

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ  
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ГОУ ВПО БАШКИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

МЕЖДУНАРОДНАЯ  
ШКОЛА-КОНФЕРЕНЦИЯ  
ДЛЯ СТУДЕНТОВ, АСПИРАНТОВ  
И МОЛОДЫХ УЧЕНЫХ  
«ФУНДАМЕНТАЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА  
И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ В ЕСТЕСТВОЗНАНИИ»

**Сборник трудов  
Том I. Математика**

Научные статьи

Уфа 2010

УДК 51+ 54  
ББК 22.1+24  
Ф94

Сборник издан при финансовой поддержке РФФИ (проект № 10-01-06828-моб\_г) и за счет внебюджетных средств БашГУ.

*Редакционная коллегия:*

д-р хим. наук, проф. Р.Ф. Талипов (проректор по науке БашГУ);  
д-р физ.-мат. наук, проф. Б.Н. Хабибуллин (*отв. редактор*);  
канд. физ.-мат. наук, доц. В.В. Картак

Международная школа-конференция для студентов,  
Ф94 аспирантов и молодых ученых «Фундаментальная математика  
и ее приложения в естествознании»:  
Сборник трудов. Том 1. Математика.– Уфа: , 2010.-105с.

В сборнике трудов помещены научные статьи участников международной школы-конференции для студентов, аспирантов и молодых ученых «Фундаментальная математика и ее приложения в естествознании». Научные статьи воспроизводятся с представленных авторами оригиналов.

УДК 51+54  
ББК 22.1+24

@Коллектив авторов, 2010  
@БашГУ, 2010

УДК 519.25

## МАРКОВСКАЯ МОДЕЛЬ ЗАБОЛЕВАНИЙ ОРГАНОВ КРОВООБРАЩЕНИЯ

Абдюшева С. Р., Шамуратова С. Ф. (Уфа, БашГУ)

### Введение

Рассматривается задача построения математической модели, описывающей состояния человека с учетом возможности заболевания органов кровообращения.

Для описания различных состояний человека и возможных переходов из одного состояния в другое подходит схема марковского процесса. Дадим определение этого понятия. Случайный процесс, протекающий в системе  $S$ , называется марковским процессом (или "процессом без последствия"), если он обладает следующим свойством:

Для каждого момента времени  $t_0$  вероятность любого состояния системы в будущем (при  $t > t_0$ ) зависит только от ее состояния в настоящем (при  $t = t_0$ ) и не зависит от того, когда и каким образом система пришла в это состояние (то есть как развивался процесс в прошлом). Другими словами, в марковском случайном процессе будущее развитие его зависит только от настоящего состояния и не зависит от "предыстории" процесса.

Для состояний здоровья человека это допущение является правомерным в случае, если рассматривается достаточно небольшой интервал времени. Например, можно допустить, что характеристики состояний не меняются в течение года.

### § 1. Постановка задачи и основные формулы

Была поставлена задача построить математическую модель состояний человека и рассчитать вероятности нахождения человека в описанных состояниях.

В качестве исходных параметров выступают интенсивности перехода из состояния в состояние  $\lambda_{ij}$ . Эти интенсивности заранее, как правило, неизвестны. В данной задаче интенсивности рассчитаны по данным, взятым из [www.medstat.ru](http://www.medstat.ru).

В качестве примера изменения состояний человека была взята возможность заболеваний органов кровообращения. Граф состояний системы изображен на Рис. 1.

Построенная модель имеет 4 состояния:

$S_1$  - здоров;

$S_2$  - диагноз поставлен впервые;

$S_3$  - болен;

$S_4$  - умер.

Уравнения Колмогорова для данной модели будут выглядеть так:

$$\frac{dp_1(t)}{dt} = -(\lambda_{12} + \lambda_{14})p_1(t) + \lambda_{31}p_3(t)$$

$$\frac{dp_2(t)}{dt} = -\lambda_{23}p_2(t) + \lambda_{12}p_1(t)$$

$$\frac{dp_3(t)}{dt} = -(\lambda_{31} + \lambda_{34})p_3(t) + \lambda_{23}p_2(t)$$

$$\frac{dp_4(t)}{dt} = -\lambda_{14}p_1(t) + \lambda_{34}p_3(t)$$

$p_1(t)$ - вероятность того, что в момент времени  $t$  человек будет находиться в состоянии  $S_1$ ;

$p_2(t)$ - вероятность того, что в момент времени  $t$  человек будет находиться в состоянии  $S_2$ ;

$p_3(t)$ - вероятность того, что в момент времени  $t$  человек будет находиться в состоянии  $S_3$ ;

$p_4(t)$ - вероятность того, что в момент времени  $t$  человек будет находиться в состоянии  $S_4$ .

Очевидно, что для любого момента времени  $t$  сумма вероятностей состояний равна 1:  $\sum_{i=1}^n p_i(t) = 1$ , т.к. события, состоящие в том, что в момент  $t$  система находится в состояниях  $S_1, S_2, S_3, S_4$  несовместны и образуют полную группу.

Начальные условия берутся в зависимости от того, каково было начальное состояние системы  $S$ . Например, если в начальный

момент времени (при  $t=0$ ) система  $S$  находилась в состоянии  $S_1$ , то надо принять начальные условия:  $p_1=1, p_2=p_3=p_4=0$ . Так как вероятности  $p_1, p_2, p_3, p_4$  образуют полную группу событий и, следовательно,  $p_1+p_2+p_3+p_4=1$  для всех  $t$ , то любую из этих вероятностей можно выразить через три остальных.

При заданных значениях эта система дифференциальных уравнений может быть решена с помощью метода Рунге-Кутты.

Формулы для вычисления интенсивностей:

$$\lambda_{12} = \frac{B(t)}{100000}$$

$$\lambda_{14} = \frac{C(t)}{100000}$$

$$\lambda_{23} = \frac{A(t)-B(t)}{100000}$$

$$\lambda_{31} = \frac{A(t-1)-(A(t)-B(t))-C_1(t)}{100000}$$

$$\lambda_{34} = \frac{C_1(t)}{A(t)}$$

где:  $A(t)$  - болеющие в момент  $t$ ,  $B(t)$  - заболевшие впервые в момент  $t$ ,  $C(t)$  - умершие в момент  $t$ ,  $C_1(t)$  - умершие от болезни в момент  $t$ . Значения  $A(t), B(t), C(t), C_1(t)$  были получены из сайта [www.medstat.ru](http://www.medstat.ru).

## § 2. Результаты расчетов

Полученные значения интенсивностей для болезней системы кровообращения показаны на Рис. 2.

Графики вероятностей нахождения человека в описанных состояниях изображены на Рис. 3.

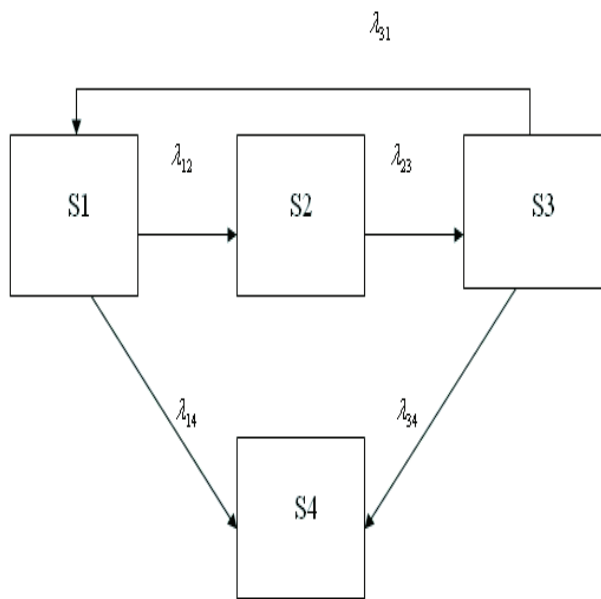


Рис 1. Граф состояний системы.

Год	$\lambda_{12}$	$\lambda_{14}$	$\lambda_{23}$	$\lambda_{31}$	$\lambda_{34}$
1992	0,01148	0,01216	0,08268	0,000563	0,06861
1993	0,01186	0,01446	0,08475	0,001724	0,07959
1994	0,01288	0,01566	0,08959	0,00136	0,08171
1995	0,01326	0,01496	0,09318	0,001393	0,07422
1996	0,01404	0,01418	0,09711	0,001753	0,06822
1997	0,01438	0,01376	0,09995	0,003686	0,06569
1998	0,01528	0,01361	0,10446	0,002383	0,06254
1999	0,01623	0,01472	0,11576	0,00418	0,06180
2000	0,01718	0,01535	0,12182	0,001673	0,06111
2001	0,01812	0,01564	0,12885	0,001464	0,05913
2002	0,01957	0,01628	0,13658	0,001257	0,05847

Рис 2. Таблица значений интенсивностей.

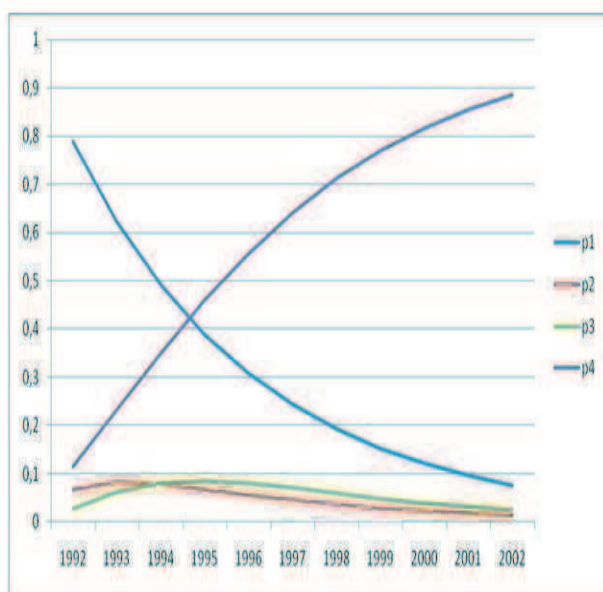


Рис 3. Графики вероятностей.

#### ЛИТЕРАТУРА

- [1] АБДЮШЕВА С. Р., ЛЕБЕДЕВА С. Л., СПИВАК С. И. Исследование операций в приложениях. Уфа , 1999 г.
- [2] АБДЮШЕВА С. Р., ЛЕБЕДЕВА С. Л., СПИВАК С. И. Исследование операций. Марковские случайные процессы. Уфа, 1999 г.
- [3] ГИХМАН И. Н., СКОРОХОДОВ А. В., ЯДРЕНКО М. Н. Теория вероятностей и математическая статистика. Киев, Высшая школа, 1972 г.
- [4] САМАРСКИЙ А. А., ГУЛИН А. В. 4. САМАРСКИЙ А. А., ГУЛИН А. В., "Численные методы". Москва, Наука, 1989г.
- [5] [www.medstat.ru](http://www.medstat.ru)



УДК 330+519.86

АНАЛИЗ ИЗМЕНЕНИЙ В ЦЕНООБРАЗОВАНИИ НА РЫНКЕ  
ЖИЛЬЯ Г.УФЫ В РЕЗУЛЬТАТЕ ВЛИЯНИЯ  
ЭКОНОМИЧЕСКОГО КРИЗИСА

**Азнабаев А. М. (Уфа, БашГУ)**

На сегодняшний день в качестве эффективного инструмента для исследования ценообразования на рынке жилой недвижимости можно рассматривать регрессионный анализ. Суть использования данного метода заключается в представлении рынка жилья в виде комплексной математической модели, описывающей влияние на конечную стоимость объекта жилья основных ценообразующих факторов.

Среди таких факторов выделяют следующие:

- количество комнат - 1, 2, 3 и 4;
- материал стен - панель, кирпич, монолит;
- этаж квартиры - первый, не крайний;
- уровень отделки (ремонта) квартиры;
- площадь квартиры - отклонение площади текущего объекта от площади базового и другие.

Степень влияния представленных факторов оценивается относительно базового объекта - объекта с типичными характеристиками, который часто можно встретить в любой анализируемой выборке. Примером такого объекта может служить следующий: однокомнатная квартира обычной планировки, в типичном панельном девятиэтажном доме, не на крайнем этаже, со стандартной площадью, обычной отделкой и т.п.

Ранее нами было проведено комплексное исследование рынка жилья г. Уфы за период с конца августа по октябрь 2007 г. (с

описанием методики проведения исследования) [1]. Данный период являлся предкризисным, и рынок соответственно характеризовался высокими и стабильными ценами на квартиры, которые консолидировались примерно на одном уровне с лета 2007 г. вплоть до начала 2008 г.

Всего в рамках исследования были построены модели по 7 районам г. Уфы, наиболее удачной и репрезентативной из которых явилась модель по микрорайону Сипайлово. Полученные по моделям результаты позволили определить сложившуюся на тот момент общую конъюнктуру рынка, описать “количественно” влияние на стоимость объектов жилья основных ценообразующих факторов, а также выявить некоторые закономерности и тенденции ценообразования на рынке в целом.

Экономический кризис 2008-2009 гг. значительно повлиял на рынок жилой недвижимости. Ввиду резкого снижения спроса на квартиры при фактическом сохранении имевшегося на тот момент предложения, произошло так называемое “охлаждение” рынка - изменился как общий уровень цен, так и активность на рынке.

Анализ рынка показал, что с начала 2010 г. на рынке жилья стала наблюдаться постепенная консолидация - спрос начал расти и выравниваться, разброс цен сократился. При этом видно, что по сравнению с предкризисным периодом, помимо абсолютных ценовых уровней, предположительно произошли изменения и в структуре ценообразования. К примеру, наряду с общим снижением стоимости квартир, трехкомнатные квартиры подешевели заметно сильнее, нежели однокомнатные. Таким образом, направление влияния основных тенденций сохранилось, однако степень данного влияния изменилась.

В рамках проведения нового исследования рынка жилой недвижимости г. Уфы, была построена предварительная модель по району Сипайлово в период за апрель-май 2010 г.

Ввиду сказано выше, целью работы является выявление про-

изошедших на рынке жилья г. Уфы изменений под влиянием экономического кризиса с помощью сравнения “докризисных” результатов по району Сипайлово с предварительными результатами нового “посткризисного” исследования по этому же району.

Ниже приведена сравнительная таблица результатов по обеим моделям, включающим в себя стоимость 1 м<sup>2</sup> базовых объектов, а так же корректировок, описывающих влияние следующих основных ценообразующих факторов: количество комнат, материал стен/тип дома, изменение площади квартиры и др.

Сравнительные результаты моделей по микрорайону Сипайлово за 2007 г. и за 2010 г.

Параметр		Значение коэффициентов			
		Август – октябрь 2007г.		Апрель – май 2010г.	
Стоимость 1м <sup>2</sup> базового объекта		53 280 рублей		44 658 рублей	
<b>Кол-во комнат:</b>		Коэффициент	Коррект-ка	Коэффициент	Коррект-ка
2		0,979	-2,13%	0,944	-5,63%
3		0,876	-12,36%	0,822	-17,80%
4		0,911	-8,90%	0,933	-6,65%
<b>Материал стен кирпич:</b>					
1		1,071	7,08%	1,041	4,12%
2		1,074	7,38%	1,040	3,98%
3		1,102	10,16%	1,141	14,15%
<b>Изменение площади:</b>					
Панель	1	0,990	-0,97%	0,986	-1,36%
	2	0,994	-0,56%	0,993	-0,72%
	3	0,997	-0,27%	0,997	-0,28%
	4	-	-	-	-
Кирпич	1	0,994	-0,64%	0,989	-1,13%
	2	0,997	-0,33%	0,996	-0,43%
	3	0,998	-0,21%	-	-
	4	-	-	0,999	-0,14%
<b>1 этаж:</b>		0,976	-2,43%	0,969	-3,09%

В качестве базового объекта выступала квартира со следую-

щими характеристиками: однокомнатная в панельном доме 80-90-х гг. постройки, стандартной планировки с площадью 34 м<sup>2</sup>, не на первом этаже, с обычным ремонтом. Полученные результаты показали, что в целом на рынке произошло заметное снижение ценовых уровней. Так, стоимость 1 м<sup>2</sup> “базовой” квартиры за период кризиса снизилась в среднем на 8,6 тыс. руб., что составляет около 19% от прежней стоимости. При этом видно, что абсолютные значения большинства корректировок также увеличились, но при этом направление их влияния не изменилось, что свидетельствует в целом о сохранении тенденций ценообразования на рынке.

Так, к примеру, двухкомнатная квартира в панельном доме стоила в 2007 г. дешевле однокомнатной в среднем всего на 2,1%, однако в 2010 г. снижение составляет уже 5,6%. В целом же снижение стоимости в “посткризисный” период по сравнению с “докризисным” составило около 10 тыс. руб., что превышает изменение для однокомнатных квартир. Аналогичная ситуация характерна и для трехкомнатных квартир - по ним наблюдается максимальное снижение стоимости.

Данный фактор подтверждает общепринятый принцип ценообразования на рынке жилья - сильнее всего кризис повлиял на цены наименее ликвидного жилья, коим являются многокомнатные квартиры на фоне наиболее дешевых (по общей стоимости) и ликвидных однокомнатных квартир.

Также очень интересными являются результаты, описывающие изменение стоимости 1 м<sup>2</sup> жилого объекта в зависимости от изменения его общей площади - так называемый “фактор площади”. Известно, что при увеличении площади квартиры при прочих равных условиях, удельная стоимость 1 м<sup>2</sup> сокращается и, соответственно, наоборот, чем меньше площадь, квартиры, тем дороже стоимость 1 м<sup>2</sup>.

Результаты, полученные по обеим моделям, подтверждают данную тенденцию, которая, как видно, наиболее характерна для од-

нокомнатных квартир и становится менее выраженной при увеличении количества комнат. Так, по результатам исследования 2007 г., увеличение площади двухкомнатной квартиры на каждый дополнительный 1 м<sup>2</sup> приводило к снижению его стоимости (а соответственно и всей квартиры) на 0,56%, и наоборот. При этом в 2010 г. значение корректировки составляет уже -0,72%, что свидетельствует об общем снижении спроса на квартиры с большой площадью.

В целом результаты, полученные в ходе предварительного исследования рынка жилой недвижимости г. Уфы в 2010 г. подтвердили сделанные ранее предположения: направление влияния основных тенденций ценообразования на рынке жилья сохранилось, однако степень данного влияния изменилась.

#### ЛИТЕРАТУРА

- [1] Азнабаев А.М. Математическая модель оценки жилой недвижимости // Материалы международной школы-конференции для студентов, аспирантов и молодых ученых “Фундаментальная математика и ее приложения в естествознании”. Математика. Том 1. Уфа: РИЦ БашГУ, 2009. С. 46-56.

ФОРМУЛА РЕГУЛЯРИЗОВАННОГО СЛЕДА  
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА 4-ГО ПОРЯДКА, ВОЗМУ-  
ЩЕННОГО КВАЗИДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ ОПЕРАТОРОМ

Ахмерова Э. Ф. (Уфа, БГУ)

В пространстве  $L^2[0, \pi]$  рассмотрим оператор  $H$ , порожденный дифференциальным выражением четвертого порядка

$$u^{IV} + Vu \quad (1)$$

и граничными условиями Дирихле

$$u(0) = u''(0) = u(\pi) = u''(\pi) = 0, \quad (2)$$

где  $V$  – оператор, порожденный дифференциальным выражением второго порядка

$$Vu = pu'' + p'u' + qu,$$

$p(x), q(x)$  – вещественные функции,  $p(x) \in W_2^1[0, \pi]$ ,  $q(x) \in L_2[0, \pi]$ . Тогда для спектра  $\{\mu\}_{n=1}^{\infty}$  оператора  $H$  справедлива асимптотическая формула (см. [1])

$$\mu_n = n^4 + (Vf_n, f_n) - (VR_n^0(n^4)Vf_n, f_n) + O(n^{-2}), \quad (3)$$

где  $f_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin nx$  – ортонормированные собственные функции оператора  $H^0 = u^{IV}$ , удовлетворяющие граничным условиям (2),  $R_n^0(\lambda) = R^0(\lambda) - P_n/(n^4 - \lambda)$  – часть резольвенты невозмущенного оператора  $H^0$ ,  $R^0(\lambda) = (H^0 - \lambda)^{-1}$ ,  $P_n$  – собственные проекторы оператора  $H^0$ , соответствующие числам  $\lambda_n = n^4$ . Первая и вторая поправки в правой части уравнения (3) выписываются явно и имеют вид

$$(Vf_n, f_n) = -\frac{n^2}{\pi} \int_0^{\pi} p(x) dx + \frac{n}{2\pi} \int_0^{\pi} p'(x) \sin 2nx dx + \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} q(x) \sin^2 nx dx,$$

$$(VR_n^0(n^4)Vf_n, f_n) = A_n + B_n + O\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

где  $A_n, B_n$  – интегралы, зависящие от параметра  $n$ . При наших предположениях на функции  $p(x)$  и  $q(x)$  из формулы (3) легко следует формула следа типа Крейна

$$\sum_{n=1}^{\infty} [\mu_n - n^4 - (Vf_n, f_n) + (VR_n^0(n^4)Vf_n, f_n)] = 0. \quad (4)$$

Началом теории регуляризованных следов операторов стала работа И.М. Гельфанда и Б.М. Левитана [2], в которой для оператора Штурма-Лиувилля

$$-y'' + q(x)y = \lambda y, \quad y'(0) = y'(\pi) = 0, \quad q(x) \in C^1[0, \pi], \quad (5)$$

при условии  $\int_0^\pi q(x) dx$  была получена формула

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\mu_n - \lambda_n) = \frac{1}{4}(q(0) + q(\pi)), \quad (6)$$

здесь  $\mu_n$  — собственные числа оператора (5),  $\lambda_n = n^2$  — собственные числа такого же оператора с  $q(x) = 0$ . Формула (6), получившая затем название формулы Гельфанда-Левитана, породила большую и важную теорию, в дальнейшем охватившую изучение регуляризованных следов дискретных операторов в общем виде.

Впервые формула регуляризованного следа для дифференциальных операторов высокого порядка с негладким возмущением была получена в работе Садовниченко В.А. и Подольского В.Е. [3], где в качестве оператора  $H^0$  взят обыкновенный дифференциальный оператор шестого порядка, действующий в  $L_2[0, \pi]$ , определенный выражением  $-y^{(VI)}$  и краевыми условиями

$$y(0) = y''(0) = y^{IV}(0) = y(\pi) = y''(\pi) = y^{IV}(\pi) = 0,$$

а в качестве возмущения  $V$  взят оператор  $q(x)y'' + p(x)y$  с областью определения  $y(0) = y''(0) = y(\pi) = y''(\pi) = 0$ . При таких условиях только необходимо вычисление величины  $(Vf_n, f_n)$  и формула следа (4) принимает вид

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[ \mu_n - n^6 + \frac{n^2}{\pi} \int_0^\pi q(x) dx - \frac{1}{\pi} \int_0^\pi p(x) dx - \frac{1}{4\pi} [q'(\pi) - q'(0)] \right] =$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^\pi p(x) dx - \frac{1}{4} [p(0) + p(\pi)] + \frac{1}{8\pi} [q'(\pi) - q'(0)] - \frac{1}{16} [q''(0) + q''(\pi)].$$

При наших же предположениях на функции  $p(x)$  и  $q(x)$  выражение  $(VR_n^0(n^4)Vf_n, f_n)$  имеет довольно громоздкий вид. Если на функции  $p(x)$  и  $q(x)$  наложить более жесткие условия, то это выражение примет более простой вид. Справедлива

**Теорема.** Если  $H$  — оператор, порожденный дифференциальным выражением четвертого порядка (1) и краевыми условиями (2),  $Vu = pu'' + p'u' + qu$ ,  $p(x)$ ,  $q(x)$  — вещественные функции,  $p(x) \in W_2^2[0, \pi]$ ,

$q(x) \in W_2^1[0, \pi]$ , то имеет место формула регуляризованного следа типа Гельфанда-Левитана

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \mu_n - n^4 + \frac{n^2}{\pi} \int_0^{\pi} p(x) dx + \frac{n-4}{8\pi^2} \left( \int_0^{\pi} p(x) dx \right)^2 + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} q(x) dx + \right. \\ & \left. \frac{5p(\pi)}{8\pi} \int_0^{\pi} p(x) dx + \frac{1}{4\pi} [p'(\pi) - p'(0)] \right] = \\ & - \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} \left( \frac{p''(x)}{4} - q(x) \right) dx + \frac{1}{16} (p''(0) + p''(\pi)) - \frac{1}{4} (q(0) + q(\pi)). \end{aligned}$$

**Доказательство.** Из рассуждений работы [1] следует, что ядро оператора  $R_n^0(n^4)$  имеет вид

$$\begin{aligned} R_n^0(x, t, n^4) &= \frac{1}{2n^3} \begin{cases} \cos nx \sin nt - \operatorname{ch} nx \operatorname{sh} nt, & t \leq x; \\ \cos nt \sin nx - \operatorname{ch} nt \operatorname{sh} nx, & t > x. \end{cases} + \frac{\sin nx \sin nt}{4\pi n^4} - \\ & \frac{1}{2\pi n^3} [x \cos nx \sin nt + t \cos nt \sin nx - \pi \operatorname{cth} n\pi \operatorname{sh} nx \operatorname{sh} nt]. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что для ядра  $R_n^0(x, t, n^4)$  справедлива равномерная оценка

$$|R_n^0(x, t, n^4)| \leq \frac{C}{n^3}.$$

Теперь используя оценку для ядра  $R_n^0(x, t, n^4)$ , для выражения  $(VR_n^0(n^4)Vf_n, f_n)$  получим асимптотику

$$\begin{aligned} (VR_n^0(n^4)Vf_n, f_n) &= -\frac{4n^3}{\pi} \int_0^{\pi} p'(x) \cos nx \int_0^{\pi} p(t) \sin nt R_n^0(x, t, n^4) dt dx + \\ & \frac{2n^4}{\pi} \int_0^{\pi} p(x) \sin nx \int_0^{\pi} p(t) \sin nt R_n^0(x, t, n^4) dt dx + O\left(\frac{1}{n}\right). \end{aligned}$$

Воспользовавшись представлением ядра  $R_n^0(x, t, n^4)$ , а затем условиями теоремы и интегрировав по частям, будем иметь

$$(VR_n^0(n^4)Vf_n, f_n) = \frac{n-4}{8\pi^2} \left( \int_0^{\pi} p(x) dx \right)^2 + \frac{5p(\pi)}{8\pi} \int_0^{\pi} p(x) dx + O\left(\frac{1}{n}\right).$$



Выражение  $(Vf_n, f_n)$  легко вычислится и при условиях теоремы имеет вид

$$(Vf_n, f_n) = -\frac{n^2}{\pi} \int_0^\pi p(x) dx - \frac{1}{\pi} \int_0^\pi q(x) dx - \frac{1}{4\pi} [p'(\pi) - p'(0)] + \\ \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \left( \frac{p''(x)}{4} - q(x) \right) \cos 2nx dx.$$

Таким образом, при условиях теоремы о  $p(x)$  и  $q(x)$ , для спектра возмущенного оператора  $H$  имеем асимптотическую формулу

$$\mu_n = n^4 + (vf_n, f_n) - (VR_n^0(n^4)Vf_n, f_n) + O\left(\frac{1}{n^2}\right) = \\ n^4 - \frac{n^2}{\pi} \int_0^\pi p(x) dx - \frac{1}{\pi} \int_0^\pi q(x) dx - \frac{1}{4\pi} [p'(\pi) - p'(0)] - \frac{5p(\pi)}{8\pi} \int_0^\pi p(x) dx + \\ + \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \left( \frac{p''(x)}{4} - q(x) \right) \cos 2nx dx - \frac{n-4}{8\pi^2} \left( \int_0^\pi p(x) dx \right)^2 + O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Если теперь просуммировать ряд Фурье, возникающий при суммировании  $\cos 2nx$ , то получим утверждение теоремы.

#### ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Ахмерова Э. Ф.* Асимптотика спектра для негладких возмущений дифференциальных операторов  $2n$ -го порядка. // Вестник Башкирского университета. 2005. № 1. С. 28–32.
- [2] *Гельфанд И. М., Левитан Б. М.* Об одном простом тождестве для собственных значений дифференциального оператора второго порядка. // Докл. АН СССР. 1953. Т. 88. № 4. С. 593–596.
- [3] *Садовничий В. А., Подольский В. Е.* Следы операторов с относительно компактным возмущением. // Матем. сб. 2002. Т. 193. № 2. С. 129–152.

УДК 534.112

## ОПРЕДЕЛЕНИЕ КРАЕВОГО УСЛОВИЯ ПО ДВУМ СОБСТВЕННЫМ ЧАСТОТАМ

**Ахтямова А.А. (Уфа, БашГУ)**

Рассмотрим однородную балку Эйлера-Бернулли, левый конец которой заделан, а к правому ее концу прикреплен груз массой  $m$ , закрепленный на пружине с жесткостью  $s$ . Известны длина  $l$ , плотность  $\rho$ , площадь поперечного сечения  $F$  и изгибная жесткость балки. Требуется определить массу груза  $m$  и жесткость пружины  $s$  по двум собственным частотам изгибных колебаний балки.

Ранее подобная задача для балки Эйлера-Бернулли не ставилась. В работе [1] решалась похожая задача для балки Тимошенко, а в [2] в краевом условии определялись  $k$  последовательных коэффициентов полинома от спектрального параметра по  $k$  собственным значениям. В отличие от работы [1] нами рассматривается не балка Тимошенко, а балка Эйлера-Бернулли. Отличие от работы [2] в следующем. Из работы [2] следует, что массу груза  $m$  и жесткость пружины  $s$  можно однозначно найти (вместе с коэффициентом трения на правом конце) по трем различным собственным значениям. Мы же показываем, что для однозначного восстановления массы груза  $m$  и жесткости пружины  $s$  достаточно двух собственных значений. Причем, при чисто математической постановке задачи помимо условия различности собственных значений необходимо добавить еще условие, состоящее в том, что сумма квадратов собственных значений не равна нулю.

Для решения поставленной задачи используем уравнение изгибных колебаний однородной балки Эйлера-Бернулли с постоян-

ной жесткостью на изгиб [3]:

$$EJ \frac{\partial^4 U(x, t)}{\partial x^4} + \rho F \frac{\partial^2 U(x, t)}{\partial t^2} = 0, \quad (1)$$

где  $U = U(x, t)$  — прогиб текущей точки оси балки;  $EJ$  — изгибная жесткость стержня;  $\rho$  — плотность балки;  $F$  — площадь поперечного сечения балки.

Для заданных закреплений краевые условия записываются следующим образом

$$U = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial x} = 0 \quad (x = 0); \quad (2)$$

$$EJ \frac{\partial^3 U}{\partial x^3} = -m \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - cU = 0, \quad \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = 0 \quad (x = l). \quad (3)$$

Обозначим  $\frac{\rho F \omega^2}{\alpha}$  через  $\lambda^4$ . Заменой  $U(x, t) = y(x) \cos(\omega t)$  уравнение (1) с краевыми условиями (2), (3) сводится к следующей спектральной задаче:

$$y^{(4)} = \lambda^4 y, \quad (4)$$

$$U_1(y) = y(0) = 0, \quad U_2(y) = y'(0) = 0, \quad (5)$$

$$U_3(y) = y^{(3)}(l) + H_0 y(l) - H_2 \lambda^4 y(l) = 0, \quad U_3(y) = y''(l) = 0, \quad (6)$$

где  $\lambda^4 = \frac{\rho F \omega^2}{EJ}$ ,  $H_0 = \frac{c}{EJ}$ ,  $H_2 = \frac{m}{EJ}$ .

В новых обозначениях сформулированную задачу можно записать следующим образом: по собственным значениям  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  задачи (4)–(6) найти коэффициенты  $H_0$  и  $H_2$ .

Как известно [4], собственные значения задачи (4)–(6) являются нулями характеристического определителя

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} U_1(y_1) & U_1(y_2) & U_1(y_3) & U_1(y_4) \\ U_2(y_1) & U_2(y_2) & U_2(y_3) & U_2(y_4) \\ U_3(y_1) & U_3(y_2) & U_3(y_3) & U_3(y_4) \\ U_4(y_1) & U_4(y_2) & U_4(y_3) & U_4(y_4) \end{vmatrix},$$

где функции:

$$y_1(x, \lambda) = (\cos \lambda x + \operatorname{ch} \lambda x)/2,$$

$$y_2(x, \lambda) = (\sin \lambda x + \operatorname{sh} \lambda x)/(2\lambda),$$

$$y_3(x, \lambda) = (-\cos \lambda x + \operatorname{ch} \lambda x)/(2\lambda^2),$$

$$y_4(x, \lambda) = (-\sin \lambda x + \operatorname{sh} \lambda x)/(2\lambda^3)$$

являются линейно независимыми решениями уравнения (4), удовлетворяющими условиям

$$y_j^{(r-1)}(0, \lambda) = \begin{cases} 0, & \text{при } j \neq r, \\ 1, & \text{при } j = r. \end{cases}$$

$j, r = \overline{1, 4}$ . Другими словами, решения  $y_j(x, \lambda)$ ,  $j = \overline{1, 4}$  образуют фундаментальную систему Коши и выражаются через функции Крылова [3]. Применяя теорему для вычисления Лапласа для вычисления определителей, получаем:

$$\Delta(\lambda) = H_0 \frac{\eta(\lambda)}{2\lambda^3} - H_2 \frac{\eta(\lambda)\lambda}{2} - \frac{\xi(\lambda)}{2}, \quad (7)$$

где  $\xi(\lambda) = \cos \lambda \operatorname{ch} \lambda$ ,  $\eta(\lambda) = -\sin \lambda \operatorname{ch} \lambda + \cos \lambda \operatorname{sh} \lambda$ .

Подставляя  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  в (7), получим систему уравнений :

$$\begin{aligned} \Delta(\lambda_1) &= H_0 \frac{\eta(\lambda_1)}{2\lambda_1^3} - H_2 \frac{\eta(\lambda_1)\lambda_1}{2} - \frac{\xi(\lambda_1)}{2}, \\ \Delta(\lambda_2) &= H_0 \frac{\eta(\lambda_2)}{2\lambda_2^3} - H_2 \frac{\eta(\lambda_2)\lambda_2}{2} - \frac{\xi(\lambda_2)}{2}. \end{aligned} \quad (8)$$

Полученная система уравнений (8) относительно неизвестных  $H_0$  и  $H_2$  имеет единственное решение только в том случае, когда

$$D = \begin{vmatrix} \frac{\eta(\lambda_1)}{2\lambda_1^3} & -\frac{\eta(\lambda_1)\lambda_1}{2} \\ \frac{\eta(\lambda_2)}{2\lambda_2^3} & -\frac{\eta(\lambda_2)\lambda_2}{2} \end{vmatrix} \neq 0.$$

$D \neq 0$  тогда и только тогда, когда  $\eta(\lambda_1)\eta(\lambda_2) \frac{\lambda_1^4 - \lambda_2^4}{\lambda_1^3 \lambda_2^3} \neq 0$ . Поскольку  $\eta(\lambda_i)$  и  $\xi(\lambda_i)$  не могут обращаться в ноль одновременно, то система (11) имеет единственное решение в том случае, когда  $\frac{\lambda_1^4 - \lambda_2^4}{\lambda_1^3 \lambda_2^3} \neq 0$ . Следовательно, если  $\lambda_2^2 \pm \lambda_1^2 \neq 0$ , то система (8) имеет единственное решение.

**Теорема 1.** Если  $\lambda_2^2 \pm \lambda_1^2 \neq 0$ , то  $H_0$  и  $H_2$  по двум собственным значениям  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  находятся однозначно по формулам:  $H_0 = \frac{D_0}{D}$ ,  $H_2 = \frac{D_2}{D}$ , где

$$D_0 = \begin{vmatrix} \frac{\xi(\lambda_1)}{2} & -\frac{\eta(\lambda_1)\lambda_1}{2} \\ \frac{\xi(\lambda_2)}{2} & -\frac{\eta(\lambda_2)\lambda_2}{2} \end{vmatrix} \neq 0, \quad D_2 = \begin{vmatrix} \frac{\eta(\lambda_1)}{2\lambda_1^3} & \frac{\xi(\lambda_1)}{2} \\ \frac{\eta(\lambda_2)}{2\lambda_2^3} & \frac{\xi(\lambda_2)}{2} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Заметим, что так как собственные частоты колебаний балки положительны, то для нашей физической постановки задачи условие теоремы  $\lambda_2^2 + \lambda_1^2 \neq 0$  не является ограничительным. Для (положительных) собственных частот условие  $\omega_1 + \omega_2 \neq 0$  всегда выполнено. Поэтому из доказанной теоремы следует, что для однозначного восстановления массы груза  $m$  и жесткости пружины  $c$  достаточно двух различных собственных частот. Условие  $\lambda_2^2 + \lambda_1^2 \neq 0$  необходимо для математической постановки, когда допускается, что собственные значения спектральной задачи (4)–(6) могут быть и незначительными числами.

#### ЛИТЕРАТУРА

- [1] Ахтямов А. М., Урманчиев С. Ф. Определение параметров твердого тела, прикрепленного к одному из концов балки, по собственным частотам колебаний // Сибирский журнал индустриальной математики. 2008. Т. 11, № 4. С. 19–24.
- [2] Ахтямов А. М. Об определении краевого условия по конечному набору собственных значений // Дифференциальные уравнения. 1999. Т. 35. № 8. С. 1127–1128.
- [3] *Вибрации в технике: Справочник*. Т.1. Колебания линейных систем. / Под редакцией В.В. Болотина — М.: Изд-во Машиностроение, 1978. — 352 с.
- [4] *Наймарк М.А.* Линейные дифференциальные операторы. — М.: Наука, 1969. — 526 с.

УДК 531.2

# ОПРЕДЕЛЕНИЕ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ И СТАТИЧЕСКОЙ НАГРУЗКИ ДЛЯ УПРУГИХ КРИВОЛИНЕЙНЫХ СТЕРЖНЕЙ

Ахтямов А. М., Сатыев Э. И. (Уфа, БашГУ)

## Аннотация

Развитие техники выдвинуло много новых прикладных задач, относящихся к статике криволинейных стержней, в частности: исследование продольной нагрузки на арку. Ведь превышение этой нагрузки критического значения приводит к потере устойчивости всей конструкции. Поэтому необходимо знать величину данной нагрузки.

Тензодатчики, установленные в нескольких местах арки, показывают продольные смещения точек в этих местах. Оказывается, зная продольные смещения в 7 точках, можно по предлагаемой в работе методике определить не только продольную нагрузку на арку, но и 6 упругих характеристик закреплений. Они показывают степень податливости связей стержня с основанием.

