная граница, поглощая  $2\pi$ -кинк, переходит в высокоэнергетическое состояние с антипараллельной ориентацией намагниченностей. Следует отметить, что критическая скорость  $V_k$  (4.36), определяемая из динамических условий шивки (4.23), совпадает с критической скоростью, полученной из анализа энергии (см. (4.18)) при  $e = 1/a$ .

С другой стороны, как показывает анализ, величина критической скорости, определенная из условий шивки, отличается от критической скорости, полученной из анализа энергии.

При скоростях, больших критической  $V_k$ , превращение солитона в антисолитон при прохождении через межслойную границу можно интерпретировать следующим образом. Межслойная граница, поглощая кинк, испускает антикинк. Кинк и антикинк различаются направлениями вращения вектора намагниченности. Сдвиг фазы антикинка имеет отрицательный знак, который указывает на отставание (задержку) антикинка по сравнению с кинком в случае отсутствия межслойной границы. Отставание

кинка (антикинка) в многослойном (многоблочном) образце приведет к уменьшению средней скорости движения кинка.

Появление разрыва намагниченности внутри солитона на межслойной границе, поглощение кинка дефектом, а также испускание антикинка дефектом можно объяснить существованием новой степени свободы – относительным движением намагниченностей на межслойной границе.

Заметим, что проведенный анализ корректен при не очень сильном обменном взаимодействии между слоями, которое допускает относительное движение намагниченностей в слоях. В случае сильного изотропного обменного взаимодействия между слоями, когда  $e \approx A_{12} / K_p \gg 1$  ( $\sigma_w \ll 2\delta_0 A_{12}$ ), в модели уравнения синус-Гордона критическая скорость стремится к предельной ( $V_k \rightarrow 1$ ). В этой ситуации вместо динамических условий сшивки решений целесообразно использовать статические.

В завершение отметим, что в случае антиферромагнитного взаимодействия между слоями ( $A_{12} < K_{12} < 0$ ) в условиях сшивки (4.34) следует произвести замену  $e \rightarrow |e|$ ,  $a \rightarrow |a|$ . Все выводы, вытекающие из анализа условий сшивки (4.35), остаются справедливыми и в случае антиферромагнитного взаимодействия между слоями.

Анализ интегрируемого случая, реализующегося при некотором критическом значении параметра межслойного обменного взаимодействия, показывает, что при скорости движения кинка, ниже некоторой критической, топологический солитон проходит через межслойную границу, испытывая при этом отрицательный сдвиг фазы, означающий его отставание. По достижении кинком некоторой критической скорости происходит его поглощение межслойной границей и, как следствие, переход ее в возбужденное состояние. При скоростях, выше критической, межслойная граница, поглощая солитон, испускает антисолитон, меняя при этом направление вращения намагниченности на противоположное.

Все отмеченные выше особенности в поведении кинка обусловлены существованием в системе новой степени свободы, связанной с возможностью относительного движения намагниченностей в соседних слоях. Важной особенностью в динамике кинка является также его задержка во времени при преодолении межслойной границы. Время задержки зависит от скорости кинка и от параметров межслойного взаимодействия. Таким обра-