## 1 Граничные условия и постановка задачи

Рассматривается криволинейная арка. В качестве ее аналитической модели взят упругий стержень постоянной кривизны, опирающийся на два конца. Изменение формы исследуется в плоском случае.

Всего может быть записано 6 граничных условий (по 3



Рис. 1: Стержень

на каждый конец). Они отражают прямую пропорциональность между усилиями ( $M, Q, N$ ) и соответствующими перемещениями ( $\varphi, w, u$ ) на обоих концах стержня. Определение граничных условий сводится к нахождению этих коэффициентов пропорциональности (упругих характеристик закреплений).

Обозначим через  $R, l, EI$  радиус кривизны, длину и жесткость

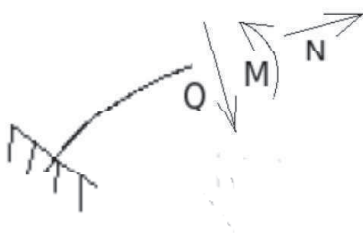


Рис. 2: Усилия

стержня. Тогда упругие характеристики закреплений выражаются через продольное смещение  $u(s)$ , где  $os$  направлено вдоль оси стержня, следующим образом:

$$\begin{aligned}
 k_1^- &= \frac{Q(0)}{w(0)} = \frac{EI}{R^2} \frac{(R^2 \frac{d^4}{ds^4} + \frac{d^2}{ds^2})u(0)}{\frac{d}{ds}u(0)} = \frac{U_1^+(u)}{U_1^-(u)}, \\
 k_1^+ &= -\frac{Q(l)}{w(l)} = -\frac{EI}{R^2} \frac{(R^2 \frac{d^4}{ds^4} + \frac{d^2}{ds^2})u(l)}{\frac{d}{ds}u(l)} = \frac{U_2^+(u)}{U_2^-(u)}, \\
 k_2^- &= \frac{M(0)}{\varphi(0)} = \frac{EI}{R^2} \frac{(R^2 \frac{d^3}{ds^3} + \frac{d}{ds})u(0)}{\frac{d^2}{ds^2}u(0)} = \frac{U_3^+(u)}{U_3^-(u)}, \\
 k_2^+ &= -\frac{M(l)}{\varphi(l)} = -\frac{EI}{R^2} \frac{(R^2 \frac{d^3}{ds^3} + \frac{d}{ds})u(l)}{\frac{d^2}{ds^2}u(l)} = \frac{U_4^+(u)}{U_4^-(u)}, \\
 k_3^- &= \frac{N(0)}{u(0)} = \frac{EI}{R^2} \frac{(R^2 \frac{d^3}{ds^3} + \frac{d}{ds})u(0)}{u(0)} = \frac{U_5^+(u)}{U_5^-(u)},
 \end{aligned}$$

$$k_3^+ = -\frac{N(l)}{u(l)} = -\frac{EI}{R^2} \frac{(R^2 \frac{d^3}{ds^3} + \frac{d}{ds})u(l)}{u(l)} = \frac{U_6^+(u)}{U_6^-(u)}.$$

Здесь  $U_i^-, U_i^+, i = \overline{1..6}$ , - линейные формы.

Эти упругие характеристики могут быть определены по изложенному далее исследованию.

Исследование заключается в следующем. Восстановим продольную нагрузку на арку и шесть упругих характеристик закреплений по 7 продольным смещениям.

Дифференциальное уравнение равновесия криволинейного

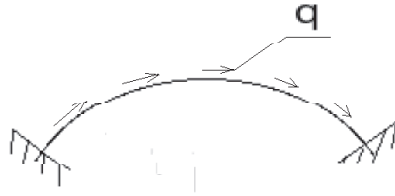


Рис. 3: Воздействие продольной нагрузки

стержня под воздействием продольной нагрузки  $q$  имеет вид:

$$\frac{EI}{R^2} \frac{d^2}{ds^2} (R^2 \frac{d^2}{ds^2} + 1) u = q,$$

где  $u = u(s)$  - продольное смещение точки точки стержня с координатой  $s$  ( $os$  направлено вдоль оси стержня),  $q$  - искомая продольная нагрузка на стержень,  $EI$  - жесткость стержня при изгибе,  $R$  - радиус кривизны стержня.

Полагается, что нам известны по тензодатчикам продольные смещения  $u(s_i)$  в 7 точках с координатами  $s_i$ . Определим по перечисленным формулам и результатам тензодатчиков продольную нагрузку  $q$  и упругие характеристики закреплений.



## 2 Решение задачи об определении продольной нагрузки и упругих характеристик закреплений

Фундаментальная система решений соответствующего однородного дифференциального уравнения имеет вид:

$$u_1 = \cos \frac{s}{R}, u_2 = s \cos \frac{s}{R}, u_3 = \sin \frac{s}{R}, u_4 = s \sin \frac{s}{R}, u_5 = 1, u_6 = s,$$

Следовательно, общее решение неоднородного уравнения имеет вид:

$$u = \sum_{j=1}^6 C_j u_j + \frac{qR^2}{2EI} s^2 = \sum_{j=1}^7 C_j u_j,$$

где

$$C_7 = \frac{qR^2}{2EI}, u_7 = s^2$$

Здесь  $C_j$  - константы, которые определяют форму равновесия.

Зная продольные смещения  $u(s_i)$  в 7 точках с координатами  $s_i$ , находим все  $C_j$ :

$$\sum_{j=1}^7 C_j u_j(s_i) = u(s_i), i = \overline{1..7}$$

Мы получили систему линейных алгебраических уравнений относительно  $C_j$ . Уравнение продольных смещений  $u = \sum_{j=1}^7 C_j u_j$  после решения этой системы считается известным.

Нагрузка  $q$  определяется следующим образом:  $q = \frac{2EIC_7}{R^2}$ .

Константы  $k_1^-, k_1^+, k_2^-, k_2^+, k_3^-, k_3^+$  определяются по изложенным ранее формулам при использовании уже известной функции  $u = u(s)$ .

Итак, зная продольные смещения в 7 точках, можно определить не только продольную нагрузку на арку, но и шесть упругих характеристик закреплений.

## Список литературы

- [1] *Ахтямов А. М.* Теория идентификации краевых условий. Уфа: Гилем, 2008. - 300с.
- [2] *Артоболевский И. И.* Вибрации в технике. Справочник в 6 томах. Том 1. Колебания линейных систем. Машиностроение, 1978. 352с.
- [3] *Ильгамов М. А.* Устойчивость и колебания упругих круговых колец. Уфа, 1957 - 69с.

УДК 517.95

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ГРУППОВОЙ КЛАССИФИКАЦИИ  
ОДНОМЕРНОЙ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ  
УРАВНЕНИЙ ЭВОЛЮЦИОННОГО ТИПА

Бабков О. К., Мухаметова Г. З. (Уфа, УГАТУ)

**Введение**

Групповой анализ дифференциальных уравнений возник как научное направление в работах Софуса Ли, связанных с исследованием методов интегрирования отдельных классов обыкновенных дифференциальных уравнений. В дальнейшем его идеи были развиты в работах многих математиков, в частности, в трудах Л.В.Овсянникова (см. [4]), который показал, что методы группового анализа могут быть использованы при построении отдельных классов точных решений и качественном исследовании дифференциальных уравнений механики и математической физики. Такое расширение области применений потребовало существенного углубления методов группового анализа, разработки новых понятий и методик (см. [1], [2], [5]).

**§ 1. Задача групповой классификации одномерной  
системы дифференциальных уравнений  
эволюционного типа**

Большая часть математических моделей в физике, механике, инженерных науках и т. д. приводит к нелинейным дифференциальным уравнениям. Таким образом, в настоящее время перед исследователями в области науки и техники обычно ставятся задачи математического моделирования, содержащие приемы решения дифференциальных уравнений. Иногда эти решения могут быть получены аналитически с помощью многочисленных традиционных для этих задач методов, пригодных для интегрирования уравнений частного

вида. Однако, нередко случаи, когда аналитическое решение получить невозможно. С другой стороны, фундаментальные законы природы и технологические задачи, сформулированные в терминах дифференциальных уравнений, могут быть успешно решены с помощью метода групп Ли.

Одной из основных задач группового анализа дифференциальных уравнений является изучение действия допускаемой данным уравнением (системой уравнений) группы на множестве решений этого уравнения. Другая интересная и практически важная задача состоит в использовании техники группового анализа для групповой классификации дифференциальных уравнений. Решение этой задачи представляет не только чисто математический интерес, но имеет также чисто прикладное значение. Дело в том, что дифференциальные уравнения математической физики часто содержат параметры, которые находятся экспериментально и поэтому нестрого фиксированы. В то же время уравнения математической модели должны быть достаточно просты для того, чтобы их можно было успешно решить. Групповой подход позволяет принять в качестве критерия простоты требование, чтобы произвольный параметр был таким, что с ним моделирующее дифференциальное уравнение допускало группу с определенными свойствами или, вообще говоря, наиболее широкую группу.

Рассмотрим нелинейную систему дифференциальных уравнений эволюционного типа

$$\begin{cases} u_t + (u_x^2 + v_x^2)^p u = 0, \\ v_t + (u_x^2 + v_x^2)^p v = 0, \end{cases} \quad (1)$$

где  $p$  — произвольный числовой параметр,  $u = u(t, x)$ ,  $v = v(t, x)$ . Случай  $p = 0$  не рассматривается, так как соответствующая система уравнений допускает явное решение. Особенность здесь заключается в том, что стандартные методы расщепления определяющей

системы не применимы к данной системе дифференциальных уравнений, поскольку производные функций  $u_x$ ,  $v_x$  входят в систему определяющих уравнений в комбинациях с произвольной степенью  $p$ .

## § 2. Построение алгебры Ли допустимых операторов

Для решения задачи групповой классификации будем использовать классические методы группового анализа (см. [3]). Ищем допускаемый оператор в виде

$$\begin{aligned} X = & \tau(t, x, u, v) \frac{\partial}{\partial t} + \xi(t, x, u, v) \frac{\partial}{\partial x} + \\ & + \eta(t, x, u, v) \frac{\partial}{\partial u} + \varphi(t, x, u, v) \frac{\partial}{\partial v}. \end{aligned} \quad (2)$$

Пусть

$$\tilde{X} = X + \zeta_0 \frac{\partial}{\partial u_t} + \zeta_1 \frac{\partial}{\partial u_x} + \zeta_2 \frac{\partial}{\partial v_t} + \zeta_3 \frac{\partial}{\partial v_x} \quad (3)$$

представляет собой первое продолжение оператора  $X$ . Запишем формулы для первого продолжения

$$\begin{aligned} \zeta_0 &= D_t \eta - u_t D_t \tau - u_x D_t \xi, \\ \zeta_1 &= D_x \eta - u_t D_x \tau - u_x D_x \xi, \\ \zeta_2 &= D_t \varphi - v_t D_t \tau - v_x D_t \xi, \\ \zeta_3 &= D_x \varphi - v_t D_x \tau - v_x D_x \xi, \end{aligned}$$

где

$$D_t = \frac{\partial}{\partial t} + u_t \frac{\partial}{\partial u} + v_t \frac{\partial}{\partial v}, \quad D_x = \frac{\partial}{\partial x} + u_x \frac{\partial}{\partial u} + v_x \frac{\partial}{\partial v}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}
\zeta_0 &= \eta_t + u_t \eta_u + v_t \eta_v - u_t (\tau_t + u_t \tau_u + v_t \tau_v) - \\
&\quad - u_x (\xi_t + u_t \xi_u + v_t \xi_v), \\
\zeta_1 &= \eta_x + u_x \eta_u + v_x \eta_v - u_t (\tau_x + u_x \tau_u + v_x \tau_v) - \\
&\quad - u_x (\xi_x + u_x \xi_u + v_x \xi_v), \\
\zeta_2 &= \varphi_t + u_t \varphi_u + v_t \varphi_v - v_t (\tau_t + u_t \tau_u + v_t \tau_v) - \\
&\quad - v_x (\xi_t + u_t \xi_u + v_t \xi_v), \\
\zeta_3 &= \varphi_x + u_x \varphi_u + v_x \varphi_v - v_t (\tau_x + u_x \tau_u + v_x \tau_v) - \\
&\quad - v_x (\xi_x + u_x \xi_u + v_x \xi_v).
\end{aligned} \tag{4}$$

Составим определяющую систему уравнений

$$\begin{cases} \tilde{X} (u_t + (u_x^2 + v_x^2)^p u) = 0, \\ \tilde{X} (v_t + (u_x^2 + v_x^2)^p v) = 0. \end{cases}$$

В нашем случае, с учетом (3), она примет вид

$$\begin{cases} \eta (u_x^2 + v_x^2)^p + \zeta_0 + 2p u u_x \zeta_1 (u_x^2 + v_x^2)^{p-1} + \\ \quad + 2p u v_x \zeta_3 (u_x^2 + v_x^2)^{p-1} = 0, \\ \varphi (u_x^2 + v_x^2)^p + \zeta_2 + 2p v v_x \zeta_3 (u_x^2 + v_x^2)^{p-1} + \\ \quad + 2p v u_x \zeta_1 (u_x^2 + v_x^2)^{p-1} = 0. \end{cases} \tag{5}$$

Подставив соотношения (4) в определяющую систему (5), получим

систему дифференциальных уравнений в частных производных. Ее решение имеет вид

$$\begin{aligned}\tau &= C_1 t + C_2, \quad \xi = C_3 x + C_4, \\ \eta &= C_5 v + C_3 u - \frac{C_1 u}{2p}, \\ \varphi &= C_3 v - C_5 u - \frac{C_1 v}{2p}.\end{aligned}$$

Общее решение определяющей системы зависит от пяти произвольных постоянных. Ввиду линейности определяющих уравнений, их решения образуют пятимерное пространство. Используя представление для оператора (2), находим базис этого пространства решений, или соответствующую алгебру Ли,

$$\begin{aligned}X_1 &= \frac{\partial}{\partial t}, \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad X_3 = 2pt \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial u} + v \frac{\partial}{\partial v}, \\ X_4 &= x \frac{\partial}{\partial x} + u \frac{\partial}{\partial u} + v \frac{\partial}{\partial v}, \quad X_5 = v \frac{\partial}{\partial u} - u \frac{\partial}{\partial v}.\end{aligned}$$

Таким образом, мы получили пятимерную алгебру Ли для системы (1).

Рассмотрим частный случай, когда  $p = 1$ . В этом случае решение определяющей системы уравнений имеет вид

$$\begin{aligned}\tau &= C_1 t + C_2, \quad \xi = C_3 x + C_4, \\ \eta &= \frac{C_5 u}{u^2 - v^2} + \left( C_1 - \frac{C_3}{2} \right) u, \\ \varphi &= \frac{C_5 v}{u^2 - v^2} + \left( C_1 - \frac{C_3}{2} \right) v.\end{aligned}$$

Следовательно, учитывая соотношение (2), получаем набор операторов

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial t}, \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad X_3 = t \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial u} + v \frac{\partial}{\partial v},$$

$$X_4 = 2x \frac{\partial}{\partial x} - u \frac{\partial}{\partial u} - v \frac{\partial}{\partial v}, \quad X_5 = \frac{1}{u^2 - v^2} \left( u \frac{\partial}{\partial u} + v \frac{\partial}{\partial v} \right),$$

который является соответствующей алгеброй Ли.

Рассмотрим теперь еще один частный случай,  $p = \frac{1}{2}$ . Решение определяющей системы уравнений примет вид

$$\tau = C_1 t + C_2, \quad \xi = C_3 x + C_4,$$

$$\eta = C_5 v + (C_1 - C_3) u,$$

$$\varphi = -C_5 u + (C_1 - C_3) v,$$

откуда, учитывая (2), получаем операторы

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial t}, \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad X_3 = t \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial u} + v \frac{\partial}{\partial v},$$

$$X_4 = x \frac{\partial}{\partial x} - u \frac{\partial}{\partial u} - v \frac{\partial}{\partial v}, \quad X_5 = v \frac{\partial}{\partial u} - u \frac{\partial}{\partial v},$$

которые образуют алгебру Ли для данного случая

Для решения поставленной задачи была использована программа, написанная в среде Maple 8, с помощью которой для заданной системы дифференциальных уравнений строится система определяющих уравнений.

### § 3. Значение методов группового анализа для теории дифференциальных уравнений

Развитие группового анализа содержит многочисленные факты, свидетельствующие о том, что эта теория дает универсальный аппарат для решения дифференциальных уравнений даже в том



случае, когда когда другие средства интегрирования оказываются безуспешными. Фактически групповой анализ является универсальным и эффективным методом аналитического решения нелинейных дифференциальных уравнений. Старые методы интегрирования существенно опираются на линейность и на постоянство коэффициентов. Групповой анализ успешно справляется с задачами, содержащими линейные и нелинейные дифференциальные уравнения, точно так же, как с уравнениями с постоянными и переменными коэффициентами. Все это делает его действенным инструментом для решения широкого круга задач.

#### ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Ибрагимов Н. Х.* Группы преобразований в математической физике. М.: Наука, 1983.
- [2] *Ибрагимов Н. Х.* Опыт группового анализа. М.: Знание, 1991.
- [3] *Ибрагимов Н. Х.* Практический курс дифференциальных уравнений и математического моделирования. Нижний Новгород, Изд-во НГУ, 2007.
- [4] *Овсянников Л. В.* Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978.
- [5] *Олвер П.* Приложения групп Ли к дифференциальным уравнениям. М.: Мир, 1989.

УДК 532.5

## ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ПЦР В КОНВЕКТИВНОЙ ЯЧЕЙКЕ РЕЛЕЯ-БЕНАРА С ЗАДАНЫМ ПОЛЕМ СКОРОСТИ

**Волкова Е. В. (Уфа, БГУ)**

### **Введение**

Полимеразная цепная реакция (ПЦР) - перспективный способ увеличения количества ДНК для быстрой и точной диагностики заболеваний. Для выяснения диагноза или установления наследственности необходим большой объем определённых фрагментов нуклеиновой кислоты (ДНК). В биоматериале, взятом у пациента, количество ДНК зачастую является недостаточным. Таким образом, с помощью ПЦР специалисты получают необходимое количество исследуемой ДНК, что существенно облегчает диагностику. Реакцию проводят в специальном приборе - термоциклере.

Реакция протекает при нагревании буферной смеси реактивов, содержащей двунитевые ДНК-матрицы, короткие фрагменты ДНК (праймеры), нуклеотиды, а также амплификационные ферменты. Выделяют три этапа ПЦР: денатурация (94 °С), при которой двойная спираль ДНК разделяется на две одонитевые; отжиг (50–65 °С) — в зависимости от последовательности праймеров), где праймеры связываются с концами разделенных нитей ДНК; элонгация (72 °С), во время которой образуются две новые копии исходных ДНК.

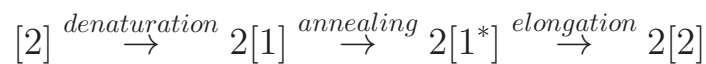
В данной работе рассмотрена реакция ПЦР в квадратной ячейке, нижняя пластина которой поддерживается при температуре денатурации, а верхняя — при температуре отжига. Для достаточно больших чисел Релея разность температур дает повышение

неустойчивости Релея-Бенара, проявляющееся в циркуляции потока между пластинами. Тщательной настройкой параметров потока возможно произвести отдельный конвективный валик, который перемещает молекулы ДНК между двумя пластинами, таким образом производя температурную историю, аналогичную той, что достигается в обычном термоциклере. Одна из моделей ПЦР в условиях естественной конвекции была предложена в работе [1].

Целью нашей работы является исследование влияния различных параметров на процесс развития и успешность выполнения ПЦР, достижение условий, аналогичных условиям в обычном термоциклере.

## § 1. Постановка задачи

Мы рассматриваем кинетическую модель, где различные элементы нуклеиновой кислоты ([1] - одностранный ДНК, [1\*] - отожженная с праймером ДНК, [2] - двустранный ДНК) преобразовываются вследствие реакций первого порядка:



Мы пренебрегаем любыми воздействиями поверхностей на кинетику. Полями концентрации для указанных выше трех компонентов смеси управляют уравнения конвекции-диффузии-реакции, которые будут представлены в безразмерной форме. Предположим, что три разновидности ДНК характеризуются постоянным и одинаковым коэффициентом диффузии  $D$ . Запишем уравнения эволюции, управляющие тремя концентрациями  $c_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ):

$$\begin{aligned}
\frac{\partial c_1}{\partial t} + \frac{1}{\text{Da}^C} \mathbf{u} \cdot \nabla c_1 &= \frac{1}{\text{Da}^D} \nabla^2 c_1 + 2k_d f_d(\mathbf{x}) c_2 - k_a f_a(\mathbf{x}) c_1; \\
\frac{\partial c_3}{\partial t} + \frac{1}{\text{Da}^C} \mathbf{u} \cdot \nabla c_3 &= \frac{1}{\text{Da}^D} \nabla^2 c_3 + k_a f_a(\mathbf{x}) c_1 - k_e f_e(\mathbf{x}) c_3; \\
\frac{\partial c_2}{\partial t} + \frac{1}{\text{Da}^C} \mathbf{u} \cdot \nabla c_2 &= \frac{1}{\text{Da}^D} \nabla^2 c_2 + k_e f_e(\mathbf{x}) c_3 - k_d f_d(\mathbf{x}) c_2,
\end{aligned} \tag{1}$$

где  $c_1$ ,  $c_3$ ,  $c_2$  — концентрации однопитевых, отождженных и двуни-  
тевых ДНК соответственно,  $\mathbf{u}(x)$  — поле скорости,  $k_a$ ,  $k_e$ , и  $k_d$  —  
безразмерные константы скоростей соответствующих реакций (от-  
жига, элонгации и денатурации), функции  $f_a$ ,  $f_e$ , и  $f_d$ , — интенсив-  
ности соответствующих реакций. Также введены конвекционное и  
диффузионное числа Дамкелера,

$$\text{Da}^C = \frac{kH}{U}; \quad \text{Da}^D = \frac{kH^2}{D},$$

которые, соответственно, отражают отношение скоростей реакции  
к конвективным и диффузионным процессам. Граничные условия  
для  $i$ -го компонента соответствуют отсутствию потока через гра-  
ницы ячейки:  $\mathbf{n} \cdot \nabla c_i = 0$ , где  $\mathbf{n}$  — вектор нормали к границе.  
Начальные условия:  $c_1 = c_3 = 0$ ,  $c_2 = c_0$ .

Перейдем к определению параметров для численных расчетов.  
В рассматриваемой области ( $0 < x < 1$ ,  $0 < y < 1$ ) линия  $y = 0$   
представляет собой нижнюю горячую пластину, а  $y = 1$  —  
верхнюю более прохладную. Для вращающихся против часовой  
стрелки потоков, безразмерную горизонтальную и вертикальную  
составляющие скорости примем такими же, как и в работе [1]:

$$u = -\cos \frac{\pi x}{2} \sin \frac{\pi y}{2}, \quad v = \sin \frac{\pi x}{2} \cos \frac{\pi y}{2}$$

Скорости соответствующих химических реакций  $f_a$ ,  $f_e$ , и  $f_d$  мо-  
делируются так, чтобы получить единичные значения на верхней  
( $2/3; 1$ ), средней ( $1/3; 2/3$ ) и нижней ( $0; 1/3$ ) третях ячейки. Вне

этих интервалов функции исчезают. Таким образом, мы получаем качественные характеристики трех этапов реакции в различных температурных областях. Константы скоростей соответствующих химических реакций определяем из тех соображений, что реакция элонгации проходит вдвое медленнее реакций отжига и денатурации:  $k_a = k_d = 1$  и  $k_e = 1/2$ . Размеры ячейки —  $(1 \times 1)$  см.

## § 2. Основные результаты

Реализация численного решения задачи (??) методом контрольных объемов [2] позволила исследовать развитие и установление конвективного поля концентраций компонентов смеси.

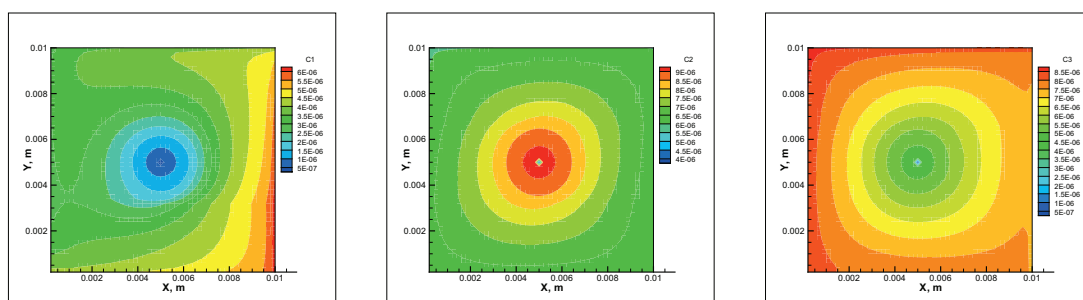


Рис. 1: Поля концентраций  $c_1$ ,  $c_2$ ,  $c_3$  слева направо, при коэффициентах диффузии  $D = 10^{-11}$  см<sup>2</sup>/с и характерной скорости химической реакции  $k = 0.19$  с<sup>-1</sup>

На рис. ?? показаны концентрации компонентов смеси на конечном этапе расчетов. Переход от светлого к темному (от красного к синему) соответствует уменьшению концентрации. На рисунке видно, что концентрация одонитевых ДНК  $c_1$  наиболее высока у правой стенки конвективной ячейки. Это объясняется тем, что, появляясь на нижней, подогреваемой пластине, одонитевые ДНК потоком переносятся против часовой стрелки, но у верхней части уже отжигаются с праймерами. Отожженные с праймерами цепочки ДНК —  $c_3$ , (третий слева график) также потоком переносятся к левой стенке ячейки, где происходит элонгация — достраивание до двунитевых цепочек. Далее часть двунитевых ДНК концентрируется в центре ячейки (второй график), а часть засчет

диффузии переносится в нижнюю треть, после чего процесс повторяется до тех пор, пока мы не получим необходимое количество копий ДНК шаблона.

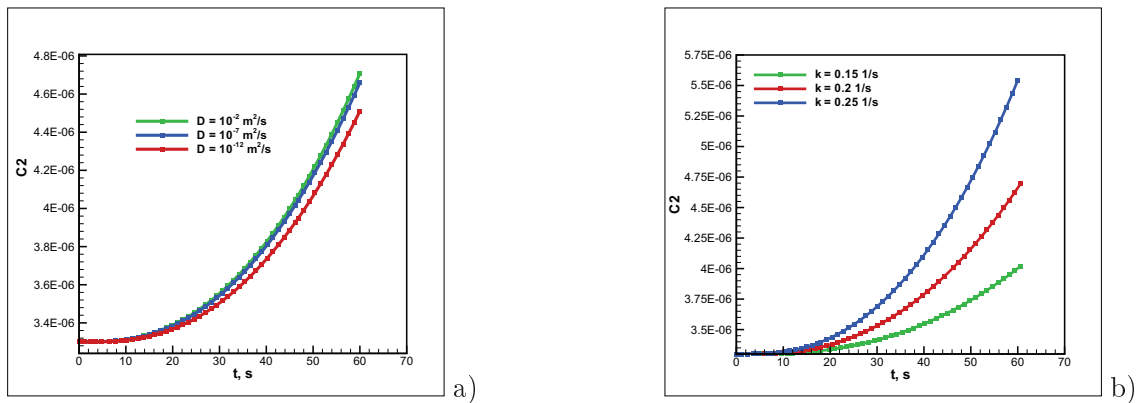


Рис. 2: Зависимость  $c_2$  от времени при коэффициентах диффузии  $D = 10^{-2}$ ,  $D = 10^{-7}$ ,  $D = 10^{-12}$   $\text{см}^2/\text{с}$  и характерных скоростях химических реакций  $k = 0.15$ ,  $k = 0.20$ ,  $k = 0.25$   $\text{с}^{-1}$

Получены зависимости темпа роста концентрации двунитевых ДНК от коэффициентов диффузии и характерной скорости химической реакции. Как показано на графиках, скорость увеличения концентрации  $c_2$  выше при больших значениях коэффициента диффузии. Но на темп роста больше влияет химическая реакция: чем значение ее скорости выше, тем быстрее идет процесс амплификации ДНК (рис. ??).

Также исследована зависимость темпа роста концентрации двунитевых ДНК от расстояния до центра ячейки. Обнаружено, что концентрация  $c_2$  увеличивается по мере приближения к центру ячейки. Соответственно, в отдаленных от центра областях количество копий исходного ДНК шаблона резко падает.

## Заключение

Была рассмотрена модель амплификации ДНК вследствие полимеразной цепной реакции в системе с естественной конвекцией. С использованием схематической модели конвективной ячей-

ки изучено поведение полей концентрации компонентов реагирующей смеси, исследована зависимость выхода реакции от коэффициента диффузии и от константы скорости реакции, показано, что при типичных параметрах проведения ПЦР в конвективной ячейке, поля концентраций характеризуются значительной пространственной неоднородностью, растущей со временем.

#### ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Yariv E., Ben-Dov G., Dorfman K.D.* Polymerase chain reaction in natural convection system: A convection-diffusion-reaction model // *Europhysics Letters*. 2005. Vol. 71. No. 6. pp. 1008–1014.
- [2] *С. Патанкар* Численные методы решения задач теплообмена и динамики жидкости. Перевод с английского под редакцией В. Д. Виленского. Москва: Энергоатомиздат, 1984.

УДК 51.72

**Численное моделирование  
напряженно-деформированного состояния грунта  
конечно-элементным методом контрольных объемов**

**Гафарова Ю. А. (Уфа, БашГУ)**

**Введение**

Многообразие условий залегания пологих пластов и продолжающийся рост разработки месторождений полезных ископаемых приводят к необходимости анализа напряженно-деформированного состояния (НДС) массивов горных слоев вокруг подземных выработок всевозможных назначений и различных очертаний.

Возникает необходимость формирования расчетных сеток, обладающих более гибкими свойствами, с целью адаптации к сложной геометрии задачи и постановке граничных условий. Для этого применяют сетки с нерегулярной структурой. Треугольные сетки являются наиболее используемыми. При построении треугольной сетки желательно, чтобы треугольники были близки к равносторонним, и сетка была равномерной. Этим требованиям соответствует триангуляция по Делоне [1].

Существует несколько подходов к построению разностных схем на треугольных сетках: метод опорных операторов, метод конечных элементов (МКЭ), метод контрольного объема (МКО).

Конечно-элементный метод контрольных объемов (МКЭКО) для треугольной сетки может рассматриваться как вариант МКО с вершинно-центрированной дискретизацией. Многогранный контрольный объем строится вокруг узла сетки. Локальное изменение переменной внутри элемента описывается простыми кусочно-полиномиальными функциями, определенными на элементе, что позволяет получать дискретный аналог для произвольных неструктурированных сетках. Таким образом, МКЭКО ком-



бинирует положительные черты МКО и МКЭ.

При триангуляции в качестве контрольного объема можно выбрать часть треугольника, которая получается при пересечении медиан или многоугольник Вороного. Эвристические соображения в пользу второго связаны с идеей глобализации сетки и контрольных объемов — оптимизация для всех узлов, а не для отдельного треугольника.

Первоначальное разбиение исследуемой области на суперэлементы позволяет применить МКЭКО для задач с локальными сеточными сгущениями, обеспечив гладкие переходы от крупной сетки к мелкой.

## § 1. Численное моделирование НДС грунта

Для исследования напряженно-деформированного состояния упругого слоя сложной геометрии получен дискретный аналог уравнений Бельтрами—Митчелла в декартовых координатах для плоского деформированного состояния без учета объемных сил (1) [2] конечно-элементным методом контрольных объемов на треугольной сетке Делоне.

$$\begin{aligned}\Delta\sigma_{xx} + \frac{\partial^2(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})}{\partial x^2} &= 0, \\ \Delta\sigma_{yy} + \frac{\partial^2(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})}{\partial y^2} &= 0, \\ \Delta\sigma_{xy} + \frac{\partial^2(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})}{\partial x \partial y} &= 0.\end{aligned}\tag{1}$$

В качестве контрольных объемов рассматривались многоугольники Вороного. Формирование объемов около узлов  $i$ - $j$ - $k$ , находящихся в вершинах конечных элементов происходит следующим образом (рис. 1): определяются середины сторон треугольника  $n$ ,  $m$ ,  $p$ , вершина многоугольника Вороного  $l$ , вклады в контрольный объем  $\Delta V_{il}$ ,  $\Delta V_{jl}$ ,  $\Delta V_{kl}$ .

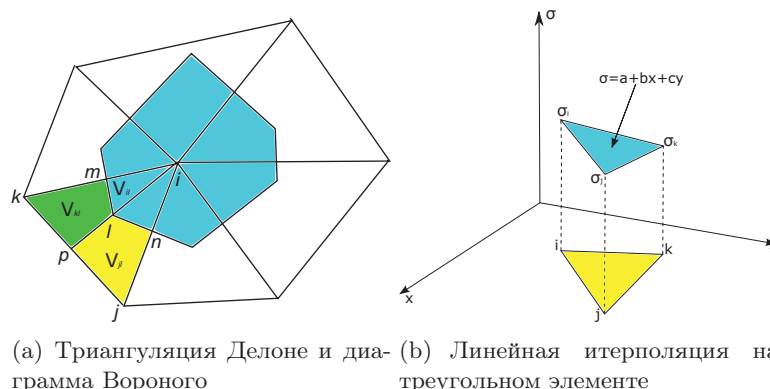


Рис. 1: КЭМКО на треугольной сетке Делоне

Вершина диаграммы Вороного определяется, как центр описанной окружности.

В декартовой системе координат объем вклада конечного элемента в контрольный объем  $i$ -ого узла

$$\Delta V_{il} = \Delta V_{iln} + \Delta V_{ilm} = \frac{1}{2}(d(l, m)d(m, i) + d(l, n)d(n, i))\Delta z,$$

где  $d(l, m) = \sqrt{(x_l - x_m)^2 + (y_l - y_m)^2}$  — расстояние между соответствующими узлами.

Размер расчетной области для слоя в направлении оси  $z$  составляет  $\Delta z = 1$ .

Контрольный объем  $i$ -ого узла собирается из всех вкладов, содержащих данный узел.

На элементе  $i-j-k$  применяется линейная интерполяция (рис. 1)[3]

$$\sigma = N_i\sigma_i + N_j\sigma_j + N_k\sigma_k, \quad (2)$$

где  $\mathbf{N} = (N_i, N_j, N_k)$  — функции формы. Для треугольного линейного элемента функции формы имеют следующий вид:

$$N_l = \frac{1}{2A} (a_l + b_l x + c_l y), \quad l = i, j, k,$$

где  $A$  — площадь треугольника  $i-j-k$ , компоненты векторов  $a, b, c$

определяются как

$$\begin{cases} a_i = x_i y_k - x_k y_j \\ b_i = y_j - y_k \\ c_i = x_k - x_j \end{cases}, \quad \begin{cases} a_j = x_k y_i - x_i y_k \\ b_j = y_k - y_i \\ c_j = x_i - x_k \end{cases}, \quad \begin{cases} a_k = x_i y_j - x_j y_i \\ b_k = y_i - y_j \\ c_k = x_j - x_i \end{cases}.$$

Система линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) для каждого уравнения (1) имеет вид:

$$\sum_{l \in W} \mathbf{K} \Sigma = \sum_{l \in W} \mathbf{F} \quad (3)$$

где  $\mathbf{K} = \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B}$  — локальная матрица жесткости,  $\mathbf{B}$  — матрица градиентов,  $\mathbf{D}$  — матрица свойств материалов,  $\Sigma$  — вектор узловых значений напряжений,  $\mathbf{F}$  — локальный вектор нагрузки,  $W$  — множество конечных элементов расчетной области.

В системе уравнений (1) встречаются  $\frac{\partial^2}{\partial x^2}$ ,  $\frac{\partial^2}{\partial y^2}$ ,  $\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}$ . Проинтегрируем каждое из них по вкладу  $\Delta V_{il}$  в контрольный объем  $i$ -ого узла от  $l$ -ого конечного элемента следующим образом:

$$\begin{aligned} \int_{\Delta V_{il}} \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x^2} dV &= \int_{\Delta V_{il}} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} \Sigma dV = \\ &= \frac{\Delta V_{il}}{4A^2} \begin{pmatrix} b_i & c_i \\ b_j & c_j \\ b_k & c_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_i & b_j & b_k \\ c_i & c_j & c_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_i \\ \sigma_j \\ \sigma_k \end{pmatrix} = \\ &= \frac{\Delta V_{il}}{4A^2} \begin{pmatrix} b_i b_i & b_i b_j & b_i b_k \\ b_j b_i & b_j b_j & b_j b_k \\ b_k b_i & b_k b_j & b_k b_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_i \\ \sigma_j \\ \sigma_k \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (4)$$

Аналогично получаем дискретные аналоги для  $\frac{\partial^2}{\partial y^2}$ ,  $\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}$ .

Рассмотрим  $l$ -ый конечный элемент. Заменяем в первом уравнении Бельтрами-Митчелла вторые производные на их разностные аналоги и соберем все коэффициенты перед неизвестными  $\sigma_{xx}$  узлами  $l$ -ого элемента  $\sigma_{xx}^i$ ,  $\sigma_{xx}^j$ ,  $\sigma_{xx}^k$ , остальное занесем в источник-ый член. Таким образом (1) можно записать:

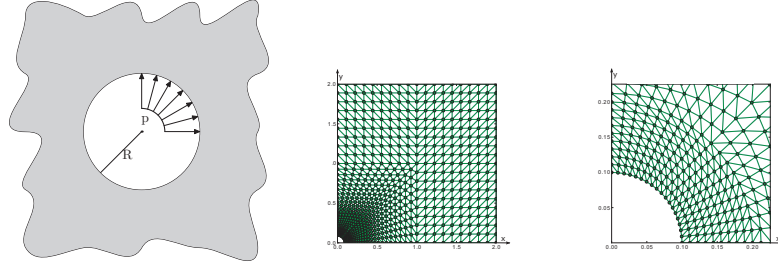


Рис. 2: Геометрия области

$$\begin{aligned}
 & \begin{pmatrix} a_{ii}^l \sigma_{yy}^i + a_{ij}^l \sigma_{yy}^j + a_{ik}^l \sigma_{yy}^k \\ a_{ji}^l \sigma_{yy}^i + a_{jj}^l \sigma_{yy}^j + a_{jk}^l \sigma_{yy}^k \\ a_{ki}^l \sigma_{yy}^i + a_{kj}^l \sigma_{yy}^j + a_{kk}^l \sigma_{yy}^k \end{pmatrix} = \\
 & = - \begin{pmatrix} c_i^l c_i^l \Delta V_{il} \sigma_{xx}^i + c_i^l c_j^l \Delta V_{jl} \sigma_{xx}^j + c_i^l c_k^l \Delta V_{kl} \sigma_{xx}^k \\ c_j^l c_i^l \Delta V_{il} \sigma_{xx}^i + c_j^l c_j^l \Delta V_{jl} \sigma_{xx}^j + c_j^l c_k^l \Delta V_{kl} \sigma_{xx}^k \\ c_k^l c_i^l \Delta V_{il} \sigma_{xx}^i + c_k^l c_j^l \Delta V_{jl} \sigma_{xx}^j + c_k^l c_k^l \Delta V_{kl} \sigma_{xx}^k \end{pmatrix}, \quad (5)
 \end{aligned}$$

где  $a_{ij}^l = (2c_i^l c_j^l + b_i^l b_j^l) \Delta V_{jl}$ .

(5)—дискретный аналог 1-ого уравнения Бельтрами—Митчелла, система линейных алгебраических уравнений относительно напряжения  $\sigma_{xx}$  в узлах  $l$ -ого элемента.

Аналогично получаем дискретные аналоги для 2-ого и 3-его уравнений Бельтрами—Митчелла.

Полученные СЛАУ решаются методом сопряженных градиентов и уточняются по всему многоугольнику Вороного.

## § 2. Демонстрационный пример

Определить напряжения для неограниченной области с круговым отверстием радиуса  $R$  при однородном нормальном давлении  $p$ . Такая задача возникает в процессе бурения.

Изначально область разбивается на 7 суперэлементов (рис. 2). На каждом элементе производится триангуляция Делоне.

Начальные условия на отверстии задаются направляющими

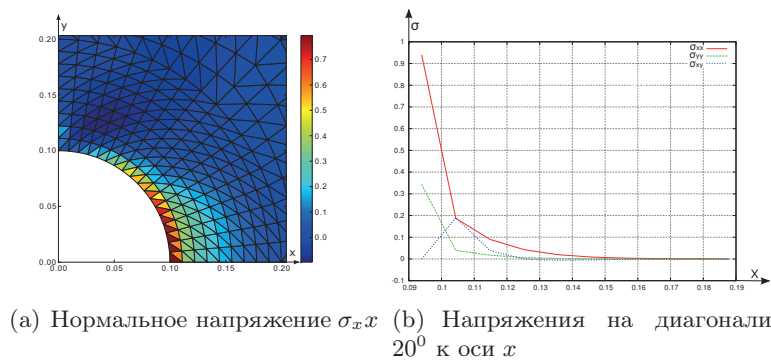


Рис. 3: Распределение давления по пласти

косинусами:

$$\sigma_{xx} = \frac{x}{R}p, \quad \sigma_{yy} = \frac{y}{R}p, \quad \sigma_{xy} = 0.$$

На рисунке 3 представлено распределение давления по пласти.

КЭМКО, триангуляция Делоне, диаграмма Вороного позволяют: точно описать геометрию области, задать начальные и граничные условия, произвести быстрый расчет, использовать локальные законы сохранения.

Таким образом, в совокупности они создают эффективный аппарат для численного решения задач со сложной геометрией.

### Литература

- [1] Скворцов А. В. Обзор алгоритмов построения триангуляции Делоне //Вычислительные методы и программирование. 2002. №3. С. 14-39.
- [2] Хан Х. Теория упругости: Основы линейной теории и её применения. Пер. с нем. М.: Мир, 1988. 344 с.
- [3] Сигерлинд Л. Применение метода конечных элементов. Пер. с англ. М.: Мир, 1979. 392 с.

УДК 681.324

Информационный портал лаборатории  
математической химии ИНК РАН

**Дель Торо Фонсека Д. А. (Уфа, БГУ)**

## **Введение**

Веб-программирование - это бурно развивающийся раздел программирования, ориентированный на разработку динамических Internet-приложений. Языки веб-программирования - это соответственно языки, которые в основном предназначены для работы с интернет-технологиями. Языки веб-программирования делятся на две группы: клиентские и серверные. Мы будем работать с серверными языками.

Когда пользователь дает запрос на какую-либо страницу (переходит на неё по ссылке или вводит адрес в адресной строке своего браузера), то вызванная страница сначала обрабатывается на сервере, то есть выполняются все программы, связанные со страницей, и только потом возвращается к посетителю по сети в виде файла. Этот файл может иметь расширения: HTML, PHP, ASP, Perl, SSI, XML, DHTML, XHTML.

Работа программ уже полностью зависима от сервера, на котором расположен сайт, и от того, какая версия того или иного языка поддерживается.

Важной стороной работы серверных языков является возможность организации непосредственного взаимодействия с системой управления базами данных (или СУБД) - сервером, на котором упорядоченно хранится информация, которая может быть вызвана в любой момент.

Веб-сайт создан с помощью скриптового языка PHP, СУБД PostgreSQL. Также при создании использовались каскадные таблицы стилей CSS.

## § 1. Инструменты для создания веб-сайт

PHP ([1]) (англ. PHP: Hypertext Preprocessor - "PHP: препроцессор гипертекста", англ. Personal Home Page Tools(устар.) - "Инструменты для создания персональных веб-страниц") - скриптовый язык программирования общего назначения, интенсивно применяющийся для разработки веб-приложений. В настоящее время поддерживается подавляющим большинством хостинг-провайдеров и является одним из лидеров среди языков программирования, применяющихся для создания динамических веб-сайтов.

В области программирования для Сети PHP - один из популярнейших скриптовых языков (наряду с JSP, Perl и языками, используемыми в ASP.NET) благодаря своей простоте, скорости выполнения, богатой функциональности, кроссплатформенности и распространению исходных кодов на основе лицензии PHP.

PostgreSQL ([2]) (произносится "Пост-Грес-Кью-Эл" или просто "постгрес") - свободная объектно-реляционная система управления базами данных (СУБД).

CSS ([3])(англ. Cascading Style Sheets - каскадные таблицы стилей) - технология описания внешнего вида документа, написанного языком разметки. Преимущественно используется как средство оформления веб-страниц в формате HTML и XHTML, но может применяться с любыми видами документов в формате XML, включая SVG и XUL. CSS используется создателями веб-страниц для задания цветов, шрифтов, расположения и других аспектов представления документа. Основной целью разработки CSS являлось разделение содержимого (написанного на HTML или другом языке разметки) и представления документа (написанного на CSS). Это разделение может увеличить доступность документа, предоставить большую гибкость и возможность управления его представлением, а также уменьшить сложность и повторяемость в структурном содержимом. Кроме того, CSS позволяет представлять один и тот же документ в различных стилях или методах вывода,

таких как экранное представление, печать, чтение голосом (специальным голосовым браузером или программой чтения с экрана), или при выводе устройствами, использующими шрифт Брайля.

## § 2. Схема строения веб-сайта

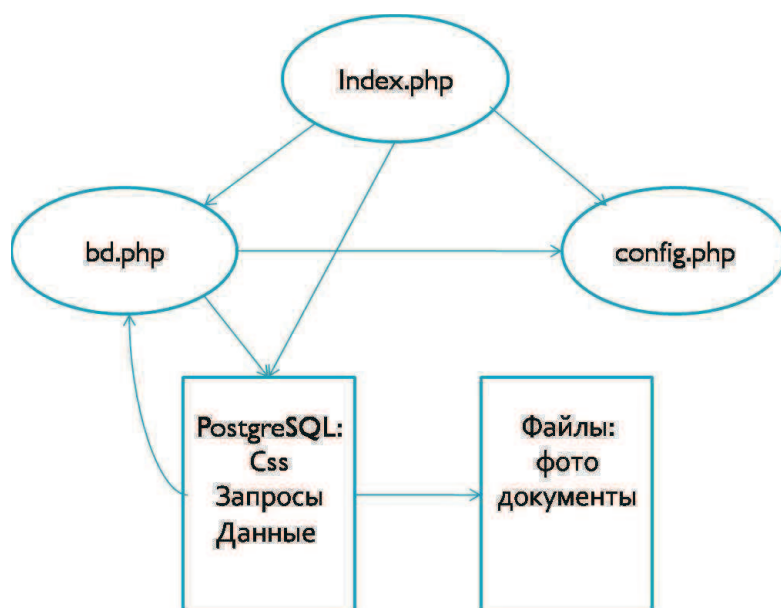


Рис.1

Всё начинается с захода на главную страницу index.php. В ней указан путь к 2 файлам bd.php и config.php, а также переход на страницу в базу данных. config.php содержит настройки подключения к нашей базе данных, а также другие константные величины. bd.php содержит наиболее значимые функции:

- pg\_connect - подключение к базе данных;
- function include\_php(\$cid) - функция обработки запросов;
- select\_content - функция, позволяющая редактировать и просматривать содержимое базы данных через интернет.

А также множество других подфункции.

## § 3. Дизайн веб-сайта



База данных хранит в себе практически всю информацию и статические данные. Благодаря функции `include_php($cid)` мы можем создавать запросы в самой базе данных, подключать дополнительные модули. Весь дизайн и оформление нашего сайта (Рис. 2) с помощью CSS содержится здесь же. (`css_main`, `css_base`)

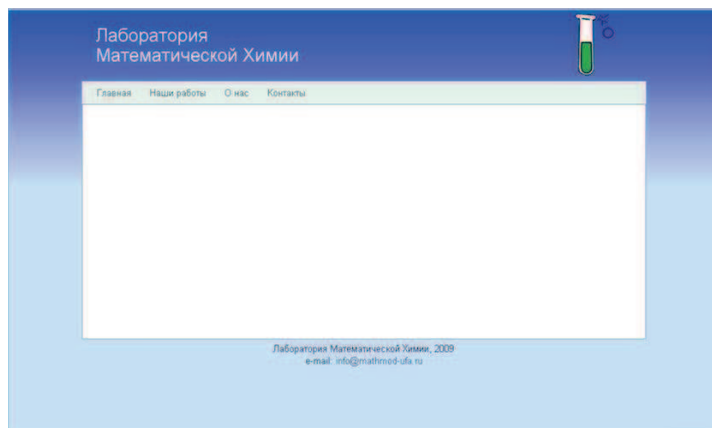


Рис.2

#### § 4. Разделы сайта

Наш вебсайт состоит из следующих разделов:

- главная страница, содержащая последние новости;
- анкета лаборатории математической химии ИНК РАН;
- список наших научных работ и презентаций;
- информация о сотрудниках лаборатории;
- контактные данные и схема проезда.

На рисунке (Рис.3) показана главная страница.

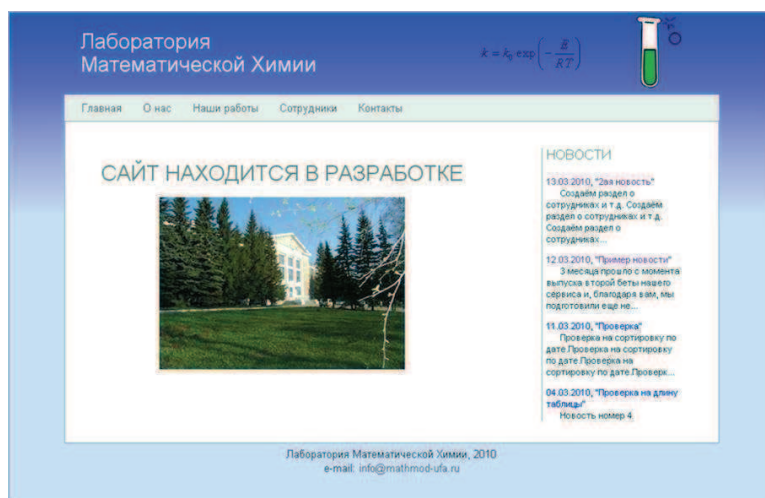


Рис. 3

## § 5. Результаты и заключение

Мы получили веб-сайт и нашей лаборатории, включающий в себя самые необходимые разделы. Зайдя на него пользователь сможет узнать о информации о нашей лаборатории, её сотрудниках (точнее, студентах), сможет узнать наше месторасположение, а также скачать научные работы.

Адрес веб-сайта: **[www.mathmod-ufa.ru](http://www.mathmod-ufa.ru)**

В дальнейшем планируется добавить информацию о кандидатах и докторах наук и возможность авторизации пользователей.

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] <http://www.php.ru/> Форум **PHP** программистов.
- [2] <http://postgresql.ru.net/> Форум пользователей **PostgreSQL**.
- [3] <http://www.htmlbook.ru/css/> Справочники **HTML** и **CSS**.

УДК 519.63

РЕШЕНИЕ (2+1D) УРАВНЕНИЯ СИНУС-ГОРДОНА  
В ПРИСУТСТВИИ ЛОКАЛЬНЫХ НЕОДНОРОДНОСТЕЙ

Екомасов А. Е. (Уфа, БГУ) Муртазин Р. Р. (Уфа, БГУ)

**Введение**

В последние годы динамика солитонов привлекает все большее внимание исследователей. Это связано и с тем, что хотя первоначально солитоны возникли при изучении интегрируемых систем, очень скоро они стали применяться и для неинтегрируемых систем, описывающих много физических приложений. Например, солитоны уравнения синус-Гордона в физике твердого тела описывают ДГ в магнетиках, дислокации в кристаллах, флюксоны в Джозефсоновских контактах и переходах и т.п. /1-3/. Во многих случаях поведение солитонов можно описать в модели точечной частицы, тогда их временная эволюция будет подчиняться простым дифференциальным уравнениям. Однако часто учет влияния возмущений приводит к существенному изменению структуры солитонов, которые уже нужно описывать как деформируемые частицы /1/. Например, много работ посвящено изучению влияния зависящей от времени неоднородной внешней силы /3-5/. Однако, не менее интересен и случай пространственной модуляции (неоднородности) периодического потенциала (ПМПП) [6]. В сильно неоднородном случае форма солитонов модифицированного уравнения синус-Гордона (МУСГ) должна претерпевать сильное изменение, следует ожидать возбуждения солитонных мод и излучение возбуждений отрывающихся от солитона в виде свободных волн. Наиболее интересен случай, когда размер кинка и размер, характеризующий неоднородность параметров одного и того же

порядка, тогда форма кинка должна сильно претерпевать изменения при прохождении через неоднородную область /1/. Исследование влияния больших возмущений на решение МУСГ в общем случае можно проводить только с помощью численных методов. В одномерном случае задача хорошо изучена, показана возможность зарождения локализованных приместных мод колебаний[7] и различного вида солитонов. Всё больший интерес учёных проявляется к решению двумерных задач[8].

### § 1. Численный метод и результаты

В работе исследуется нелинейная динамика кинков модифицированного уравнения синус-Гордона:

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} - \frac{K(x,y)}{2} \sin 2\theta = 0$$

, где  $K(x,y)$  - функция, определяющая зависимость от координат  $x$  и  $y$  неоднородности параметров системы. Наиболее интересен случай, когда ширина кинка и размер, характеризующий неоднородность параметра  $K$  одного и того же порядка, тогда структура кинка должна претерпевать сильные изменения при прохождении через двумерную неоднородную область. В дальнейшем для простоты будем брать  $K$  в виде:

$$K = \begin{cases} 1, & x < x_1, x > x_2, y < y_1, y > y_2 \\ K, & x_1 \leq x \leq x_2, y_1 \leq y \leq y_2 \end{cases}$$

, где  $W_x = x_1 - x_2, W_y = y_1 - y_2$  - ширина и длина двумерной области неоднородности параметра  $K$ .

Для исследования нелинейной динамики кинка в данной задаче применялись численные методы. Уравнение решалось численно при помощи метода конечных разностей с использованием явной схемы решения и условия сходимости явной схемы  $\frac{\tau}{h} \leq \frac{1}{4}$ . В качестве начального условия использовали его точное статическое решение:  $\theta_0(x, y) = 2 \arctg(e^x)$ . Граничные узлы сетки по переменной  $x$  имеют значения  $\theta(\pm N_x, y) = \theta_0(\pm N_x), \dot{\theta}(\pm N_x, y) =$

$\dot{\theta}_0(\pm N_x)$ , граничные узлы сетки по переменной  $y$  свободные. Для расчета применялась равномерная сетка по координатам  $x$  и  $y$  с шагом  $h$ , т.е.

$$\{x_i = h \cdot i, i = -N_x, \dots, N_x\} \{y_j = h \cdot j, j = -N_y, \dots, N_y\}$$

и сетка по времени  $t$  с шагом  $\tau$

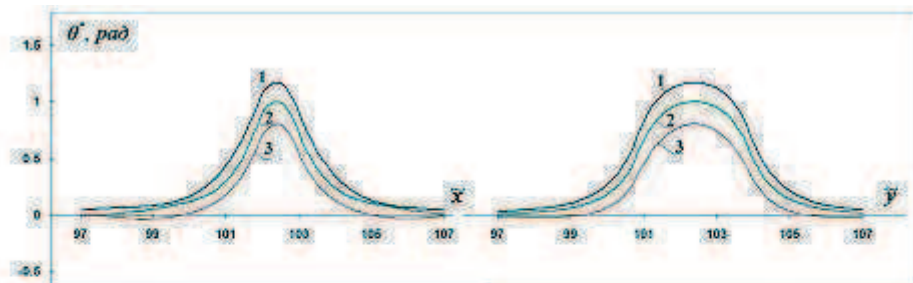
$$\{\tau_n = n \cdot \tau, n = 0, 1, \dots, N_t\}$$

, где  $N_x, N_y, N_t$  - целые числа. Значения  $N_x, N_y$  при расчетах брались в диапазоне от 400 до 1200. Проверялось при этом и то, чтобы изменение числа точек по оси  $x$  и  $y$  не влияло на основные результаты численных расчетов. Была написана программа, с помощью которой находились основные характеристики кинка и было проведено сравнение с известными аналитическими данными.

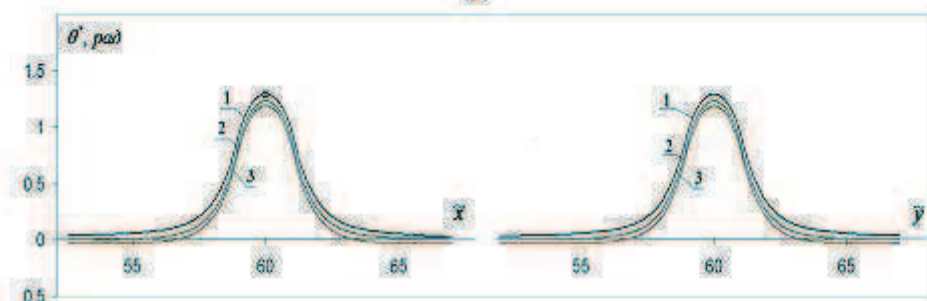
Рассмотрено движение кинка с постоянной начальной скоростью  $v=0.85$  через область неоднородности параметра  $K$ , центр которой расположен в точке  $x=13.9, y=0$ , с различными значениями параметров  $W_x, W_y, K$ . Обнаружен при этом процесс образования локализованных решений уравнения СГ, являющихся источником излучения свободных (объемных) волн. Последние, обладая скоростью большей, чем у кинка, обгоняют ее. В зависимости от значения величин  $W_x, W_y, K$  после прохождения кинка, в области неоднородности обнаружена возможность зарождения трех типов локализованных решений. Они могут быть типа: пульсон, пульсона, переходящего в двумерный солитон и двумерного солитона. Более подробно представим результаты, полученные для случая 2D солитона (рис. 1-3).

## ЛИТЕРАТУРА

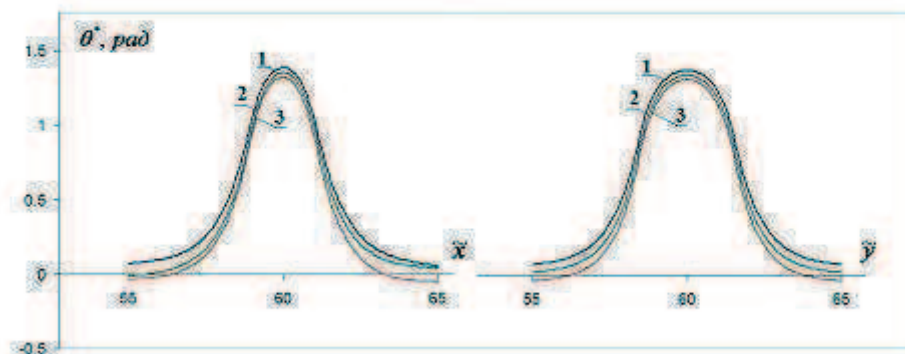
- [1] 1. Косевич А. М., Ковалев А. С. Введение в нелинейную физическую механику. // Киев: Наукова думка. 1989. 304 с.



а



б



в

Рис. 1.

Вид функции  $\theta(\tilde{x}^*, \tilde{y}, \tilde{t})$  (слева) и  $\theta(\tilde{x}, \tilde{y}^*, \tilde{t})$  (справа) в центре области

ПМПП( $x^*, y^*, t$ ) в разные моменты времени для случая:

а)  $W_x = 1, W_y = 3$  (1.  $\tilde{t} = 60.2$ , 2.  $\tilde{t} = 62.2$ , 3.  $\tilde{t} = 64.2$ );

б)  $W_x = 2, W_y = 2$  (1.  $\tilde{t} = 55$ , 2.  $\tilde{t} = 57.5$ , 3.  $\tilde{t} = 58.5$ );

в)  $W_x = 2, W_y = 3$  (1.  $\tilde{t} = 49.2$ , 2.  $\tilde{t} = 51.4$ , 3.  $\tilde{t} = 52.8$ ).  $K = -3.75, \tilde{v} = 0.85$

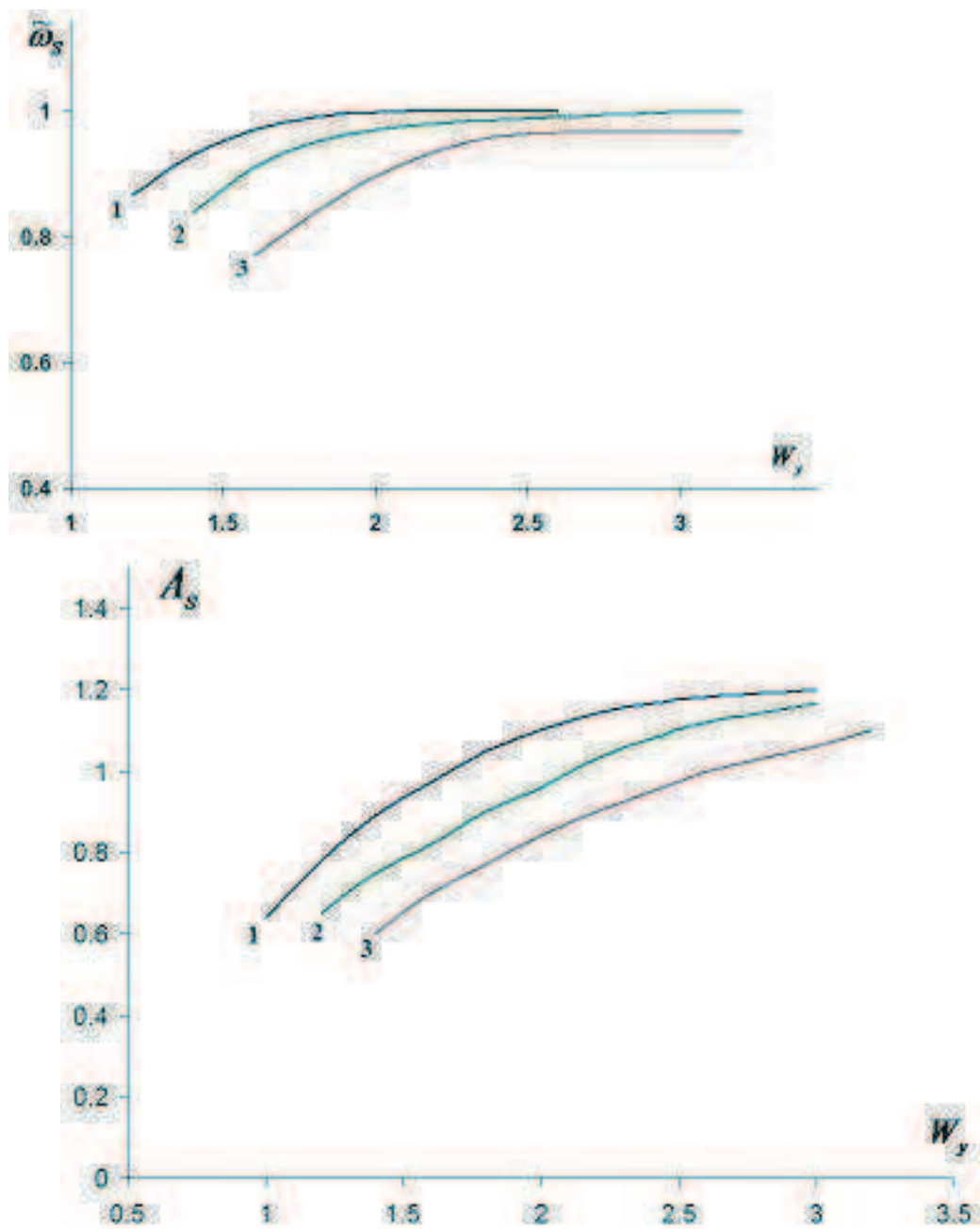


Рис. 2. Зависимость частоты  $W_s$  и амплитуды  $A_s$  колебания 2D-солитона от ширины  $W_y$  ПМПП для случая  $W_x = 1, h = 2500, a = 5e - 4, v = 0.85$  (1.  $K = -5$ , 2.  $K = -4.5$ , 3.  $K = -4$ ;) )

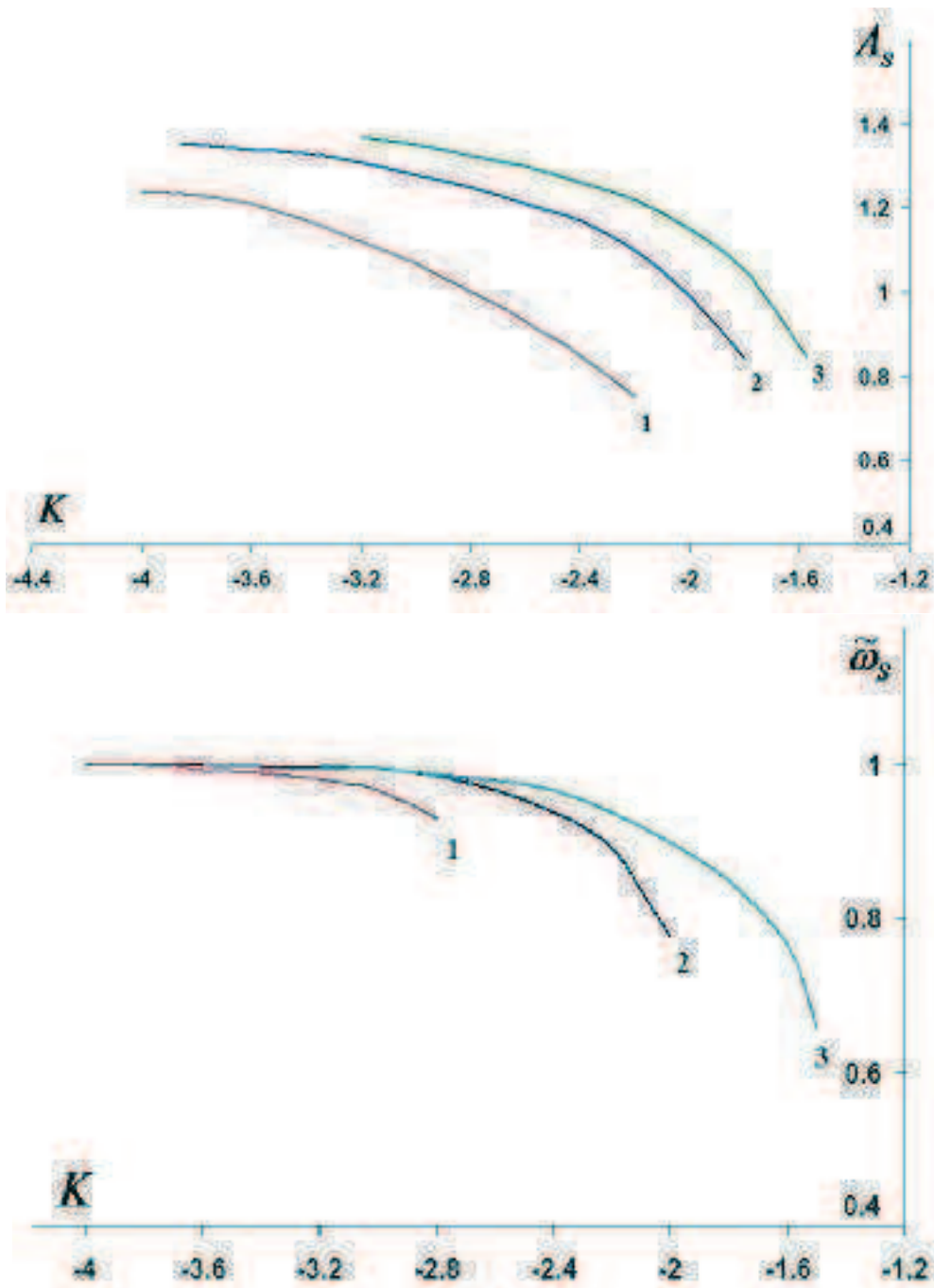


Рис. 3. Зависимость частоты  $W_s$  и амплитуды  $A_s$  колебания 2D-солитона от параметра  $K$  ПМПП для случая  $W_y = 2, h = 2500, a = 5e - 4, v = 0.85$  (1.  $W_x = 2$ , 2.  $W_x = 3$ , 3.  $W_x = 4$ ;) )



- [2] 2. Додд Р., Эйлбек Дж., Гиббон Дж., Моррис Х. Солитоны и нелинейные волновые уравнения.// Мир, М. 1988.- 693 с.
- [3] 3. Браун О. М.Б Кившарь Ю. С. Модель Френкеля-Конторовой: концепции, методы, приложения.// Физматлит. 2008. М. 519 с.
- [4] 4. Quintero N.R., Sanches A., Mertens F. G. Existence of internal modes of sine-Gordon kinks// Phys. Rev. E.- 2000.- V.62.- №1.- P.60 – 64.
- [5] 5. Gonzales J.A., Bellorin A., Guerrero I.E. Internal modes of sine-Gordon solitons with the presence of spatiotemporal perturbations // Phys. Rev. E.- 2002.- V.65.- 065601(R)- P.1-4.
- [6] 6. Fogel M.B., Trullinger S.E., Bishop A.R., Krumhandl J.A. Dynamics of sine-Gordon solitons in the presence of perturbations// Phys.Rev.B. - 1976. -Vol.15. - №3. - P.1578-1592.
- [7] 7. 1.Екомасов Е.Г., Азаматов Ш.А., Муртазин Р.Р. ФММ, 105 №4, 341, 2008.
- [8] 8. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы.// Наука, М. 1987.- 600 с.

УДК 519.6

## ОПТИМИЗАЦИЯ ПРОЦЕССА РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛЯ В АЛЮМИНИЕВОМ ЭЛЕКТРОЛИЗЕРЕ

**Закиева Г.Н. (Нефтекамский филиал БашГУ, г  
Нефтекамск, Россия)**

### **Введение**

Разработка математических моделей электрических полей в сложных трехмерных областях, создание эффективных алгоритмов, реализованных в виде программ, дает мощный инструмент для исследования и оптимизации процессов существующих производств. Проектирование электролизеров для производства цветных металлов связаны с разработкой математических моделей и программ, позволяющих проводить вычислительные эксперименты. В данной работе задача решается для того, чтобы оптимизировать процесс распределения электрического поля на аноде. Для решения рассматривается математическая модель электрического поля для электролизера в трехмерной области с неоднородной средой. Электролизер представляет собой вид параллелепипеда с анодом цилиндрической формы, погруженным в электролит.

Анод, помещенный в электролит при работе электролизера быстро разрушается, что приводит к остановке процесса и замене анода. В работе решается задача для того, чтобы оптимизировать процесс равномерного распределения тока за счет математической модели.

Для решения краевой задачи расчета электрического поля важным этапом является задание входной информации, описывающей геометрические границы области, а также экспериментальные поляризационные зависимости. На границах области задаются различные условия, но наличие нерегулярных границ в большинстве

практических задач не позволяет построить аналитическое решение дифференциальных уравнений, и численные методы стали единственным возможным средством получения точных и подробных результатов.

Для решения задачи токораспределения апробирован алгоритм, основанный на последовательном уточнении решений граничных интегральных уравнений для потенциала электрического поля в непересекающихся подобластях.

### Математическая модель

Введем следующие обозначения для областей и границ. Область интегрирования  $\Omega$  представим в виде объединения трех областей - анодной области  $\Omega_1$ , области электролита  $\Omega_2$  и катодной области  $\Omega_3$ :

$$\Omega = \Omega_1 + \Omega_2 + \Omega_3 = \sum_{o=1}^3 \Omega_o$$

Каждая из областей  $\Omega_o$ , в свою очередь, может состоять из  $M_o$  подобластей с различными электропроводностями

$$\Omega_o = \sum_{r=1}^{M_o} \Omega_{o,r}; o = 1, 2, 3.$$

Таким образом, общее количество областей с различной электропроводностью равно  $M = M_1 + M_2 + M_3$ , а вся область интегрирования  $\Omega$  является их объединением:

$$\Omega = \sum_{o=1}^3 \Omega_o = \sum_{o=1}^3 \sum_{r=1}^{M_o} \Omega_{o,r} \quad (1.1)$$

Такая модель соответствует электрохимическим системам, у которых аноды и катоды состоят из нескольких элементов, а электролит может включать проводящие неоднородности. Распреде-

ние потенциала электрического поля в многоэлементной электрохимической системе описывается уравнением

$$\Delta E = 0; \quad (1.2)$$

На границах каждой из подобластей сформулируем краевые условия. На одном из токопроводов, например, на внешней границе катодной области задается потенциал  $\varphi_k = 0$ :

$$E_{3,r}|_S = \varphi_k, \quad (1.3)$$

где  $r$  - принимает значение, имеющее смысл для конкретной ЭХС на катодной области  $\Omega_3$ . Известно также приложенное внешнее напряжение  $U = \varphi_a - \varphi_k$  равное в этом случае

$$E_{1,r}|_S = \varphi_a \quad (1.4)$$

Краевые условия на границах электроизоляторов, которыми являются внешние поверхности контейнера электролизера, электролита, и т.д., имеют вид:

$$\frac{\partial E_{o,r}}{\partial n}|_{S_{o,r}} = 0; o = 1, 2, 3, \quad (1.5)$$

где  $r$  принимает значения, которые имеют смысл в конкретной ЭХС.

На границах анод-электролит и катод-электролит заданы условия непрерывности плотности тока и скачка потенциала, обусловленного электродной поляризацией:

$$(E_{o,r} - E_{2,p})|_S = \eta_{o,r}(j); o = 1, 3, \quad (1.6)$$

$$\left(\sigma_{o,r} \frac{\partial E_{o,r}}{\partial n} + \sigma_{2,p} \frac{\partial E_{2,p}}{\partial n}\right)|_S = 0; o = 1, 3, \quad (1.7)$$

где  $\eta_{o,r}(j)$  - зависимость поляризации от плотности тока, - функция, определяемая по экспериментальным данным. Здесь  $S_{o,r}$  - граница между соседними подобластями  $\Omega_{o,r}$  и  $\Omega_{2,p}$ . Для таких подобластей, имеющих общую границу,  $S_{1,r} \equiv S_{2,p}$  или  $S_{3,r} \equiv S_{2,p}$ .

На границах анод-электролит и катод-электролит следствием электродной поляризации является наличие разрыва решения - скачка потенциала:

$$\eta_{o,r}(j) = E_{o,r} - E_{2,p}; o = 1, 3, \quad (1.8)$$

где  $E_{o,r}$  - потенциал со стороны электрода,  $E_{2,p}$  - потенциал со стороны электролита.

На других границах неоднородностей ставятся условия непрерывности функций потенциала и плотности тока:

$$(E_{o,r} - E_{o,p})|_S = 0; o = 1, 2, 3, \quad (1.9)$$

$$\left(\sigma_{o,r} \frac{\partial E_{o,r}}{\partial n} + \sigma_{2,p} \frac{\partial E_{2,p}}{\partial n}\right)|_S = 0; o = 1, 2, 3, \quad (1.10)$$

где  $S_{o,r}$  - граница между соседними подобластями  $\Omega_{o,r}$  и  $\Omega_{o,p}$ . Так как подобласти принадлежат одной области, то  $r \neq p$ . Естественно, что для соседних подобластей  $S_{o,r} \equiv S_{o,p}$ . Замыкающим соотношением для задачи является закон Ома, который на границах подобластей может быть записан в виде:

$$j_{o,r} = -\sigma_{o,r} \frac{\partial E_{o,r}}{\partial n}|_S; r = 1, 2, \dots, M_o; o = 1, 2, 3, \quad (1.11)$$

где  $j_{o,r}$  - нормальная составляющая плотности тока,  $E_{o,r}$  - потенциал электрического поля,  $n$  - вектор внутренней нормали к границе  $S$ .

Условимся, что на внутренних границах внутри областей  $\Omega_o$  ( $o = 1, 2, 3$ ) вектор нормали направлен от подобласти с меньшим номером к подобласти с большим номером.

Необходимым условием в задачах с отсутствующими источниками является выполнение балансовых соотношений по току

$$I = \int_{S_q} \sigma(q) \frac{\partial E}{\partial n} dS_q = 0, \quad (1.12)$$

где интеграл берется по любому замкнутому контуру.

Таким образом, сформулирована математическая модель (1.1 - 1.12) электрического поля в трехмерной области с неоднородной средой. В модели учитывается наличие двойного электрического слоя на границах электродов с электролитом, вследствие чего неизвестная функция потенциала терпит разрыв, который нелинейно зависит от плотности тока в данной точке.