зом, наличие в образце межслойных границ может привести к уменьшению средней скорости движения магнитных кинков. Последнее обстоятельство может быть использовано для описания торможения доменных границ, наблюдаемое в редкоземельных ортоферритах с периодическими магнитными неоднородностями ростовой природы.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Bloch F. Zur theorie des austauschproblems und remanenzerscheinung der ferromagnetika // Ztschr. Phys. 1932. Bd 74, № 5/6. S. 295–335.
2. Landau L., Lifshitz E. Theory of dispersion of magnetic permeability in ferromagnetic bodies // Phys. Ztschr. Sowjetunion. 1935. Bd. 8, № 2. S. 153–159.
3. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. К теории дисперсии магнитной проницаемости ферромагнитных тел // Ландау Л.Д. Собр. тр. Т. 1. М.: Наука, 1969. С. 128–143.
4. Neel L. Some properties of boundaries between ferromagnetic domains // Canad. J. Phys. 1944. V. 25, №1. P. 1–20.
5. Куттель Ч. Физическая теория ферромагнитных областей самопроизвольной намагниченности // Физика ферромагнитных областей: Сб. ст. М.: ИЛ, 1951. С. 19–116.
6. Enz U. Die dynamik der blochschen wand // Helv. Phys. Acta. 1961. V. 37. S. 245–251.
7. Walker L.R. Quated by Dillon F. Dynamics of domain walls. In: Magnetism // Ed. By G.T. Rado, H. Suhl. New York: Pergamon press, 1963. V. 3. P. 451–465.
8. Ахиезер И.А., Боровик А.Е. К теории спиновых волн конечной амплитуды // ЖЭТФ. 1967. Т. 52, № 2. С. 508–513.
9. Ахиезер И.А., Боровик А.Е. О нелинейных спиновых волнах в ферромагнетиках и антиферромагнетиках // ЖЭТФ. 1967, Т. 52, № 5. С. 1332–1344.
10. Елеонский В.М., Кирова Н.Н., Кулагин Н.Е. О скорости движения доменных границ // ЖЭТФ. 1976. Т. 71, № 6. С. 2349–2355.
11. Елеонский В.М., Кирова Н.Н., Кулагин Н.Е. О предельных скоростях и типах волн магнитного момента // ЖЭТФ. 1978. Т. 74, № 5. С. 1814–1821.
12. Елеонский В.М., Кирова Н.Н., Кулагин Н.Е. Движение доменных границ во внешнем магнитном поле // ЖЭТФ. 1979. Т. 76, № 2. С. 705–710.
13. Елеонский В.М., Кирова Н.Н., Кулагин Н.Е. О магнитных солитонах, распространяющихся вдоль оси анизотропии // ЖЭТФ. 1979. Т. 29, № 10. С. 601–605.

14. *Бабич И.М., Косевич А.М.* Влияние магнитодипольного взаимодействия на динамику одномерного солитона намагниченности // Письма в ЖЭТФ. 1980. Т. 31, № 4. С. 224–227.

15. *Косевич А.М.* Нелинейная динамика намагниченности в ферромагнетиках. Динамические и топологические солитоны // ФММ. 1982. Т. 53, № 3. С. 420–446.

16. *Звездин А.К.* О динамике доменных границ в слабых ферромагнетиках // Письма в ЖЭТФ. 1979. Т. 29, № 10. С. 605–610.

17. *Барьяхтар В.Г., Иванов Б.А., Сукстанский А.Л.* Динамика доменных границ в редкоземельных ортоферритах // Письма в ЖЭТФ. 1979. Т. 5, № 14. С. 853–856.

18. *Барьяхтар В.Г., Иванов Б.А., Сукстанский А.Л.* Нелинейные волны и динамика доменных границ в слабых ферромагнетиках // ЖЭТФ. 1980. Т. 78, № 4. С. 1509–1522.

19. *Елеонский В.М., Кирова Н.Н., Кулагин Н.Е.* О точных решениях уравнений Ландау–Лифшица для слабых ферромагнетиков // ЖЭТФ. 1980. Т. 79, № 1(7). С. 321–332.

20. *Елеонский В.М., Кирова Н.Н., Кулагин Н.Е.* О точно решаемых моделях для двухподрешеточных магнетиков // ЖЭТФ. 1981. Т. 80, № 1. С. 357–363.

21. *Барьяхтар В.Г., Иванов Б.А., Четкин М.В.* Динамика доменных границ в слабых ферромагнетиках // УФН. 1985. Т. 146, № 3. С. 417–458.

22. *Барьяхтар В.Г., Соболева Т.К., Сукстанский А.Л.* Нелинейные волны намагниченности в антиферромагнетиках с неоднородным обменно-релятивистским взаимодействием // ФТТ. 1985. Т. 27, № 8. С. 2428–2434.

23. *Косевич А.М., Иванов Б.А., Ковалев А.С.* Нелинейные волны намагниченности. Динамические и топологические солитоны. Киев: Наукова думка, 1983. 192 с.

24. *Боровик А.Е.* N-солитонные решения нелинейного уравнения Ландау–Лифшица // Письма в ЖЭТФ. 1978. Т. 28, № 10. С. 629–932.

25. *Боровик А.Е., Робук В.Н.* Линейные «псевдопотенциалы» и законы сохранения для уравнения Ландау–Лифшица, описывающего нелинейную динамику ферромагнетика с одноосной анизотропией // ТМФ. 1981. Т. 46, № 3. С. 371–381.