### Алгоритм численного решения

Метод решения задачи, используемые в данной работе, основаны на том, что уравнение (1.2) эквивалентно следующей системе уравнений

$$\Delta E_{o,r}(p) \equiv \frac{\partial^2 E_{o,r}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_{o,r}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_{o,r}}{\partial z^2} = 0; p \in \Omega_{o,r}; r = 1, 2, \dots, M_o; o = 1, 2, 3. \quad (1.13)$$

Метод решения задачи заключается в следующем, например для анодной области, внутри которой ставятся условия сопряжения (1.9), (1.10). [1,5,8], где с учетом (1.13) для каждой из подобластей ( $r = 1, 2, \dots, M_a$ ) строится граничное интегральное уравнение с помощью интегральной формулы Грина, которое записывается в виде:

$$k(p)E_{1,r}(p) = \int_{S_{1,r}} (E_{1,r}(q) \frac{\partial}{\partial n_q} (\frac{1}{r(p,q)}) - \frac{1}{r(p,q)} \frac{\partial E_{1,r}(q)}{\partial n_q}) dS_q, \quad (1.14)$$

где  $k(p) = 4\pi$ , если точка  $p$  лежит внутри области  $\Omega_{1,r}$ ;  $k(p) = 2\pi$ , если точка принадлежит границе  $S_{1,r}$ ;  $k(p) = 0$ , если точка лежит вне области  $\Omega_{1,r}$ ;  $r(p,q) = \sqrt{(x_p - x_q)^2 + (y_p - y_q)^2 + (z_p - z_q)^2}$  - расстояние между точками  $p$  и  $q$ ;  $q \in S_{1,r}$ .

Следуя [2], получим выражение:

$$\sum_{r=1}^{M_1} k E_{1,r} = \sum_{r=1}^{M_1} \int_{S_{1,r}} (E_{1,r} \frac{\partial}{\partial n_q} (\frac{1}{r}) - \frac{1}{r} \frac{\partial E_{1,r}}{\partial n_q}) dS_q, \quad (1.15)$$

где аргументы  $p$  и  $q$  опущены с целью сокращения записи.

Предполагая, что точка принадлежит границе области  $\Omega_a$ , и учитывая краевые условия (1.9), (1.10) на внутренних границах области  $\Omega_a$ , после некоторых преобразований из (1.15) получим граничное интегральное уравнение для потенциала электрического поля

$$E_1(p) = \lambda \int_{S_1} K(p, q, E_1(q)) dS_q, \quad (1.16)$$

где  $\lambda = (2\pi \sum_{r=1}^{M_1} \sigma_{1,r})^{-1}$ , а ядро  $K(p, q, E_a(q))$  определяется различными соотношениями в зависимости от того, какой границе принадлежит точка  $q$ .

Уравнение (1.16) записано для анодной области. Уравнения для областей электролита и катода имеют аналогичный вид.

Для решения уравнения (1.16), в каждой из областей  $\Omega_o$ , ( $o = 1, 2, 3$ ) раздельно применяется итерационная процедура

$$E_o^{n+1}(p) = E_o^n(p) - \alpha(n)(E_o^n(p) - \lambda \int_{S_o} K(p, q, E_o^n(q)) dS), \quad (1.17)$$

где  $n$  - номер итерации;  $\alpha(n)$  - итерационный параметр, в общем случае зависящий от номера итерации и определяемый в ходе вычислительного эксперимента из условия наилучшей сходимости итерационного процесса. Итерационный процесс где  $n$  - номер итерации; - итерационный параметр, в общем случае зависящий от номера итерации и определяемый в ходе вычислительного эксперимента из условия наилучшей сходимости итерационного процесса. Итерационный процесс (1.17) оценивается по условию  $|E_o^{n+1}(p) - E_o^n(p)| < \varepsilon$  для всех  $p \in S_o$  и заданного  $\varepsilon > 0$ , определяющего точность результатов.

## Заключение

В работе рассматривается трехмерная задача, где целью является получение наиболее равномерного распределения плотности тока на границе анод - электролит. В качестве критерия равномерности использовалась величина

$$K_a = (j_{max} - j_{min})/j_{max},$$

где  $j_{max}, j_{min}$  - максимальная и минимальная плотности тока.

Для решения данной краевой задачи предлагается двухуровневый итерационный алгоритм на основе метода граничных элементов. Сущность метода состоит в преобразовании дифференциальных уравнений в эквивалентную систему интегральных уравнений в качестве первого шага задачи. Это приводит к возможности разбиения поверхности, ограничивающей область, на треугольные и четырехугольные граничные элементы. В качестве граничных элементов на боковых поверхностях применялись прямоугольники в цилиндрической системе координат, а для круговых и кольцевых границ использовались треугольные и четырехугольные граничные элементы. Общее количество граничных элементов, с которыми производились расчеты, изменялось в работе от 2 до 6 тысяч. В алгоритме с автоматическим изменением итерационного параметра время счета одного варианта находилось в пределах от 3 до 30 минут для процессора Pentium III.

#### Литература

- 1 *Арсенин В.Я.* Методы математической физики и специальные функции. М.: Наука, 1984. 383 с.
- 2 *Бобрик А.И., Михайлов В.Н.* Решение некоторых задач для уравнения Пуассона с граничными условиями IV рода: Журн. вычислит. матем. и матем. физики. 1974. Том 14, №1. С.126-134
- 3 *Бенерджи П., Баттерфилд Р.* Методы граничных элементов в прикладных науках. М.: Мир, 1984. 490 с.



- 4 *Болотнов А.М.* Методы граничных элементов в расчетах электрических полей электрохимических систем. Уфа: БашГУ, 2002. 143 с.
- 5 *Ильин В.П.* Численные методы решения задач электрофизики. М.: Наука, 1985. 334 с.
- 6 *Кронкрод А.С.* Узлы и веса квадратурных формул. М.: Наука, 1964. 144 с.
- 7 *Крылов В.И.* Приближенное вычисление интегралов. М.: Наука, 1967. 500 с.
- 8 *Соболев С.А.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1992. 431 с.

УДК 517.9

ПОСТРОЕНИЕ ОБЩЕГО РЕШЕНИЯ ОДНОЙ  
ДВУХКОМПОНЕНТНОЙ НЕЛИНЕЙНОЙ  
ГИПЕРБОЛИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ

Костригина О. С. (Уфа, УГАТУ) <sup>1</sup>

Введение

Один из способов классификации интегрируемых по Дарбу гиперболических систем уравнений

$$u_{xy} = F(u, u_x, u_y) \quad (u_{xy}^i = F^i, \quad i = 1, 2, \dots, n) \quad (1)$$

основан на изучении структуры их характеристических алгебр (см., например, [1],[2]).

Введем набор независимых переменных

$$u_1 = u_x, \quad \bar{u}_1 = u_y, \quad u_2 = u_{xx}, \quad \bar{u}_2 = u_{yy}, \dots$$

и обозначим через  $\bar{D}(D)$  — оператор полного дифференцирования по переменной  $y(x)$ .

**Определение 1.** Функция  $W(u, u_1, u_2, \dots, u_m)$  называется  $x$ -интегралом порядка  $m$  системы (1), если  $\bar{D}(W) = 0$ . Аналогично,  $y$ -интеграл  $m$ -го порядка — это функция  $\bar{W}(u, \bar{u}_1, \bar{u}_2, \dots, \bar{u}_m)$ , удовлетворяющая соотношению  $D(\bar{W}) = 0$ .

$X$ -интегралы  $W^1, W^2, \dots, W^k$  называются независимыми, если  $D^i W^j$  функционально независимы. В статье [3] показано, что максимальное число независимых  $x$ -интегралов равно порядку  $n$  исходной системы.

**Определение 2.** Система уравнений (1) называется интегрируемой по Дарбу, если у нее существует полный набор независимых  $x$ - и  $y$ -интегралов.

---

<sup>1</sup>Работа поддержана грантом РФФИ № 08-01-00440-а.

В настоящей работе рассматривается система уравнений

$$\begin{aligned} u_{xy}^1 &= \frac{u^2}{X} u_1^1 \bar{u}_1^1 + \left( \frac{1}{X} + \frac{1}{\alpha Y} \right) u^1 u_1^1 \bar{u}_1^2, \\ u_{xy}^2 &= \frac{u^1}{Y} u_1^2 \bar{u}_1^2 + \left( \frac{\alpha}{X} + \frac{1}{Y} \right) u^2 u_1^1 \bar{u}_1^2, \end{aligned} \quad (2)$$

$$X = u^1 u^2 + d_2, \quad Y = u^1 u^2 + c_2, \quad \frac{\alpha + 1}{\alpha} d_2 = (\alpha + 1) c_2,$$

( $c_2, d_2, \alpha$  – ненулевые постоянные), обладающая интегралами следующих порядков

$$\text{ord } \omega^1 = \text{ord } \bar{\omega}^1 = 1, \quad \text{ord } \omega^2 = \text{ord } \bar{\omega}^2 = 2. \quad (3)$$

Построено общее решение системы (2), (3) зависящее от четырех произвольных функций  $X(x), W(x), Y(y), \bar{W}(y)$ .

### § 1. Построение общего решения.

Построение общего решения системы уравнений (2) будем проводить основываясь на ее  $x$ - и  $y$ -интегралах:

при  $\alpha = -1$

$$\omega^1 = \frac{(u^2)^2 z^2}{2} (d_2 - c_2) - c_2 u_1^2 z, \quad \bar{\omega}^1 = \frac{(\bar{u}^1)^2 \bar{z}^2}{2} (c_2 - d_2) - d_2 \bar{u}_1^1 \bar{z}, \quad (4)$$

$$\omega^2 = \frac{z_1}{z} + \frac{d_2}{c_2} u^2 z, \quad \bar{\omega}^2 = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}} + \frac{c_2}{d_2} u^1 \bar{z}, \quad (5)$$

при  $\alpha \neq -1$

$$\omega^1 = \frac{u_1^2 - (u^2)^2 z \alpha}{z^\alpha}, \quad \bar{\omega}^1 = \frac{\bar{u}_1^1 - \frac{(u^1)^2 \bar{z}}{\alpha}}{\bar{z}^{\frac{1}{\alpha}}}, \quad (6)$$

$$\omega^2 = u^2 z - \frac{z_1}{z}, \quad \bar{\omega}^2 = u^1 \bar{z} - \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}}, \quad (7)$$

где

$$z = \frac{u_1^1}{X}, \quad \bar{z} = \frac{\bar{u}_1^2}{Y}, \quad z_1 = \frac{\partial z}{\partial x}, \quad \bar{z}_1 = \frac{\partial \bar{z}}{\partial y}.$$

Справедливо следующее утверждение.

**Основная Теорема.** Решение системы уравнений (2) при  $\alpha = -1$  дается формулами:

$$\begin{aligned} u^1(x, y) &= \left( \frac{2d_2}{c_2 + d_2} \cdot \frac{X(x)}{X(x)Y(y) + c} - \frac{\bar{W}'(y)}{\bar{W}(y)Y'(y)} \right) \frac{\bar{W}(y)}{W(x)} \times \\ &\quad \times (X(x)Y(y) + c)^{\frac{2c_2}{c_2 + d_2}}, \\ u^2(x, y) &= \left( \frac{2c_2}{c_2 + d_2} \cdot \frac{Y(y)}{X(x)Y(y) + c} - \frac{W'(x)}{W(x)X'(x)} \right) \frac{W(x)}{\bar{W}(y)} \times \\ &\quad \times (X(x)Y(y) + c)^{\frac{2d_2}{c_2 + d_2}}, \end{aligned} \quad (8)$$

где

$$c = \frac{c_2 + d_2}{2},$$

а при  $\alpha \neq -1$  имеет вид:

$$\begin{aligned} u^1(x, y) &= - (A(y) - (1 + \alpha)B(y)D(x) - (1 + \alpha)E(x))^{-\frac{1}{1+\alpha}} \times \\ &\quad \times \frac{\alpha}{1 + \alpha} \cdot \frac{c_2}{B'(y)} \left( A'(y) - (1 + \alpha)B'(y)D(x) \right), \\ u^2(x, y) &= (A(y) - (1 + \alpha)B(y)D(x) - (1 + \alpha)E(x))^{-\frac{\alpha}{1+\alpha}} \times \\ &\quad \times \left( B(y) + \frac{E'(x)}{D'(x)} \right). \end{aligned} \quad (9)$$

**Доказательство.** Нетрудно показать, что система уравнений (2) эквивалентна следующей

$$u_1^1 = z(u^1 u^2 + d_2), \quad \bar{u}_1^2 = \bar{z}(u^1 u^2 + c_2), \quad (10)$$

$$z_y = \frac{u^1 z \bar{z}}{\alpha}, \quad \bar{z}_x = \alpha u^2 z \bar{z}, \quad (11)$$

$$\frac{\alpha + 1}{\alpha} d_2 = (\alpha + 1) c_2,$$

где  $c_2, d_2, \alpha$  – ненулевые постоянные.

Рассмотрим случай  $\alpha = -1$ . Перепишем  $x$ -интегралы (4), (5) следующим образом:

$$u^2 z_1 + \frac{d_2}{c_2} (u^2 z)^2 = \omega^2 u^2 z, \quad u_1^2 z - \frac{d_2 - c_2}{2c_2} (u^2 z)^2 = -\frac{\omega^1}{c_2}. \quad (12)$$

Складывая последние соотношения, получаем:

$$p_x + \frac{1}{2} \left( \frac{d_2}{c_2} + 1 \right) p^2 = \omega^2 p - \frac{\omega^1}{c_2}, \quad (13)$$

где

$$p = u^2 z. \quad (14)$$

Решение уравнения (13) будем искать в виде

$$p(x, y) = q(x, y) + A(x),$$

где  $q$  - неизвестная функция переменного  $x$  и  $y$ , а  $A(x)$  - функция, удовлетворяющая уравнению Риккати

$$A'(x) + \frac{1}{2} \left( \frac{d_2}{c_2} + 1 \right) A^2(x) = \omega^2 A(x) - \frac{\omega^1}{c_2}.$$

Тогда уравнение (13) примет вид:

$$q_x + \frac{1}{2} \left( \frac{d_2}{c_2} + 1 \right) q^2 + \left( \left( \frac{d_2}{c_2} + 1 \right) A - \omega^2 \right) q = 0.$$

Полагая

$$A(x) = \frac{c_2}{d_2 + c_2} \omega^2(x),$$

получаем обыкновенное дифференциальное уравнение

$$q_x + \frac{1}{2} \left( \frac{d_2}{c_2} + 1 \right) q^2 = 0,$$

решение которого дается формулой

$$q = \frac{2c_2}{d_2 + c_2} \cdot \frac{1}{x + Y(y)}.$$

Таким образом, находим, что

$$p(x, y) = \frac{2c_2}{d_2 + c_2} \cdot \frac{1}{x + Y(y)} + \frac{c_2}{d_2 + c_2} \omega^2(x). \quad (15)$$

Далее разделим второе уравнение системы (12) на функцию  $p(x, y)$ . Имеем:

$$\frac{u_x^2}{u^2} - \frac{d_2 - c_2}{2c_2}p = -\frac{\omega^1}{c_2p}.$$

Учитывая соотношение (13), получаем

$$\frac{u_x^2}{u^2} = \frac{d_2}{c_2}p - \omega^2 + \frac{p_x}{p}.$$

Заменяя функцию  $p(x, y)$  по формуле (15), а также полагая, что

$$-\frac{c_2}{d_2 + c_2}\omega^2(x) = \frac{W'(x)}{W(x)}$$

получаем уравнение

$$\frac{u_x^2}{u^2} = \frac{p_x}{p} + \frac{2d_2}{d_2 + c_2} \cdot \frac{1}{x + Y(y)} + \frac{W'(x)}{W(x)},$$

и следовательно

$$u^2(x, y) = p(x, y)(x + Y(y))^{\frac{2d_2}{d_2+c_2}}W(x)Q(y), \quad (16)$$

где

$$p(x, y) = \frac{2c_2}{d_2 + c_2} \frac{1}{x + Y(y)} - \frac{W'(x)}{W(x)}. \quad (17)$$

Из уравнений (14), (16) определяем функцию  $z(x, y)$  как

$$z(x, y) = (x + Y(y))^{-\frac{2d_2}{d_2+c_2}} \frac{1}{W(x)Q(y)}. \quad (18)$$

Аналогично, полагая

$$\bar{p} = u^1 \bar{z}, \quad (19)$$

по другой характеристике получаем, что

$$u^1(x, y) = \bar{p}(x, y)(y + X(x))^{\frac{2c_2}{d_2+c_2}}\bar{W}(y)R(x), \quad (20)$$

$$\bar{p}(x, y) = \frac{2d_2}{d_2 + c_2} \frac{1}{y + X(x)} - \frac{\bar{W}'(y)}{\bar{W}(y)}, \quad (21)$$

$$\bar{z}(x, y) = (y + X(x))^{-\frac{2c_2}{d_2+c_2}} \frac{1}{\bar{W}(y)R(x)}. \quad (22)$$

Далее перейдем к рассмотрению эквивалентной системы (10), (11) при  $\alpha = -1$ . Уравнения (11) с учетом соотношений (14), (17), (19), (21) примут вид

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial y} \ln z &= -\frac{2d_2}{d_2 + c_2} \frac{1}{y + X(x)} + \frac{\bar{W}'(y)}{\bar{W}(y)}, \\ \frac{\partial}{\partial x} \ln \bar{z} &= -\frac{2c_2}{d_2 + c_2} \frac{1}{x + Y(y)} + \frac{W'(x)}{W(x)},\end{aligned}$$

и следовательно

$$\begin{aligned}z &= (y + X(x))^{-\frac{2d_2}{d_2+c_2}} \bar{W}(y) S(x), \\ \bar{z} &= (x + Y(y))^{-\frac{2c_2}{d_2+c_2}} W(x) \bar{S}(y).\end{aligned}\tag{23}$$

Сравнивая формулы (18), (22) и (23) получаем:

$$\begin{cases} \left( \frac{x + Y(y)}{y + X(x)} \right)^{-\frac{2d_2}{d_2+c_2}} = \bar{W}(y) S(x) W(x) Q(y) \\ \left( \frac{y + X(x)}{x + Y(y)} \right)^{-\frac{2c_2}{d_2+c_2}} = W(x) \bar{S}(y) \bar{W}(y) R(x). \end{cases}\tag{24}$$

Почередное логарифмирование и дифференцирование уравнений (24) по переменным  $x$  и  $y$  позволяет получить соотношение

$$\frac{Y'(y)}{(x + Y(y))^2} = \frac{X'(x)}{(y + X(x))^2},$$

из которого находим вид функций  $X(x)$  и  $Y(y)$ :

$$X(x) = \frac{c}{x + c_1} + c_3, \quad Y(y) = \frac{c}{y + c_3} + c_1.\tag{25}$$

Теперь система уравнений (24) примет вид:

$$\begin{cases} \left( \frac{x + c_1}{y + c_3} \right)^{-\frac{2d_2}{d_2+c_2}} = \bar{W}(y) S(x) W(x) Q(y) \\ \left( \frac{y + c_3}{x + c_1} \right)^{-\frac{2c_2}{d_2+c_2}} = W(x) \bar{S}(y) \bar{W}(y) R(x), \end{cases}$$

и следовательно

$$Q(y) = \frac{(y + c_3)^{\frac{2d_2}{d_2+c_2}}}{\bar{W}(y)}, \quad R(x) = \frac{(x + c_1)^{\frac{2c_2}{d_2+c_2}}}{W(x)}. \quad (26)$$

После точечной замены  $x + c_1 \rightarrow x$  и  $y + c_3 \rightarrow y$  из соотношений (16)-(18), (20)-(22), (25), (26) получаем:

$$\begin{aligned} u^1(x, y) &= \left( \frac{2d_2}{d_2 + c_2} \cdot \frac{x}{xy + c} - \frac{\bar{W}'(y)}{\bar{W}(y)} \right) (xy + c)^{\frac{2c_2}{d_2+c_2}} \frac{\bar{W}(y)}{W(x)} \\ u^2(x, y) &= \left( \frac{2c_2}{d_2 + c_2} \cdot \frac{y}{xy + c} - \frac{W'(x)}{W(x)} \right) (xy + c)^{\frac{2d_2}{d_2+c_2}} \frac{W(x)}{\bar{W}(y)} \end{aligned} \quad (27)$$

и

$$z(x, y) = (xy + c)^{-\frac{2d_2}{d_2+c_2}} \frac{\bar{W}(y)}{W(x)}, \quad \bar{z}(x, y) = (xy + c)^{-\frac{2c_2}{d_2+c_2}} \frac{W(x)}{\bar{W}(y)}.$$

И, наконец, из уравнений (10) находим, что

$$c = \frac{d_2 + c_2}{2}.$$

Заметим, что система уравнений (2) инвариантна относительно замены переменных  $x = X(x')$ ,  $y = Y(y')$ . Переходя к новым переменным  $x'$  и  $y'$  в уравнениях (27) получаем, что общее решение системы (2) при  $\alpha = -1$  задается формулами (8).

Далее рассмотрим случай  $\alpha \neq -1$ . Отметим, что в этом случае  $d_2 = \alpha c_2$ , поэтому далее считаем, что  $X = u^1 u^2 + \alpha c_2$  и  $Y = u^1 u^2 + c_2$ .

Перепишем  $x$ -интегралы (6), (7) в виде:

$$\omega^1 = \frac{u_1^2}{z^\alpha} - \alpha \frac{(u^2)^2}{z^{\alpha-1}}, \quad \alpha \frac{u^2}{z^\alpha} \omega^2 = \alpha \frac{(u^2)^2}{z^{\alpha-1}} - \alpha \frac{u^2 z_1}{z^{\alpha+1}}.$$

Складывая последние соотношения, а также полагая  $u^2 z^{-\alpha} = p$ , получаем уравнение

$$p_x = \omega^1 + \alpha \omega^2 p,$$



и следовательно

$$p = u^2 z^{-\alpha} = \left( B(y) + \int \omega^1(x) e^{-\alpha \int \omega^2(x) dx} dx \right) e^{\alpha \int \omega^2(x) dx}. \quad (28)$$

Далее, перепишем  $x$ -интеграл второго порядка (7) в виде:

$$\omega^2 z^{-1-\alpha} = u^2 z^{-\alpha} - z_1 z^{-2-\alpha},$$

или

$$\omega^2 z^{-1-\alpha} = p + \frac{1}{1+\alpha} \cdot \frac{\partial}{\partial x} (z^{-1-\alpha}).$$

Из последнего уравнения находим, что

$$z^{-1-\alpha} = \left( A(y) - (1+\alpha) \int p(x, y) e^{-(1+\alpha) \int \omega^2(x) dx} dx \right) e^{(1+\alpha) \int \omega^2(x) dx}. \quad (29)$$

После замены

$$\begin{aligned} \omega^2(x) &= W'(x), & \omega^1(x) e^{-\alpha W(x)} &= C'(x), \\ e^{-W(x)} &= D'(x), & C(x) e^{-W(x)} &= E'(x) \end{aligned}$$

уравнения (28), (29) примут вид:

$$\begin{aligned} u^2 z^{-\alpha} &= \left( B(y) + \frac{E'(x)}{D'(x)} \right) \frac{1}{(D'(x))^\alpha}, \\ z^{-1-\alpha} &= \frac{A(y) - (1+\alpha) B(y) D(x) - (1+\alpha) E(x)}{(D'(x))^{1+\alpha}}, \end{aligned}$$

и следовательно

$$\begin{aligned} z &= (A(y) - (1+\alpha) B(y) D(x) - (1+\alpha) E(x))^{-\frac{1}{1+\alpha}} D'(x), \\ u^2 &= (A(y) - (1+\alpha) B(y) D(x) - (1+\alpha) E(x))^{-\frac{\alpha}{1+\alpha}} \times \\ &\times \left( B(y) + \frac{E'(x)}{D'(x)} \right). \end{aligned} \quad (30)$$

Из второго уравнения (11) находим, что

$$\frac{\partial}{\partial x} \ln \bar{z} = \alpha u^2 z,$$

или, учитывая систему (30) имеем

$$\frac{\partial}{\partial x} \ln \bar{z} = \alpha \left( -\frac{1}{1+\alpha} \right) \frac{\partial}{\partial x} \ln(A(y) - (1+\alpha)B(y)D(x) - (1+\alpha)E(x))$$

и следовательно

$$\bar{z} = R(y)(A(y) - (1+\alpha)B(y)D(x) - (1+\alpha)E(x))^{-\frac{\alpha}{1+\alpha}}. \quad (31)$$

Из первого уравнения (11) определяем функцию  $u^1(x, y)$  как

$$u^1 = \frac{\alpha}{\bar{z}} \frac{\partial}{\partial y} \ln z,$$

или учитывая (30), (31) получаем, что

$$\begin{aligned} u^1 &= -\frac{\alpha}{1+\alpha} \cdot \frac{1}{R(y)} \cdot (A'(y) - (1+\alpha)B'(y)D(x)) \times \\ &\times (A(y) - (1+\alpha)B(y)D(x) - (1+\alpha)E(x))^{-\frac{1}{1+\alpha}}. \end{aligned} \quad (32)$$

Далее введем обозначение

$$A(y) - (1+\alpha)B(y)D(x) - (1+\alpha)E(x) = F(x, y), \quad (33)$$

тогда

$$\begin{aligned} A'(y) - (1+\alpha)B'(y)D(x) &= F'_y(x, y), \\ -(1+\alpha)(B(y)D'(x) + E'(x)) &= F'_x(x, y) \end{aligned}$$

и формулы (30), (31), (32) примут вид:

$$\begin{aligned} z &= F(x, y)^{-\frac{1}{1+\alpha}} D'(x), \quad u^2 = -\frac{1}{1+\alpha} \cdot \frac{F'_x(x, y)}{D'_x(x)} \cdot F(x, y)^{-\frac{\alpha}{1+\alpha}}, \\ \bar{z} &= F(x, y)^{-\frac{\alpha}{1+\alpha}} R(y), \quad u^1 = -\frac{\alpha}{1+\alpha} \cdot \frac{F'_y(x, y)}{R(y)} \cdot F(x, y)^{-\frac{1}{1+\alpha}}. \end{aligned}$$

И, наконец, подставляя последние соотношения в (10), получаем уравнение

$$-\frac{1}{1+\alpha} F''_{xy} = c_2 R(y) D'(x),$$

из которого, согласно (33), определяем функцию  $R(y)$  как

$$R(y) = \frac{B'(y)}{c_2}. \quad (34)$$

Таким образом, формулы (30), (32) и (34) определяют общее решение системы (2) при  $\alpha \neq -1$  (см. (9)).

Теорема доказана.

Автор выражает благодарность своему научному руководителю Анатолию Васильевичу Жиберу за ценные советы и внимание к работе.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. *Шабат А. Б., Ямилов Р. И.* Экспоненциальные системы типа 1 и матрицы Картана, Уфа: Препринт БФ АН СССР, 1981.
2. *Лезнов А. Н., Смирнов В. Г., Шабат А. Б.*, Группа внутренних симметрий и условия интегрируемости двумерных динамических систем // Теоретическая и математическая физика. 1982. Т. 51, № 1. С. 10–21.
3. *Гурьева А. М., Жибер А. В.*, О характеристическом уравнении квазилинейной гиперболической системы уравнений // Вестник УГАТУ. 2005. Т. 6, № 2 (13). С. 26–33.

УДК 517.9

УРАВНЕНИЕ КЛЕЙНА-ГОРДОНА  
И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ПОДСТАНОВКИ  
ВИДА  $v = \varphi(u, u_x)$

Кузнецова М. Н. (Уфа, УГАТУ)

Работа поддержана грантом РФФИ №10-01-91222-Ст-а

**Введение**

Одним из способов исследования интегрируемости нелинейных гиперболических уравнений является подход, основанный на применении дифференциальных подстановок. Тесная связь между дифференциальными подстановками и уравнениями лиувиллевого типа была обнаружена в [1]. Уравнениям вида

$$u_{xy} = f(u, u_x, u_y), \quad (1)$$

допускающим дифференциальные подстановки посвящены, например, работы [2]–[4]. В частности, в работе [3] показано, что необходимым условием наличия у уравнения (1) дифференциальной подстановки, переводящей решения этого уравнения в решения линейного уравнения, является ограниченность порядков инвариантов Лапласа его линеаризации. Не являясь обратимыми преобразованиями, дифференциальные подстановки сохраняют важные свойства уравнений, например, интегрируемость [5]. Кроме того, в ряде случаев наличие у уравнения дифференциальной подстановки позволяет получить его решения из решений некоторого хорошо изученного уравнения [6], [7].

Соотношение

$$v = \Phi \left( u, \frac{\partial u}{\partial x}, \dots, \frac{\partial^n u}{\partial x^n}, \frac{\partial u}{\partial y}, \dots, \frac{\partial^m u}{\partial y^m} \right) \quad (2)$$

называется дифференциальной подстановкой из уравнения (1) в уравнение

$$v_{xy} = g(v, v_x, v_y),$$

если для любого решения  $u(x, y)$  первого уравнения функция (2) удовлетворяет второму.

В настоящей работе описаны все нелинейные гиперболические уравнения вида (1), которые дифференциальной подстановкой

$$v = \varphi(u, u_x) \quad (3)$$

сводятся к уравнению Клейна-Гордона

$$v_{xy} = F(v). \quad (4)$$

## § 1. Дифференциальные подстановки специального вида

Нелинейные гиперболические уравнения, связанные преобразованием Беклунда с уравнением синус-Гордона приведены в работах [5], [6]. Все уравнения вида (1) и дифференциальные подстановки, переводящие их решения в решение уравнения Цицейки  $u_{xy} = \exp u + \exp(-2u)$  описаны в работе [7]. Основным результатом настоящей работы является следующее утверждение:

**Теорема 1.** *Нелинейное гиперболическое уравнение (1) дифференциальной подстановкой (3) сводится к уравнению Клейна-Гордона тогда и только тогда, когда оно принадлежит одному из следующих классов:*

*КЛАСС 1.* Уравнения этого класса имеют вид

$$u_{xy} = \frac{\alpha(u)}{\alpha'(u)} F' \left( F^{-1}(\alpha'(u)u_x) \right) - \frac{\alpha''(u)u_x u_y}{\alpha'(u)}, \quad (5)$$

$$u_{xy} = \sqrt{2u_y} F(G^{-1}(u_x)). \quad (6)$$

*Дифференциальные подстановки*

$$v = F^{-1}(\alpha'(u)u_x), \quad (7)$$

$$v = G^{-1}(u_x) \quad (8)$$

приводят уравнения (5), (6) к уравнению Клейна-Гордона (4) соответственно. Здесь функция  $G$  удовлетворяет соотношению  $G' = F$ .

*КЛАСС 2. Уравнения этого класса имеют вид*

$$u_{xy} = u_x \left( \psi(u, u_y) - \frac{\alpha''(u)}{\alpha'(u)} u_y \right), \quad (9)$$

$$u_{xy} = \exp u \sqrt{u_x^2 + b}. \quad (10)$$

*Дифференциальные подстановки*

$$v = \ln \alpha'(u) + \ln u_x, \quad (11)$$

$$v = u + \ln \left( u_x + \sqrt{u_x^2 + b} \right) \quad (12)$$

приводят уравнения (9), (10) к уравнению Лиувилля

$$v_{xy} = \exp v \quad (13)$$

соответственно. Здесь функции  $\psi$ ,  $\alpha$  связаны соотношением

$$\psi_u(u, u_y) + \psi_{u_y}(u, u_y) \left( \psi(u, u_y) - \frac{\alpha''(u)}{\alpha'(u)} u_y \right) = \alpha'(u), \quad (14)$$

$$\psi \neq \alpha, \quad \psi \neq 0.$$

*КЛАСС 3. Уравнение*

$$u_{xy} = \sin u \sqrt{1 - u_x^2}. \quad (15)$$

*дифференциальной подстановкой*

$$v = u \pm \arcsin u_x \quad (16)$$

связано с уравнением синус-Гордона

$$v_{xy} = \sin v. \quad (17)$$

*КЛАСС 4. Уравнение*

$$u_{xy} = u \quad (18)$$

*допускает автоподстановку*

$$v = au + bu_x. \quad (19)$$

*КЛАСС 5. Уравнения этого класса имеют вид:*

$$u_{xy} = p(u_y), \quad (20)$$

$$u_{xy} = c. \quad (21)$$

*Преобразование*

$$v = u + u_x \quad (22)$$

*является автоподстановкой для уравнения (21) и переводит уравнение (20) в уравнение  $v_{xy} = c$  при условии*

$$-p(u_y) - c \ln(p(u_y) - c) = u_y + d, \quad p' \neq 0. \quad (23)$$

*КЛАСС 6. Уравнения*

$$u_{xy} = \frac{b - \varphi_u(u, u_x)u_y}{\varphi_{u_x}(u, u_x)}, \quad (24)$$

$$u_{xy} = \frac{u_x u_y}{u} \quad (25)$$

*связаны с уравнением*

$$v_{xy} = 0 \quad (26)$$

*подстановками*

$$v = \varphi(u, u_x), \quad (27)$$

$$v = \ln u_x \quad (28)$$

*соответственно. Кроме того, уравнение вида (9) связано подстановкой (11) с уравнением (26), при условии*

$$\psi_u(u, u_y) + \psi_{u_y}(u, u_y) \left( \psi(u, u_y) - \frac{\alpha''(u)}{\alpha'(u)} u_y \right) = 0. \quad (29)$$

*Здесь  $a \neq 0$ ,  $c \neq 0$ ,  $b, d$  – произвольные постоянные.*

**Доказательство.** Здесь и далее будем придерживаться следующих правил. А именно, если функция  $u(x, y)$  является решением уравнения вида (1), те частные производные, которые можно выразить из уравнения (1) и его дифференциальных следствий будем исключать из всех выражений. Таким образом,  $u_{xy}$  всегда заменяется на  $f(u, u_x, u_y)$ ,  $u_{xyy}$  — на выражение

$$f_u u_y + f_{u_x} f + f_{u_y} u_{yy}$$

и т.д. Это означает, что всякая смешанная производная от  $u$  может быть выражена через

$$u, u_x, u_y, u_{xx}, u_{yy}, \dots \quad (30)$$

Функции (30) нельзя связать между собой, пользуясь уравнением (1) и его дифференциальными следствиями. Поэтому во всех выкладках они считаются независимыми переменными.

Дифференцируем соотношение (3) последовательно по переменным  $x, y$ , учитывая формулы (1), (4)

$$\begin{aligned} &(\varphi_{uu} u_x + \varphi_{uu_x} u_{xx}) u_y + \varphi_u f + (\varphi_{uu_x} u_x + \varphi_{u_x u_x} u_{xx}) f + \\ &+ \varphi_{u_x} (f_u u_x + f_{u_x} u_{xx} + f_{u_y} f) = F(\varphi). \end{aligned}$$

В силу независимости переменных  $u, u_x, u_y, u_{xx}$  последнее равенство эквивалентно системе

$$\begin{aligned} &\varphi_{uu_x} u_y + \varphi_{u_x} f_{u_x} + \varphi_{u_x u_x} f = 0, \\ &\varphi_{uu} u_x u_y + \varphi_u f + \varphi_{uu_x} f u_x + \varphi_{u_x} (f_u u_x + f_{u_y} f) = F(\varphi). \end{aligned} \quad (31)$$

Интегрируя первое равенство системы (31) по переменной  $u_x$  получаем, что

$$\begin{aligned} &\varphi_u u_y + \varphi_{u_x} f = \psi(u, u_y), \\ &\varphi_{uu} u_x u_y + \varphi_u f + \varphi_{uu_x} f u_x + \varphi_{u_x} (f_u u_x + f_{u_y} f) = F(\varphi). \end{aligned} \quad (32)$$

Мы рассматриваем дифференциальные подстановки вида (3) такие, что  $\varphi_{u_x} \neq 0$ , поэтому из первого соотношения (32) следует

$$f = \frac{\psi - \varphi_u u_y}{\varphi_{u_x}}. \quad (33)$$



Подставляем функцию (33) во второе равенство (32)

$$\varphi_{u_x} \psi_u u_x + \psi_{u_y} \psi - \psi_{u_y} \varphi_u u_y = \varphi_{u_x} F(\varphi). \quad (34)$$

Соотношение (34) дифференцируем по переменным  $u_x, u_y$

$$\boxed{\psi_{uu_y} (\varphi_{u_x} u_x)_{u_x} - \varphi_{uu_x} (\psi_{u_y} u_y)_{u_y} = 0.} \quad (35)$$

Здесь возможны следующие случаи:

$$\psi_{uu_y} = 0, \quad \varphi_{uu_x} = 0; \quad (36)$$

$$\psi_{uu_y} = 0, \quad (u_y \psi_{u_y})_{u_y} = 0; \quad (37)$$

$$\varphi_{uu_x} = 0, \quad (u_x \varphi_{u_x})_{u_x} = 0; \quad (38)$$

$$\psi_{uu_y} \cdot \varphi_{uu_x} \neq 0. \quad (39)$$

В случае (36) имеем

$$\psi = g(u) + p(u_y), \quad \varphi = q(u) + s(u_x). \quad (40)$$

Подставим формулы (40) в соотношение (34)

$$\begin{aligned} s'(u_x) u_x g'(u) + p'(u_y) (g(u) + p(u_y) - q'(u) u_y) = \\ = s'(u_x) F(\varphi(u, u_x)). \end{aligned} \quad (41)$$

В силу независимости переменных  $u_x, u_y$  последнее соотношение эквивалентно системе равенств

$$\begin{aligned} \left( g'(u) u_x - F(q(u) + s(u_x)) \right) s'(u_x) = \lambda(u), \\ p'(u_y) (q'(u) u_y - g(u) - p(u_y)) = \lambda(u). \end{aligned} \quad (42)$$

Используя независимость переменных  $u, u_y$  второе равенство системы (42) запишем следующим образом:

$$\lambda(u) = c_1 q'(u) + c_2 g(u) + c_3. \quad (43)$$

Теперь функцию  $\lambda$ , заданную формулой (43) подставим во второе соотношение (42)

$$q'(u)(u_y p'(u_y) - c_1) - g(u)(p'(u_y) + c_2) - p(u_y)p'(u_y) - c_3 = 0. \quad (44)$$

При  $p'(u_y) + c_2 = 0$  имеем

$$p(u_y) = -c_2 u_y + c_4. \quad (45)$$

При этом, формула (44) приобретает форму

$$q'(u)(-u_y c_2 - c_1) + c_2(-c_2 u_y + c_4) - c_3 = 0.$$

Учитывая независимость переменных  $u$ ,  $u_y$  приходим к системе равенств

$$-c_2 q'(u) - c_2^2 = 0, \quad -c_1 q'(u) + c_2 c_4 - c_3 = 0. \quad (46)$$

Теперь рассмотрим различные случаи значений постоянных  $c_1$ ,  $c_2$ . А именно, при  $c_1 = c_2 = 0$  из системы (46) следует, что  $c_3 = 0$ , а из формулы (45) –

$$p(u_y) = c_4. \quad (47)$$

Из формулы (43), имеем  $\lambda(u) = c_3$ , а из первого соотношения (42) получаем, что

$$g'(u)u_x - F(q(u) + s(u_x)) = 0. \quad (48)$$

Соотношение (48) дифференцируем по переменным  $u$ ,  $u_x$

$$g''(u)u_x - F'(q(u) + s(u_x))q'(u) = 0, \quad (49)$$

$$g'(u) - F'(q(u) + s(u_x))s'(u_x) = 0. \quad (50)$$

Если  $F' = 0$ , то  $g' = 0$  и  $F = 0$  (см. ф.-лы (50), (48)). В данном случае получаем, что уравнение

$$u_{xy} = \frac{1 - q'(u)u_y}{s'(u_x)}$$

дифференциальной подстановкой  $v = q(u) + s(u_x)$  сводится к уравнению (26).

При  $F' \neq 0$ ,  $q' \neq 0$  приходим к уравнению

$$u_{xy} = u_x \left( g(u) - \frac{g''(u)u_y}{g'(u)} \right),$$

связанному преобразованием  $v = \ln g'(u) + \ln u_x$  с уравнением Ливилля. Предположение  $q' = 0$  приводит к уравнению

$$u_{xy} = uF'(F^{-1}(u_x)),$$

сводящемуся подстановкой  $v = F^{-1}(u_x)$  к уравнению Клейна-Гордона (3).

Если  $c_1 = 0$ ,  $c_2 \neq 0$  получаем уравнения

$$u_{xy} = u_x, \quad u_{xy} = u_x \exp u,$$

решения которых связаны формулами

$$v = \ln u_x + a, \quad v = -u + \ln u_x + c$$

с уравнением (26) соответственно. Кроме того, находим уравнение (18) с автоподстановкой (19), а также уравнения (10), (15).

Случай  $c_1 \neq 0$ ,  $c_2 = 0$  дает уравнения

$$u_{xy} = \frac{c + u_y}{s'(u_x)}$$

и (26), решения которых связаны соотношением  $v = -u + s(u_x)$ .

При  $c_1 \cdot c_2 \neq 0$  имеем подстановку  $v = -u + s(u_x)$ , переводящую уравнение  $u_{xy} = 0$  в себя.

Пусть теперь  $p'(u_y) + c_2 \neq 0$ . Перепишем равенство (44) в виде

$$g(u) = q'(u) \frac{u_y p'(u_y) - c_1}{p'(u_y) + c_2} - \frac{p(u_y) p'(u_y) + c_3}{p'(u_y) + c_2}.$$

Независимость переменных  $u$ ,  $u_y$  позволяет записать последнее равенство следующим образом:

$$g(u) = c_4 q'(u) + c_5. \tag{51}$$

Подставим функцию (51) в соотношение (44)

$$q'(u)(u_y p'(u_y) - c_1) - (c_4 q'(u) + c_5)(p'(u_y) + c_2) - \\ - (p(u_y) p'(u_y) + c_3) = 0. \quad (52)$$

Дифференцируем соотношение (52) по переменной  $u$

$$q''(u)(u_y p'(u_y) - c_1 - c_4(p'(u_y) + c_2)) = 0.$$

Далее, нетрудно показать, что предположение  $q''(u) \neq 0$  приводит к случаю, рассмотренному выше. Таким образом,  $q(u) = au + b$  и мы находим уравнение (20), связанное подстановкой (22) с уравнением (21); автоподстановку для уравнения (21), а также уравнение (6) и соответствующее преобразование (8).

Случай (37) дает формулы (5), (7) и (24), (27).

При условии (38) находим уравнение (9), связанное подстановкой (11) с уравнением Лиувилля, если функции  $\psi$ ,  $\beta$  удовлетворяют соотношению (14) и с уравнением (26), если верно равенство (29). Теорема доказана.

Автор выражает благодарность своему научному руководителю Жиберу А. В. за постановку задачи и внимание к работе.

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] Соколов В. В. О симметриях эволюционных уравнений // УМН. 1988. Т. 43, № 5. С. 133–163.
- [2] S. Ya. Startsev. Differential substitutions of the Miura transformation type // 1998. Vol. 116, №. 3. P. 1001–1010.
- [3] Старцев С. Я. Об инвариантах Лапласа гиперболических уравнений, линеаризуемых дифференциальной подстановкой // Теор. и мат. физ. 1999. Т. 120, № 2. С. 237–247.
- [4] Старцев С. Я. О гиперболических уравнениях, допускающих дифференциальные подстановки // Теор. и мат. физ. 2001. Т. 127, № 1. С. 63–74.

- [5] *Жибер А. В., Соколов В. В.* Точно интегрируемые гиперболические уравнения лиувиллевского типа. // УМН. 2001. Т. 56. № 1. С. 63–106.
- [6] *Жибер А. В., Муртазина Р. Д.* Инварианты Лапласа и характеристические алгебры Ли // Проблемы теоретической и прикладной математики: Труды 30-й Региональной молодежной конференции. ИММ УрО РАН, Екатеринбург, 2008. С. 118–122.
- [7] *Кузнецова М. Н.* Нелинейные гиперболические уравнения и уравнение Цицейки // Фундаментальная математика и ее приложения в естествознании: Труды международной школы-конференции. БашГУ. 2009. Т. 1. С. 183–193.

УДК 534.112

ВОССТАНОВЛЕНИЕ ПОЛИНОМА В СЛУЧАЕ  
НЕРАСПАДАЮЩИХСЯ КРАЕВЫХ УСЛОВИЙ ЗАДАЧИ  
ШТУРМА - ЛИУВИЛЛЯ

Кумушбав Р.Р. (Уфа, БашГУ)

Введение

На практике часто встречаются такие ситуации, когда спектральный параметр входит в краевое условие.

Рассмотрим следующую задачу.

$$y'' + p_1(x, \lambda)y' + p_2(x, \lambda)y = 0, \quad (1)$$

$$a(\lambda)y'(0) + b(\lambda)y(0) = 0, \quad (2)$$

$$c(\lambda)y'(1) + d(\lambda)y(1) = 0, \quad (3)$$

где  $\lambda$  - спектральный параметр,  $x \in [0, 1]$ ,  $a(\lambda), b(\lambda), c(\lambda), d(\lambda)$  - функции, коэффициенты которых не обращаются в нуль одновременно.

В работе [1] сформулирована следующая задача. Пусть  $d(\lambda)$  является многочленом следующего вида:

$d(\lambda) = d_0 + d_1\lambda + d_2\lambda^2 + \dots + d_{m-1}\lambda^{m-1}$ , требуется найти  $k$  из  $m$  коэффициентов  $d_0, d_1, d_2, \dots, d_{m-1}$ , если остальные  $m - k$  коэффициентов известны. Функции  $p_1(x, \lambda), p_2(x, \lambda), a(\lambda), b(\lambda), c(\lambda)$  - являются заданными, известно так же  $k$  ненулевых попарно-различных собственных значений задачи (1) – (3).

Была сформулирована и доказана следующая теорема. Если  $p_1(x, \lambda), p_2(x, \lambda)$  - непрерывно дифференцируемые функции по  $\lambda$  и по  $x$ , а функции  $a(\lambda), b(\lambda), c(\lambda)$  - непрерывно дифференцируемые функции по  $\lambda$ , то для любых  $k$  ненулевых попарно различных собственных значений  $\lambda_i$ , где  $i = 1, k$  задачи (1) – (3), для которых

$c(\lambda_i) \neq 0$ , однозначно определяет  $k$  последовательных коэффициентов  $d_j$ , ( $j = s + 1, s + 2, \dots, s + k, s \in N$ ) краевого условия (3).

В работах [2, 3] показано, что произвольный полином от спектрального параметра степени  $n - 1$  из краевого условия задачи Штурма-Лиувилля однозначно восстанавливает по  $n$  ненулевым попарно-различным собственным значениям. Однако в [2, 3] задачи нахождения полинома от спектрального параметра лишь в случае, когда условия задачи Штурма-Лиувилля являются распадающимися. Случай нераспадающихся краевых условий для данной обратной задачи не рассматривался.

В настоящей работе получено обобщение этого результата для следующей краевой задачи.

$$y'' + p_1(x, \lambda)y' + p_2(x, \lambda)y = 0, \quad (4)$$

$$U_1 = a_{11}(\lambda)y'(0) + a_{12}(\lambda)y(0) + a_{13}(\lambda)y'(1) + a_{14}(\lambda)y(1) = 0, \quad (5)$$

$$U_2 = a_{21}(\lambda)y'(0) + a_{22}(\lambda)y(0) + a_{23}(\lambda)y'(1) + a_{24}(\lambda)y(1) = 0, \quad (6)$$

где  $\lambda$  - спектральный параметр,  $x \in [0, 1]$ , причем

$$|a_{11}(\lambda)| + |a_{12}(\lambda)| + |a_{13}(\lambda)| + |a_{14}(\lambda)| \neq 0,$$

$$|a_{21}(\lambda)| + |a_{22}(\lambda)| + |a_{23}(\lambda)| + |a_{24}(\lambda)| \neq 0, \text{ при любых } \lambda;$$

функции  $p_1(x, \lambda), p_2(x, \lambda), a_{11}(\lambda), a_{12}(\lambda), a_{13}(\lambda), a_{14}(\lambda), a_{21}(\lambda), a_{22}(\lambda), a_{23}(\lambda)$  являются заданными, известно так же  $n$  ненулевых попарно различных собственных значений задачи (4) – (6);  $a_{24}(\lambda)$  является полиномом следующего вида:  $a_{24}(\lambda) = \sum_{j=0}^{n-1} a_{24}^j \lambda^j$ , где  $a_{24}^j \in \mathbb{C}$

### § 1. Доказательство теоремы о восстановлении полинома в краевом условии.

**Теорема 1.** Если  $p_1(x, \lambda), p_2(x, \lambda)$  - непрерывно дифференцируемые функции по  $x$  и по  $\lambda$ ,  $a_{11}(\lambda), a_{12}(\lambda), a_{13}(\lambda), a_{14}(\lambda), a_{21}(\lambda), a_{22}(\lambda), a_{23}(\lambda)$  - непрерывно дифференцируемы по  $\lambda$  и

$$|a_{11}(\lambda)| + |a_{12}(\lambda)| + |a_{13}(\lambda)| + |a_{14}(\lambda)| \neq 0,$$

$$|a_{21}(\lambda)| + |a_{22}(\lambda)| + |a_{23}(\lambda)| + |a_{24}(\lambda)| \neq 0,$$

то любые  $n$  ненулевых попарно различных собственных значений  $\lambda_i$ , ( $i = 1..n$ ) задачи (4) – (6) для которых  $(a_{21}(\lambda_i)y_2(1, \lambda_i) + a_{13}(\lambda_i)y_1'(1, \lambda_i)y_2(1, \lambda_i) - a_{11}(\lambda_i)y_1(1, \lambda_i) - a_{13}(\lambda_i)y_1(1, \lambda_i)y_2'(1, \lambda_i)) \neq 0$  однозначно определяют  $n$  последовательных коэффициентов  $a_{24}^j$ ,  $j = 0..n - 1 \in \mathbb{N}$  краевого условия (6)

Доказательство. Обозначим через  $y_1(x, \lambda)$  и  $y_2(x, \lambda)$  линейно независимые решения дифференциального уравнения (4), удовлетворяющего в точке  $x = 0$  условиям

$$y_1(0, \lambda) = 1, \quad y_1'(0, \lambda) = 0, \quad y_2(0, \lambda) = 0, \quad y_2'(0, \lambda) = 1. \quad (7)$$

Числа  $\lambda_i$  являются корнем характеристического определителя  $\Delta(\lambda)$ , поэтому удовлетворяют следующему уравнению:

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} U_1(y_1) & U_1(y_2) \\ U_2(y_1) & U_2(y_2) \end{vmatrix} = 0.$$

Учитывая уравнение (7) получаем

$$a_{24}(\lambda_i)(a_{12}(\lambda_i)y_2(1, \lambda_i) + a_{13}(\lambda_i)y_1'(1, \lambda_i)y_2(1, \lambda_i) - a_{11}(\lambda_i)y_1(1, \lambda_i) - a_{13}(\lambda_i)y_1(\lambda_i)y_2'(1, \lambda_i)) + a_{23}(\lambda_i)(a_{12}(\lambda_i)y_2'(1, \lambda_i) + a_{14}(\lambda_i)y_1(1, \lambda_i)y_2'(1, \lambda_i) - a_{11}(\lambda_i)y_1'(1, \lambda_i) - a_{14}(\lambda_i)y_1'(1, \lambda_i)y_2(1, \lambda_i)) - a_{22}(\lambda_i)(a_{11}(\lambda_i) + a_{13}(\lambda_i)y_2'(1, \lambda_i) + a_{14}(\lambda_i)y_2(1, \lambda_i)) + a_{21}(\lambda_i)(a_{12}(\lambda_i) + a_{13}y_1'(1, \lambda_i) + a_{14}(\lambda_i)y_1(1, \lambda_i))) = 0$$

Обозначим  $a_{12}(\lambda_i)y_2(1, \lambda_i) + a_{13}(\lambda_i)y_1'(1, \lambda_i)y_2(1, \lambda_i) - a_{11}(\lambda_i)y_1(1, \lambda_i) - a_{13}(\lambda_i)y_1(\lambda_i)y_2'(1, \lambda_i) = A(\lambda_i)$ , а всю остальную часть через  $B(\lambda_i)$ , тогда  $a_{24}(\lambda_i)$  будет иметь следующий вид

$$a_{24}^0 + a_{24}^1\lambda + a_{24}^2\lambda^2 + \dots + a_{24}^{n-1}\lambda^{n-1} = \frac{B(\lambda_i)}{A(\lambda_i)}, \quad (8)$$

по условию теоремы  $A(\lambda_i) \neq 0$ ,

Равенство (8) представляет собой систему  $n$  линейных уравнений относительно  $n$  неизвестных коэффициентов  $a_{24}^j$  краевого условия (6). Определителем этой системы является минор  $n$ -го порядка определителя Вандермонда. Поскольку собственные значения  $\lambda_i$  ( $i = 1..n$ ) попарно различны и отличны от нуля, то определитель системы уравнений (8) также отличен от нуля, поэтому система (8) имеет однозначное решение. Таким образом показано



что полином  $a_{24}(\lambda)$  однозначно восстанавливается, что и требовалось доказать.

## § 2. Контрпример.

**Пример 1.** Пусть  $\lambda_1 = \pi/2$ , и  $a_{12}(\lambda_1) = 0, a_{13}(\lambda_1) = 0, a_{22}(\lambda_1) = 0, a_{23}(\lambda_1) = 0, a_{11}(\lambda_1) \neq 0, a_{14}(\lambda_1) \neq 0, a_{21}(\lambda_1) \neq 0, a_{24}(\lambda_1) \neq 0$

Рассмотрим следующую спектральную задачу.

$$-y'' = \lambda^2 y$$

$$a_{11}(\lambda)y'(0) + a_{14}(\lambda)y(1) = 0$$

$$a_{21}(\lambda)y'(0) + a_{24}(\lambda)y(1) = 0$$

Характеристический определитель системы имеет следующий вид:

$$\Delta(\lambda) = a_{14}(\lambda)a_{21}(\lambda) \cos \lambda - a_{24}(\lambda)a_{11}(\lambda) \cos \lambda = 0$$

$\lambda_1 = \pi/2$  является собственным значением задачи, и равенство  $\Delta(\lambda_1) = 0$ , но при данных условиях в уравнение (8)  $A(\lambda_1) = 0$ , что противоречит условию теоремы, а именно однозначное восстановление коэффициентов  $a_{24}$  для данной спектральной задачи невозможно.

## § 3. Заключение.

Таким образом показано, что и в случае нераспадающихся краевых условий теоремы, доказанная в [2, 3], сохраняет свою силу. А именно, произвольный полином от спектрального параметра степени  $n - 1$  краевого условия задачи Штурма-Лиувилля с нераспадающимися краевыми условиями однозначно восстанавливается по  $n$  ненулевым попарно различным собственным значениям.

Полученный результат может быть применен к задаче акустической диагностики об определении параметров закрепления сложной механической системы.

#### ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Ахтямов А.М.* Об определении краевого условия по конечному набору собственных значений // Дифференциальные уравнения. 1999. Т.35. №8. С.1127-1128.
- [2] *Садовничий В.А., Султанаев Я.Т., Ахтямов А.М.* Обратные задачи Штурма-Лиувилля с нераспадающимися краевыми условиями.// - М.: Изд-во Моск. ун-та, 2009. - 184 с.
- [3] *Ахтямов А.М.* Теория идентификации краевых условий /А.М. Ахтямов: Отд. физ.-мат. и техн. АН РБ.- Уфа: Гилим 2008.-300с.

УДК 519.6:517.58

## НЕЛИНЕЙНЫЕ ЗАДАЧИ ОПТИМИЗАЦИИ В ПРОИЗВОЛЬНОЙ ВЫПУКЛОЙ ОБЛАСТИ

Манапова А. Р. (Уфа, БГУ)

### Введение

В данной работе исследуются задачи оптимального управления системами нелинейного типа с распределенными параметрами, описываемыми квазилинейными уравнениями эллиптического типа, с управлениями в переменных коэффициентах при старших производных в произвольных выпуклых областях. Построены разностные аппроксимации исходных экстремальных задач и установлены оценки скорости сходимости аппроксимаций по состоянию и функционалу, слабая сходимость по управлению. Проведена регуляризация аппроксимаций.

### § 1. Постановка задач и их корректность

Пусть управляемый процесс описывается задачей Дирихле с переменными коэффициентами:

$$\begin{aligned} - \sum_{\alpha=1}^2 \frac{\partial}{\partial \xi_\alpha} \left( k_\alpha(\xi) \frac{\partial u}{\partial \xi_\alpha} \right) + \sum_{\alpha=1}^2 b_\alpha(\xi) \frac{\partial u}{\partial \xi_\alpha} + d(\xi)q(u) = f(\xi), \quad \xi \in \Omega, \\ u(\xi) = 0, \quad \xi \in \Gamma, \end{aligned} \tag{1}$$

в области  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  произвольной формы. Будем предполагать, что  $b_\alpha, d, f, q(u)$ ,  $\alpha = 1, 2$  – заданные функции;  $g = (g_1, g_2) = (k_1, k_2)$  – управление. Относительно заданных функций будем предполагать:  $b_\alpha \in L_\infty(\Omega) : \zeta_\alpha \leq b_\alpha(\xi) \leq \bar{\zeta}_\alpha$  п.в. на  $\Omega$ ,  $\alpha = 1, 2$ ;  $q$  определена на  $\mathbb{R}$  со значениями в  $\mathbb{R}$ ,  $q(0) = 0$ ,  $0 \leq q_0 \leq$

$[q(s_1) - q(s_2)]/(s_1 - s_2) \leq L_q < \infty$ , для всех  $s_1, s_2 \in \mathbb{R}$ ,  $s_1 \neq s_2$ ;  
 $d \in L_\infty(\Omega) : \zeta_3 \leq d(\xi) \leq \bar{\zeta}_3$  п.в. на  $\Omega$ ,  $f \in L_2(\Omega)$ .

Введем множество допустимых управлений

$$U = \prod_{k=1}^2 U_k \subset B = W_\infty^1(\Omega) \times W_\infty^1(\Omega),$$

$$U_\alpha = \left\{ g_\alpha \in W_\infty^1(\Omega) : 0 < \nu \leq g_\alpha(\xi) \leq \bar{\nu}, \quad \left| \frac{\partial g_\alpha}{\partial \xi_\beta} \right| \leq R_\beta, \right. \\ \left. \beta = 1, 2, \text{ п.в. на } \Omega \right\}, \quad \alpha = 1, 2, \quad (2)$$

где  $R_\alpha, \nu, \bar{\nu}$  - заданные числа,  $R_\alpha > 0$ ,  $\alpha = 1, 2$ ; п.в. - почти всюду.

Предполагается выполнение следующих условий:

$$\delta_0 = \max_{\substack{\epsilon_1, \epsilon_2 > 0 \\ \epsilon_1 + \epsilon_2 \leq \nu}} \left\{ \frac{\nu - (\epsilon_1 + \epsilon_2)}{D^2} + \zeta_3 - \frac{m^2}{4\epsilon_1} - \frac{p^2}{4\epsilon_2} \right\} > 0; \quad (3)$$

$$-m \leq \zeta_1 \leq \bar{\zeta}_1 \leq m, \quad -q \leq \zeta_2 \leq \bar{\zeta}_2 \leq q, \quad m, q = \text{const} > 0; \\ \zeta_3 \leq \bar{\zeta}_3, \quad \zeta_3, \bar{\zeta}_3 = \text{const}; \quad D = \text{diam } \Omega.$$

Зададим функционал цели в виде

$$J(g) = \int_{\Omega} |u(\xi, g) - u_0(\xi)|^2 d\Omega, \quad (4)$$

где  $u_0 \in W_2^1(\Omega)$  - заданная функция,  $u(g)$  - функция состояния системы, соответствующая управлению  $g$ .

Под решением задачи (1) при фиксированном управлении  $g \in U$  понимается функция  $u \equiv u(g) \in W_2^1(\Omega) \equiv V$ , удовлетворяющая для  $\forall \eta \in V$  тождеству

$$\int_{\Omega} \left\{ \sum_{\alpha=1}^2 k_\alpha(\xi) \frac{\partial u}{\partial \xi_\alpha} \frac{\partial \eta}{\partial \xi_\alpha} + \sum_{\alpha=1}^2 b_\alpha(\xi) \frac{\partial u}{\partial \xi_\alpha} \eta + d(\xi) q(u) \eta \right\} d\Omega = \int_{\Omega} f(\xi) \eta d\Omega. \quad (5)$$

При сделанных предположениях задача (1) однозначно разрешима в  $W_2^1(\Omega)$  при каждом фиксированном управлении  $g \in U$  (см. [1]). Из результатов в [1] следует, что обобщенное (из  $W_2^1(\Omega)$ ) решение задачи (1) принадлежит также пространству  $W_{2,0}^2(\Omega)$  и для любого  $g \in U$  справедлива априорная оценка

$$\|u(g)\|_{W_2^2(\Omega)} \leq C \|f\|_{L_2(\Omega)}. \quad (6)$$

Через  $C$  здесь и в дальнейшем будем обозначать положительные константы, не зависящие от управления  $g$ , шагов вводимых далее сеток и от сеточного управления  $\Phi_h \in U_h$ ;  $W_{2,0}^2(\Omega) = W_2^2(\Omega) \cap W_2^1(\Omega)$ .

**Теорема 1.** Пусть выполнены все условия при постановке задачи оптимального управления (1)- (4). Тогда существует, по крайней мере, одно оптимальное управление  $g_* \in U$  задачи (1)- (4), т.е.  $J_* = \inf\{J(g) : g \in U\} > -\infty$ ,  $U_* = \{g_* \in U : J(g_*) = J_*\} \neq \emptyset$ , множество точек минимума  $U_*$  функционала цели  $J(g)$  слабо компактно в  $H = L_2(\Omega)$ . Любая минимизирующая последовательность  $\{g^{(n)}\}_{n=1}^\infty \subset U$  слабо в  $H$  сходится к множеству  $U_*$  точек минимума функционала  $J(g)$ .

Отметим, что из теоремы 1 следует существование решения задачи (1)- (4), но решение этой задачи, вообще говоря, может быть не единственным.

## § 2. Разностная аппроксимация задач управления. Корректность аппроксимаций

В связи с численным решением задач оптимального управления существенный интерес представляет вопрос об аппроксимации бесконечномерных задач (1)- (4) последовательностями конечномерных задач оптимального управления.

Задаче оптимального управления (1)- (4) поставим в соответствие следующую разностную аппроксимацию: минимизировать функционал

$$J_h(\Phi_h) = \sum_{x \in \omega} |y(x; \Phi_h) - u_0^h(x)|^2 \text{mes } e(x), \quad (7)$$

при условиях, что сеточная функция  $y(\Phi_h) \in \overset{\circ}{W}_2^1(\omega)$ , называемая решением разностной краевой задачи, удовлетворяет для любой сеточной функции  $v \in \overset{\circ}{W}_2^1(\omega)$  сумматорному тождеству

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha=1}^2 \sum_{x' \in \omega'_\alpha} \Phi_{\alpha h}^{(+0.5\alpha)} y_{x_\alpha}^{(+0.5\alpha)} v_{x_\alpha}^{(+0.5\alpha)} h_\alpha^{(+0.5)} h_{3-\alpha} + \sum_{\alpha=1}^2 \sum_{\omega} b_\alpha^h y_{x_\alpha}^\circ v \text{mes } e(x) \\ + \sum_{\omega} d^h q(y) v \text{mes } e(x) = \sum_{\omega} f^h v \text{mes } e(x), \end{aligned} \quad (8)$$

а сеточные управления  $\Phi_h$  таковы, что

$$\Phi_h = (\Phi_{1h}, \Phi_{2h}) \in \prod_{k=1}^2 U_{kh} = U_h \subset B_h = W_\infty^1(\omega) \times W_\infty^1(\omega), \quad (9)$$

$$\begin{aligned} U_{\alpha h} = \{ \Phi_{\alpha h} \in W_\infty^1(\omega) : 0 < \nu \leq \Phi_{\alpha h}(x) \leq \bar{\nu} < \infty, \quad x \in \omega, \\ |\Phi_{\alpha h x_1}(x)| \leq R_1, x \in \omega'_1, \quad |\Phi_{\alpha h x_2}(x)| \leq R_2, x \in \omega'_2 \}, \quad \alpha = 1, 2. \end{aligned} \quad (10)$$

Здесь  $f^h(x)$ ,  $u_0^h(x)$ ,  $b_\alpha^h(x)$ ,  $\alpha = 1, 2$ ,  $d^h(x)$  - сеточные аппроксимации функций  $f(\xi)$ ,  $u_0(\xi)$ ,  $b_\alpha(\xi)$ ,  $\alpha = 1, 2$ ,  $d(\xi)$ , вычисляемые по формулам:

$$\begin{aligned} f^h(x) &= \frac{1}{\text{mes } e(x)} \int_{\text{mes } e(x)} f(\xi) d\xi, \\ u_0^h(x) &= \frac{1}{\text{mes } e(x)} \int_{\text{mes } e(x)} u_0(\xi) d\xi, \quad x \in \omega. \\ b_\alpha^h(x) &= \frac{1}{\text{mes } e(x)} \int_{\text{mes } e(x)} b_\alpha(\xi) d\xi, \end{aligned} \quad (11)$$

$$d^h(x) = \frac{1}{\text{mes } e(x)} \int_{\text{mes } e(x)} d(\xi) d\xi, \quad x \in \omega.$$

По поводу определения сеток  $\omega$ ,  $\omega'_\alpha$ ,  $\alpha = 1, 2$ , норм и полунорм, коэффициентов  $\alpha^{(\pm 0.5\alpha)}(x)$ ,  $\alpha = 1, 2$ ,  $u_0^h(x)$  см. [2], [3].

Ниже всюду будем предполагать, что выполняется условие

$$\delta_0 = \max_{\substack{\epsilon_1, \epsilon_2 > 0 \\ \epsilon_1 + \epsilon_2 \leq \sigma}} \left\{ \frac{\nu - \beta(\epsilon_1 + \epsilon_2)}{D^2} + \zeta_3 - \frac{m^2}{4\epsilon_1} - \frac{p^2}{4\epsilon_2} \right\} > 0, \quad (12)$$

$\sigma = \nu/\beta$ ,  $\beta = h_1/h_1^* + h_2/h_2^*$ ,  $h_\alpha^* = \min_{x \in \bar{\omega}} h_\alpha^{(\pm 0.5\alpha)}$ ,  $\alpha = 1, 2$ , из которого следует справедливость условия (3).

**Теорема 2.** *Задача о нахождении решения разностной схемы (8) при фиксированном управлении  $\Phi_h \in U_h$  эквивалентна решению операторного уравнения  $A_h y = F_h$ , где  $A_h : \overset{\circ}{W}_2^1(\omega) \rightarrow \overset{\circ}{W}_2^1(\omega)$ ,  $F_h \in W_2^1(\omega)$ ; оператор  $A_h$  и сеточная функция  $F_h$  определяются равенствами*

$$(A_h y, v)_{W_2^1(\omega)} = A_h(y, v), \quad (F_h, v)_{W_2^1(\omega)} = l_h(v), \quad \forall v \in \overset{\circ}{W}_2^1(\omega); \quad (13)$$

*Задача (8) однозначно разрешима в  $\overset{\circ}{W}_2^1(\omega)$  при каждом  $\Phi_h \in U_h$  и имеет место априорная оценка*

$$\|y(\Phi_h)\|_{W_2^1(\omega)} \leq C \|\Phi_h\|_{L_2(\omega)}. \quad (14)$$

### § 3. Априорные оценки погрешностей метода по состоянию и сеточного функционала. Сходимость аппроксимаций по функционалу и управлению

Справедливы следующие теоремы

**Теорема 3.** Пусть  $u(\xi) = u(\xi, g)$  и  $y(x) = y(x, \Phi_h)$  - решения задач (1)- (4) и (7), (8) соответственно. Тогда для любых управлений  $g \in U$  и  $\Phi_h \in U_h$  справедлива оценка погрешности метода по состоянию

$$\begin{aligned} \|y(\Phi_h) - u(g)\|_{W_2^1(\omega)} \leq C \left[ |h| \sum_{\alpha=1}^2 \|k_\alpha\|_{W_\infty^1(\Omega)} + \right. \\ \left. + \sum_{\alpha=1}^2 \|\Phi_{\alpha h} - a_\alpha\|_{L_\infty(\omega')} \right] \|u(g)\|_{W_2^2(\Omega)}. \end{aligned} \quad (15)$$

**Теорема 4.** Для любых управлений  $g \in U$  и  $\Phi_h \in U_h$  для погрешности сеточного функционала справедлива оценка

$$|J(g) - J_h(\Phi_h)| \leq C \left\{ |h| + \sum_{\alpha=1}^2 \|\Phi_{\alpha h} - a_\alpha\|_{L_\infty(\omega')} \right\}, \quad (16)$$

где  $C = \text{const} > 0$ , не зависящая от  $h$ ,  $y$ ,  $u$ ,  $\Phi_h$ ,  $g$ .

Для исследования сходимости разностных аппроксимаций задачи (1)- (4) по функционалу и управлению рассмотрим при  $|h| \rightarrow 0$  последовательность разностных задач минимизации (7), (8). Будем допускать, что вычисления функционалов  $J_h(\Phi_h)$  ведутся приближенно и приближенный функционал  $J_{h\delta_h}(\Phi_h)$  связан с  $J_h(\Phi_h)$  соотношениями

$$\begin{aligned} J_{h\delta_h}(\Phi_h) = J_h(\Phi_h) + \Theta_{\delta_h}(\Phi_h), \quad |\Theta_{\delta_h}(\Phi_h)| \leq \delta_h, \quad \forall \Phi_h \in U_h; \\ \delta \rightarrow +0 \text{ при } |h| \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (17)$$

Предположим теперь, что при каждом  $h$  и соответствующей сетки  $\bar{\omega} = \bar{\omega}_h$  с помощью какого-либо метода минимизации получено приближенное значение  $J_{h\delta_h*} + \epsilon_h$  нижней грани  $J_{h\delta_h*}$  функционала  $J_h(\Phi_h)$  на  $U_h$  и найдено сеточное управление  $\hat{\Phi}_h(x) = \Phi_{h\delta_h\epsilon_h}$ , такое что

$$J_{h\delta_h*} \leq J_{h\delta_h}(\hat{\Phi}_h) \leq J_{h\delta_h*} + \epsilon_h, \quad \hat{\Phi}_h \in U_h, \quad (18)$$

где  $\epsilon_h \geq 0$  и  $\epsilon_h \rightarrow 0$  при  $|h| \rightarrow 0$ .



**Теорема 5.** Семейство разностных задач минимизации (17), (7), (8) при  $|h| \rightarrow 0$  аппроксимирует экстремальную задачу (1)-(4) по функционалу, т.е.  $\lim J_{h \delta_{h^*}} = J_*$  при  $|h| \rightarrow 0$ , причем справедливы оценки скорости сходимости

$$|J_{h \delta_{h^*}} - J_*| \leq |J_{h^*} - J_*| + \delta_h \leq C|h| + \delta_h;$$

если последовательность сеточных управлений  $\{\hat{\Phi}_h\} \in U_h$  определена из условий (18), то последовательность сеточных управлений  $\{\tilde{P}_h \hat{\Phi}_h\}$  является минимизирующей для задачи (1)-(4) и справедлива оценка скорости сходимости

$$0 \leq J(\tilde{P}_h \hat{\Phi}_h) - J_* \leq C(|h| + \epsilon_h + \delta_h);$$

последовательность  $\{\tilde{P}_h \hat{\Phi}_h\}$  слабо в  $H = L_2(\Omega)$  сходится к множеству  $U_* \neq \emptyset$  оптимальных управлений задачи (1)-(4).

Рассмотрим теперь вопрос о сильной сходимости в  $H$  по аргументу (управлению). Из теоремы 5 следует, что для построения минимизирующих последовательностей в исходной экстремальной задаче (1)-(4) можно использовать конечномерную задачу минимизации (7), (8). В силу же теоремы 1 экстремальная задача (1)-(4) корректно поставлена в слабой топологии пространства  $H$ . Однако, вообще говоря, она является некорректно поставленной задачей минимизации по А.Н. Тихонову в сильной топологии пространства  $H$ . Следовательно, нет основания ожидать, что любая минимизирующая последовательность (в том числе и последовательность из теоремы 5) для  $J(g)$  на  $U$  будет сходящейся по норме  $H$  ко множеству  $U_*$ . Для построения сильно сходящейся минимизирующей последовательности проведем регуляризацию конечномерных задач (7), (8) по методу регуляризации А.Н. Тихонова (см. [4], [5]).

Введем на  $U$  стабилизатор  $\Omega(g) = \|g\|_H^2$ ,  $g \in U$  и его сеточный аналог  $\Omega_h(\Phi_h) = \|\Phi_h\|_{H_h}^2$ ,  $\Phi_h \in U_h$ . При каждом  $h$  рассмотрим на

$U_h$  сеточный функционал Тихонова задачи (17), (7), (8):

$$T_{h\delta_h\alpha_h}(\Phi_h) = J_{h\delta_h}(\Phi_h) + \alpha_h\Omega(\Phi_h), \quad \Phi_h \in U_h, \quad (19)$$

где  $\{\alpha_h\}$  – произвольная последовательность положительных чисел, сходящаяся к нулю при  $|h| \rightarrow 0$ . При каждом  $h$  определим сеточное управление  $\hat{\Phi}_h = \Phi_{h\delta_h\alpha_h\nu_h} \in U_h$ , удовлетворяющее условиям

$$T_{h\delta_h\alpha_h} = \inf T_{h\delta_h\alpha_h}(\Phi_h) \leq T_{h\delta_h\alpha_h} + \nu_h, \quad \hat{\Phi}_h \in U_h, \quad (20)$$

где  $\nu_h \geq 0$  и  $\nu_h \rightarrow 0$  при  $|h| \rightarrow 0$ . Пусть  $U_{**} = \{g_{**} \in U_* : \Omega(g_{**}) = \inf \Omega(g_*) : g_* \in U_*\}$  – множество  $\Omega$ -нормальных решений задачи (1)- (4). Так как функционал  $\Omega(g)$  является слабым стабилизатором в  $H$  задачи (1)- (4) и функционалы  $J(g)$ ,  $\Omega(g)$  – слабо полунепрерывны снизу на  $U$  в слабой топологии пространства  $H$ , то  $U_{**} \neq \emptyset$  [4].

**Теорема 6.** Пусть последовательность сеточных управлений  $\{\hat{\Phi}_h\}$  определена из условий (19), (20). Тогда последовательность  $\{\tilde{P}_h\hat{\Phi}_h\}$  является минимизирующей для задачи (1)- (4) и справедлива оценка скорости сходимости:

$$0 \leq J(\tilde{P}_h\hat{\Phi}_h) - J_* \leq C(|h| + \delta_h + \nu_h + \alpha_h);$$

если последовательности  $\{\alpha_h\}$ ,  $\{\delta_h\}$ ,  $\{\nu_h\}$  удовлетворяют условиям  $\alpha_h, \delta_h, \nu_h > 0$ ,  $\alpha_h, \delta_h, \nu_h \rightarrow 0$  при  $|h| \rightarrow 0$ , причем  $\{\alpha_h\}$  стремится к нулю согласовано с величинами  $|h|$ ,  $\delta_h, \nu_h$  так, что  $(|h| + \nu_h + \delta_h)/\alpha_h \rightarrow 0$  при  $|h| \rightarrow 0$ , то последовательность  $\{\tilde{P}_h\hat{\Phi}_h\}$  сильно в  $H$  сходятся к множеству  $U_{**}$  и  $\lim \Omega(\tilde{P}_h\hat{\Phi}_h) = \Omega_*$  при  $|h| \rightarrow 0$ .

Полученные результаты не зависят от конкретного метода решения разностных задач минимизации.

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Ладыженская О. А.* Краевые задачи математической физики. М.: Наука, 1973.
- [2] *Самарский А. А., Лазаров Р. Д., Макаров В. П.* Разностные схемы для дифференциальных уравнений с обобщенными решениями, М.: Высшая школа, 1987.
- [3] *Лубышев Ф. В., Манапова А. Р.* О разностной аппроксимации задачи оптимального управления для эллиптического уравнения в произвольной области. //Труды СВМО. 2009. Т. 11, № 1.
- [4] *Васильев Ф. П.* Методы оптимизации. М.: Факториал Пресс, 2002.
- [5] *Тихонов А. Н., Арсенин В. Я.* Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1986.

УДК 534.113

## ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОСНОВНЫХ ПАРАМЕТРОВ СТЕРЖНЯ С ПОМОЩЬЮ ТЕНЗОДАТЧИКА

Муртазина Р. Ф. (Уфа, БГУ)

### Введение

Рассматривается цилиндрический стержень, один конец которого ( $x = 0$ ) закреплен, а другой ( $x = l$ ) свободен. В какой-то момент времени  $t_0$  свободный конец подвергается удару груза массы  $M$ , движущегося вдоль оси со скоростью  $v$ , после чего груз отлетает. Решается задача определения момента времени  $t_0$  удара, длины стержня  $l$ , массы груза  $m$  и скорости  $v$  по данным датчика, который снимает значения производной  $\frac{\partial u}{\partial x}$  смещения сечения стержня с абсциссой  $x_1$  в различные моменты времени  $t$ . Модуль упругости стержня  $E$ , площадь его поперечного сечения  $S$  и объемная плотность  $\rho$  считаются известными. Задача может быть решена теоретически с помощью уравнения продольных колебаний однородного стержня.

В [1] и [9] решены задачи, аналогичные данной. Но в [1] датчик снимает показания смещения  $u(x_1, t)$ , а в [9] значение частной производной смещения по  $x$  в точке  $x_1$ . Кроме того, в обеих задачах груз после удара как бы соединяется со стержнем.