26. *Sklyanin E.K.* On complete integrability of the Landay–Lifshitz equation. Leningrad, 1979. 32 p. (Preprint Academy of science of USSR. Leningrad Department Steklov Mathematical Institute; E–3).

27. *Елеонский В.М.* Солитоны в магнитных средах // Нелинейные волны: Самоорганизация. М.: Наука, 1983. С. 129–135.

28. *Четкин М.В., Де ла Кампа.* О предельной скорости движения доменной границы в слабых ферромагнетиках // Письма ЖЭТФ. 1978. Т. 27, № 3. С. 168–172.

29. *Браун У.Ф.* Микромагнетизм. М.: Наука, 1979. 160 с.

30. *Вонсовский С.В.* Магнетизм. М.: Наука, 1971. 1032 с.

31. *Hubert A., Schäfer R.* Magnetic domains. Analysis of magnetic microstructures // Berlin, Heidelberg, New York: Springer, 1998. 732 p.

32. *Зайкова В.А., Старцева И.Е., Филиппов Б.Н.* Доменная структура и магнитные свойства электротехнических сталей. М.: Наука, 1992. 272 с.

33. *Рандошкин В.В., Червоненкис А.Я.* Прикладная магнитооптика. М.: Энергоатомиздат, 1990. 320 с.

34. *Кандаурова Г.С.* Новые явления в низкочастотной динамике коллектива магнитных доменов // УФН. 2002. Т. 172, № 10. С. 1165–1187.

35. *Хуберт А.* Теория доменных стенок в упорядоченных средах. М.: Мир, 1977. 308 с.

36. *Лисовский Ф.В.* Физика цилиндрических магнитных доменов. М.: Сов. радио, 1979. 189 с.

37. *Малоземов А., Слонзуски Дж.* Доменные стенки в материалах с цилиндрическими магнитными доменами. М.: Мир, 1982. 382 с.

38. *Филиппов Б.Н., Танкеев А.П.* Динамические эффекты в ферромагнетиках с доменной структурой. М.: Наука, 1987. 216 с.

39. *Фарзудинов М.М.* Физика магнитных доменов в антиферромагнетиках и ферритах. М.: Наука, 1981. 156 с.

40. *Фарзудинов М.М.* Спиновые волны в ферро- и антиферромагнетиках с доменной структурой. М.: Наука, 1988. 240 с.

41. *Привороцкий И.А.* Термодинамическая теория ферромагнитных доменов // УФН. 1972. Т. 108, № 1. С. 43–79.

42. *Барьяхтар В.Г., Богданов А.Н., Яблонский Д.А.* Физика магнитных доменов // УФН. 1988. Т. 156, № 1. С. 47–89.

43. Волков В.В., Боков В.А. Динамика доменной стенки в ферромагнетиках // ФТТ. 2008. Т. 50, № 2. С. 193–219.

44. Кандаурова Г.С., Оноприенко Л.Г. Основные вопросы теории магнитной доменной структуры. Свердловск: УрГУ, 1977. 122 с.

45. Кандаурова Г.С., Оноприенко Л.Г. Доменная структура магнетиков. Основные вопросы микромагнетики. Свердловск: УрГУ, 1986. 136 с.

46. Филиппов Б.Н. Динамика доменных границ и доменов в магнитно-упорядоченных веществах. Учеб. пособие. Свердловск: УрГУ, 1989. 120 с.

47. Ахиезер А.И., Барьяхтар В.Г., Пелетминский С.В. Спиновые волны. М.: Наука, 1967. 368 с.

48. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Электродинамика сплошных сред. М.: Наука, 1992. 664 с.

49. Белов К.П., Звездин А.К., Кадомцева А.М., Левитин Р.З. Ориентационные переходы в редкоземельных магнетиках. М.: Наука, 1979. 318 с.

50. Тикадзуми С. Физика ферромагнетизма. Магнитные характеристики и практические применения. М.: Мир, 1987. 419 с.

51. Круичка С. Физика ферритов и родственных им магнитных окислов. Т. 2. М.: Мир, 1976. 504 с.

52. Туров Е.А., Колчанов А.В., Меньшенин В.В., Мирсаев И.Ф., Николаев В.В. Симметрия и физические свойства антиферромагнетиков. М.: Физматлит, 2001. 560 с.

53. Шамсутдинов М.А., Ломакина И.Ю., Назаров В.Н., Харисов А.Т., Шамсутдинов Д.М. Ферро- и антиферромагнитодинамика. Нелинейные колебания, волны и солитоны. М: Наука, 2009. 456 с.

54. Гуревич А.Г., Мелков Г.А. Магнитные колебания и волны. М.: Физматлит, 1994. 464 с.

55. Додд Р., Эйлбек Дж., Гиббон Дж., Моррис Х. Солитоны и нелинейные волновые уравнения. М.: Мир, 1988. 694 с.

56. Буллаф Р., Кодри Ф., Гиббс Г. Двойное уравнение sine-Gordon: система, имеющая физические приложения / Солитоны. Под ред. Р. Буллафа, Ф. Кодри. М.: Мир, 1983. С. 123–162.

# СОДЕРЖАНИЕ

<b>Введение</b> .....	3
<b>Глава I. Структура и динамика доменных границ</b> .....	4
1.1. Эффективное магнитное поле .....	7
1.2. Уравнение движения для вектора намагниченности .....	14
1.3. Доменные границы Блоха и Нееля .....	20
1.4. Динамика доменной границы в одноосном ферромагнетике ...	27
1.5. Динамика доменной границы в легкоплоскостном ферромагнетике .....	39
<b>Глава II. Структура и динамика зародышей перемагничивания в     легкоосном ферромагнетике</b> .....	48
2.1. Структура одномерных зародышей перемагничивания .....	51
2.2. Интегралы движения. Законы изменения энергии и числа спиновых отклонений .....	57
2.3. Динамические и топологические магнитные солитоны .....	60
2.4. Вывод уравнений эволюции параметров магнитных солитонов	65
2.5. Влияние внешнего магнитного поля и диссипации на характеристики солитонов .....	69
2.6. Распад зародыша перемагничивания на две 180-градусные стенки одинаковой полярности .....	76
2.7. Взаимодействие двух 180-градусных стенок одинаковой полярности .....	84
2.8. Динамика 360-градусной доменной стенки в ферромагнетике .	88
2.8.1. Основные уравнения .....	88
2.8.2. Малые колебания взаимодействующих 180-градусных доменных стенок .....	91
2.8.3. Динамическое преобразование структуры стенок .....	93
<b>Глава III. Структура и динамика зародыша перемагничивания и двух     взаимодействующих 180-градусных стенок в легкоплоскостном     ферромагнетике</b> .....	102
3.1. Уравнение эволюции параметров локализованных магнитных неоднородностей .....	102
3.2. Динамика локализованной магнитной неоднородности .....	110

3.3. Взаимодействующие доменные стенки одинаковой полярности . . . . .	117
3.4. Взаимодействующие доменные стенки разной полярности. 360-градусная доменная стенка . . . . .	121
<b>Глава IV. Динамика топологического магнитного солитона в обменно-связанных магнитных слоях . . . . .</b>	<b>127</b>
4.1. Основные уравнения. Граничные условия . . . . .	128
4.2. Взаимодействие топологического солитона с межслойной границей . . . . .	133
<b>Литература . . . . .</b>	<b>142</b>

*Научное издание*

**Международная школа-конференция для студентов, аспирантов  
и молодых ученых «Фундаментальная математика и ее  
приложения в естествознании»**

**Шамсутдинов Миниахат Асгатович  
Назаров Владимир Николаевич  
Харисов Анвар Тафкильевич**

**Введение в теорию доменных стенок и  
солитонов в ферромагнетиках**

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ

*Редактор А.Ф. Файзуллина  
Корректор А.И. Николаева*

*Лицензия на издательскую деятельность  
ЛР № 021319 от 05.01.99 г.*

Подписано в печать  
Бумага офсетная. Формат 60x84/16. Гарнитура Times.  
Отпечатано на ризографе. Усл. печ. л. . Уч.-изд. л.  
Тираж . Изд. № . Заказ .  
Цена договорная.

*Редакционно-издательский центр  
Башкирского государственного университета  
450074, РБ, г.Уфа, ул.З.Валиди, 32.*