Ближкие по постановке задачи рассмотрены в работах [2–6]. В [2–3] найдены закрепления механических систем по собственным частотам колебаний, в [4] предложен метод диагностики подземных трубопроводов, в [5] решено волновое уравнение для случая, когда на одном из концов известна функция  $u(0, t)$ , в [6] рассмотрены обратные динамические задачи для дифференциальных уравнений теории упругости. Однако поставленная здесь задача отличается от перечисленных как по постановке, так и по методу решения.

Как известно, уравнение продольных колебаний однородного стержня имеет вид [7,8]

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad a = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad (1)$$

Граничное условие на левом конце ( $x = 0$ ) будет, очевидно,

$$u(0, t) = 0 \quad (2)$$

Уравнение движения груза под действием силы реакции стержня, которая равна по величине усилию в сечении  $x = l$  стержня и направлена в противоположную сторону, имеет вид

$$M \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \Big|_{x=l} = -ES \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=l} \quad (3)$$

Это и будет граничное условие на конце  $x = l$ . Уравнению (3) можно придать вид

$$ml \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \Big|_{x=l} = -a^2 \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=l} \quad (4)$$

если обозначить через  $m = \frac{M}{\rho Sl}$  отношение массы движущегося груза к массе стержня

Начальные условия записываются следующим образом:

$$u|_{t=t_0} = 0, \quad 0 \leq x \leq l \quad (5)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=t_0} = 0, \quad 0 \leq x < l, \quad \frac{\partial u}{\partial t} = -v, \quad t = t_0, \quad x = l \quad (6)$$

Второе начальное условие означает, что в момент удара движущегося груза все промежуточные сечения стержня имеют скорость, равную нулю, а скорость конца стержня равна скорости груза.

Решение начально-краевой задачи (1), (2), (4), (5), (6) известно (см. например, [7], стр.81-85). Здесь рассматривается обратная к (1),(2),(4),(5),(6) задача. В терминах начально-краевой задачи (1),(2),(4),(5),(6) интересующую нас обратную задачу можно сформулировать так: известна величина  $a$  и значения  $\frac{\partial u}{\partial x}$  в точке  $x_1$  при изменении временного параметра  $t$ . Требуется определить  $l, t_0, m, v$ .

### Решение обратной задачи

В общем, решение данной задачи не отличается от решения задачи [9]. Удар груза о стержень продолжается до тех пор, пока  $\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=l}$  не обращается в нуль. Продолжительность удара  $\tau$  зависит от отношения массы ударяющего тела к массе стержня  $m = \frac{M}{\rho S l}$ . Продолжительность удара увеличивается с увеличением  $m$ :

Отношение масс	Продолжительность удара
$m < 1.7283$	$2l < a\tau < 4l$
$1.7283 < m < 4.1511$	$4l < a\tau < 6l$
$4.1511 < m < 7.35$	$6l < a\tau < 8l$

**Определим сначала момент  $t_0$  удара груза и длину стержня  $l$ .** Для этого нужно воспользоваться тем, что скорость распространения продольных волн стержня постоянна и равна  $a$  (см., например, [2], стр.76, 84). До удара груза стержень находился в состоянии покоя. При ударе по стержню возникают продольные колебания. Первоначально по стержню распространяется только обратная волна  $\left(\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(-\varphi(at - at_0 + x))\right)$ . В какой-то момент времени  $t_1$  в интервале  $t_0 < t < t_0 + l/a$  в точке  $x = x_1$  датчик фиксирует значение производной  $\frac{\partial u}{\partial x}$ . Момент  $t_1$  - это момент перехода с  $\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \Big|_{x=x_1} = 0$  к  $\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \Big|_{x=x_1} < 0$ . При  $t = t_0 + l/a$  обратная волна достигнет закрепленного конца и при  $(t_0 + l/a) < t < (t_0 + 2l/a)$

к ней прибавится отраженная волна. В некоторый момент  $t_2$  датчиком будет зафиксирован 1-ый разрыв функции  $\left. \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \right|_{x=x_1}$  в интервале  $(t_0 + l/a) < t < (t_0 + 2l/a)$  (В [1]  $t_2$  - точка минимума функции  $u(x,t)$ ). При  $t = t_0 + 2l/a$  прямая волна отразится от конца  $x = l$ . В какой-то момент  $t_3$  датчиком будет зафиксирован 2-ой разрыв функции  $\left. \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \right|_{x=x_1}$  в интервале  $(t_0 + 2l/a) < t < (t_0 + 3l/a)$  (В [1]  $t_3$  - точка максимума функции  $u(x,t)$ ). За время  $T = t_3 - t_2$  волна пройдет расстояние  $S = 2(l - x_1)$ . Поскольку она движется со скоростью  $a$ , имеем  $a = S/T$ . Откуда

$$l = x_1 + a(t_3 - t_2)/2 \quad (7)$$

Зная  $l$ , легко найти  $t_0$ . После момента удара по стержню ( $t = t_0$ ) распространяется только обратная волна  $\left( \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(-\varphi(at - at_0 + x)) \right)$ . Она достигнет точки  $x = x_1$  в момент времени  $t_1$ . За время  $t_1 - t_0$  волна со скоростью  $a$  пройдет расстояние  $l - x_1$ . Следовательно,

$$t_0 = t_1 - (l - x_1)/a \quad (8)$$

**Определение  $m$  и  $v$ .** Как известно ([7], стр. 82-84):

$u(x_1, t) = -\varphi(a(t - t_0) + x_1) = -\frac{mlv}{a} \left( 1 - \exp\left(-\frac{at - at_0 + x_1 - l}{ml}\right) \right)$  при  $t_0 < t < t_0 + l/a$

$$\left. \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \right|_{x=x_1} = \frac{\partial}{\partial x}(-\varphi(a(t - t_0) + x)) \Big|_{x=x_1} = -\frac{v}{a} \exp\left(-\frac{at - at_0 + x_1 - l}{ml}\right)$$

при  $t_0 < t < t_0 + l/a$ . Выбрав два известных значения  $\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}$  в точке  $x = x_1$  при различных значениях  $t = t_1^*$  и  $t = t_2^*$  ( $t_1^*, t_2^* \in (t_0, t_0 + l/a)$ ), получим систему двух уравнений от двух неизвестных  $m$  и  $v$ :

$$\left. \frac{\partial u(x, t_1^*)}{\partial x} \right|_{x=x_1} = -\frac{v}{a} \exp\left(-\frac{at_1^* - at_0 + x_1 - l}{ml}\right) \quad (9)$$

$$\left. \frac{\partial u(x, t_2^*)}{\partial x} \right|_{x=x_1} = -\frac{v}{a} \exp\left(-\frac{at_2^* - at_0 + x_1 - l}{ml}\right) \quad (10)$$

В качестве  $t_1^*$  и  $t_2^*$  можно выбрать, например следующие значения:

$$t_1^* = \frac{4l - 3x_1}{4a} + t_0, \quad t_2^* = \frac{2l - x_1}{2a} + t_0 \quad (11)$$

Обозначим  $\left. \frac{\partial u(x, t_1^*)}{\partial x} \right|_{x=x_1}$  через  $k_1$  и  $\left. \frac{\partial u(x, t_2^*)}{\partial x} \right|_{x=x_1}$  через  $k_2$ .

Подставив значения (11) в (9), (10) получим следующую систему уравнений:

$$k_1 = -\frac{v}{a} \exp\left(-\frac{x_1}{4ml}\right) \quad (12)$$

$$k_2 = -\frac{v}{a} \exp\left(-\frac{x_1}{2ml}\right) \quad (13)$$

Обозначим  $\exp\left(-\frac{x_1}{4ml}\right)$  через  $y$ . Тогда система (12–13) запишется в виде:

$$k_1 = -\frac{v}{a} y \quad (14)$$

$$k_2 = -\frac{v}{a} y^2 \quad (15)$$

Из системы (14–15) видно, что  $y = \frac{k_2}{k_1}$ . Следовательно,  $\exp\left(-\frac{x_1}{4ml}\right) = \frac{k_2}{k_1}$ . Откуда  $-\frac{x_1}{4ml} = \ln \frac{k_2}{k_1}$  и

$$m = -\frac{x_1}{4l \ln \frac{k_2}{k_1}} \quad (16)$$



Из (11) получим:  $-\frac{v}{a} \exp\left(-\frac{x_1}{4ml}\right) = \frac{\partial u(x, t_1^*)}{\partial x} \Big|_{x=x_1}$  и следовательно:

$$v = -\frac{a \frac{\partial u(x, t_1^*)}{\partial x} \Big|_{x=x_1}}{\exp\left(-\frac{x_1}{4ml}\right)} \quad (17)$$

Таким образом, поставленная обратная задача решена. Неизвестные  $l, t_0, m, v$  последовательно находятся по формулам (7), (8), (11), (16), (17).

**Пример.** Пусть  $a = 2, x_1 = 1, t_1 = 1, t_2 = 2, t_3 = 4, \frac{\partial u(1, \frac{9}{8})}{\partial x} = -0,49, \frac{\partial u(1, \frac{5}{4})}{\partial x} = -0,48$ . Требуется найти соответствующие  $l, t_0, m, v$ .

Из формул (7), (8), (11), (16), (17) последовательно получаем:

$$l = x_1 + a(t_3 - t_2)/2 = 1 + 2(4 - 2) = 3$$

$$t_0 = t_1 - (l - x_1)/a = 1 - (3 - 1)/2 = 0$$

$$t_1^* = \frac{4l - 3x_1}{4a} + t_0 = \frac{9}{8}, \quad t_2^* = \frac{2l - x_1}{2a} + t_0 = \frac{5}{4}$$

$$m = -\frac{x_1}{4l \ln \frac{k_2}{k_1}} = -\frac{1}{12 \ln \frac{-0,48}{-0,49}} \approx 4$$

$$v = -\frac{a \frac{\partial u(x, t_1^*)}{\partial x}}{\exp\left(-\frac{x_1}{4ml}\right)} = -\frac{2 \cdot (-0,49)}{\exp\left(-\frac{1}{48}\right)} \approx 1$$

## Заключение

Поставленная задача для стержня может быть применена для диагностирования места и времени разрыва трубопровода, так как она моделирует в первом приближении задачу о месте и времени разрыва трубопровода по кольцевому шву под действием удара тяжелым предметом. Хотя стержень и цилиндрическая оболочка - это разные объекты, моделирование трубопровода стержнем

оправдано в настоящей статье тем, что при ударе по торцу цилиндрической оболочки и по концу стержня продольные колебания имеют схожее поведение.

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Ахтямов А. М.* Определение массы, скорости движения груза и места его удара по стержню с помощью продольных смещений одного из сечений стержня. // Контроль. Диагностика. 2007. № 11. с. 59–60.
- [2] *Ахтямов А. М.* Можно ли определить вид закрепления колеблющейся пластины по ее звучанию? // Акустический журнал. 2003. Т. 49. № 3. с. 325–331.
- [3] *Сафина Г. Ф.* Диагностирование относительной жесткости подкрепленных цилиндрических оболочек по собственным частотам их ассиметричных колебаний // Контроль. Диагностика. 2005. № 12. с. 51–55.
- [4] *Сидоров Б. В., Мартынов С. А.* Рекомендуемая технология диагностики подземных трубопроводов // Контроль. Диагностика. 2005. № 12. с. 18–19.
- [5] *Чабакаури Г. Д.* Оптимизация граничного управления процессом колебаний на одном конце при закрепленном втором конце в случае ограниченной энергии // Дифференциальные уравнения. 2002. Т. 38. № 2. с. 277–284.
- [6] *Яхно В. Г.* Обратные задачи для дифференциальных уравнений упругости. // Новосибирск: Наука, 1990.
- [7] *Кошляков Н. С., Глинер Э. Б., Смирнов М. М.* Дифференциальные уравнения математической физики. М.: Физматгиз, 1962. 768 с.

- [8] *Будак Б. М., Самарский А. А., Тихонов А. Н.* Сборник задач по математической физике: учеб. Пособие. 3-е изд. М.: Наука, 1980. 688 с.
- [9] *Ахтямов А. М., Муртазина Р. Ф.* Определение массы, скорости движения груза и места его удара по стержню с помощью показаний тензодатчика // Контроль. Диагностика. 2009. № 1. с. 36–39.
- [10] *Болотин В. В.* Колебания линейных систем. // Том 1. , М.:Машиностроение, 1978.

УДК 519.161

## МЕТОД ОПРЕДЕЛЕНИЯ НИЖНИХ ГРАНИЦ НЕКОТОРЫХ NP-ПОЛНЫХ ЗАДАЧ

Картак В. М., Мухачёва М. А. (Уфа, УГАТУ)

### Введение

Вычисления нижних границ различных NP-полных задач является актуальным вопросом, поскольку полученные результаты можно применять при разработке как точных, так и приближенных, эвристических алгоритмов. С этой точки зрения, особенно интересна задача линейного целочисленного программирования (ЛЦП), потому что многие NP-полные задачи имеют формулировки в виде ЛЦП-моделей, и новые нижние границы задачи ЛЦП так же могут быть использованы для них.

В данной статье описывается метод построения нижней границы задачи ЛЦП (являющейся NP-полной), а так же его применение для двух других NP-полных задач: о покрытии множества (*Set Cover Problem*) и одномерного линейного раскроя (*One-dimensional Cutting Stock Problem*). Приведены результаты вычислительного эксперимента.

### § 1. Значимые элементы задачи ЛП

Рассмотрим задачу линейного целочисленного программирования:

$$z^* = \min \{ cx : Ax = b, x \in \mathbb{Z}_+^M \}$$

где  $A$  ( $m \times M$ ) - матрица из  $M$  переменных и  $m$  ограничений, свободным вектором  $b \in \mathbb{R}^m$  и целевой функцией  $c \in \mathbb{R}^M$ .

*Непрерывной релаксацией* задачи  $z^*$  называется задача линейного программирования:

$$z = \min \{ cx : Ax = b, x \in \mathbb{R}_+^M \}$$

с той же матрицей ограничений  $A$ , размера  $m \times M$ , свободным вектором  $b$  и целевой функцией  $c$ , но без ограничений целочисленности на компоненты вектора  $x$ .

Для задачи  $z^*$  значение целевой функции  $z$  уже является нижней границей, но это значение может быть улучшено (для чего успешно применяются, например, методы, описанные в [2]).

Определим вспомогательную задачу линейного программирования:

$$z_{(t,q)} = \min \{cx : Ax = b, x_t \leq q, x \in \mathbb{R}_+^M\}$$

являющейся задачей  $z$ , в которую добавлено одно ограничение на компоненту вектора  $x_t$ .

**Определение 1.** Для заданного  $\delta$  элемент  $x_t$  вектора  $x$  называется *значимым*, если существует  $q > 0$  такое, что  $z_{(t,q)} > z + \delta$

Данное определение вводится для обозначения таких компонент вектора  $x$ , при исключении которых из задачи, происходит увеличение значения целевой функции. Ведь, если значение  $q$  для какой-либо компоненты  $x_t$  равно 0, и значение целевой функции  $z_{(t,q)}$  при этом равно  $z$ , это означает, что компоненту  $x_t$  можно исключить из вектора переменных, тем самым уменьшив размерность задачи.

Мы же будем рассматривать только такие компоненты вектора  $x$ , для которых значение целевой функции  $z_{(t,q)}$  увеличивается, таким образом они являются *значимыми*.

Обозначим множество значимых элементов:

$$S(\delta) = \{t_1, t_2, \dots, t_s\}$$

и множество соответствующих им значений

$$Q(\delta) = \{q_{t_1}, q_{t_2}, \dots, q_{t_s}\}$$

Введем в рассмотрение следующую задачу ЛП:

$$\begin{aligned} z^\delta &= \min cx \\ \text{s.t. } Ax &= b \\ x_t &\geq \lfloor q_t \rfloor, \quad t \in S(\delta), \\ x &\in \mathbb{Z}_+^R \end{aligned}$$

являющейся задачей  $z$ , с матрицей ограничений  $A$  ( $m \times M$ ), свободным вектором  $b$  и целевой функцией  $c$ , в которую каждой *значимой* компоненте  $x_t$  вектора переменных  $x$  добавлено ограничение, связанное с соответствующим значением  $q_t$ .

**Основная Теорема.** *Для того, чтобы  $z^* - z > \delta$ , достаточно, чтобы  $z^\delta - z > \delta$ .*

Доказательство этой теоремы можно найти в [1]. В следующем параграфе будет описано применение данной теоремы.

## § 2. Метод построения нижней границы задачи ЛЦП

Метод оценки нижней границы основан на нахождении *значимых* переменных, которые обязательно будут иметь ненулевое значение в любом оптимальном решении задачи  $z$ .

Приведем описание алгоритма.

1. Определим значение  $\delta$ , для которого будет проверяться истинность условия теоремы:  $z^\delta - z > \delta$ . В нашем случае мы будем перебирать значения  $\delta$  натуральными числами, начиная с 1.
2. Вычисляем решение задачи  $z$ . Обозначим оптимальный вектор  $X_z = (x_1, \dots, x_m)$ .
3. Определим для данного значения  $\delta$  все *значимые* переменные. Для этого, с каждой ненулевой компонентой  $x_t$  вектора  $X_z$  решим следующую ЛП задачу:

$$z_t = \min \{ cx : Ax = b, x_t = 0, x \in \mathbb{R}_+^M \}$$

Если значение  $z_t - z > \delta$ , то компонента  $x_t$  для данного значения  $\delta$  является *значимой*.

4. Для всех *значимых* переменных установим  $q_t$  равным 0 и решим задачу  $z^\delta$ . Если получим, что  $z^\delta - z > \delta$ , то и  $z^* - z > \delta$ , а значит нижнюю границу для задачи  $z^*$  можно установить равным  $\lceil z \rceil + \delta$ .

Данный метод был применен для вычисления нижних границ ЛЦП-моделей двух NP-полных задач. Основным применением метода предполагалась задача *одномерного линейного раскрыя* (1dCSP). Однако, метод так же был рассмотрен в приложении к задаче *о покрытии множества* (SCP). Последняя задача была рассмотрена по причине ее наглядности и простоты построения модели целочисленного программирования.

В следующих двух параграфах приведем формулировки указанных задач и их ЛЦП-модели.

### § 3. Задача о покрытии множества

Комбинаторная постановка задачи о покрытии множества заключается в следующем.

Пусть даны множество  $M = \{1, \dots, m\}$  и набор его подмножеств  $M_1, \dots, M_n$  таких, что  $\bigcup_{j=1}^n M_j = M$ .

Совокупность подмножеств  $M_j$ ,  $j \in J \subseteq \{1, \dots, m\}$ , называется *покрытием* множества  $M$ , если  $\bigcup_{j \in J} M_j = M$ . Каждому подмножеству  $M_j$  приписан вес  $c_j \geq 0$ . Требуется найти покрытие минимального суммарного веса. Задача называется *невзвешенной*, если все подмножества  $M_j$  имеют единичные веса.

Модель целочисленного программирования для данной задачи имеет вид:

$$SCP = \min \{cx : Ax \geq e, x \in \{0, 1\}^n\}$$

где  $A = (a_{ij})$  - матрица размера  $m \times n$  с элементами  $a_{ij} = 1$ , если  $i \in M_j$ , и  $a_{ij} = 0$  в противном случае,  $e$  -  $m$ -вектор из единиц,  $c = (c_1, \dots, c_n)$  - вектор весов;  $x = (x_1, \dots, x_n)$  - вектор переменных с компонентами  $x_j = 1$ , если  $M_j$  входит в покрытие, и  $x_j = 0$  в противном случае.

#### § 4. Задача одномерного линейного раскроя

Приведем постановку задачи одномерного линейного раскроя.

Дан набор  $m$  типов заготовок заданной ширины  $w_i = 1$ , длины  $l_i$  и потребности  $b_i$ ,  $i = 1, \dots, m$ . Данные заготовки необходимо вырезать из одномерных прутков заданной ширины  $W = 1$  и длины  $L$ , соблюдая при этом следующие условия:

1. Сумма длин заготовок, вырезаемых из каждого прутка не должна превосходить его длины:  $\sum l_j \leq L$  (*рюкзачное ограничение*).
2. Количество заготовок каждого типа, вырезанное из всех прутков, должно быть не меньше потребности  $b_i$  каждой заготовки.

Требуется *минимизировать* количество использованных прутков.

**Определение 2.** *Картой раскроя* назовем вектор, описывающий допустимый способ раскроя прутка  $a_j = (a_{1j}, \dots, a_{mj})^T$ , с ограничением  $\sum_{i=1}^m l_i a_{ij} \leq L$ , для  $j = 1, \dots, N$ .

Составим матрицу всевозможных карт раскроя

$$A = \|a_1, a_2, \dots, a_N\| \quad \text{размера } m \times N$$

В этих определениях ЛЦП-модель выглядит следующим образом

$$1dSCP = \min \left\{ \sum_{j=1}^N x_j : Ax = b, x \in \mathbb{Z}_+^N \right\},$$



где  $x = (x_1, x_2, \dots, x_N)$  – вектор интенсивности карт раскрой

Поскольку количество  $N$  различных карт раскрой, вообще говоря, экспоненциально зависит от входных параметров задачи, то построить матрицу ограничений  $A$  в явном виде не представляется возможным. Для построения матрицы  $A$  используется метод Column Generation, разработанный Фордом и Фалкерсоном в 1962 году. Описание данного метода можно найти, например, в [4].

### § 5. Результаты вычислительного эксперимента

Программы для тестирования обеих задач были реализованы на языке программирования C++ с использованием пакета с открытым исходным кодом COIN-OR LP, для решения симплекс-методом ЛП задач (<http://www.coin-or.org/projects/Clp.xml>).

Ниже приведена таблица с результатами вычислительного эксперимента для задачи о покрытии множества.

Name	m	n	LP	$\delta$
4.1	200	1000	32.7972	<b>1</b>
4.2	200	1000	31.7061	<b>1</b>
4.3	200	1000	32.4495	0
4.4	200	1000	33.2722	0
4.5	200	1000	32.7942	<b>1</b>
4.6	200	1000	32.2358	0
4.7	200	1000	33.5202	0
4.8	200	1000	31.7710	<b>1</b>
4.9	200	1000	32.8890	<b>1</b>
4.10	200	1000	33.3073	0
5.1	200	2000	28.7334	0
5.1	200	2000	28.5779	0
5.3	200	2000	28.8458	<b>1</b>
5.4	200	2000	28.6118	0
5.5	200	2000	28.2531	0
5.6	200	2000	28.8565	<b>1</b>
5.7	200	2000	28.0904	0
5.8	200	2000	28.9318	<b>1</b>
5.9	200	2000	28.9821	<b>1</b>
5.10	200	2000	28.7882	<b>1</b>

Name	m	n	LP	$\delta$
6.1	200	1000	14.7808	0
6.2	200	1000	14.2882	0
6.3	200	1000	14.8715	0
6.4	200	1000	14.6840	0
6.5	200	1000	14.9238	<b>1</b>
A.1	300	3000	29.5485	0
A.2	300	3000	29.8154	<b>1</b>
A.3	300	3000	29.7621	0
A.4	300	3000	29.0948	0
A.5	300	3000	29.5657	0
B.1	300	3000	14.0856	0
B.2	300	3000	13.9854	<b>1</b>
B.3	300	3000	14.0646	0
B.4	300	3000	14.0103	0
B.5	300	3000	13.9783	<b>1</b>
C.1	400	4000	31.0951	0
C.2	400	4000	31.4151	0
C.3	400	4000	31.0480	0
C.4	400	4000	31.0433	0
C.5	400	4000	31.2810	0

Метод был протестирован на примерах библиотеки OR-Library серии 4, 5, 6, а так же серий А, В, С с задачами большой размерности.

Для тестовых множеств 4, 5 нижняя граница, в сравнении с непрерывной релаксацией, была улучшена в **5 из 10 случаев**. Для тестовых множеств 6, А-С граница была улучшена в 1 из 5 случаев.

Приведем таблицу результатов вычислительного эксперимента для задачи одномерного линейного раскроя.

Name	m	n	LP	$\delta$
bpp.13	161	597	67.9946	0
bpp.14	136	476	60.9971	1
bpp.119	173	625	76.0000	1
bpp.144	173	569	73.0000	1
bpp.175	185	658	83.0000	1
bpp.178	178	655	79.9953	0
bpp.181	157	596	71.9985	0
bpp.195	161	575	63.9959	0
bpp.359	164	534	74.9964	0
bpp.360	148	424	62.0000	1
bpp.40	144	490	58.9985	1
bpp.419	189	674	79.9990	1
bpp.47	158	463	71.0000	1
bpp.485	163	617	70.9971	0
Name	m	n	LP	$\delta$
bpp.531	175	487	83.0000	1
bpp.561	177	622	71.9955	1
bpp.60	144	488	62.9972	0
bpp.640	165	475	74.0000	1
bpp.645	141	525	57.9985	1
bpp.709	160	583	67.0000	1
bpp.716	158	494	75.0000	1
bpp.742	148	453	64.0000	1
bpp.766	143	507	61.9986	1
bpp.781	174	627	70.9990	0
bpp.785	163	662	67.9937	0
bpp.814	179	456	81.0000	1
bpp.832	139	549	59.9975	0
bpp.900	173	656	74.9945	1

Метод был протестирован на тестовых примерах **hard28** библиотеки OR-Library, сгенерированных J. Schoenfeld.

Для данного тестового набора по сравнению с непрерывной релаксацией, нижняя граница была улучшена в **18 из 28 случаев**.

Из вычислительных результатов видно, что метод хорошо себя зарекомендовал при нахождении нижних границ рассматриваемых задач. В дальнейшем планируется на этой основе разработать нижние границы для задачи *двумерного размещения в полосу* (Two-dimensional Strip Packing Problem).

#### ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Belov G., Kartak V., Rohling H., Scheithauer G.* One-Dimensional Relaxations and LP Bounds for Orthogonal Packing. // International Transactions on Operational Research 16(6): 745-766, 2009.
- [2] *Savelsbergh M. W. P.* Preprocessing and Probing Techniques for Mixed Integer Programming Problems. // ORSA Journal on Computing, № 6 (1994), 445.
- [3] *Картак В. М., Мухачева М. А.* Метод построения минимального вектора для вычисления нижней границы задачи ЛЦП. // DOOR-2010 Всероссийская конференция „Дискретная оптимизация и исследование операций“, 27 июня-03 июля 2010 г., Республика Алтай. С. 171.
- [4] *Мухачева Э. А., Рубинштейн Г. Ш.* Математическое программирование // Новосибирск: Наука, 1987, 272 с.

УДК 519.622.2

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА  
ОКИСЛИТЕЛЬНОЙ РЕГЕНЕРАЦИИ НА КИНЕТИЧЕСКОМ  
УРОВНЕ

Саитгалина А. Д. (Уфа, БГУ)

**Введение**

Эффективность любого нефтехимического гетерогенно - каталитического процесса определяется в первую очередь активностью, селективностью и стабильностью катализаторов. В процессе эксплуатации наблюдается ухудшение этих характеристик. Для современных каталитических процессов нефтепереработки и нефтехимии наиболее распространенная причина ухудшения показателей - отложение кокса на активной поверхности катализатора.

При удалении кокса каталитические свойства катализатора восстанавливаются. Для этого наиболее широко используют окислительную регенерацию - процесс контролируемого выжига кокса кислородсодержащими смесями.

Цель работы состоит в разработке методики математического моделирования процесса окислительной регенерации закоксованных катализаторов в аппаратах с неподвижным слоем и комплекса программ для расчёта данного процесса.

**§ 1. Математическая модель.**

Кинетическая модель представляет собой совокупность элементарных стадий, реакций и уравнений, характеризующих зависимость скорости химического превращения от параметров реакции: давления, температуры, концентраций реагентов и др. Эти зависимости определяются на основе экспериментальных данных в области изменения параметров реакции. Кинетическая модель является первым уровнем модели любого реактора и базисом для

математических моделей на уровне зерна катализатора и неподвижного слоя.

В практике математического моделирования окислительной регенерации используют кинетические модели, полученные на основе эмпирического подхода [1, с.145-148]. Такие модели представляют количественную зависимость скорости основной реакции (выжиг кокса) и достаточно точно аппроксимируют экспериментальные данные только в изученном интервале условий.

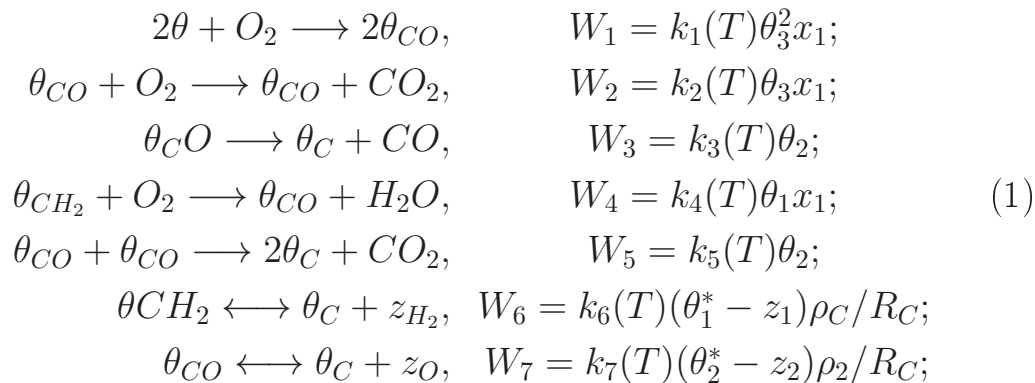
При регенерации закоксованных катализаторов скорость выжиг кокса  $\frac{dq_C}{dt} = -W$ , определяется в основном видом кинетического уравнения:  $W = W(T, C_0, q_C)$ . Наиболее часто для практических целей используют следующее выражение для скорости реакции [2, с. 75-76]:

$$W(T, C_0, q_C) = k_0 \cdot \exp\left(\frac{-15000 + 22000}{T}\right) C_0 q_C^n$$

где  $T$  - температура, К;  $C_0$  и  $q_0$  - концентрации кислорода и кокса, соответственно,  $k_0$  - предэкспонент, размерность которого зависит от размерности  $C_0$  и  $q_C$ .

При разработке кинетической модели учитывалось, что удаляемый кокс имеет сложную структуру и представляет собой в основном продукты реакции уплотнения, содержащие связанный водород [3, с.43]. Тогда схема химических превращений, описывающая окисление коксовых отложений некоторой усредненной формулы  $CH_n$ , и соответствующие ей кинетические уравнения ско-

ростей стадий имеет вид [4,с.27]:



где скорости отдельных стадий, моль/(м<sup>2</sup> · с) для  $W_1 - W_5$  и г/(м<sup>2</sup>·с) для  $W_6, W_7$ ;  $k(T)$  - константы скоростей стадий, зависящие от температуры ( $T$ ) по уравнению Аррениуса, моль/(м<sup>2</sup> · с) для  $K_1 - K_5$ , м<sup>2</sup>/с для  $K_6, K_7$ ;  $x_1$ -концентрация кислорода в газовой фазе, мольные доли;  $z_1$  - концентрация водорода и  $z_2$  - концентрация кислорода в объеме коксовых отложений,  $\Gamma_j/\Gamma_c$ , ( $j = 1, 2$ );  $\theta_k$  - степени покрытия поверхности кокса различными углеродными комплексами ( $\theta_1$  - водород-углеродный комплекс,  $\theta_2$  - кислородно-углеродный комплекс,  $\theta_3$  - свободная углеродная поверхность);  $\theta_i^*$  - количество адсорбированного коксом водорода ( $i=1$ ) и кислорода ( $i=2$ ), равновесное относительно текущего состояния поверхности коксовых отложений,  $\Gamma_i/\Gamma_C$ ;  $\rho_C$  - плотность кокса, г/м<sup>3</sup>;  $R_C$  - средний радиус коксовых гранул, м.

Каждая из стадий 1-5 следует рассматривать не как элементарную, а как некие их совокупности. Так, стадия 1 описывает образование кислород-углеродного комплекса, происходящее в результате диссоциативной адсорбции кислорода. Последняя, как известно, протекает через несколько промежуточных стадий. Стадия 2 описывает совокупность превращений, приводящих к появлению в газовой фазе диоксида углерода. Стадия 4 описывает процессы, аналогичные процессу окислительного дегидрирования углеводородов. Необходимо отметить, что адсорбция кислорода на углеродных поверхностях протекает необратимо, то есть ад-

сорбированный кислород может десорбироваться только в виде продуктов окисления. Это учитывалось при написании схемы.

Кинетические уравнения  $W_6$  и  $W_7$  учитывают подвижность по коксовой грануле, связанных с углеродом водорода и кислорода, что обусловлено диффузией компонентов из объема гранулы к её внешней поверхности, а для кислорода в начальный момент регенерации - противоположном направлении до состояния насыщения. Изменения содержания объёмных компонентов  $z_j$ , определяемое  $W_6$  и  $W_7$ , зависит от уменьшения размера гранул кокса в процесса выжига, а также от непрерывного изменения состояния поверхности за счет протекания химических реакций. Учитывая, что сведения о составе промежуточных комплексов, образующихся при выжиге кокса, в настоящее время отсутствуют, для количественных расчетов мы предположили, что один атом углерода, в среднем, связан с одним атомом кислорода в кислород-углеродном комплексе, или с двумя атомами водорода в водород-углеродных фрагментах. В таком случае при полном покрытии поверхности кокса каким-либо компонентом на 1 грамм углерода будет приходиться  $4/3$  грамма кислорода или  $1/6$  грамма водорода. Обозначим эти коэффициенты  $\alpha_O$  и  $\alpha_H$ , тогда

$$\theta_1^* = \alpha_H \theta_1; \quad \theta_2^* = \alpha_O \theta_2 \quad (2)$$

Заключительный этап построения кинетической модели состоит в определении кинетических констант скоростей реакций для найденной модели на основе экспериментальных данных о скорости химических превращений. Решение обратной задачи тесно связано с формулировкой прямой кинетической задачи, т.е. с разработкой математического описания для расчета состава реакционной смеси и скоростей реакции на основе кинетической модели.

Экспериментальные исследования кинетических закономерностей выжига коксовых отложений проводятся, как правило, в кинетической области, т.е. в таких условиях, когда влияние процессов переноса и обмена на зерне и в слое катализатора сведено к

минимуму. Поэтому эксперименты проводятся либо в проточно-циркуляционных установках, либо в реакторе с виброожиженным слоем катализатора. Достаточно точно поведение таких реакторов описывается моделью идеального смешения. Тогда изменение концентраций компонентов газовой фазы находится из уравнений материального баланса:

$$\frac{N_0 x_i^0 - N x_i}{V_p} S_k \gamma_k \sum_{i=1}^5 \nu_{ij} W_j = 0; i = 1, 5 \quad (3)$$

где  $N_0$  и  $N$  - мольная скорость газового потока на входе и выходе из реактора, моль/с;  $x_i, x_i^0$  - концентрации компонентов газовой фазы и их начальные значения, мольные доли;  $V_p$  - объем реактора, м<sup>3</sup>;  $\gamma_k$  - насыпная плотность катализатора, г/м<sup>3</sup>;  $S_k$  - текущая удельная поверхность коксовых гранул, м<sup>2</sup>/г;  $\nu_{ij}$  - стехиометрические коэффициенты, приведенные в таблице 1. Индексация в уравнениях (3) по  $i$ : 1 - кислород, 2 - вода, 3 - диоксид углерод, 4 - монооксид углерода. В систему уравнений (3) входит переменная  $N$ , которая определяется из условия нормировки состава по газовой фазе:

$$\frac{N_0 x_i^0 - N x_i}{V_p} S_k \gamma_k \sum_{i=1}^5 \delta_j W_j = 0 \quad (4)$$

где  $\delta_j = \sum \nu_{ij}$  - последняя строка матрицы стехиометрических коэффициентов (см. табл.1).

Компонент	$W_1$	$W_2$	$W_3$	$W_4$	$W_5$	$W_6$	$W_7$
$\theta_1$	0	0	0	-1	0	-1	-1
$\theta_2$	2	0	-1	1	-2	0	1
$\theta_3$	-2	0	1	0	2	1	0
$x_1$	-1	-1	0	-1	0	0	0
$x_2$	0	0	0	1	0	0	0
$x_3$	0	1	0	0	1	0	0
$x_4$	0	0	1	0	0	0	0
$\sum$	-1	0	1	0	1	0	0



Окислительная регенерация - процесс нестационарный, поскольку в ходе выжига количество кокса на катализаторе уменьшается. Удаление кокса, согласно кинетической модели (1), есть результат "отрыва" атома углерода на второй, третьей и пятой стадиях химического превращения. Происходящая при этом перестройка внешней поверхности за счет обмена поверхность-объем гранулы (стадии 6 и 7) изменяет во времени содержание объемных компонентов. Состояние поверхности всегда меньше общего веса коксовых отложений. Тогда уравнение материального баланса компонентов представляется следующей системой:

$$\begin{aligned} \frac{dq_C}{dt} &= -M_C S_k (W_2 + W_3 + W_5); \\ \frac{z_i, q_C}{dt} &= S_k W_i; i = 1, 2; I = i + 5; \\ \sum_{j=1}^7 \nu_{ij} W_j &= 0; i = 1, 2; \theta_1 + \theta_2 + \theta_3 = 1; \end{aligned} \quad (5)$$

с начальными условиями -  $t = 0$ :  $q_C = q_C^0$ ;  $z_1 = z_1^0$ ;  $z_2 = 0$ , где  $t$  - время, с;  $M_C$  - молекулярная масса кокса, г/моль;  $S_k$  - удельная поверхность коксовых гранул, м<sup>2</sup>/гКТ;  $q_C$ ,  $q_C^0$  - текущее количество кокса на катализаторе и его начальное содержание г/гКТ. Решение обратной задачи сводится к рассмотрению серии прямых задач с минимизацией функционала отклонения расчетных значений концентраций наблюдаемых веществ от экспериментальных данных

$$F = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^n |X_{ij}^{calc} - X_{ij}^{exp}|$$

где  $X_{ij}^{calc}$  - расчетные значения;  $X_{ij}^{exp}$  - экспериментальные данные,  $N$  - количество точек эксперимента,  $n$  - количество веществ, участвующих в реакции.

## § 2. Численные методы

Решение системы ОДУ (5) проводится модифицированным методом Кутты-Мерсона:

$$\begin{aligned}
 F_1 &= f(z_k) \cdot h \\
 F_2 &= f(z_k + F_1/3) \cdot h \\
 F_3 &= f(z_k + (F_1 + F_2)/6) \cdot h \\
 F_4 &= f(z_k + (F_1 + 3F_3 + 4F_4)/8) \cdot h \\
 z_{k+1} &= z_k + (F_1 + -3F_3 + 4F_4)/2 \\
 F_5 &= f(z_{k+1}) \cdot h \\
 z_{k+1}^* &= z_k + (F_1 + 4F_4 + F_5)/6
 \end{aligned} \tag{6}$$

где  $h = \tau_{k+1} - \tau_k$  - шаг интегрирования,  $z_k$  - значения переменных в начале интервала интегрирования. В конце интервала интегрирования ( $\tau_k, \tau_{k+1}$ ) получаются два решения:  $z_k + 1$  - методом Рунге-Кутты с точностью  $O(h^4)$  и  $z_{k+1}^*$  - методом Кутты-Мерсона с точностью  $O(h^5)$ .

## Выводы

При решении обратной задачи определили численные значения модифицированных кинетических констант

$$k_i^* = k_i(T)\gamma_k S_k^0 / R_C (i = 1, 5)$$

$$k_i^* = k_i(T)\gamma_k S_k^0 / C_0 (i = 6, 7)$$

-где  $C$ -мольная концентрация газа, моль/м<sup>3</sup>

Эти константы имеют размерность обратной секунды и содержат неизвестные параметры - начальный радиус и удельную поверхность коксовых гранул. Поскольку в экспериментах исследовались образцы катализатора с начальной закоксованностью от 1 до 6% (масс.),  $R_0$  и  $S_k^0$  не являются постоянными величинами. Для устранения неоднозначности константы были пересчитаны с

помощью зависимостей

$$S_k = S_C^0(q_C/q_C^0); \quad R_C = R_C^0(q_C/q_C^0)^{\frac{1}{3}}$$

Численные значения модифицированных кинетических констант  $k_i^*$ , отнесенные к стандартной величине  $q_C^*$ , и энергии активации приведены в таблице 2.

Таблица 2. Константы кинетической модели окислительной регенерации закоксованных катализаторов.

$k_i^*, c^{-1}$	$k_i^*, c^{-1}$	$E_{i,кДж/моль}$	$k_i^*, c^{-1}$	$k_i^*, c^{-1}$	$E_{i,кДж/моль}$
$k_1^*$	0,2423	99,1	$k_5^*$	4,3495	27,3
$k_2^*$	0,8772	90,8	$k_6^*$	1,5637	154,5
$k_3^*$	0,6165	52,8	$k_7^*$	5,2328	42,7
$k_4^*$	5,2328	50,4			

Кинетическая модель (1) достаточно точно воспроизводит данные экспериментальных исследований по характеру изменения скорости горения коксовых отложений и скоростям образования продуктов окисления. Мерой изменения числа молей в процессе выжигания кокса является величина относительной мольной скорости газового потока  $u = N/N_0$ . В начале выжигания  $u$  меньше 1, через некоторое время больше 1 и при выжигании кокса до конечной степени закоксованности порядка 0,1 и стремится к 1. Из характера изменения относительной мольной скорости хорошо воспроизводятся экспериментальные данные по изменению скорости расхода кислорода.

Таким образом разработанная кинетическая модель процесса окислительной регенерации (1) является достаточно надежной теоретически обоснованной моделью. Определенные кинетические параметры будут использованы при моделировании процесса окислительной регенерации на уровне зерна и слоя катализатора.

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Кузнецов Ю. И., Мазоткин О. А., М.Г. Слинъко.* Моделирование химических процессов в псевдоожиженном слое при изменении свойств катализатора.- Доклад АН СССР,1972,т.207,с.145-148.
- [2] *Масагутов Р. М., Морозов Б. Ф., Кутепов Б. И.* Двойственное представление суперлинейных функционалов и его применения в теории функций. II. // Изв. РАН. Серия матем. 2001. Т. 65. № 5. С. 167–190.
- [3] *Кутепов Б. И.* Кинетика образования и взаимопревращения продуктов окисления кокса на современных катализаторах крекинга. Дисс. канд. наук, Уфа. 1980,128 с.
- [4] *Губайдуллин И. М.* Математическое моделирование динамических режимов окислительной регенерации катализаторов в аппаратах с неподвижным слоем. Дисс. канд. наук, Уфа. 1996,109 с.

УДК 532.5

## ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ РАЗВИТИЯ СФЕРИЧЕСКИ-СИММЕТРИЧНОЙ ОПУХОЛИ В ЛИМФАТИЧЕСКОМ УЗЛЕ

Солнышкина О. А. (Уфа, БашГУ)

### Введение

Одной из основных проблем современной медицины является диагностика и лечение онкологических заболеваний. Исследования в этой области проводятся не только с помощью клинических экспериментов, но и посредством математического моделирования. Математические модели позволяют прогнозировать эволюцию раковой опухоли при различных внешних факторах и терапевтических воздействиях.

В данной работе изучение особенностей начального этапа роста опухоли (без образования новых кровеносных сосудов) проводится в рамках механики многофазных систем [1]. Рассматриваемая модель позволяет описать эволюцию опухоли в зависимости от межклеточной адгезии и уровня питательных веществ.

### § 1. Постановка задачи

Пусть лимфатический узел является недеформируемой пористой средой, насыщенной лимфой. Лимфу представим как дисперсную систему: дисперсионная фаза - плазма крови (жидкая фаза) с объемной концентрацией  $\alpha_P$ , а дисперсные фазы - клетки раковой опухоли. Клетки могут быть живыми (viable) или мертвыми (dead), с объемными концентрациями  $\alpha_V, \alpha_D$ , соответственно. Выполняется условие  $\alpha_V + \alpha_D + \alpha_P = 1$ . Плотности фаз постоянны.

Учитывается поступление питательных веществ (кислорода) из кровеносных капилляров окружающей ткани в область лимфатического узла. Концентрацию питательного субстрата обозначим

*n.* Все происходящие процессы изотермические. Взаимодействие с иммунной системой на данном этапе моделирования не учитывается.

Уравнения конвекции-диффузии для объемных концентраций фаз записываются в следующем безразмерном виде:

$$\frac{\partial \alpha_V}{\partial t} + \nabla(\alpha_V \vec{u}_c) = -\nabla \vec{J}_V + S_V, \quad (1)$$

$$\frac{\partial \alpha_D}{\partial t} + \nabla(\alpha_D \vec{u}_c) = -\nabla \vec{J}_D + S_D, \quad (2)$$

$$\frac{\partial \alpha_P}{\partial t} + \nabla(\alpha_P \vec{u}_p) = (\nabla \vec{J}_V + \nabla \vec{J}_D) + S_P, \quad (3)$$

где  $\vec{u}_c$  - скорость клеточных фаз системы,  $\vec{u}_p$  - скорость жидкой фазы,  $\vec{J}_V$  и  $\vec{J}_D$  - диффузионные потоки отражающие механическое взаимодействие (адгезия) между видами клеток опухоли [2]:

$$\vec{J}_V = -M\alpha_V \nabla \mu, \quad \vec{J}_D = -M\alpha_D \nabla \mu, \quad (4)$$

где  $M$  - коэффициент подвижности клеток. Считается, что нет различия между адгезивными свойствами мертвых и жизнеспособных клеток опухоли. Для описания адгезивного взаимодействия используется химический потенциал  $\mu$ , выражаемый через вариационную производную свободной энергии Гельмгольца:

$$\mu = \frac{\delta E}{\delta \alpha_V} = \frac{\delta E}{\delta \alpha_D} = f'(\alpha_T) - \varepsilon^2 \nabla^2 \alpha_T, \quad (5)$$

где  $f(\alpha_T) = \frac{1}{4}\alpha_T^2(1 - \alpha_T)^2$ ,  $\alpha_T = \alpha_V + \alpha_D$ .

Клеточная адгезия позволяет контролировать пространственное расширение опухоли, то есть формировать и поддерживать физически и биологически реалистичной границу раздела между областями здоровых и опухолевых клеток. Впервые такое выражение для адгезии встречается в работе [3].

Пусть гибель жизнеспособных клеток связана с локальной концентрацией питательного субстрата  $n$ , т. е. переход происходит, когда концентрация падает ниже определенного значения  $n_N$ . Интенсивность деления клеток пропорциональна уровню питательных веществ, при образовании новых клеток соответствующее количество жидкости полностью переходит в клеточную массу. И наоборот, при растворении мертвых клеток клеточная масса полностью переходит в жидкость. Соответственно источниковые члены имеют вид:

$$S_V = \lambda_M n \alpha_V - \lambda_A \alpha_V - \lambda_N H(n_N - n) \alpha_V, \quad (6)$$

$$S_D = \lambda_A \alpha_V + \lambda_N H(n_N - n) \alpha_V - \lambda_L \alpha_D, \quad (7)$$

$$S_P = -\lambda_M n \alpha_V + \lambda_L \alpha_L, \quad (8)$$

где  $\lambda_M$ ,  $\lambda_N$ ,  $\lambda_A$  и  $\lambda_L$  интенсивности деления живых клеток (mitosis), гибели живых клеток из-за недостатка питательных веществ (necrosis), гибели живых клеток по другим причинам (apoptosis), растворения мертвых клеток (lysing), соответственно,  $H$  - функция Хевисайда.

Скорость клеточных фаз описывается обобщенным законом Дарси:

$$\vec{u}_c = -k(\nabla p_c - \mu \nabla(\alpha_V + \alpha_D)) \quad (9)$$

где  $k$  - коэффициент фильтрации,  $p_c$  - давление клеточной фазы. Уравнение для скорости жидкой фазы имеет следующий вид:

$$\vec{u}_p = -k \nabla p_p \quad (10)$$

Используя уравнение неразрывности, запишем уравнение для давления:

$$-\nabla(k \nabla p_c) = S_T - \nabla(\mu \nabla(\alpha_V + \alpha_D)), \quad (11)$$

где  $S_T = S_V + S_D$ .

Изменение концентрации питательных веществ описывается следующим уравнением:

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \nabla(n\vec{u}_c) = \nabla(D_n \nabla n) + S_C - S_U, \quad (12)$$

где  $D_n$  - коэффициент диффузии питательных веществ,  $S_C$  - поступление питательных веществ из капилляров,  $S_U = n\alpha_V$  - потребление кислорода живыми клетками.

В начальный момент времени во всей области лимфатического узла  $\vec{u}_c = 0, n = n_\infty$ . В области опухоли  $\alpha_V = 1$ , а в остальной области  $\alpha_P = 1$ .

На границе лимфатического узла выполняются следующие условия:

$$\nabla\alpha_V\vec{n} = \nabla\alpha_D\vec{n} = \nabla p\vec{n} = 0, n = n_\infty, \quad (13)$$

где  $\vec{n}$  - единичная нормаль.

## § 2. Результаты численного исследования

Запишем общие уравнения математической модели, представленной в § 1, в сферически симметричном случае. Для концентраций опухолевых клеток получим следующие уравнения:

$$\frac{\partial\alpha_T}{\partial t} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial\alpha_T u_c}{\partial r} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 M \alpha_T \frac{\partial\mu}{\partial r}) + S_T, \quad (14)$$

$$\frac{\partial\alpha_D}{\partial t} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial\alpha_D u_c}{\partial r} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 M \alpha_D \frac{\partial\mu}{\partial r}) + S_D. \quad (15)$$

Уравнения для скорости клеток и для концентрации питательных веществ примут вид:

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial r^2 u_c}{\partial r} = S_T, \quad (16)$$

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \frac{\partial n}{\partial r}) = n(\alpha_T - \alpha_D). \quad (17)$$

Для численного решения применялся метод контрольного объема, подробно описанный в [4]. На Рис. 1 приведены распределения параметров при росте сферически симметричной опухоли.



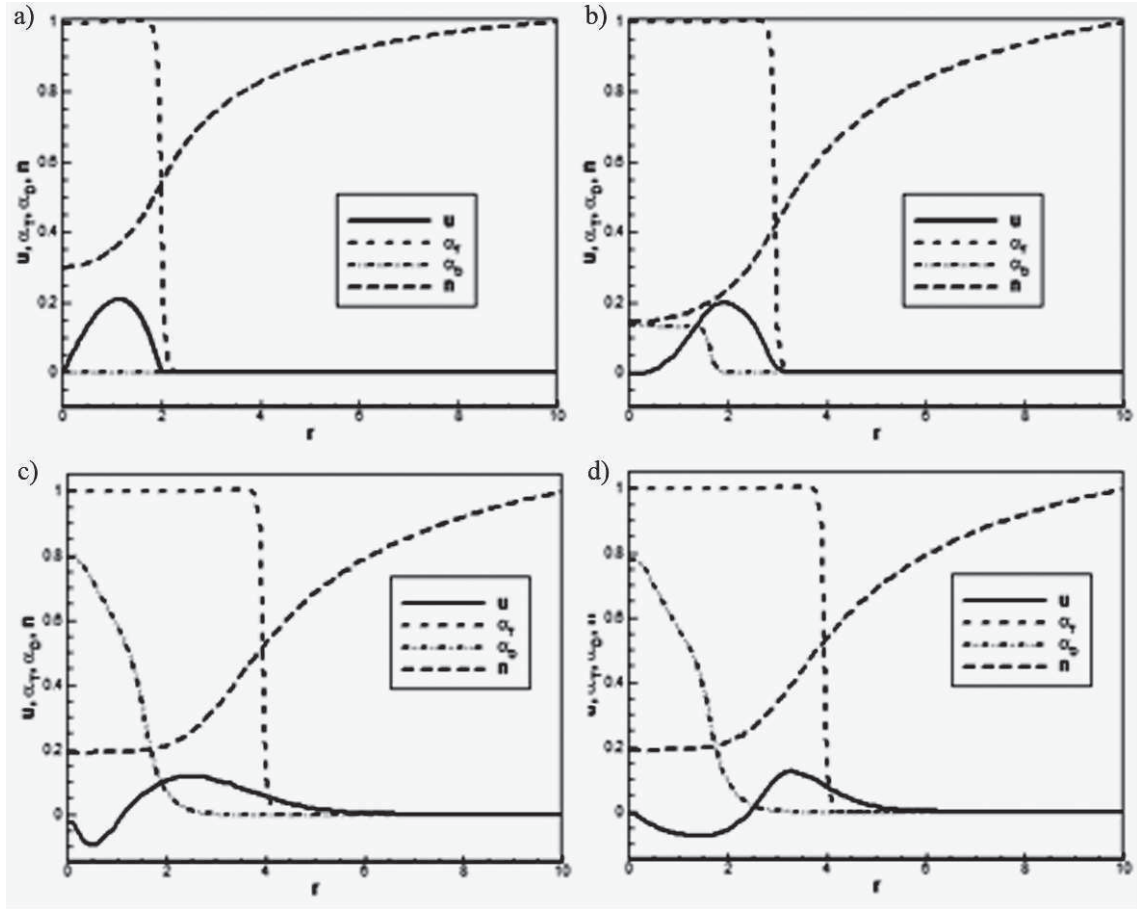


Рис. 1: Распределение параметров при росте сферически симметричной опухоли. а.)  $t=0$ , б.)  $t=5$ , с.)  $t=10$ , д.)  $t=50$ .

В начальный момент времени (Рис. 1, а.) имеем некоторое количество живых опухолевых клеток, которые потребляют питательные вещества, поступающие в область лимфоузла. Клетки размножаются, мертвые клетки ещё не возникают. С течением времени опухоль растёт, концентрация питательных веществ в центре опухоли падает до критического значения  $n_N$ . Живые клетки начинают умирать, образуется некротическое ядро (Рис. 1, б.), растёт концентрация  $\alpha_D$ . Далее уровень питательных веществ выравнивается от центра опухоли по значению  $n = n_N$  (Рис. 1, с.), что соответствует клиническим данным. Некротическое ядро продолжает развиваться, мертвые клетки со временем растворяются, образовавшаяся жидкость выходит из опухоли, живые клетки пе-

ремещаются в освободившееся пространство (Рис. 1, с., d.). С течением времени, опухоль достигает определенных размеров и её пространственный рост далее не происходит, так как по мере роста опухолевой массы клетки внутри опухоли отдаляются от источника питательных веществ и опухоль достигает постоянного объема. Таким образом, все процессы происходят только внутри опухоли, деление клеток компенсируется гибелью клеток и растворением мертвых клеток.

### Заключение

Приведена математическая модель начального этапа роста раковой опухоли в лимфатическом узле. Для сферически симметричной опухоли получены временные и пространственные зависимости концентраций клеток опухоли, распределение питательных веществ и скорости клеток. Показано, что на начальном этапе развития (без образования новых кровеносных сосудов) пространственный рост опухоли прекращается при достижении определенного размера.

### ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Нигматулин Р. И.* Динамика многофазных сред. Т. 1. М.: Наука, 1987.
- [2] *Wise S. M., Lowengrub J. S., Friebos H. B., Cristini V.* Three-dimensional multispecies nonlinear tumor growth I. Model and numerical method // *Journal of Theoretical Biology.* 2008. V. 253. P. 524-543.
- [3] *Armstrong N. J., Painter K. J., Sherratt J. A.* A continuum approach to modelling cell-cell adhesion // *Journal of Theoretical Biology.* 2006. V. 243. P. 98-133.
- [4] *Патанкар С.* Численные методы решения задач теплообмена и динамики жидкости. М.: Энергоатомиздат, 1984.

УДК 541.127

АНАЛИЗ ВЫДЕЛЕНИЯ БАЗИСА НЕЗАВИСИМЫХ  
ПАРАМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ КИНЕТИЧЕСКИХ  
КОНСТАНТ

Спивак С. И., Исмагилова А. С. (Уфа, БашГУ)

**Введение**

В [1] рассмотрен метод анализа неединственности решения обратных задач химической кинетики. Процесс определения числа и вида независимых параметрических функций констант алгоритмичен. Основная сложность, возникающая при анализе сложных реакций, – громоздкость вычислений. При этом следует учесть, что имеются в виду аналитические вычисления с нелинейными выражениями. Автоматизация вычислений становится самостоятельной проблемой при анализе информативности.

В настоящей работе предлагается теоретико-графовый метод, позволяющий разложить исходную задачу анализа выделения базиса независимых параметрических функций кинетических констант на ряд существенно более простых. При этом принципиально используется структура схем протекания сложных реакций. Система упрощенных выражений исследуется на основе алгоритма, изложенного в [2]. Далее показывается, что объединение компонент базисов каждой из упрощенных подсистем образует полный базис исходной системы. Каждая исследуемая подсистема имеет самостоятельную химическую интерпретацию.

**§ 1. Анализ однозначности решения обратных задач  
химической кинетики**

Широкий класс кинетических моделей можно представить в виде

$$\frac{da}{dt} = f(a, k),$$

где  $a = (a_1, \dots, a_n)$  – вектор концентраций веществ,  $k = (k_1, \dots, k_s)$  – вектор кинетических констант,  $f = (f_1, f_2)$  – выписываются в соответствии с законом действующих масс.

Вектор концентрации можно разбить на два подвектора:

$$a = (x', y),$$

где  $x' = (x'_1, \dots, x'_{n_1})$  соответствует измеряемым веществам и  $y = (y_1, \dots, y_{n_2})$  – неизмеряемым веществам,  $n_1 + n_2 = n$ .

Концентрация неизмеряемых веществ определяется из некоторых дополнительных соотношений. Система кинетических уравнений приобретает вид:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f_1(x', y, k); \\ f_2(x', y, k) = 0; \\ x'(0) = x'_0. \end{cases} \quad (1)$$

Погрешность  $\varepsilon$  рассматривается как дополнительный параметр, который не входит в систему уравнений, а входит в  $x$ .

Можно рассматривать ситуации, когда

$$x' = x + x\varepsilon, \quad x' = x + \varepsilon, \quad x' = x\varepsilon,$$

где  $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_1$  – предельная допустимая погрешность измерения.

Идея состоит в том, что  $\varepsilon$  входит в вектор определяемых параметров, который будет иметь вид:

$$k' = k'(k, \varepsilon) = (k_1, \dots, k_s; \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n_1})$$

В этом случае задача имеет бесконечное множество решений. Тогда решается задача определения вида независимых параметрических функций, для которых устранена локальная неидентифицируемость.

Тогда достаточно исследовать матрицу

$$U = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial k'} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \frac{\partial f_2}{\partial k'} \end{pmatrix} \quad (2)$$

явный вид которой определяется правыми частями системы (1).

Из этого следует существование ненулевой матрицы  $A$ , называемой матрицей связей, зависящей только от  $k$  и  $\varepsilon$ , такой что

$$U \cdot A \equiv 0.$$

Если эта матрица найдена, то базис независимых частных решений системы

$$\frac{\partial \rho}{\partial k'} \cdot A = 0,$$

где  $\rho_1(k, \varepsilon), \dots, \rho_m(k, \varepsilon)$  – система нелинейных параметрических функций,  $m$  – число линейно независимых столбцов матрицы Якоби.

## § 2. Теоретико-графическая интерпретация маршрутов химических реакций

Маршрут есть вектор, умножение элементов которого на соответствующие стадии механизма сложной реакции вместе с последующим сложением всех стадий приводит к итоговому уравнению реакции, в котором нет промежуточных веществ.

Известно, что число независимых маршрутов  $P$  равно:

$$P = S - I,$$

где  $S$  – число стадий,  $I$  – число независимых промежуточных веществ.

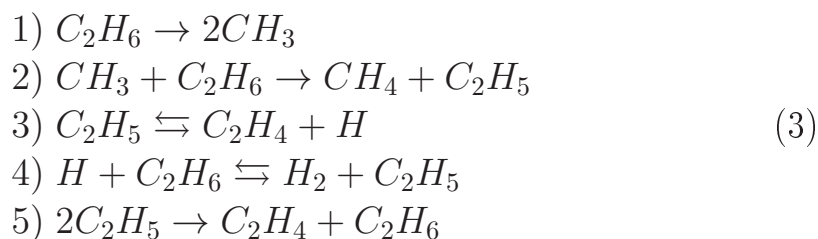
Часть компонент в маршруте обычно равны нулю. Таким образом, маршрут выделяет из всей совокупности стадий некоторую подсистему, в которую входит только часть стадий исходного механизма. Основная идея предлагаемого метода, основанного на теоретико-графической интерпретации маршрутов химических реакций, состоит в том, что вместо анализа информативности для всей сложной схемы реакций рассматриваются те схемы,

которые отвечают за протекание реакции по каждому из независимых маршрутов. Вместо одной сложной системы мы получаем несколько существенно более простых. Число исследуемых упрощенных систем равно числу независимых маршрутов. Определенные для них компоненты базиса параметрических функций будут компонентами базиса и для исходных сложных систем.

В случаях, когда механизм реакции распадается на большое число стадий и (или) содержит большое количество веществ, для нахождения маршрутов полезно применить матрицу инцидентности.

Алгоритм поиска начинаем со строки, обозначающей вершину-реакцию. Осуществляем переход от 1 к -1 в столбце, далее, от -1 к 1 в строке и т.д. Процесс продолжаем до тех пор, пока не придем к 1, с которой "начали движение". При переходе к новой строке, запоминаем номер, соответствующий номеру стадии или вещества, участвующего в реакции. Сопоставляя последовательность столбцов с графом реакции, получаем маршрут, т.е. последовательность вершин-реакций и вершин-веществ, входящих в них.

**Пример 1.** Рассмотрим механизм реакции пиролиза этана, включающий в себя следующие стадии:



Измеряются с погрешностью концентрации четырех веществ:  $C_2H_6$ ,  $CH_4$ ,  $C_2H_4$ ,  $H_2$ ; не измеряются концентрации промежуточных веществ:  $CH_3$ ,  $C_2H_5$ ,  $H$ .

Введем обозначения:  $A_1 = C_2H_6$ ,  $A_2 = CH_4$ ,  $A_3 = C_2H_4$ ,  $A_4 = H_2$ ,  $B_1 = CH_3$ ,  $B_2 = C_2H_5$ ,  $B_3 = H$ .

Граф Вольперта для рассматриваемой системы представлен на рисунке 1.

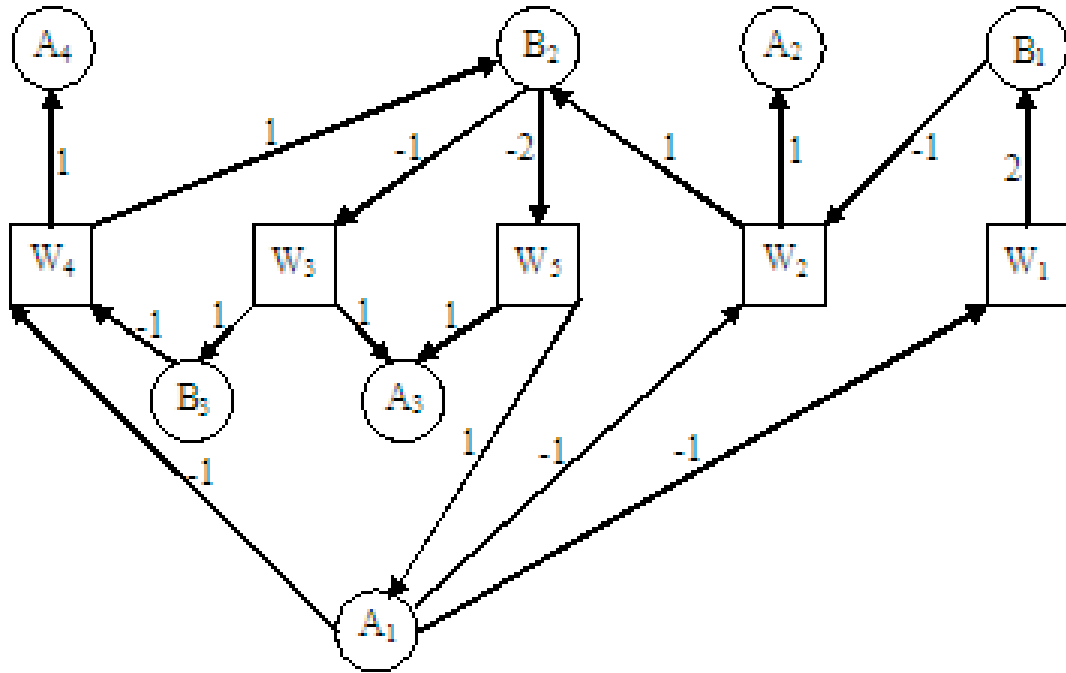


Рис.1. Граф Вольперта системы реакции

По правилу Хариути число независимых маршрутов  $P = 2$ .  
 Выпишем матрицу инцидентности для графа системы реакции:

	1	2(2')	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14(14')	15	16
A <sub>1</sub>	1	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	-1
A <sub>2</sub>	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
A <sub>3</sub>	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	-1	0
A <sub>4</sub>	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	0
B <sub>1</sub>	0	-1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
B <sub>2</sub>	0	0	0	0	0	-1	1	0	0	0	0	0	-1	1	0	0
B <sub>3</sub>	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	1	0	0	0	0	0
W <sub>1</sub>	-1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
W <sub>2</sub>	0	0	-1	-1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
W <sub>3</sub>	0	0	0	0	0	0	-1	1	1	0	0	0	0	0	0	0
W <sub>4</sub>	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	-1	1	1	0	0	0
W <sub>5</sub>	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	1	1

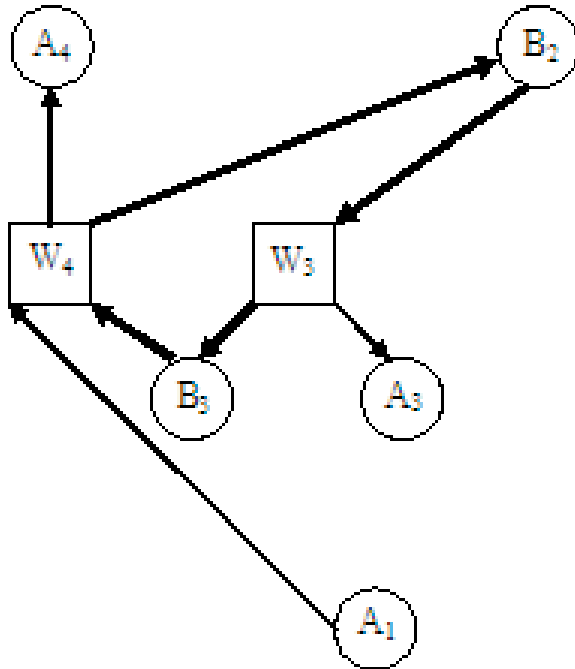


Рис.2. Граф маршрута  $M_1$

Граф рассматриваемой системы имеет 16 дуг и 12 вершин. По матрице инцидентности последовательности вершин-веществ и вершин-реакций  $[W_3, B_3, W_4, B_2]$  отвечает маршрут  $M_1 = (0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0)^T$  (последовательность элементов матрицы инцидентности  $(W_3, 7)-(W_3, 9)-(B_3, 9)-(B_3, 11)-(W_4, 11)-(W_4, 13)-(B_2, 13)-(B_2, 7)-(W_3, 7)$ ). Исходя из этого, первая подсистема будет состоять из третьей и четвертой реакций системы (3) (на графе – вершины-реакции  $W_3$  и  $W_4$ ) и вещества, в них участвующие (на графе – вершины-вещества  $A_1, A_3, A_4, B_2, B_3$ , инцидентные вершинам-реакциям  $W_3$  и  $W_4$ ). Граф маршрута  $M_1$  изображен на рисунке 2.

Аналогично, последовательность вершин-веществ и вершин-реакций  $[W_1, B_1, W_2, B_2, W_5, A_1]$  соответствует маршруту  $M_2 = (1 \ 2 \ 0 \ 0 \ 1)^T$  (последовательность элементов матрицы инцидентности  $(W_1, 1)-(W_1, 2)-(B_1, 2)-(B_1, 4)-(W_2, 4)-(W_2, 6)-(B_2, 6)-$



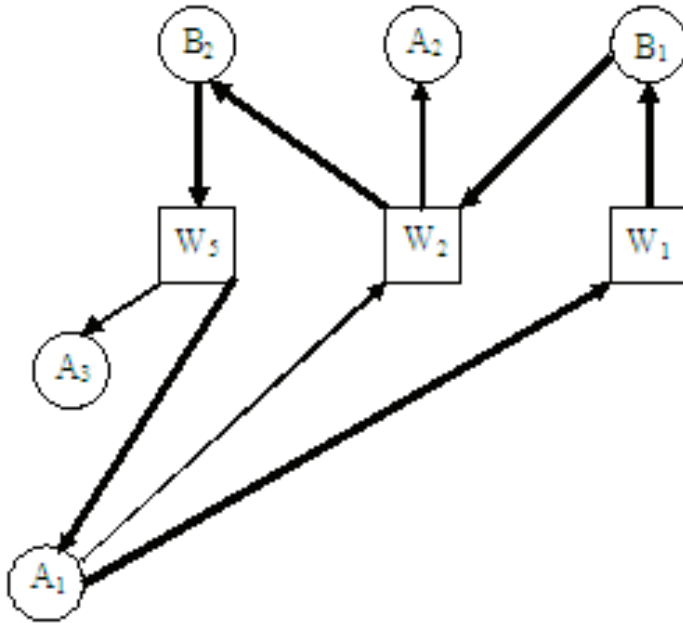
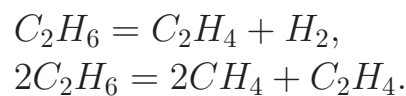


Рис.3. Граф маршрута  $M_2$

$(B_2, 14)-(W_5, 14)-(W_5, 16)-(A_1, 16)-(A_1, 1)-(W_1, 1)$ ). Вторая подсистема будет состоять из первой, второй и пятой реакций системы (3). Граф маршрута  $M_2$  изображен на рисунке 3.

Проверка балансовых соотношений показывает, что маршруты  $M_1$  и  $M_2$  действительно найдены верно.

Итоговые уравнения, соответствующие маршрутам  $M_1, M_2$ :



Система обыкновенных дифференциальных уравнений для подсистемы отвечающей первому маршруту имеет вид:

$$\begin{aligned} \frac{d[A_1]}{dt} &= -w_4, & \frac{d[A_3]}{dt} &= w_3, & \frac{d[A_4]}{dt} &= w_4, \\ \frac{d[B_2]}{dt} &= -w_3 + w_4, & \frac{d[B_3]}{dt} &= w_3 - w_4, \end{aligned} \quad (4)$$

где  $w_3 = k_3y_2 - k_{30}x'_3y_3$ ,  $w_4 = k_4x'_1y_3 - k_{40}x'_4y_2$ . Для подсистемы

реакций, отвечающей второму маршруту:

$$\begin{aligned} \frac{d[A_1]}{dt} &= -w_1 - w_2 + w_5, & \frac{d[A_2]}{dt} &= w_2, & \frac{d[A_3]}{dt} &= w_5, \\ \frac{d[B_1]}{dt} &= -w_2, & \frac{d[B_2]}{dt} &= 2w_1 + w_2 - 2w_5, \end{aligned} \quad (5)$$

где  $w_1 = k_1 x_1'$ ,  $w_2 = k_2 x_1' y_1$ ,  $w_5 = k_5 y_2^2$ .

Находим матрицу  $U$  согласно формуле (2).

Вектор определяемых параметров для первой подсистемы:

$$k' = k'(k, \varepsilon) = (k_3, k_4, k_{30}, k_{40}, \varepsilon_1, \varepsilon_3, \varepsilon_4);$$

для второй подсистемы:

$$k' = k'(k, \varepsilon) = (k_1, k_2, k_5, \varepsilon_1).$$

Матрица связей для первой подсистемы выглядит следующим образом:

$$A_{M_1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{k_3}{k_5} & 0 & 0 & 0 \\ k_4 & 0 & 0 & 0 & k_4 \\ k_{30} & 0 & 0 & -k_{30} & 0 \\ 0 & \frac{k_{40}}{k_5} & -k_{40} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -(1 + \varepsilon_1) \\ 0 & 0 & 0 & 1 + \varepsilon_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 + \varepsilon_4 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad (6)$$

для второй подсистемы:

$$A_{M_2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & k_1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -(1 + \varepsilon_1) \end{pmatrix}. \quad (7)$$

Система, соответствующая (6), (7):

$$\begin{aligned}
k_4 \frac{\partial \rho}{\partial k_4} + k_{30} \frac{\partial \rho}{\partial k_{30}} &= 0 \\
\frac{k_3}{k_5} \frac{\partial \rho}{\partial k_3} + 2 \frac{\partial \rho}{\partial k_5} + \frac{k_{40}}{k_5} \frac{\partial \rho}{\partial k_{40}} &= 0 \\
-k_{40} \frac{\partial \rho}{\partial k_{40}} + (1 + \varepsilon_4) \frac{\partial \rho}{\partial \varepsilon_4} &= 0 \\
-k_{30} \frac{\partial \rho}{\partial k_{30}} + (1 + \varepsilon_3) \frac{\partial \rho}{\partial \varepsilon_3} &= 0 \\
k_1 \frac{\partial \rho}{\partial k_1} + k_4 \frac{\partial \rho}{\partial k_4} - (1 + \varepsilon_1) \frac{\partial \rho}{\partial \varepsilon_1} &= 0
\end{aligned}$$

Базис независимых нелинейных параметрических функций состоит из компонент:

$$\begin{aligned}
\rho_1 &= \frac{k_{30}}{k_4}, \\
\rho_2 &= \frac{k_3^2}{k_5}, \\
\rho_3 &= \frac{k_1 + k_4}{k_1 k_4 (1 + \varepsilon_1)}, \\
\rho_4 &= k_{30} (1 + \varepsilon_3), \\
\rho_5 &= k_{40} (1 + \varepsilon_4).
\end{aligned} \tag{8}$$

Таким образом, в механизме реакции пиролиза этана доступная экспериментальная информация позволяет определить пять независимых параметрических функций, задаваемых системой (8).

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Спивак С. И., Исмагилова А. С.* Информативность кинетических измерений при определении параметров математических моделей химической кинетики // Журнал Средневолжского математического общества. 2009. Т. 11, № 2. С. 131-136.
- [2] *Спивак С. И., Исмагилова А. С., Хамитова И. А.* Теоретико-графовый метод определения маршрутов сложных химических реакций // Доклады Академии наук. 2010. Т. 434, № 4. С. 499-501.

УДК 517.9

МЕТОД СМЕЩЕННЫХ СЕТОК  
ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ ФИЛЬТРАЦИОННОЙ КОНВЕКЦИИ  
В КОЛЬЦЕВЫХ СЕКТОРАХ

Трофимова А. В., Цибулин В. Г.  
(Ростов–на–Дону, ЮФУ)

Расчет конвективных движений в пористых средах является актуальным из-за многочисленных научных и технических приложений [1]. При анализе плоской задачи фильтрационной конвекции Дарси обнаружено ответвление от механического равновесия однопараметрического семейства стационарных конвективных режимов. Это явление было объяснено с помощью теории косимметрии [2], аналитически получена асимптотика семейства равновесий и изучена его устойчивость вблизи бифуркации рождения. Анализ сильной неединственности решений при больших надкритичностях возможен только с помощью численных методов. Изучены семейства стационарных режимов для прямоугольных областей на основе метода Галеркина [3] и метода сеток [4].

В данной работе описан численный метод расчета конвективных движений с помощью уравнений в полярных координатах. Для решения задачи использовалась конечно–разностная схема, основанная на методе смещенных сеток [5]. Изучено ответвление и развитие семейств конвективных режимов для различных кольцевых секторов.

**Постановка задачи.** Система уравнений фильтрационной конвекции в полярных координатах  $(r, \varphi)$  и безразмерных переменных имеет вид:

$$\partial_t \theta = \Delta \theta + G(\psi) - J(\theta, \psi) \equiv F_1(\theta, \psi), \quad (1)$$

$$0 = \Delta \psi - \lambda G(\theta) \equiv F_2(\theta, \psi), \quad (2)$$

$$\Delta\theta = \partial_r^2\theta + \frac{1}{r}\partial_r\theta + \frac{1}{r^2}\partial_\varphi^2\theta,$$

$$J(\theta, \psi) = \frac{1}{r}[\partial_r(\theta\partial_\varphi\psi) - \partial_\varphi(\theta\partial_r\psi)], \quad (3)$$

$$G(\theta) = \frac{1}{r}[\cos\varphi\partial_\varphi\theta + r\sin\varphi\partial_r\theta]. \quad (4)$$

Здесь  $t$  — время,  $\theta$  — отклонение температуры от равновесного профиля,  $\psi$  — функция тока. Фильтрационное число Рэлея определяется формулой  $\lambda = g\beta l^2\delta T/k\chi$ , где  $g$  — ускорение свободного падения,  $\beta$  — коэффициент теплового расширения,  $k = \nu/K$  — отношение коэффициента вязкости жидкости к проницаемости,  $l$  — масштаб длины,  $\chi$  — коэффициент температуропроводности,  $\delta T$  — градиент температуры по высоте.

Задача рассматривается в кольцевом секторе  $D = [R_1, R_2] \times [\Phi_1, \Phi_2]$ . На границе области  $D$  для функции тока и температуры принимаются следующие краевые условия:

$$\theta|_{\partial D} = 0, \quad \psi|_{\partial D} = 0. \quad (5)$$

Начальное распределение температуры дается линейным по высоте профилем:

$$\theta|_{t=0} = \theta^0(r, \varphi) \equiv \theta_1 - \frac{R_2 + r \cos\varphi}{2R_2}(\theta_1 - \theta_2), \quad (r, \varphi) \in D, \quad (6)$$

здесь  $\theta_1$  и  $\theta_2$  — значения температуры в точках  $(R_2, \pi)$  и  $(R_2, 0)$  кольца соответственно. Начальное условие задается только для температуры, т.к. функция тока определяется по  $\theta$  из (2), (5).

Для задачи (1)–(5) выполняется следующее интегральное тождество:

$$\int_D [F_1(\theta, \psi)\psi - F_2(\theta, \psi)\theta] r dr d\varphi = 0, \quad (7)$$

справедливость которого устанавливается непосредственно интегрированием по частям, использованием формулы Грина и учетом краевых условий. Таким образом, косимметрией системы (1)–(5)

является вектор-функция  $L = (\psi, -\theta)$ , что означает возможность появления однопараметрического семейства решений [2].

**Метод численного решения.** Для численного решения задачи (1)–(6) используется метод конечных разностей. Вводится основная сетка  $r_i = R_1 + ih_r$ ,  $i = 1 \dots N$ ,  $h_r = (R_2 - R_1)/(N + 1)$ ,  $\varphi_j = \Phi_1 + jh_\varphi$ ,  $j = 1 \dots M$ ,  $h_\varphi = (\Phi_2 - \Phi_1)/(M + 1)$ , в узлах которой определяется температура и функция тока, и смещенные узлы  $r_{i-1/2} = R_1 + (i - 1/2)h_r$ ,  $i = 1 \dots n + 1$ ,  $\varphi_{j-1/2} = \Phi_1 + (j - 1/2)h_\varphi$ ,  $j = 1 \dots m + 1$  для аппроксимации нелинейности в задаче.

На двухточечном шаблоне вводятся разностные операторы первых производных и операторы вычисления среднего для целых и полуцелых индексов  $i$  и  $j$ :

$$\begin{aligned} (\delta_1 f)_{i+1/2,j} &= \frac{f_{i+1,j} - f_{i,j}}{h_r}, & (\delta_2 f)_{i,j+1/2} &= \frac{f_{i,j+1} - f_{i,j}}{h_\varphi}, & (8) \\ (\delta_0^1 f)_{i+1/2,j} &= \frac{f_{i+1,j} + f_{i,j}}{2}, & (\delta_0^2 f)_{i,j+1/2} &= \frac{f_{i,j+1} + f_{i,j}}{2}. \end{aligned}$$

С использованием (8) задаются разностные операторы на четырехточечном шаблоне, разностные операторы первых производных на трехточечном шаблоне и дискретный аналог лапласиана:

$$\begin{aligned} d_0 &= \delta_0^1 \delta_0^2, & d_1 &= \delta_0^2 \delta_1, & d_2 &= \delta_0^1 \delta_2, \\ D_1 &= \delta_0^1 \delta_1, & D_2 &= \delta_0^2 \delta_2, & \Delta_h &= \frac{1}{r} \delta_1 (r \delta_1) + \frac{1}{r^2} \delta_2 \delta_2. \end{aligned}$$

Во внутренних узлах сетки  $i = 1 \dots N$ ,  $j = 1 \dots M$  записывается дискретный аналог уравнений (1)–(2):

$$\partial_t \theta_{i,j} = \Delta_h \theta_{i,j} + G_{i,j}(\psi) - J_{i,j}(\theta, \psi), \quad (9)$$

$$0 = \Delta_h \psi_{i,j} - \lambda G_{i,j}(\theta). \quad (10)$$

При аппроксимации якобиана применялась формула Аракавы:

$$\begin{aligned} J_{i,j}(\theta, \psi) &\approx J(\theta, \psi) |_{(r_i, \varphi_j)} = \frac{\alpha}{r_i} [D_1(\theta D_2 \psi) - D_2(\theta D_1 \psi)]_{i,j} + \\ &+ \frac{(1 - \alpha)}{r_i} [d_1(d_0 \theta d_2 \psi) - d_2(d_0 \theta d_1 \psi)]_{i,j}, \quad (11) \end{aligned}$$

а для аппроксимации  $G(\theta)$  использовалась формула, сохраняющая косимметрию для системы разностных уравнений [5]:

$$G_{i,j}(\theta) \approx G(\theta) |_{(r_i, \varphi_j)} = \frac{\beta}{r_i} (\cos \varphi D_2 \theta + r \sin \varphi D_1 \theta)_{i,j} + \frac{(1-\beta)}{r_i} (D_2(\cos \varphi \theta) + D_1(r \sin \varphi \theta))_{i,j}. \quad (12)$$

Выбор параметров  $\alpha$  и  $\beta$  в формулах (11)–(12) производился из условия выполнения разностного аналога тождества (7). При  $\alpha = 1/3$  и  $\beta = 1/2$  конечно-разностная схема системы сохраняет косимметрию исходной задачи.

**Результаты численного эксперимента.** Проведено исследование стационарных режимов, формирующихся в результате первого перехода, когда механическое равновесие теряет устойчивость. Рассматривались кольцевые секторы с разными углами раствора, внутренний и внешний радиусы были равны соответственно  $R_1 = 1$ ,  $R_2 = 2$ . В таблице приведены результаты вычислений для трех областей: узкой трапецевидной области  $D_1$ , кольцевого сектора  $D_2$  и полукольца  $D_3$ .

Область	$[\Phi_1, \Phi_2]$	$\lambda_{cr}$	$\lambda_*$	Сетка
$D_1$	$[15\pi/16, 17\pi/16]$	154.8	330.0	$16 \times 18$
$D_2$	$[7\pi/8, 9\pi/8]$	69.4	380.0	$16 \times 24$
$D_3$	$[\pi/2, 3\pi/2]$	41.6	97.0	$16 \times 48$

Для всех областей было получено ответвление семейства стационарных движений от механического равновесия. В зависимости от величины кольцевого сектора реализуются разнообразные конвективные движения с числом валов от двух до шести. В таблице приведены критические числа Рэлея  $\lambda_{cr}$  первого перехода и значения  $\lambda_*$ , при которых на семействе впервые появляются неустойчивые стационарные режимы.

На рис. 1–2 приведены проекции кривых рассчитанных семейств на плоскость интегральных параметров:

$$Nu_h = \int_{\Phi_1}^{\Phi_2} \frac{\partial \theta}{\partial r} r \Big|_{r=R_2} d\varphi, \quad Nu_v = \int_{R_1}^{R_2} \frac{1}{r} \frac{\partial \theta}{\partial \varphi} \Big|_{\varphi=\varphi^*} dr, \quad \varphi^* = \frac{\Phi_1 + \Phi_2}{2},$$

где  $Nu_h, Nu_v$  — числа Нуссельта, соответствующие тепловым потокам через внешнюю границу и срединную азимутальную линию.

Для узкой трапецевидной области  $D_1$  семейство стационарных режимов ответвляется при  $\lambda_{cr} \approx 155$ . На рис. 1 представлена кривая семейства при  $\lambda = 300$  и линии тока и распределения температуры для нескольких режимов (отмечены цифрами). Семейство составляют в основном стационарные движения в виде

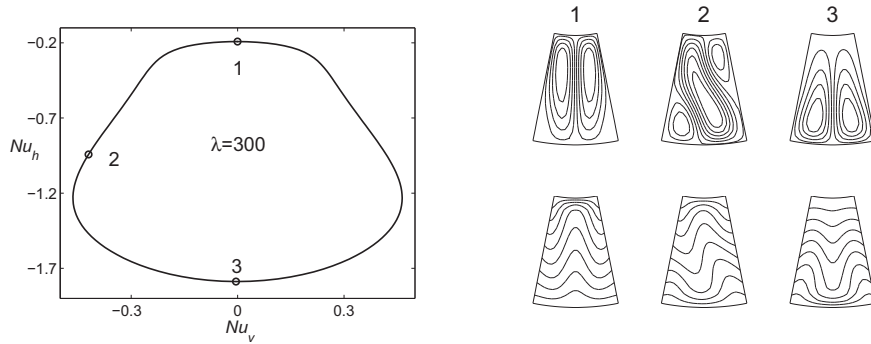


Рис. 1: Семейство стационарных режимов для области  $D_1$ . Справа: функции тока и распределения температуры для стационарных режимов из семейства

двух или трех конвективных валов. Имеющаяся в задаче симметрия области относительно вертикальной оси проявляется в том, что семейства содержат режимы, переходящие друг в друга при действии преобразования  $R^\varphi : \{\varphi, \theta, \psi\} \mapsto \{2\pi - \varphi, \theta, -\psi\}$ .

На рис. 2 приведено семейство стационарных конвективных режимов при  $\lambda = 200$  и области  $D_2$ . В кольцевом секторе  $D_2$  по сравнению с узкой трапецевидной областью  $D_1$  получается большее разнообразие конвективных структур с числом валов от двух до пяти.

Для полукольца  $D_3$  семейство стационарных конвективных режимов ответвляется при  $\lambda_{cr} \approx 42$ , и уже при  $\lambda > 97$  в результате монотонной неустойчивости на семействе появляются два участка



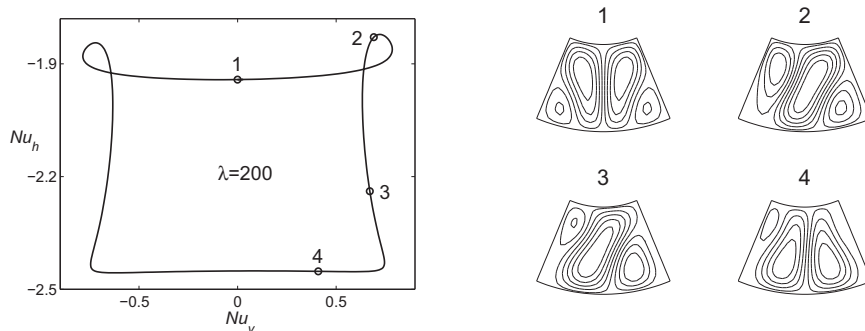


Рис. 2: Семейство стационарных режимов и функции тока режимов из семейства; область  $D_2$

потерявших устойчивость режимов. В зависимости от начальных данных могут реализовываться режимы с числом конвективных валов от двух до шести.

#### ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Nield D. A., Bejan A.* Convection in Porous Media.—New York: Springer–Verlag, 3rd edition, 2006. P. 641.
- [2] *Юдович В. И.* Косимметрия, вырождение решений операторных уравнений, возникновение фильтрационной конвекции // Мат. заметки. 1991. Т. 49. Вып. 5. С. 142–148.
- [3] *Говорухин В. Н.* Численное исследование потери устойчивости вторичными стационарными режимами в задаче плоской конвекции Дарси // Докл. РАН. 1998. Т. 363. № 6. С. 772–774.
- [4] *Karasözen B., Tsybulin V. G.* Finite-difference approximation and cosymmetry conservation in filtration convection problem // Phys. Let. A. 1999. V. 262. № 4. P. 321–329.
- [5] *Трофимова А. В., Цибулин В. Г.* Расчет конвективных режимов в пористой трапециевидной области // Изв. ВУЗов. Сев-Кав. Рег. Естеств. Науки. Спецвыпуск. 2009. С. 211–215.

УДК 541.127:519.688

## АНАЛИЗ АЛГОРИТМОВ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ХИМИЧЕСКОЙ КИНЕТИКИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ GRGPRU

Юнусов А. А. (Уфа, БГУ)

### Введение

Построение математической модели химической реакции является сложной задачей нахождения неизвестных кинетических констант и энергий активаций отдельных стадий реакции. Кинетические константы входят в математическое описание кинетики химического процесса, представляющее собой систему нелинейных дифференциальных уравнений первого порядка. Поиск неизвестных констант при наличии многостадийной схемы реакции, кинетических зависимостей и экспериментальных данных называется решением обратной задачи химической кинетики.

Если обозначить числом  $N$  количество стадий, а  $K$  количество неизвестных кинетических констант, то при использовании стандартной кинетической зависимости, построенной по принципу закона действующих масс число  $K$  будет равно  $N$ , в случае когда мы имеем только необратимые реакции, и  $K$  будет равно  $2N$  при обратимости всех входящих в реакцию стадий. Таким образом, под решением обратной задачи будем понимать поиск точки (набор кинетических констант) в  $K$ -мерном пространстве, в которой достигается минимум между расчетными и экспериментальными данными.

В качестве примера рассматривалась реакция гидроалюминирования олефинов алкилаланами катализируемой  $Cp_2ZrCl_2$  ([1]). Данная реакция имеет шесть стадий, необратимых среди них нет. Следовательно, количество кинетических констант равно 6. Для данной задачи решить систему дифференциальных уравнений аналитическим способом не представляется возможным ([2]),

и значит для минимизации исходного функционала необходимо использовать численные методы оптимизации ([4]).

Ввиду большой размерности задачи и возможности попадания функционала в локальные минимумы на гиперповерхности невязки данная задача требует значительных вычислительных мощностей. Рассматриваемая система не является жесткой и возможно использование стандартных численных методов решения дифференциальных уравнений, таких как Рунге-Кутта с фиксированным или переменным шагом интегрирования.

В качестве аппаратной части было решено использовать графические чипы (GPGPU) современных видеокарт персональных компьютеров. Недавно появившиеся технологии nVidia CUDA и ATI Stream позволяют задействовать вычислительные мощности видеочипов не только для расчета трассировки лучей в 3D-сценах и отрисовки миллионов полигонов в секунду, но и для выполнения специализированных вычислительных задач. При это, следует заметить, что мощности в указанных чипах на несколько порядков превышают соответствующие мощности центральных процессоров. Видео чип содержит в себе несколько сотен простых потоковых процессоров, каждый из которых может работать независимо от других. Таким образом, графические процессоры специализированы для высокопараллельных вычислений, что и было использовано в данной работе.

## § 1. Математическое описание

Выпишем систему дифференциальных уравнений([3]) для реакции гидроалюмирования катализируемой  $Cp_2ZrCl_2$ .

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dx_1}{dt} = -w_1 + w_5; \\ \frac{dx_2}{dt} = -3w_1 - 2w_2 - 3w_4 - w_5 + w_6; \\ \frac{dx_3}{dt} = \frac{1}{2}w_1 - \frac{1}{2}w_2 - \frac{1}{2}w_3 + \frac{1}{2}w_4; \\ \frac{dx_4}{dt} = 2w_1 + w_2 + w_4 - w_6; \\ \frac{dx_5}{dt} = 2w_1 + w_2 + 2w_4; \\ \frac{dx_6}{dt} = w_2; \\ \frac{dx_7}{dt} = -2w_3; \\ \frac{dx_8}{dt} = w_3 - w_4 - w_5; \\ \frac{dx_9}{dt} = w_3 + w_5 - w_6; \\ \frac{dx_{10}}{dt} = w_4 + w_6; \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} w_1 = k_1 x_1 x_2^3 \\ w_2 = k_2 x_2^2 \sqrt{x_3} \\ w_3 = k_3 \sqrt{x_3} x_7^2 \\ w_4 = k_4 x_2^3 x_8 \\ w_5 = k_5 x_2 x_8 \\ w_6 = k_6 x_9 x_4 \end{array} \right. \quad (1)$$

где  $x_i$  - концентрации вещества  $X_i$ ,  $w_i$  - скорость  $i$ -й стадии;  
 $x_7(0) = 0.4507, x_2(0) = 0.5413, x_1(0) = 0.008, x_i(0) = 0, i \neq 1, 2, 7$ .

$X_1$  -  $Cp_2ZrCl_2$ ,  $X_2$  -  $ClAlBu_2^i$ ,  $X_3$  -  $Cp_2ZrHCl \cdot HAlBu_2^i$ ,  
 $X_4$  -  $Cl_2AlBu^i$ ,  $X_5$  -  $C_4H_8$ ,  $X_6$  -  $Cp_2ZrH_2$ ,  $X_7$  -  $CH_2CHR$ ,  
 $X_8$  -  $Cp_2Zr(CH_2CH_2R)Cl$ ,  $X_9$  -  $Bu_2^i(CH_2CH_2)R$ ,  $X_{10}$  -  $Bu^iClAl(CH_2CH_2)R$ .

Обратная задача заключается в нахождении кинетических констант  $k_i$ , минимизирующих функционал

$$EE = \sum_j \sum_i |x_i(t_j) - x_i^e(t_j)| \quad (2)$$

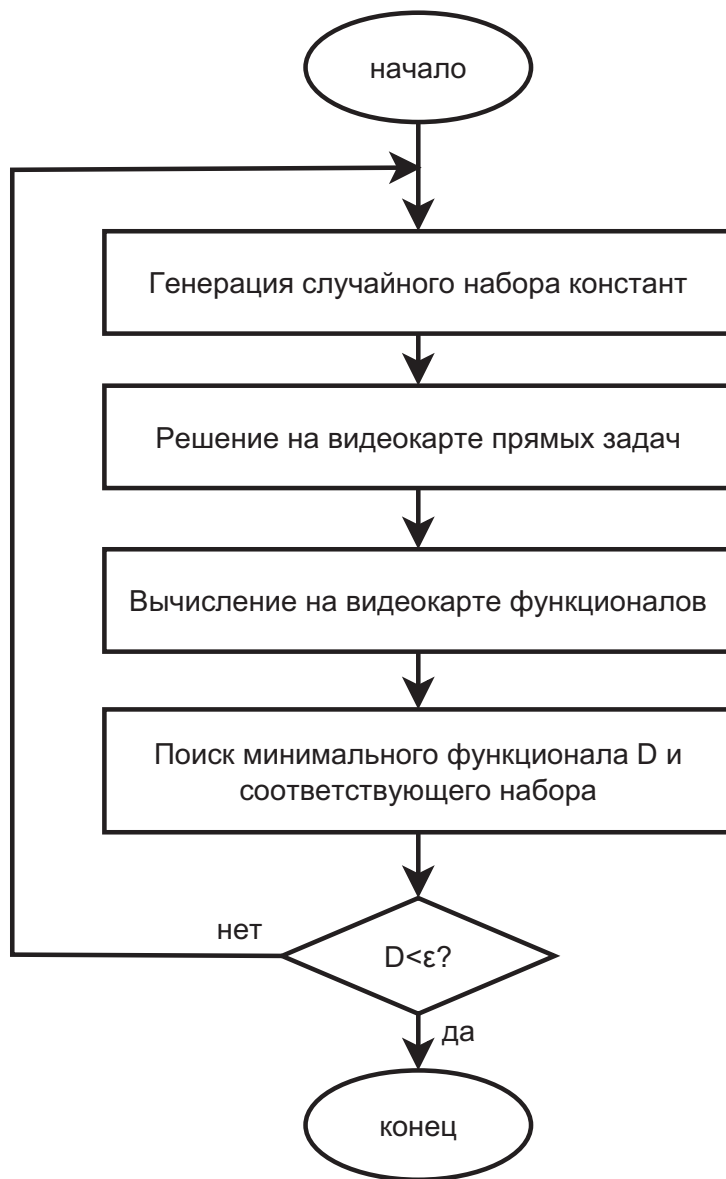
где  $t_j$  - моменты снятия натуральных экспериментальных данных,  
 $x_i^e(t_j)$  - концентрация  $i$ -го вещества в момент времени  $t_j$ , полученная из опыта.

## **§ 2. Методы решения**

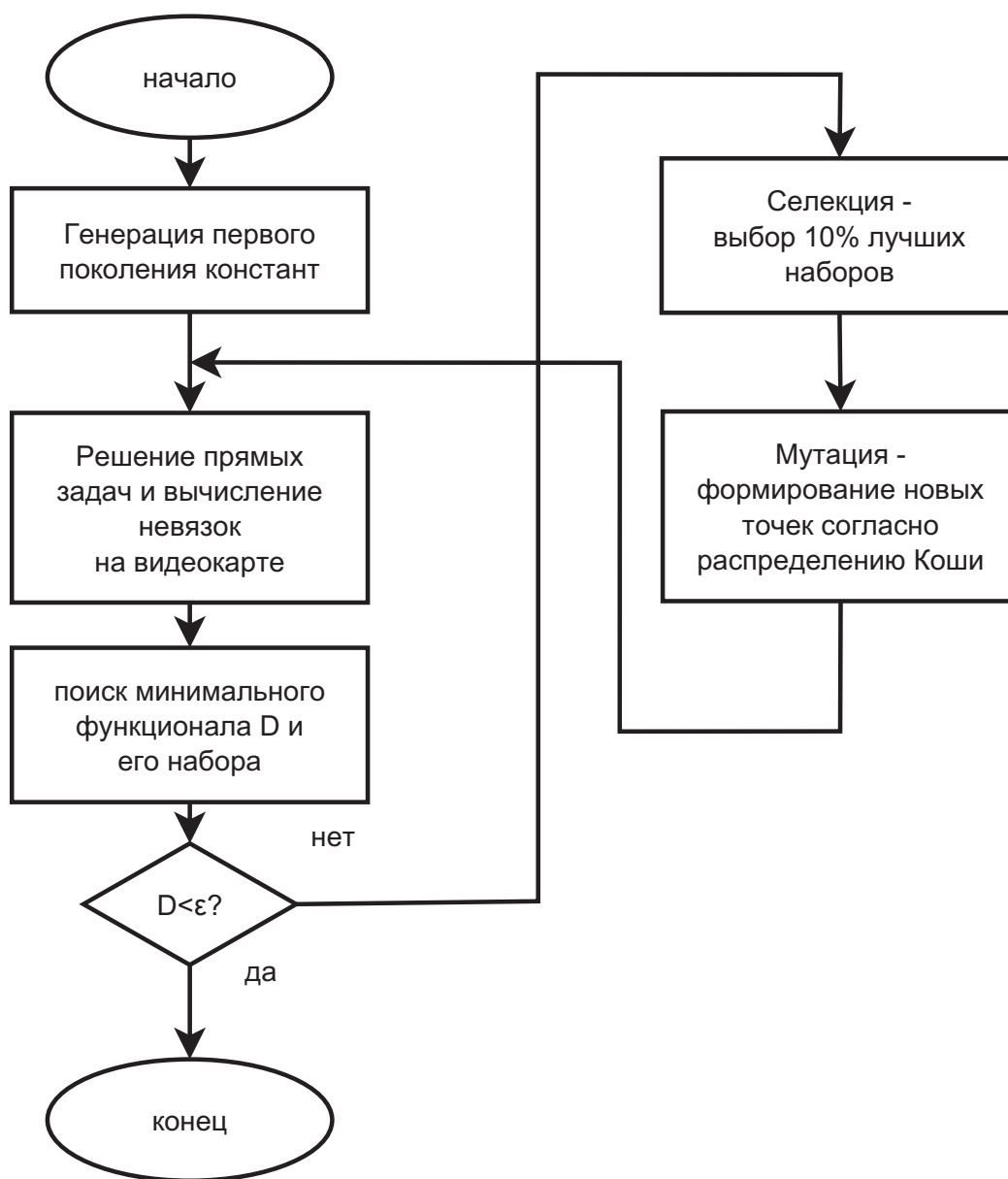
При использовании многопроцессорных систем или вычислительных кластеров часто применяют алгоритмы осуществляющие перебор возможных значений по мелкой сетке, либо используя различные стохастические методы. Подобные алгоритмы хорошо поддаются распараллеливанию и находят широкое применение в указанных аппаратных средствах.

Для указанной задачи поиска кинетических констант было рассмотрено несколько вариантов методов оптимизации: метод случайного поиска, генетический алгоритм со случайными отклонениями согласно распределению Коши, генетический алгоритм с мутацией в виде покоординатного спуска.

## **§ 3. Метод случайного поиска**



§ 4. Генетический алгоритм со случайными отклонениями согласно распределению Коши:



Отличие от предыдущего пункта заключается в добавлении промежуточного пункта **мутация**, находящегося после между этапами **селекции** и **формирования нового поколения**.

Генетический алгоритм с мутацией в виде покоординатного спуска, очень хорошо подходящий для решения обратных задач химической кинетики на суперкомпьютерах([5]), не подходит для

видеокарт ввиду того, что процедура покоординатного спуска для разных наборов констант может происходить за разное время, а технология ATI Stream предполагает, что операции над потоками проводятся идентичные.

### § 5. Краткое теоретическое сравнение методов

Первый из методов является наиболее простым и не подвержен проблеме попадания в локальный минимум, но основная причина его слабой пригодности является время работы ввиду большой размерности задачи.

Третий метод значительно быстрее первого и более сложен в алгоритмическом плане. В случае достаточно овражной гиперповерхности невязки возникает большая вероятность останова процесса в одном из локальных минимумов.

Второй метод ввиду более простой логики и отсутствия множества условных операторов на этапе „мутации“, является, на наш взгляд, лучшим вариантом и требует меньшее количество решений системы дифференциальных уравнений.

### § 6. Условия вычислительного эксперимента

Вычислительный эксперимент проводился на следующем оборудовании:

GPU	ATI Radeon HD 4770
RAM	3Гбайт
CPU	AMD Phenom II X4 940 3ГГц

Прямая задача в эксперименте решалась методом Рунге-Кутты четвёртого порядка, практически приемлимым шагом является  $h = 0.0001$ .

Генерация констант для первого поколения в генетическом алгоритме и генерация констант в алгоритме случайного поиска проводилась по формуле

$$k_i = rand() \% m + \frac{1}{rand() \% 100 + 1} \quad (3)$$



где  $rand()$  - генератор случайных целых чисел, подчинённых равномерному распределению,  $\%$  - операция взятия остатка от деления.

Размер популяции ввиду ограничений техники был взят 4000, таким образом элементарные шаги выполняются для 4000 наборов констант одновременно на видеокarte.

Распределение Коши было выбрано стандартным, потому что генерировались следующим образом

$$k_i^{new} = k_i^{old} + \text{tg} \left( rand() \cdot \pi / RAND\_MAX - \frac{\pi}{2} \right) \quad (4)$$

где  $RAND\_MAX$  - максимальное случайное число, которое может сгенерировать генератор случайных чисел.

## § 8. Результаты и заключение

В работе были проанализированы два алгоритма решения обратных задач химической кинетики на GPGPU ATI. В дальнейшем планируется проведение вычислительного эксперимента на практически приемлемых значениях параметров алгоритмов для более точного их сравнения.

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] Хилько А.В., Спивак С.И., Губайдуллин И.М., Парфенова Л.В. Индукционный период в реакциях гидроалюминирования олефинов алкилаланами. //Вестник Башкирского университета, серия "Химия", 2008, Т. 13, №3(1), С 843-846.
- [2] Джонсон К. Численные методы в химии: Пер. с англ. - М. Мир. - 1983. - С.504 ОНТИ, 1935. - 336 с.
- [3] Яблонский Г.С., Спивак С.И. Математические модели химической кинетики. - М. Знание. - 1977. - С.5.
- [4] Полак Л.С., Гольденберг М.Я., Левицкий А.А. Вычислительные методы в химической кинетике. - М. Наука. - 1984. -

С.135-136.

- [5] *Линд Ю.Б.* Математическое моделирование обратных задач физической химии на основе параллельных вычислений. //Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук. - Саранск.-2010.-179 с.

УДК 330+519.86

## СТАВКА ДИСКОНТИРОВАНИЯ НА СОБСТВЕННЫЙ КАПИТАЛ: СООТНОШЕНИЕ РИСКА И ДОХОДНОСТИ

Ямалетдинова Г. Х. (Уфа, БашГУ)

### Введение

Осуществление анализа эффективности реализации инвестиционных проектов или оценки стоимости компаний невозможно без расчета ставки дисконтирования для приведения будущих денежных потоков к текущей стоимости. Целью данной работы является определение влияния инвестиционных рисков на требуемую норму доходности на капитал.

### § 1. Comparable Accounting Earnings Model (CAE method)

Модель CAE основана на анализе значений показателя рентабельности собственного капитала  $ROE$ , который определяется следующим образом:

$$ROE \equiv \frac{\text{Чистая прибыль}}{\text{Балансовая стоимость собственного капитала}} \quad (1)$$

С целью определения факторов, влияющих на рентабельность собственного капитала фирмы, разложим  $ROE$  на компоненты:

$$ROE = \frac{NP}{PP} \times \frac{PP}{EBIT} \times \frac{EBIT}{S} \times \frac{S}{A} \times \frac{A}{E}, \text{ где:} \quad (2)$$

$NP$  - чистая прибыль;

$PP$  - прибыль до налогообложения;

$EBIT$  - прибыль до уплаты процентов и налогов;

$S$  - выручка;

$A$  - активы;

$E$  - собственный капитал.

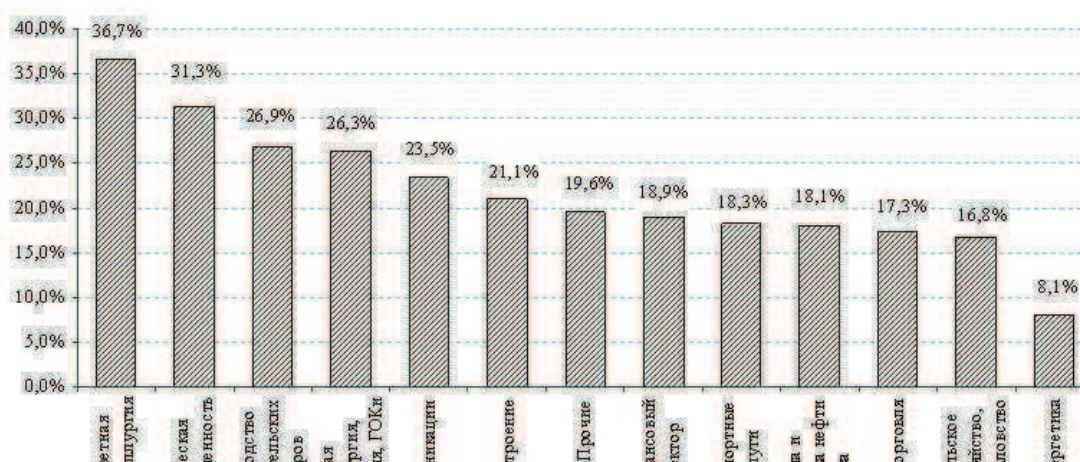


Рис. 1: Отраслевые показатели рентабельности собственного капитала.

Модель САЕ подвергается критике, поскольку она ориентирована на анализ прошлых значений показателей рентабельности, и может не дать хорошие прогнозные оценки ожидаемой прибыли в условиях циклического характера экономики. На рис. 1 представлены значения ROE для различных отраслей экономики. Для сравнения показателей на рис. 2 отображены показатели рыночной доходности на основе данных фондового рынка за период с 1997 по 2009 гг.

## § 2. Capital Asset Pricing Model

Существует множество моделей оценки стоимости собственного капитала, наиболее популярной из них является модель оценки капитальных активов [1], которую используют свыше 70% экспертов:

$$r = r_f + \beta(r_m - r_f) , \text{ где:} \quad (3)$$

$r_f$  - безрисковая ставка доходности;  
 $r_m$  - доходность рыночного портфеля;  
 $\beta$  - коэффициент бэта.

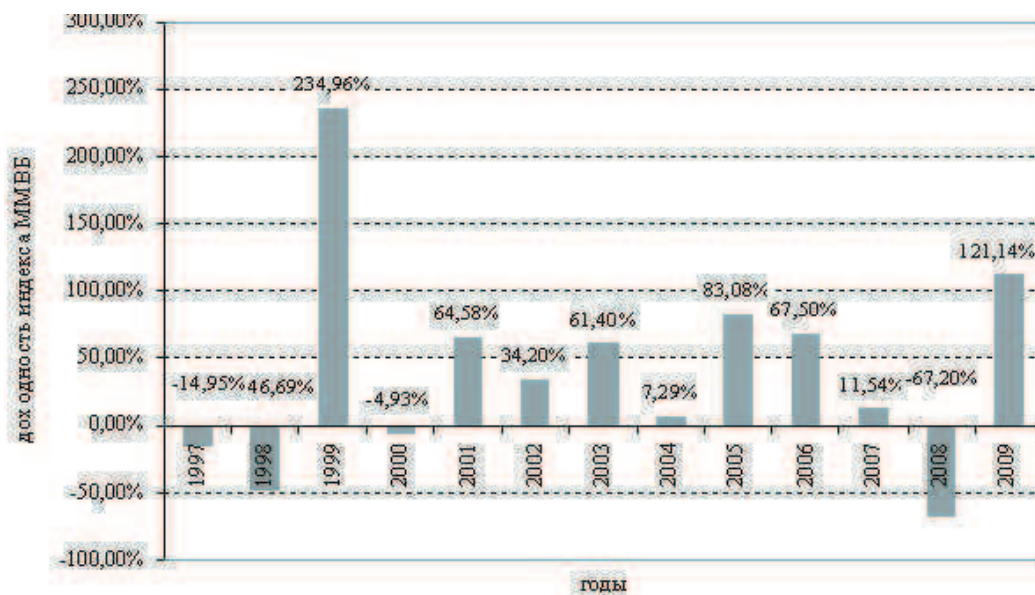


Рис. 2: Динамика доходности индекса ММВВ за 1997-2009гг.

### § 3. Discounted Cash Flow Model

В основе данной модели лежит предположение об эквивалентности стоимости акции  $P_0$  всем ожидаемым в будущем дивидендам  $D$ :

$$P_0 = \sum_{t=1}^{\infty} \frac{D_t}{(1+r)^t} \quad (4)$$

При условии постоянных темпов роста дивидендов  $g$  модель преобразуется следующим образом:

$$P_0 = \frac{D_1}{r-g} \quad (5)$$

Таким образом, ставка дисконтирования на собственный капитал будет:

$$r = \frac{D_1}{P_0} + g \quad (6)$$

Предположив в качестве долгосрочного темпа роста дивидендов текущий уровень рентабельности  $ROE$ , а долю прибыли, направляемой на выплату дивидендов, -  $\rho$ , получим следующую модель оценки стоимости собственного капитала:

$$r = \frac{D_1}{P_0} + (1 - \rho) * ROE \quad (7)$$

#### § 4. Multibeta Model

В данной модели производится оценка влияния множества экономических факторов, определяющих стоимость капитала:

$$r = r_f + \gamma_1\beta_1 + \dots + \gamma_k\beta_k, \text{ где:} \quad (8)$$

$\beta_k$  измеряет чувствительность требуемой нормы доходности на собственный капитал от изменения  $k$ -го экономического фактора, и  $\gamma_k$  представляет собой рисковую премию для  $\beta_k$ .

Основные недостатки данных моделей состоят в том, что экономической теории не предусматривается прямого влияния тех факторов, которые в них используются, а также статичностью полученных результатов. Модели оценки капитала, построенные на основе исторических данных будут постоянно нуждаться в актуализации, оценке степени влияния каждого фактора и анализе адекватности построенной модели.

#### § 5. Комбинированный подход (метод PSAF)

С 2002г. банки федеральной резервной системы PSAF (США) стали применять комбинированный подход к оценке стоимости собственного капитала:

$$COE_{combined} = \frac{1}{3}COE_{CAE} + \frac{1}{3}COE_{DCF} + \frac{1}{3}COE_{CAPM} \quad (9)$$

Разработанная модель на основе ключевых моделей оценки доходности собственного капитала включает различные подходы к оценке ставки дисконта:

- модель *CAE* основана на использовании данных бухгалтерской отчетности;
- модель *DCF* базируется на прогнозировании будущих прибылей и убытков;
- *SAPM* используется с учетом динамики котировок акций на фондовом рынке.

### § 6. Ohlson-Juettner Model (Модель ОJ)

Модель ОJ разработана в 2003г. и первоначально была предназначена для оценки стоимости бизнеса на основе анализа ожидаемой прибыли на акцию, долгосрочных темпов роста и текущих котировок.

$$r = A + \sqrt{A^2 + \frac{eps_1}{P_0}(g_2 - (\gamma - 1))} \quad (10)$$

$$A \equiv \frac{1}{2}[(\gamma - 1) + \frac{dps_1}{P_0}] \text{ и } g_2 = \frac{eps_2 - eps_1}{eps_1}, \text{ где:} \quad (11)$$

$P_0$  - текущая цена;

$eps_1$  - ожидаемая прибыль на акцию;

$dps_1$  - ожидаемые дивиденды на акцию;

$\gamma$  - предполагаемый бесконечный темп роста.

### Выводы

В работе описаны особенности применения различных подходов к оценке ставки дисконтирования для денежных потоков на собственный капитал СФЕ российских предприятий, проанализирована степень отражения инвестиционных рисков в различных

моделях оценки и выявлено их влияние на фактическую и требуемую норму доходности на собственный капитал.

#### ЛИТЕРАТУРА

- [1] Edward J. Green, Jose A. Lopez, and Zhenyu Wang. Formulating the Imputed Cost of Equity Capital for Priced Services at Federal Reserve Banks. // Federal Reserve Bank of New York Economic Policy Review / September 2003, p.55-81.
- [2] Gode, D. and P. Mohanram. 2003. Inferring the cost of capital using the Ohlson-Juettner model. Review of Accounting Studies 8(4), p. 399-431.
- [3] Коупленд Т., Колер Т., Мурин Дж. Стоимость компаний: оценка и управление. - 3-е изд., перераб. и доп./Пер. с англ. - М.: ЗАО "Олимп-Бизнес 2005.
- [4] Ямалетдинова Г.Х. Ставка дисконтирования для оценки стоимости российских корпораций в условиях кризиса // Материалы международной школы-конференции для студентов, аспирантов и молодых ученых "Фундаментальная математика и ее приложения в естествознании". Математика. Том 1. Уфа: РИЦ БашГУ, 2009. с. 405-415.



*Научное издание*

Международная школа-конференция для студентов, аспирантов и  
молодых ученых «Фундаментальная математика и ее приложения в  
естествознании»

Сборник трудов

Том 1. Математика

*Редактор* Г.Г. Синайская  
*Корректор* А.И. Николаева

*Лицензия на издательскую деятельность*  
ЛР № 021319 от 05/01/99

Подписано в печать 07.10.2010  
Бумага офсетная. Формат 60x84/16. Гарнитура Times.  
Отпечатано на ризографе. Усл. печ. л. 7,6. Уч.-изд. л.8,1  
Тираж 200. Изд. № 199 . Заказ 54а.  
Цена договорная.

Отпечатано : ИП Раянов В. Р., ХТФ БашГУ  
450014, г. Уфа, ул. Мингажева, 100 тел.: (347)2746828